

El sistema didáctico y el tetraedro didáctico¹

Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas

Jorge Orlando Lurduy Ortegón²

A partir de los desarrollos investigativos en la formación de profesores de matemáticas –implementados en el programa de formación de profesores de la Universidad Distrital de Bogotá– y las conceptualizaciones logradas en ellos, este escrito plantea una reflexión sobre los componentes epistemológicos del sistema didáctico y sobre una propuesta de modelación de los elementos, hechos y fenómenos didácticos (*tetraedro didáctico*). Particularmente se ofrecen herramientas para una reflexión epistemológica sobre las configuraciones y relaciones ónticas, epistémicas de dicho modelo, para finalmente analizar algunos de los procesos de estudio sobre objetos didácticos (*ruta docente*) en la formación de profesores de matemáticas, en la perspectiva de contribuir a la descripción-conceptualización de sus procesos de formación inicial y continuas.

El sistema didáctico: el “tetraedro didáctico” como modelo para el análisis y la reflexión didáctica

Entendemos por modelo una representación que pretende simbolizar un fenómeno o suceso. En este sentido, el Sistema Didáctico y el Tetraedro Didáctico son un modelo para describir fenómenos didácticos que no propende simplificación sino aumento de complejidad del fenómeno didáctico con respecto de su descripción y análisis, y por tanto, dicha representación (tetraedro) se construye como resultado de las construcciones teóricas anteriores (triángulo didáctico), y la emergencia y juntura de nuevas relaciones (semiosis didáctica, competencias didácticas y procesos de estudio en la formación de profesores) (Lurduy, 2009).

1 Este escrito hace parte integral de los desarrollos provisionales de tipo teórico-metodológicos logrados en el trabajo de investigación doctoral desarrollado en el Doctorado Interinstitucional en Educación DIE-UD-UV-UPN, en el énfasis en Educación Matemática, realizado por el profesor Lurduy (2007-2009) y denominado *Evaluación de las competencias para el análisis y la reflexión didáctica en estudiantes para profesor de matemáticas. El caso LEBEM-UD* y dirigido por el profesor Juan D. Godino.

2 El profesor Lurduy es docente, investigador en la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Este trabajo es el producto intermedio de los realizados con estudiantes y profesores de LEBEM en el grupo de Práctica Docente. Dirección de correo electrónico: jolurduy@udistrital.edu.co

En nuestra construcción de esta noción de sistema didáctico y su ontología didáctica asociada, complementada con los desarrollos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición y la instrucción matemática, (Godino y colaboradores, 1991-2009), se posibilitan explicaciones de los procesos de estudio en la formación de profesores. Con la noción de sistemas de prácticas y mediante el estudio de la ecología de los significados de los objetos didácticos, se facilita describir y explicar fenómenos didácticos (cognitivos, epistémicos, interaccionales, de mediación e instruccionales) más globales en la formación de profesores de matemáticas, cuando los Estudiantes para Profesor de Matemáticas (EPM) participan en la construcción de objetos didácticos, en nuestro caso, en el programa de formación de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (LEBEM), de la Universidad Distrital.

Para nosotros, la reflexión y auto reflexión sobre la experiencia vivida como profesores y formadores de profesores nos posibilita la modelación y se convierte en una epistemología: el mundo en el cual vivimos no nos es ajeno; somos observadores y observados simultáneamente en el hecho pedagógico y didáctico. Es en el mundo de la investigación y la reflexión sobre la formación de profesores de matemáticas donde hemos construido nuestra experiencia pedagógica, formativa y formadora, didáctica e investigativa.

El tetraedro didáctico: una reflexión epistemológica

De acuerdo con Morín (2000), el conocimiento no es conocimiento, si no es reflexión-acción-organización, y siguiendo a Bateson (1981), la epistemología es *“la reflexión acerca de cómo determinados organismos conocen, piensan y deciden”*. Asimismo, de acuerdo con Godino (2008), el significado de los objetos es el conjunto de prácticas discursivas, operativas y normativas de una persona o una institución frente a una situación problema, puestas en relación y en contexto con las informaciones (epistemología).

Estas ideas nos han ayudado a pensar y estudiar los sistemas didácticos y los desarrollos formativos que se dan en su seno, y en ellos, los procesos de estudio sobre los objetos didácticos. Necesitamos, en primer lugar, de un contexto teórico constructivo, recursivo, activo, rico y diverso que nos ayude a favorecer dicho estudio con el apoyo de los recursos epistemológicos: falibilidad, pluralismo, diversidad, pragmatismo, reflexividad y complejidad. (Peirce, Lewis, Morín, Von Foster, Maturana, Navarro, Faerna, Nubiola, Zalamea, Dussel...).

Pensamos y nos decidimos, en segundo lugar, por la complejidad del modelo del sistema didáctico. Ello exige otro tipo de respuestas investigativas y de apuestas epistemológicas, ontológicas y metodológicas consistentes con los principios triádicos de la semiótica peirceana y los del pensamiento complejo (Morín, 1982): dialógico (antagonismo y complementariedad), recursivo (retroacción causa-efecto), y hologramático (el todo está representado en la parte). Lo usual sería “*separar, fragmentar para poder analizar*” los elementos del sistema: el profesor, o el alumno, o el saber, o el medio didáctico y en ocasiones, alguna o algunas de estas duplas y sus relaciones de tipo dual, como es el caso de la representación del sistema didáctico por medio de un triángulo.

En tercer lugar, en nuestra perspectiva explicativa e interpretativa de tipo relacional coincidimos con Navarro (2000) cuando enuncia la reflexividad y autoreflexividad de los sistemas observador-observado. Para este autor, un sistema es reflexivo en la medida en que a su interior se generan efectos reflexivos entre la actividad del sistema objeto y la actividad objetivadora-significativa del sujeto; ello nos pone en la dirección de las relaciones y reflexiones pedagógicas y didácticas en educación matemática y en la formación de profesores de matemáticas.

Por último, pensamos y tomamos partido aquí por una epistemología relacional,³ es decir, el estudio de los sistemas cuya materia prima es la relación entre objetos, eventos, hechos, procesos y fenómenos, y una teoría del observador:⁴ ya que el acto educativo es una actividad social, aparece la incertidumbre, la autoorganización, y estas se relacionan con la dimensión social y comunicativa, esto es, semiótica. Algunos autores como Lahitte et al. (1994) afirman:

La cosmovisión ecológica, cibernética, sistémica (o como se llame) [...] requiere de diferencias de información que organice la energía material de tal modo que “la mente” (el pensamiento) pueda “corporizarse” y para eso necesita un observador. Necesita un contexto de significación donde sean significativas las diferencias “emergentes”, en que las distinciones tengan sentido, es así como una epistemología relacional, brinda este contexto, para que las explicaciones y modelaciones tengan significación (p. 20).

3 Esta epistemología relacional tiene su origen en la teoría general de sistemas de Ashby (1964), teoría de la comunicación (Wilden, 1979), teoría general de sistemas de Bertalanfy (1978), teoría de la complejidad (Morín, 1982), cibernética de segundo orden (Von Foerster (1988) y la biología del conocimiento (Varela y Maturana, 1990).

4 Remitimos al clásico artículo de Heinz Von Foerster “Notas para una epistemología de los objetos vivientes” (1974), donde enuncia once principios de la epistemología de los sistemas observadores, que da origen a la epistemología relacional, la reflexividad y la autoreferencia.

El tetraedro didáctico: hechos, fenómenos y objetos didácticos

Parece necesario profundizar en el estudio de los sistemas didácticos y supra-institucionales (Chevallard), reconocer en él la interacción/relación de hechos y fenómenos como los objetos y entidades epistémicos relacionados con el saber matemático; los cognitivos propios de los estudiantes que participan en un determinado proceso de estudio; los objetos didácticos e instruccionales relativos al proceso de enseñanza y a las acciones del profesor que orienta dicho proceso; analizar las determinaciones del entorno del aula (ambientes, recursos, interacciones, roles, normas, contextos locales) como parte del sistema didáctico y sus íntimas relaciones (Lurduy, O. *et al.*, 2005).

Reconocemos con Wilhelmi, Godino y Font (2005) que *“un hecho didáctico es cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción”*. Igualmente, que los procesos de instrucción o de estudio en el aula son secuencias temporalmente ordenadas de acontecimientos y que la distinción entre acontecimiento y proceso es relativa, ya que el acontecimiento se puede analizar como un tipo de proceso y este como una unidad de un proceso más complejo.

Asimismo podríamos describir los eventos como episodios de las secuencias del proceso de estudio, de una clase o de un fragmento de ella, lo que posibilita la “objetivación” de configuraciones didácticas:

Lo dicho puede sintetizarse utilizando una metáfora vectorial. Todo fenómeno queda descrito como una n -tupla, donde cada componente representa una característica del mismo. Las características o variables pueden considerarse en la investigación desde dos puntos de vista diferentes: uno, como variables explicadas ($v1, [...], vr$), que son problematizadas por la perspectiva teórica utilizada para analizar el proceso de estudio; otro, como variables explicativas ($w1, [...], ws$), que se usan para describir las explicadas en dicha perspectiva y predecir su comportamiento en situaciones “controladas” (generalmente de forma parcial). De esta manera un fenómeno es: Fenómeno = ($w1, [...], ws; v1, [...], vr$); donde las vi quedan explicadas por las $wj, j = 1, [...], r$ ” (p. 3).

Nos referimos a los objetos didácticos relativos al proceso de enseñanza (objetos-proceso, prácticas-relaciones, significados-semiosis, didáctica, sobre los que avanzaremos más adelante), de diseño, gestión y evaluación asociados a los análisis, acciones y reflexiones del profesor que orienta y posibilita dichos procesos de estudio y al análisis de las determinaciones del entorno del aula (ambientes, recursos, interacciones, roles, normas, contextos locales).

El tetraedro didáctico: los polos, relaciones, semiosis didáctica

El tetraedro didáctico es un constructo analítico para la observación del sistema didáctico y la construcción de significados didácticos (semiosis didáctica). En todo proceso de enseñanza/aprendizaje institucional, emergen relaciones e interacciones entre los actores de dicho proceso; en él interactúan estudiantes, profesores, medios y recursos didácticos, ambientes y entornos del proceso, se constituyen contratos pedagógicos y didácticos, relaciones con el saber construido personal e institucionalmente por dichos actores.

De acuerdo con Chevallard, el sistema complejo que él llama noosfera (el entorno y los sistemas de enseñanza que constituyen las pretensiones de la estructura social interesada en desarrollar institucionalmente procesos de formación con estudiantes dispuestos para tal fin) proporciona y “*presenta un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico*”. Según este autor, los sistemas didácticos están inmersos en el entorno social, cultural y científico que influye y condiciona su funcionamiento.

Para nosotros, en el tetraedro se configuran cuatro subsistemas (unidades complejas) ligados a sus respectivas díadas de relaciones complejas, que posibilitan la emergencia de triadas de relaciones, que determinan planos de observación y análisis.

- *Polo profesor* (didáctico): se trata de estudios sobre los elementos que caracterizan la unidad compleja *profesor* y las relaciones profesor-entorno, profesor-saber, profesor-estudiante en lo relacionado con la acción, reflexión, gestión, diseño y evaluación de los procesos de estudio por parte del docente.
- *Polo ecológico del aula* (entorno): se trata de estudios sobre los elementos que caracterizan la unidad compleja entorno y cultura del aula (textos y contextos), las relaciones entorno-profesor, entorno-saber, entorno-estudiante; están relacionados con las interacciones, roles, mediaciones, comunicación, reglas y normas, entornos de enseñanza aprendizaje.
- *Polo estudiante* (cognitivo): se trata de estudios sobre la unidad compleja estudiante y las relaciones estudiante-estudiante, estudiante-entorno, estudiante-saber, estudiante-profesor, relacionados con la comprensión y aprendizaje, sobre los significados personales, los observables cognitivos por medio de sus manifestaciones de conducta cognitiva de manera verbal, gestual y escrita, sus acciones e interacciones, roles.
- *Polo epistémico* (saber): se trata de estudios sobre la unidad compleja *saber matemático* o *didáctico*, los significados institucionales y de referencia matemáticos y didácticos, pretendidos e implementados en el proceso de estudio y sobre las relaciones saber-entorno, saber-profesor, saber-estudiante.

En un sistema didáctico, los elementos (polos) del tetraedro didáctico profesor-alumno-saber-entorno no son ni mutuamente separables, ni mutuamente reducibles, y entre ellos se da una relación de reflexividad y auto reflexividad de tipo epistémico (efectos, reflexiones, relaciones e interferencias de generación de sentido); pero la descripción, exploración, interpretación de esos polos constituyentes como unidad, es la base de la modelación en el tetraedro didáctico.

Se hace necesario hacer una distinción, pues nosotros estamos incorporando un polo como constituyente del ahora tetraedro. Todos los organismos viven en su entorno, tienen y construyen significación, conciencia y auto-referencia con su mundo, por tanto en varios sentidos existe una unidad organismo-entorno y ninguno es exterior al otro; uno determina y es determinado por el otro.⁵

El gráfico que presentamos es el “ideograma” del modelo de sistema didáctico que se ha utilizado en el seno de las investigaciones sobre las Rutas de estudio y aprendizaje en el aula (REA)⁶ (Lurduy *et al.*, 2007).

Sistema didáctico

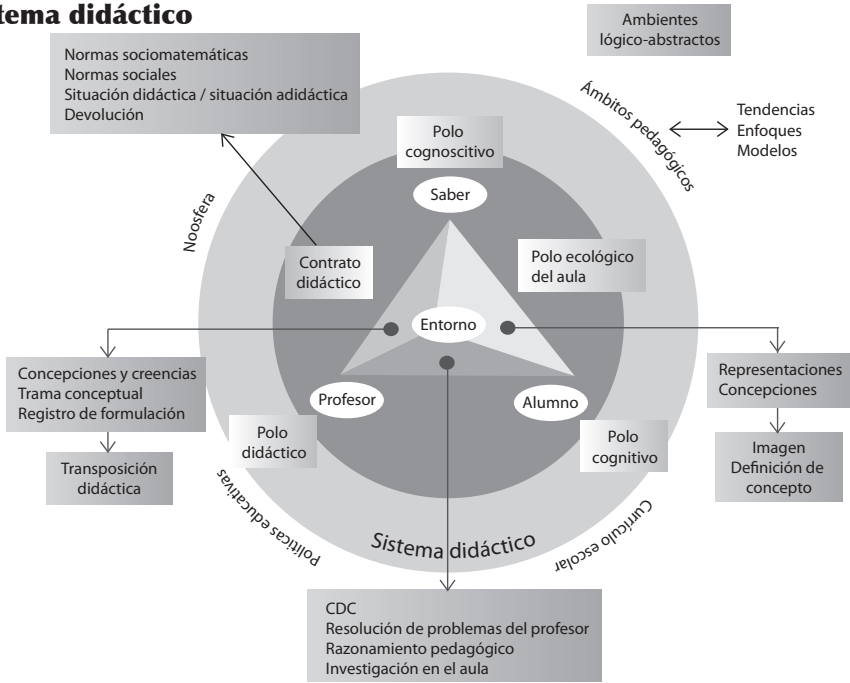


Figura 1

- 5 Haeckel creó el término ecología, entendiendo por esta el estudio de las relaciones de los organismos con el medio ambiente, incluidas todas las condiciones de existencia; incluso algunos hablan del mundo de las ideas y sus relaciones.
- 6 Programa de investigación desarrollado por el grupo investigativo Crisálida y sus semilleros de investigación, conformado por profesores y estudiantes adscritos a LEBEM-UD y coordinado por el profesor Lurduy.

Finalmente de lo que se trata es de estudiar las relaciones diádicas y triádicas como relaciones complejas, y los planos de interacción determinados por esas relaciones y emergencias; ello hace posible determinar trayectorias, y configuraciones didácticas y conceptualizaciones del análisis semiótico-didáctico de dichas las relaciones. Qué es posible en las interacciones; qué es significativo y posibilita la acción didáctica; qué es significativo y convertido en pensamiento, acción, reflexión. Las implicaciones que tiene para un actor (polo) del sistema lo hemos denominado *semiosis didáctica*.⁷

Para Peirce todos nuestros contenidos mentales son signos, y por tanto los procesos mentales son procesos de semiosis; ella implica la cooperación-relación triádica de un objeto, un representamen y un interpretante, y por tanto en los procesos de semiosis estos “sujetos” debieran entenderse más como “funciones” que como “realidades sustantivas”.

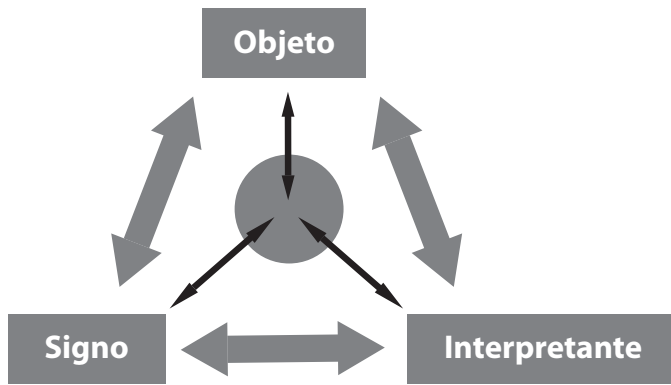


Figura 2

Por una parte, desde los principios y categorías semióticas; desde la reflexión de las relaciones entre polos y los polos mismos; desde un enfoque de lo que en el modelo es significativo; desde la relación en la tríada epistemo-semiótica signo-objeto-interpretante. También con las significaciones que pueden emerger en una tríada determinada por cada plano con referencia al cuarto polo. Y finalmente, desde y con relación a las categorías semióticas⁸ proponemos un modelo del sistema didáctico, un análisis de los

7 Definir este proceso no es nada fácil, puesto que en él se presentan demasiados rasgos y matices diferentes y relacionados como para poder encerrarlos en una “definición”. Para algunos estudiosos de esta perspectiva se han contabilizado 76 textos en donde Peirce se refiere a la acción de los signos, todos alusivos a los tres “sujetos y a las relaciones que se podrían evidenciar entre ellos”.

8 *Primeridad, segundidad y terceridad* (referidas a los objetos: posibilidad, existencia, necesidad; cualidad, realidad, ley; referidas a los sujetos y los hechos: sensibilidad, esfuerzo, hábito; referidas a las entidades semióticas: icono, índice, símbolo; término, proposición, argumento; referidas a los modos de razonamiento: deducción, inducción, abducción; referidas a las relaciones: posibilidad, actuación y pensamiento).

procesos de semiosis didáctica en ese sistema para la formación docente. Creemos que ello afina los elementos de reflexión y análisis didácticos en el seno de una institución, en la vía de resolución de problemas de un profesor “en/sobre/para” la reflexión y conceptualización de su práctica como docente.

En este trabajo hemos llamado *polo cognoscitivo* o epistémico al relacionado con el subsistema *saber*, *polo didáctico* al relacionado con el profesor, *polo cognitivo* al relacionado con el estudiante y *polo ecológico del aula* al relacionado con los medios, mediaciones y ambientes de aprendizaje/enseñanza en el entorno de la interacción. Las unidades elementales serían los polos y las unidades complejas serían las relaciones entre díadas; las tríadas complejas serían las superficies co-construidas y determinadas por las triadas.

Los subsistemas (polo cognoscitivo o epistémico, polo cognitivo o estudiante, polo ecológico del aula, polo profesor) también son aquellas unidades elementales –simples o complejas– que se comportan como totalidades compuestas por elementos, díadas o tríadas, solidarias e interdependientes y como implicación de tomar la relación como categoría.

Para este tipo de construcción epistemológica las unidades complejas se definen a partir de tres nociones referenciales y relacionadas de manera triádica desde nuestra interpretación de la ontología peirceana:

- Contenido: conjunto o colección de elementos o partes de la unidad compleja y especificados a partir de su condición de partes complejas de un todo; sistemas y subsistemas (profesor, alumno, saber, entorno).
- Estructura: relaciones, nexos, funtores, conectivos que hacen emerger una estabilidad (relaciones y correspondencias) entre polos, unidades complejas, sistemas y subsistemas: relaciones monádicas (consigo mismo); diádicas (con otros, dual) y relaciones triádicas (profesor-entorno, estudiante-saber).
- Contexto: espacio no necesariamente físico dentro del cual se verifican los componentes y sus relaciones; es un espacio relacional no cerrado, pero con fronteras con posibilidad de interacciones e intercambios (estructuralmente cerrado e informacionalmente abierto).

Estas unidades y nociones están diferenciadas de su entorno; el sistema funciona como un todo con propiedades referidas al todo y que son emergentes; la organización es el conjunto de relaciones de conexión que permiten caracterizar a una totalidad como sistema; un sistema es una unidad compleja organizada (Morín 1982).

Complejidad, semiótica y pragmática

En este trabajo y en el Enfoque *Ontosemiótico* (EOS) del Conocimiento y la *Instrucción Matemática*, desde las aproximaciones *semióticas, antropológicas y complejas* (Peirce, Wittgenstein, Morín) se adoptan modelos, 1º, *ontológico triádico* de la percepción, cognición y la significación en matemáticas y su didáctica (sobre bases semióticas de tipo pragmático); 2º, *epistemológico relacional* sobre las matemáticas y la reflexión didáctica (basado en presupuestos antropológicos y socio-constructivistas); 3º, *metodológico pragmático* de la instrucción y los procesos de estudio matemático y didáctico (sobre bases complejas, críticas y socio-constructivistas).

Igualmente, desde una perspectiva compleja, relaciona las anteriores dimensiones entre sí con referencia al trasfondo sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación de la matemática escolar, su didáctica y sus reflexiones meta-didácticas. Asimismo se adoptan las posturas falibilistas, pluralistas y comprometidas con la teoría de la verdad peirceana (Godino y Batanero, 1991-2009; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2008).

La perspectiva semiótica de la actividad matemática-didáctica se caracteriza por centrar su atención en los signos y su uso sobre las estructuras y funciones mentales. En esta propuesta se hace coherente la articulación de la perspectiva semiótica, el sistema didáctico y las tres teorías planteadas por el EOS para el análisis de las acciones didácticas.

Dado que el signo (objeto didáctico) supone un acto comunicativo, representacional y transformativo de las mismas relaciones didácticas, la perspectiva semiótica abarca de manera conjunta las dimensiones individuales y sociales de la actividad matemática, la enseñanza y el aprendizaje, y los procesos de estudio que el EOS ha denominado instrucción matemática e instrucción didáctica, es decir, de la actividad didáctica.

Y nos referimos a la *instrucción didáctica* como los procesos de estudio dirigidos y organizados (institucionalizados) en el marco de un programa de formación de profesores en los cuales intervienen sistemas de prácticas didácticas, una reflexión sobre ellas, junto al compromiso por la apropiación y transformación de dichas prácticas, los actores y los recursos intervinientes y la asunción de las implicaciones de dicho proceso formativo.

La perspectiva semiótica de la actividad didáctica, asumida por EOS como *triádica, pragmática, antropológica*, contribuye a la comprensión del fenómeno didáctico en su naturaleza semiótica (experiencial, representacional, cultural), y nosotros agregamos la interpretación, el uso, el contexto, las situaciones, las mediaciones, los juegos de lenguaje, las intenciones, los valores y la racionalidad axiológica en la construcción de conocimiento (los que evidencia la relación semiosis didáctica-idoneidad), estudiando las Rutas de estudio y aprendizaje (REA), en particular la ruta docente.

Objetos didácticos, su significado y prácticas didácticas

En la perspectiva semiótica adoptada, objeto es un elemento de la tríada, el segundo elemento de la semiosis; su definición es solo comprensible desde la coherencia con sus principios metafísicos y epistemológicos. De acuerdo con Peirce, la constitución de un objeto no es un hecho cerrado sino que se trata de un proceso abierto al que se le pueden adherir nuevas características, en la medida de la aparición de procesos semióticos sucesivos en situaciones y prácticas.⁹

La definición de *objeto como emergente de los sistemas de prácticas*, y la tipología de objetos primarios introducidos en el EOS, responden a esta necesidad de poder describir dichos sistemas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es el objeto matemático-didáctico indicado, señalado, nombrado, caracterizado, conceptualizado, representado, simbolizado, significado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas y/o cuando se reflexiona sobre los procesos de estudio matemático-didáctico, y recursivamente sobre los procesos de estudio institucionalizados y personales de las matemáticas.

En términos de una reflexión didáctica, es necesario introducir una tipología de *objetos didácticos* (componentes monádicos de los subsistemas semióticos, configurables en tríadas, en la caracterización ontológica), que aquí hemos denominado anteriormente –para un meso-análisis didáctico– como *diseño, gestión y evaluación*.

- 1. Diseño.** Inicialmente se tiene en cuenta la teoría de las situaciones didácticas como elemento para la planificación de la secuencia de actividades propuesta en el aula (Brousseau, 1986).

9 El objeto referido para la actividad didáctica es consistente con el definido por Peirce, y la idea es tomada de Blumer (1982): un objeto es “cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo” (p. 8).

- 2. Gestión.** La secuencia didáctica puesta en juego y el material didáctico usado en la misma, permiten determinar la forma en que se analizarán cada una de las relaciones didácticas que se presentan en este sistema didáctico, que son las relaciones profesor-estudiante, profesor-saber, estudiante-saber, con referencia a un entorno específico (Lurduy, 2005; 2009).
- 3. Evaluación.** Se determina como la correspondencia que se establece entre la función del material didáctico, la orientación del profesor y la devolución del estudiante frente a la situación problema que enfrenta, en donde se vinculan los dos ítems anteriores como parte de las interacciones que se establecen en el aula (Giménez, 2000; 2005; 2009).

Prácticas y sistemas de prácticas

Puesto que los objetos didácticos son emergentes de sistemas de prácticas didácticas, y dicha emergencia tiene lugar en el tiempo de manera progresiva, recursiva y compleja, se puede introducir de manera natural y consistente con la perspectiva sistémica, la distinción-conjunción-continuidad de los constructos *objeto-proceso*, *práctica-relación*, *significación-reificación*, de tal modo que cada tipo y subtipo de objeto matemático-didáctico lleva asociado el correspondiente proceso (problematización, definición, argumentación, particularización, generalización, etc.), formas y modos de la actividad y de la relación en esa actividad con dichos procesos y objetos; y semióticamente, la correspondiente emergencia de significados, representaciones e interpretaciones de la realidad estudiada.

Una *práctica didáctica* se refiere a toda expresión, actuación y regulación que efectúa un profesor para resolver problemas didácticos, comunicar a otros su solución, validarla o generalizarla a otros contextos, problemas o interacciones didácticas. Evidentemente, para nosotros el significado institucional y personal de los objetos didácticos implican motivaciones, formas de actuación y hábitos de conceptualización en las prácticas didácticas, resultado de vivencias y creencias propias, colectivas, institucionales o idiosincráticas, y en ocasiones todas las anteriores. Consistente con la perspectiva pragmatista, el significado es formulado como significado institucional y personal e introduce en su definición la categoría de acción.

El *significado personal/institucional de un objeto didáctico* se define como el sistema de prácticas discursivas, operativas y normativas realizadas por una persona u organización al interior de un proceso de estudio o institución para resolver un campo de problemas didácticos. Es entonces explícito que no solo es posible y potente el lenguaje, sus usos y juegos al interior de una problema, situación problema, contexto, práctica o institución, así como las acciones relativas a tareas y meta-prácticas, sino que también el

uso de normas y regulaciones permiten, relacionan y regulan las posibilidades, usos e implicaciones de los significados.

En nuestra conceptualización de tipos de *objetos didácticos* hacemos equiparable y consistente con EOS –y su caracterización de tipos de objetos– y asumimos de manera triádica: 1) El diseño: lenguajes, discursos y situaciones; 2) La gestión: procedimientos, actuaciones, propiedades y relaciones; 3) La evaluación: conceptos, argumentos y reglas.

Facetas y procesos cognitivos; significado y comprensión didáctica

Para EOS, las relaciones entre objetos, prácticas y significados es un tipo de relación triádica que ha denominado la función semiótica que media entre los significados personales y los institucionales como relaciones de dependencia establecidas por un sujeto, en el que se involucran tipos de *procesos de pensamiento asociados a facetas de tipo dual*. En esta perspectiva, las relaciones de dependencia pueden ser de tipo instrumental (objetual, relación monádica), representacional (epistemológico, relación diádica) y estructural (mediaciones y relaciones de tipo triádico).

La perspectiva asumida reconoce el carácter triádico de los procesos de razonamiento y las relaciones definidas por Peirce desde su conceptualización de inducción, deducción, abducción y que hacemos coherente con respecto a los procesos de emergencia de las competencias de razonamiento didáctico (análisis y reflexión didácticos).

La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos meta-cognitivos y mejor comprensión de los fenómenos didácticos y meta-didácticos, (estudiados en los **análisis didácticos**).

El *significado de un objeto didáctico* es el sistema de prácticas (operativas, discursivas, normativas) que un profesor realiza para resolver problemas de tipo didáctico, en las que los constructos *objeto-proceso*, *práctica-relación*, *significación-reificación* intervienen (o como hemos referido anteriormente, problemas de la profesión de ser profesor de matemáticas). Este tipo de correspondencias, relaciones de dependencia o función entre un antecedente (expresión, representante, signifiante) y un consecuente (contenido, significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia, son interpretadas en el EOS

como funciones de signo.¹⁰ Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas –siendo consistentes con la perspectiva semiótica asumida– y caracterizan la *reflexión didáctica*.

Las dos categorías básicas de entidades se complementan con otra entidad relacional: *la función semiótica*, que conecta de forma triádica los objetos entre sí y con las prácticas de donde provienen. De esta manera, las funciones semióticas tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las acciones epistemológicas en las matemáticas y/o en la didáctica de las matemáticas y generalizan la noción de representación (representación de algo para alguien de acuerdo con intenciones y regulaciones).

Por tanto, el rol de la representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) pueden ser también representámenes e interpretantes de las funciones semióticas y sus tipos.

Configuraciones, trayectorias e idoneidad didáctica

El proceso de estudio didáctico sobre un contenido o tema educativo se desarrolla en un tiempo dado, mediante una secuencia de configuraciones didácticas que hemos denominado *trayectorias didácticas* de tipo epistémico, cognitivo, instruccional y mediacional que respectivamente hacen emerger *las idoneidades y sus criterios de valoración*.

En relación con la intervención didáctica realizada en contextos institucionales, la aproximación semiótica al conocimiento personal e institucional que propone el EOS es deducible que se puede razonar pragmáticamente, en el sentido de valorar si las acciones, tareas y modos de interacción didáctica en el proceso de estudio son preferibles a otras, lo que permitiría inducir que el proceso de estudio es idóneo.¹¹

10 Descrita por U. Eco como función semiótica:

Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un plano del contenido (...) una función semiótica se realiza cuando dos íntivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua (Eco, 1995, p.p. 83-84).

11 Para el diccionario RAE, idóneo es “*adecuado, y apropiado para algo*”. Según Godino (2008), “*no se trata de la noción de competencia o capacidad para realizar una tarea, sino el grado en que un proceso de estudio didáctico permite el logro de los fines, intenciones y pretensiones didácticas*”.

Idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados y pretendidos respecto del significado de referencia, y al grado de representatividad y relación de los significados personales y los institucionales.

Idoneidad cognitiva expresa el grado de desarrollo en que están los significados pretendidos/implementados en relación con los evaluados y los logrados en los alumnos, así como el nivel de proximidad de los significados personales logrados y declarados a los significados pretendidos/implementados, observados en las caracterizaciones de las manifestaciones de conducta cognitiva propuesta, retomadas en esta investigación como caracterización de las manifestaciones de los estudiantes.

Idoneidad instruccional. Expresa el grado de cercanía entre los significados institucionales definidos *a priori* por un profesor, valora los niveles de gestión del conocimiento matemático-didáctico propuestos por el docente y la correlación con los logrados por los estudiantes y manifestados en los procesos de evaluación de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Idoneidad mediacional, referida al nivel de disponibilidad, diseño, gestión, uso y evaluación de los recursos y materiales necesarios para el desarrollo del proceso de estudio, así como al grado de adecuación de los intereses y motivaciones de los estudiantes y profesores en el entorno del aula, en donde se gestiona el proceso de estudio matemático-didáctico

Hablar de idoneidad didáctica desde una perspectiva semiótica, es relacionar la máxima pragmática¹² (Perice, 1971) con los instrumentos para su uso, y su fuerza radica en la clarificación de los propósitos para su implementación conforme a las circunstancias, condiciones, contextos, modos de proceder selectivamente de acuerdo con lo que el significador (interpretante) ha puesto de él. En última instancia se trata de los grados de adecuación de los significados y procesos de semiosis en los sistemas didácticos y semióticos.

Niveles de análisis didáctico

Aceptamos con el EOS que el análisis didáctico “*es el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de estudio matemático-didáctico de un contenido curricular –o de aspectos parciales del mismo– con unas herramientas teóricas y metodológicas*”; además de ello, aceptamos

12 “Consideremos qué efectos, que pudieran tener concebiblemente repercusiones prácticas, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de estos efectos es la totalidad de nuestra concepción del objeto” (p. 69).

que lo utilizaremos en lo que anteriormente hemos denominado *macro análisis didáctico* (al desarrollo de una propuesta curricular), *meso análisis didáctico* (desarrollo de una propuesta de una secuencia o unidad didáctica) y *micro análisis didáctico* (desarrollo de un proceso de estudio puntual implementado en una o unas sesiones de clase).

Se deriva de esta propuesta, un método de *análisis didáctico* que posibilite caracterizar niveles y dimensiones de la compleja relación didáctica y su axiología; por tanto, desde el punto de vista de la investigación didáctica, según Godino *et al.* (2007) es necesario describir el análisis didáctico y sus niveles, los cuales se identifican y caracterizan por:

- a. El análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos).
- b. La elaboración de las configuraciones de objetos y procesos.
- c. El análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
- d. La identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa).
- e. La valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El primer nivel de análisis pretende estudiar las prácticas matemático-didácticas realizadas en el proceso de estudio. El segundo se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas. Un tercer nivel de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de las configuraciones, los patrones de interacción, las trayectorias y su relación con los aprendizajes de los estudiantes. El cuarto nivel considerado en el enfoque ontosemiótico pretende estudiar esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa. Por tanto, son necesarios criterios de “idoneidad o adecuación”. **Se trata de realizar una acción-reflexión didáctica o meta-acción** (la valoración de las acciones realizadas en los procesos de instrucción).

En consecuencia, aquí debe considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.; por tanto, es necesario proponer un quinto nivel de análisis a los procesos de estudio matemático centrado en la valoración de su *idoneidad didáctica*.

Dicho nivel se basa en los cuatro niveles de análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Reflexión y semiosis didácticas

Se trata de realizar una acción o meta-acción (la valoración) que recae sobre otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción), en un meta-nivel de análisis didáctico, ello en consistencia con los referentes asumidos desde EOS con la semiótica peirceana y con Eco, la complejidad de Morín, la filosofía del lenguaje de Wittgenstein y la racionalidad de la acción comunicativa de Habermas (Godino, 2008) y que aquí hemos denominado *reflexión didáctica*. Consistentes con la perspectiva semiótica asumida, caracterizan la *semiosis didáctica* y son convertidos en conocimiento didáctico en los ejercicios de *síntesis abductiva* en un proceso de comprensión, interpretación y construcción de hábitos, así como de formas de acción y regulación de la acción y de sus implicaciones en las nuevas y próximas prácticas didácticas.

Finalmente presentamos algunos análisis, reflexiones, herramientas metodológicas y conceptualizaciones utilizados en una investigación que hemos denominado *La Ruta Docente. Elementos para la reflexión sobre la acción del profesor* (REA). Este trabajo se propone aportar a los procesos de reflexión y autoevaluación de la práctica docente en lo referente al modelo del complejo de relaciones del sistema didáctico, y en particular, busca aportar a la caracterización y evaluación de las competencias de reflexión didáctica de los profesores de matemáticas. La REA es emergente de las prácticas de indagación sobre un proceso de estudio en el aula en lo referente a la acción del profesor en la clase de matemáticas, cuando este aborda el tema de las representaciones de la función lineal en grado noveno.

La Ruta Docente. Análisis y reflexión didáctica de un proceso de estudio didáctico-matemático en el seno de un sistema didáctico

El programa de investigación sobre REA ha venido siendo implementando en los últimos siete años por el grupo de investigación Crisálida. En él han participado profesores de la educación básica, formadores de profesores y estudiantes para profesor de matemáticas. Se han estudiado los elementos y relaciones del sistema didáctico (profesor, estudiante, entorno y saber) en investigaciones sobre los procesos de estudio en el aula cuando se implementan secuencias de actividades correspondientes a las temáticas propuestas por los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación

Nacional - MEN para el currículo de matemáticas de la educación básica en Bogotá.

En esta perspectiva, para el caso de los procesos de estudio de las matemáticas en el aula, se hace necesaria la caracterización, reflexión y análisis de las relaciones profesor, estudiante(s), saber y entorno, y de las configuraciones y trayectorias didácticas emergentes en el aula en un proceso de estudio de las matemáticas. En nuestros trabajos (2001-2008) hemos denominado *tetraedro didáctico* (Lurduy, 2008) al sistema de elementos y relaciones del sistema didáctico, y al complejo de configuraciones y trayectorias didácticas, lo llamamos *Rutas de estudio y aprendizaje* (REA), (Lurduy et al. 2005).

Lo que en esta investigación estudiamos del tetraedro didáctico es el subsistema o polo profesor en relación con los otros polos (saber, entorno, estudiante), es decir, la gestión del proceso de estudio por parte del profesor de una de las secuencias de actividades para una de las temáticas correspondientes al currículo en grado noveno de la educación media (la representación de la función lineal), la *Ruta Docente*. Pretendemos disponer algunas reflexiones sobre la caracterización de uno de los subsistemas o polos que denominamos *profesor*. Este a su vez es constituyente de manera compleja (Morín) del sistema de relaciones del *tetraedro didáctico*: saber, estudiante, profesor, entorno (sistema didáctico).

Explicitamos y describimos los instrumentos de estudio utilizados para analizar la acción y reflexión del profesor cuando implementa una secuencia de actividades sobre la representación de la función lineal en grado noveno. Esta investigación fue desarrollada con nueve profesores en cuatro instituciones escolares, en el marco del programa de investigación *Rutas de estudio y aprendizaje en el aula*. La intención es contribuir a la descripción de la ruta docente con miras a su valoración y la de su idoneidad didáctica, y aportar elementos de análisis, caracterización y evaluación de las competencias de reflexión didáctica de los profesores de matemáticas.

En concordancia con lo expuesto más arriba en este escrito, para el desarrollo del programa de investigación adoptamos algunos enunciados con los cuales conceptualizamos el sistema didáctico (tetraedro didáctico), y diseñamos y gestionamos los instrumentos de recolección y análisis de la información: la teoría de la complejidad (Morín); semiótica y epistemología pragmática (Peirce, Lewis); el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero); la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau); la resolución de problemas (Charnay, D'Amore); los entornos de aprendizaje, el uso y manejo de material didácti-

co (Lurduy). En particular para esta investigación, la didáctica de la función (Ruiz Higuera); la reflexión sobre la práctica docente (Llinares, Blanco, Ponte); la evaluación (Giménez); la investigación cualitativa en educación (Ketele, Croll).

La experiencia investigativa¹³

En esta parte reportamos lo correspondiente a la gestión de una secuencia de actividades sobre la representación de la función lineal en grado noveno. Toda la secuencia (16 sesiones de clase) se diseñó a partir de la TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas) de Brousseau (actividades de acción, formulación, validación e institucionalización) y la observación y registro de información se hace sobre cuatro sesiones de clase (correspondientes a la fase de validación). Se analizaron videos de las clases, entrevistas a profesores y estudiantes, trabajos de los estudiantes, protocolos de clase de observadores no participantes y los informes de reflexión del profesor.

La construcción de los instrumentos tiene el objetivo de evaluar una secuencia de actividades, que contribuya a la construcción de ciertas nociones específicas. Esta herramienta se enfoca en el análisis de planteamientos de propuestas didácticas que son orientadas desde la TSD, las cuales se convierten en eje articulador de la construcción del instrumento, desencadenando y centrando la mirada en el tetraedro didáctico especificado en el análisis del profesor por medio de las relaciones que este tiene con los estudiantes, con el aprendizaje de un saber y con el medio donde se desenvuelve la situación.

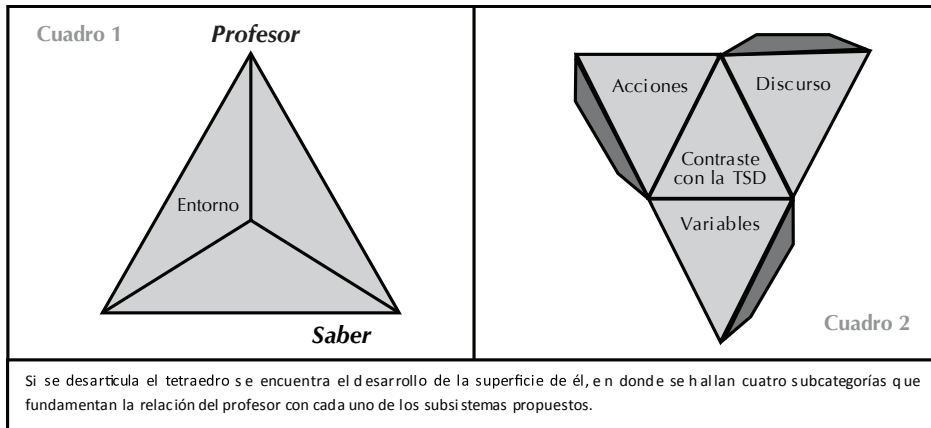
Preparados los instrumentos de registro y observación, la disposición para el desarrollo de la actividad se hizo de la siguiente manera: primero, la intervención de dos observadores que registrarían las evidencias de la clase, uno de ellos involucrado directamente con la planeación de la secuencia de actividades de la noción específica, y el otro, un observador externo, conocedor de la secuencia, más no creador de ella. Segundo, la grabación (video) de cada una de las sesiones de la actividad, las cuales sirven para que posteriormente el mismo profesor haga un registro y análisis de su desenvolvimiento en la clase. Los puntos de vista dispuestos para la observación del hacer del profesor concluye en la triangulación de la información recolectada, que lleva a un análisis cualitativo y cuantitativo, el cual permite observar la validez: consistencia, coherencia y fiabilidad de los instrumentos.

13 La investigación se realizó en Instituciones Educativas Distritales, en los grados séptimo y noveno, y participaron en todo el proceso algunos estudiantes para profesor de LEBEM, del semillero de investigación dirigido por el profesor Lurduy y asesorados por el grupo de investigación Crisálida, en su práctica docente entre 2006 y 2008,.

Los instrumentos¹⁴

Presentaremos algunos instrumentos para la recolección, análisis y ponderación de la información –o partes de ellos– como una muestra y nos extenderemos en su justificación y explicación. En el diseño de instrumentos se consideraron **categorías**, las cuales vienen referidas a la relación entre el profesor y cada uno de los aspectos considerados en el tetraedro didáctico (ver cuadro 1).

Para la relación **profesor-saber** se toman aspectos que capturan la estructura planeada para la clase, la secuencia de tareas, las formas de interacción previstas en cuanto a la flexibilidad que se puede o no tener con la temática, cómo debe desarrollarse la discusión, los planes a seguir con sus correspondientes propósitos, así como también la secuencia en relación con el objeto matemático puesto en juego en la clase.



En cuanto a la relación **profesor-estudiante**, se toman aspectos referidos por los indicadores del NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, por sus siglas en inglés) y lineamientos curriculares del MEN en los que se destaca la elección o diseño de tareas que el profesor propone a sus estudiantes, la dirección del discurso de la clase y la creación de ambientes de aprendizaje como áreas centrales del trabajo del profesor que dan forma a lo que pasa en la clase (contrato didáctico).

Asimismo en la relación **profesor-entorno** se incluyeron indicadores concernientes al desarrollo organizacional de actividades a través de las cuales

14 Los enunciados de esta parte del documento en cuanto al diseño de instrumentos, registro y análisis de la información, son construcción colectiva de los profesores, estudiantes participantes y el director de la investigación, y hacen parte de los informes finales de investigación de estudiantes para profesor, profesores investigadores y el doctorante, con sus matices y naturales diferencias.

el profesor motiva la participación en las mismas, la organización de los estudiantes, del aula, los recursos disponibles para el trabajo en clase, en relación con los ambientes físico y lógico abstractos que intervienen en la clase (mediación e interacciones).

Las observaciones específicas a realizar en cada una de las categorías planteadas se determinaron por **sub-categorías**, las cuales tuvieron en cuenta que los estudiantes adoptaran la acción del profesor, lo que él proporciona para que la actividad funcione. Dichas sub-categorías son *variables didácticas, acciones de clase, discurso y contraste con la TSD*.

La consideración de las **variables didácticas** permite determinar cómo hacer uso de las indicaciones y elementos que se deben poner en juego en el aula. Se intenta mirar las **acciones** en compañía de su intencionalidad, planteada en el diseño. En cuanto al **discurso**, deja ver cómo el profesor hace su gestión, encaminando lo que se quiere que el estudiante haga. El **contraste con la TSD** observa si lo que hace el profesor es viable desde lo que plantea la teoría (ver cuadro 2).

Para un análisis más enriquecedor se optó por considerar **componentes de la sub-categoría** independientes dentro de cada una de las categorías, y en cada caso con un *“criterio específico para analizar dichos componentes”*; esto permitió discriminar detalles sobre cómo se presentan en el hacer del profesor, cómo se construyen las reglas que gobiernan la interacción y el comportamiento.

Algunos altos en el camino

Un aspecto muy importante de la investigación realizada sobre la ruta docente deja ver la posibilidad de análisis y reflexión didáctica de los estudiantes para profesor de matemáticas (EPM), y en esa dirección la posibilidad, realización y valoración de la evaluación de sus competencias didácticas construidas en sus procesos de estudio didáctico y de formación en LEBEM.

REA, los procesos de estudio y la experiencia investigativa

Para el desarrollo de la observación del EPM, se asignaron a cada uno de los instrumentos de observación, registro y análisis de la información sus respectivas categorías, sub-categorías, componentes y descriptores en la especificidad de cada temática a observar en la actividad que se pretendía desarrollar; además, se diferenciaron éstas en cuanto al tipo de situación

que se trabajaría: acción, formulación, validación e institucionalización. Ello ha permitido una indagación cualitativa detallada de las prácticas docentes, de los procesos de estudio y de la misma experiencia investigativa, ya que es un elemento primordial del perfil de egresado de LEBEM y de la investigación curricular propuesta a estudiantes y profesores.

La observación del quehacer del profesor (EPM) permitió reflexionar en torno al fin de la investigación y del análisis cuantitativo con el que se determinan las tendencias del maestro en el desarrollo de su clase, logrando con ello –por sesión y aplicación por parte de diferentes profesores– una mayor fiabilidad de la secuencia a valorar, lo que a su vez posibilitó realizar una gestión de clase más fluida y produjo un análisis menos parcial de su quehacer, mirando los aspectos a mejorar que posibilitan que los estudiantes construyan nociones y que el profesor guíe de manera adecuada dicha construcción.

Estos instrumentos posibilitaron determinar que en el sistema didáctico los elementos (profesor, alumno, saber y entorno) por separado no son suficientes para realizar un análisis detallado de las situaciones de enseñanza. Para hablar de un elemento, es necesario estudiar al otro; por tanto, se unifica el trabajo con dichos elementos, especificando la mirada en el profesor y en cada una de sus relaciones.

Además, el explorar a fondo las relaciones en el tetraedro, permite involucrar más componentes de análisis que en ocasiones no se tienen en cuenta (variables, acciones, discurso, contraste con la teoría) en la consideración de una situación problémica específica. Estos son importantes para el desenvolvimiento de las mismas, porque se pone de manifiesto la existencia de algunos componentes que a veces no son considerados en la planificación de la clase.

El sistema didáctico y el tetraedro didáctico

Dado que el sistema didáctico y el tetraedro didáctico son un modelo, éste debe ser explicado a partir de un marco teórico de referencia, el cual permite establecer la operatividad del mismo (el tetraedro didáctico), respecto de la interpretación del suceso a explicar (los análisis de las configuraciones y trayectorias didácticas a la hora de la formación de profesores en los aspectos de los objetos didácticos).

Desde una perspectiva epistemológica el tetraedro es una analogía, es explicativo (debe brindar una explicación del sentido y del significado del fenómeno emergente en el análisis), esto es, debe potenciar una interpretación; es descriptivo como una serie de enunciados interpretativos en el

contexto de la construcción teórica que le dio origen (REA y EOS) y, finalmente, debe permitir el paso de la observación a la argumentación en la descripción e interpretación de los fenómenos didácticos aquí referidos (Bateson, 1981).

A partir de los aportes y conceptualizaciones de estas modelaciones, y aunque los análisis e investigaciones son más dispendiosos y complejos, de acuerdo con Lurduy (2009), los desarrollos logrados en los procesos investigativos con estudiantes, profesores y estudiantes para profesor en el programa de formación de profesores de LEBEM, han generado una mayor comprensión de los fenómenos y hechos didácticos. Mediante esa vía se ha motivado un mayor compromiso académico y didáctico en los procesos formativos, en los análisis de los procesos de estudio en los diferentes niveles de la educación, en distintos grados de reflexión y análisis didáctico de profesores, formadores y estudiantes para profesor, y por tanto, en la valoración y reconocimiento de las configuraciones didácticas, las identidades profesionales y la idoneidad didáctica (competencias de reflexión y análisis didáctico).

Referencias bibliográficas

- Bateson, G. (1989). *Pasos hacia una ecología de la mente*. Buenos Aires: Planeta.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos en didáctica de las matemáticas. En: *Recherches en Didactiques des Mathematiques* (7), 2, 33-115.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: Aique.
- Croll, P. (1995). *La observación sistemática en el aula*. Madrid: Editorial La Muralla.
- De Ketele, J. (1995). *Metodología para la recogida de información*. Madrid: Editorial La Muralla.
- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2002). *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica"*. *Educación matemática*, México: 14(1), 48-6.
- Godino, J. (2004). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_
- _____ (2008). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_fundamentos.htm
- Giménez, J. (2000). *La evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

- Ibáñez, J. (2000). Nuevos avances en la investigación social. La investigación social de segundo orden. En: Revista *Anthropos*, No. 22, Madrid.
- Lahitte, H. et al. (1994). *Matriz relacional de los procesos cognitivos*. Salamanca, España: Amarú ediciones.
- Lavanderos, L. (2002). *La organización de las unidades cultura naturaleza: hacia una concepción relacional de la cognición*. Tesis doctoral. Chile: Universidad de Santiago de Chile.
- Lurduy, O. (2005). Algunos elementos para la comprensión de la cultura del aula. En: *Cuadernos de investigación No. 5*, "Rutas de estudio y aprendizaje, el caso de las matemáticas". Bogotá: Universidad Distrital-IEIE.
- _____ (2009). El profesor investigador de su práctica. La formación del profesorado de matemáticas. En: *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, No. 51.
- Morín, E. (1982). *El método: naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra.
- _____ (2000). *Una mente bien ordenada*. Barcelona: Seix Barral.
- Peirce, C. S. (1971). Cómo hacer nuestras ideas claras. En: *Mi alegato a favor del pragmatismo*, Argentina: Aguilar.
- Wilhelmi, M. R.; Godino, J. D. y Font, V. (2005). *Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las Matemáticas: reflexiones sobre la teoría de situaciones didácticas y el enfoque ontológico y semiótico*. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

