MATEMATICA

PROGRAMADORES-AUTORES

Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Virginia Cifuentes de Buriticá
Gabriel Gutiérrez Palacios
Teresa León Pereira
Orlando Múnera Patiño
Carmen Lucila Osorno Reyes

PROGRAMADORES-REVISORES

Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Virginia Cifuentes de Buriticá

ASESOR:

Universidad Nacional de Colombia
Doctor Carlos Eduardo Vasco Uribe

En la elaboración del programa para este grado se tuvo en cuenta la primera versión experimental realizada por Cecilia Casabuenas Santamaría, Carmen Inés Gamboa de Arreaza, Claudia Nieto Tafur y Martha Inés Posada de Cervantes, con la asesoría del Doctor Carlo Federici y la colaboración de Martha Lozano Riveros.

En sus revisiones se han tenido en cuenta los aportes de los técnicos de los Centros Experimentales Piloto, de los maestros vinculados al Programa, las recomendaciones del Primer Simposio Nacional sobre la Enseñanza de las Ciencias, efectuado en Bogotá en 1981, y el análisis del programa realizado por Mary Falk de Losada y Myriam Acevedo de Manrique profesoras del Departamento de Matemáticas y Estadísticas de la Universidad Nacional de Colombia.

Recomendaciones generales

Los contenidos de este grado afianzan y amplían aquellos conocimientos adquiridos por los alumnos en los grados primero y segundo. Por ésto es conveniente tener presente cuáles contenidos y con qué profundidad se trataron éstos en los grados anteriores.

En este grado se empieza con el estudio de las características del sistema de numeración usual, en contraste con las características del sistema de numeración romana (u otro sistema de numeración conocido por el docente), con el fin de ofrecerle al alumno la posibilidad de comparar diferentes sistemas de numeración y llegar así a la noción de base y a establecer la importancia de la posición de las cifras en la representación de los números. Se generaliza el algoritmo de la adición y el de la sustracción y se extiende el de la multiplicación y el de la división.

Se vuelven a estudiar algunas relaciones de orden y se analizan sus representaciones en los diagramas de flechas para llegar a algunas conclusiones acerca de las propiedades de este tipo de relaciones.

En cuanto a las expresiones del lenguaje usual, interesan aquellas que hacen referencia a la unión o intersección de conjuntos o a las relaciones de pertenencia y contenencia, sin que éstas lleguen a mencionarse explícitamente. Basta manejar adecuadamente el lenguaje. En este sentido, es importante el uso de las palabras "y", "que" y "o". Así, por ejemplo, para hallar la reunión y la intersección de los múltiplos de 2 y de los múltiplos de 5, los alumnos están de acuerdo en que en la reunión estarán **los múltiplos de 2 "y" los múltiplos de 5,** mientras que en la intersección estarán **los múltiplos de 2 "que" también son múltiplos de 5.** Se ve pues como en el lenguaje de los alumnos es más natural utilizar la "y" para la unión y no la "o" que utilizan los matemáticos. Conviene anotar que cuando a los alumnos se les pregunta cuál es **la condición** que cumplen los objetos de la reunión, entonces sí utilizan en sus respuestas a la "o": **ser múltiplo de 2 "o" ser múltiplo de 5.** Para expresar **las condiciones** de los objetos de la intersección utilizan la "y": **ser múltiplo de 2 "y" ser múltiplo de 5.**

Se ve pues que en la expresión de las condiciones los alumnos sí están de acuerdo con los matemáticos.

Otras palabras como **todos, todo, cada uno, alguno, algunos, hay,** merecen un interés especial porque constituyen la base para el estudio de los cuantificadores en la Básica Secundaria.

Es deseable que durante el transcurso del año escolar se haga énfasis en el significado de estas palabras y así, tal vez, no será necesario dedicarle un tiempo especial al logro de los objetivos relacionados con el uso de tales expresiones.

Se continúa con las actividades de Geometría dinámica activa para llegar, a través de la manipulación de objetos, a las representaciones de las caras planas de estos objetos y abordar así el estudio de las llamadas "figuras geométricas planas", como son: el triángulo, el rectángulo, el cuadrado y el círculo. Para caracterizar los polígonos mencionados anteriormente se tienen en cuenta sus ángulos, sus lados y sus simetrías.

El estudio de las simetrías se facilita cuando la geometría se trata con un enfoque dinámico, donde los giros, las rotaciones, los ángulos, etc., no son algo estático que el niño ve dibujado en el tablero o en el papel, sino algo que él "descubre" cuando actúa sobre los objetos, cuando corre, cuando juega, cuando realiza las construcciones que su imaginación le inspira.

Tradicionalmente se ha considerado que el cuadrado; por ejemplo; es una figura simétrica porque al trazarle cualquiera de sus dos diagonales o una línea que pase por los puntos medios de dos lados paralelos entre sí queda dividido en dos partes congruentes. Desde este punto de vista el cuadrado tiene 4 ejes de simetría.

Una forma más precisa de estudiar el cuadrado en cuanto a sus simetrías, es la que tiene en cuenta determinados movimientos. Para visualizarlos, se trabaja con un papel en forma cuadrada que se hace girar de diferentes maneras a partir de una posición inicial, con el propósito de conseguir todas las posiciones que sean similares a la inicial. Resultan en total 8 movimientos que producen 8 posiciones, cuatro por cada cara del papel de forma cuadrada con el que se está trabajando. Las cuatro transformaciones que generalmente se estudian primero se consiguen conservando el papel en su propio plano y haciéndolo girar sobre su centro. Las otras cuatro se consiguen haciendo girar el papel de forma cuadrada, sobre cualquiera de sus diagonales o de las líneas que unen los puntos medios de dos de sus lados paralelos.

En cuanto a la medición de magnitudes tales como longitud, superficie, volumen y capacidad, se introducen nuevas unidades para completar el sistema que se venía manejando; como en el caso de las unidades de longitud; en otros casos, se pasa de unidades arbitrarias a patrones estandarizados de medida, como sucede en la medición de superficies, volúmenes y capacidad.

También se amplía el estudio de las unidades para medir la duración de los lapsos de tiempo; hasta llegar al manejo del calendario o almanaque.

Se inicia en este grado el estudio de los fraccionarios tales como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc., como operadores que actúan sobre magnitudes produciendo una disminución en ellas, y se compara el efecto de estos operadores con el de otros como "el duplicador", "el triplicador", etc., que aumentan las magnitudes a las cuales se aplican.

La solución y formulación de problemas son actividades básicas que se sugieren como motivación, familiarización o aplicación, y que pueden proponerse antes, durante o después del desarrollo de cada tema. Estos problemas deben permitirle a los alumnos encontrarle sentido a las matemáticas y adquirir habilidades de razonamiento lógico tanto en la solución de problemas como en la formulación de los mismos. Pedir a los alumnos que formulen problemas es una buena manera de captar su comprensión de los contenidos y de detectar los sistemas concretos de su experiencia que se prestan a un tratamiento matemático.

La representación de datos en tablas y en diagramas de barras se vuelve a retomar para enriquecerla con diagramas de líneas y de puntos. Se efectúan arreglos de objetos que requieren orden y arreglos de objetos que no requieren orden, ya sea tomando todos los elementos del conjunto o tomando subconjuntos del mismo.

Con las actividades que se explican en el programa se desea ayudar al docente en su labor. De ninguna manera se quiere restringir su participación ni desconocer su iniciativa y creatividad.

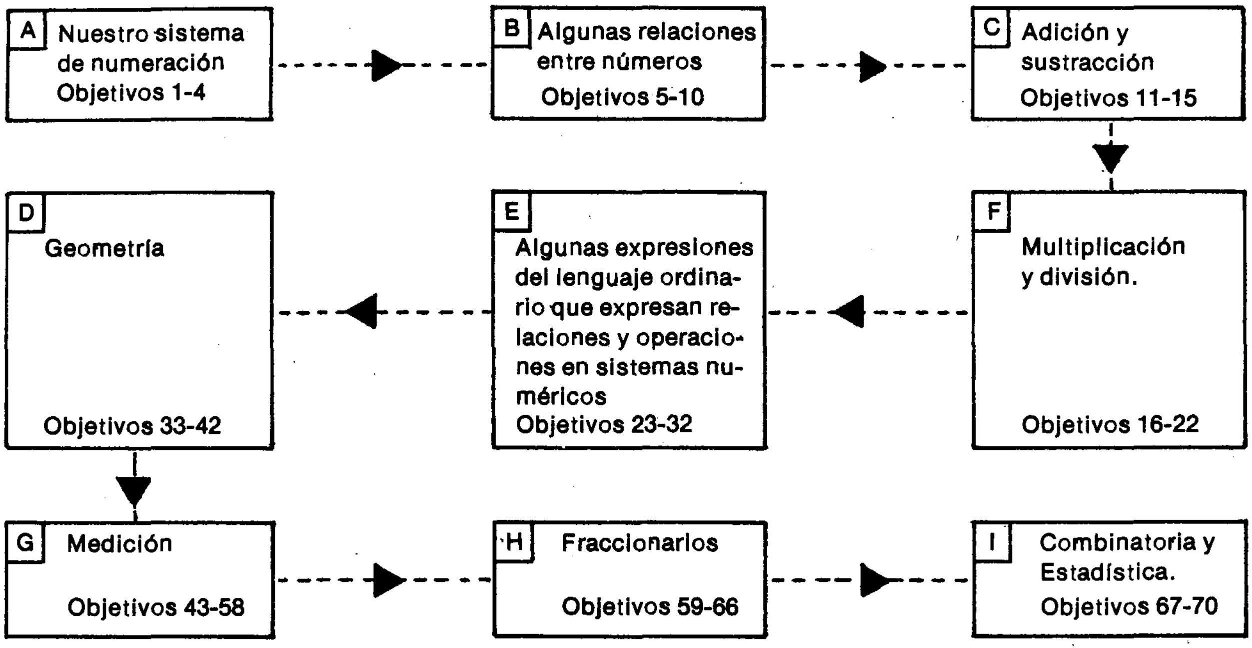
Los objetivos específicos son una ayuda para detectar las causas de los errores de los alumnos y desarrollar distintas estrategias para corregirlos.

Los indicadores de evaluación son una ayuda para formular preguntas, problemas e ítemes para las evaluaciones. Si el objetivo es muy específico, el indicador prácticamente se reduce a una nueva redacción del mismo objetivo en una forma más próxima a su utilización para la evaluación. Si es menos específico, el indicador pretende concretarlo a situaciones más fácilmente evaluables.

Es importante que el maestro tenga en cuenta que para la evaluación formativa, la ausencia de respuesta, o la respuesta diferente a la esperada, sirven de síntomas para diagnosticar el estado del proceso cognitivo. En este sentido es más ilustrativa una respuesta no esperada que la respuesta determinada por el indicador de evaluación; si responde "bien", no se sabe si entendió o no; si responde "mal", el "error" indica cómo va el proceso de aprendizaje. Por ésto, se debe osbservar que los alumnos estén razonando al dar una respuesta y que no la están repitiendo mecánicamente. Es importante pedirles la razón de su respuesta, hacerlos dudar de ella aunque sea correcta, y ejercitarlos en que ellos mismos corrijan sus errores.

La evaluación global del curso debe hacerse con respecto a los objetivos generales.

Una posible secuencia para el desarrollo del programa de tercer grado es la que sugerimos a continuación:



Objetivos generales

1. Reconocer las características de nuestro sistema de numeración y generalizar la obtención de unidades de orden superior.

2. Reconocer números mayores que mil y emplear algunas de sus representaciones.

3. Ejercitarse en el cálculo mental, oral y escrito, aprovechando, entre otras estrategias la formulación de sucesiones de números naturales.

4. Expresar verbalmente y mediante el empleo de símbolos usuales, la relación de pertenecer a un conjunto y la relación de estar contenido en un conjunto.

5. Analizar en un conjunto numérico algunas relaciones de orden, su representación y sus propiedades.

6. Analizar algunas operaciones entre números y entre conjuntos numéricos.

7. Generalizar algoritmos para la solución de adiciones, de sustracciones y de multiplicaciones y emplear otros algoritmos que simplifican y agilizan el cálculo mental.

8. Utilizar algunas propiedades de la multiplicación para facilitar el cálculo, especialmente el cálculo mental, adquirir habilidad para efectuar abreviadamente algunas multiplicaciones y resolver problemas.

9. Familiarizarse con varios casos de la división de números naturales.

10. Resolver y formular problemas que requieran el uso de la adición, de la sustracción y de la multiplicación.

11. Descomponer números en factores y reconocer que estos factores también son divisorios.

12. Iniciar el estudio de los números primos.

13. Reconocer, en frases del lenguaje usual, el significado de algunas expresiones para expresar relaciones y operaciones en sistemas numéricos.

14. Caracterizar algunas figuras geométricas.

15. Adquirir habilidad para emplear algunas unidades de longitud en problemas de la vida cotidiana, para realizar las conversiones correspondientes y para estimar la medida de una longitud.

16. Generalizar procedimientos para determinar el perímetro de algunas figuras geométricas.

17. Adquirir para emplear algunas medidas de área en problemas de la vida cotidiana, para realizar las conversiones correspondientes y para estimar el área de una superficie.

18. Iniciar el estudio del volumen y la capacidad.

19. Identificar unidades para medir lapsos de tiempo y aplicarlos en la resolución de problemas.

20. Iniciar el estudio de los operadores fraccionarios.

21. Recoger datos, ordenarlos en tablas, representarlos en diferentes tipos de gráficas e incorporar el manejo de datos en la descripción de eventos de la vida cotidiana.

22. Efectuar diferentes tipos de arreglos.

Contenidos

Con el fin de que el docente tenga una visión global de los contenidos propuestos para la Educación Básica Primaria, se presenta a continuación el cuadro de contenidos, no solo de tercer grado sino; de todos los grados de la Básica Primaria. Dichos contenidos se han organizado bajo los siguientes títulos: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos, conjuntos, relaciones y operaciones. (Ver página siguiente).

1. Sistemas númericos

Estos se estudian de manera gradual. En la Educación Básica Primaria, el de los números naturales, comenzando con los números de 0 a 100 en primer grado y ampliando en cada grado el conjunto numérico. En cada uno de estos conjuntos se van introduciendo progresivamente las operaciones, comenzando con la adición y la sustracción en primer grado, hasta llegar a las primeras nociones de potenciación, radicación y logaritmación en quinto grado y además las relaciones de orden aditivo y de orden multiplicativo. También en la primaria se inicia el estudio de los números fraccionarios y de los decimales. En la Educación Básica Secundaria se avanza en el estudio de los números enteros, racionales, los reales y los complejos, vistos como sistemas numéricos, con sus operaciones y las relaciones que hay entre sus elementos. Se hace mucho énfasis en la solución y formulación de problemas como aplicación de los algoritmos de las operaciones y en ejercicios de cálculo mental. Con ésto se espera que, a medida que los niños vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar las semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que más adelante les permitan integrar conocimientos y hacer generalizaciones.

2. Sistemas geométricos

Se incorpora toda la parte de geometría activa a través de la exploración del espacio. De esta manera se estudian los sólidos, las figuras planas, las líneas, los ángulos, etc.; destacando relaciones como paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza, y transformaciones como rotaciones, traslaciones, reflexiones, reducciones y ampliaciones.

3. Sistemas métricos

Se estudia el sistema métrico decimal y otros sistemas no decimales. En dichos sistemas se expresa el resultado de medir longitudes, superficies, el volumen de un cuerpo, la capacidad de un recipiente, el peso y la masa de un objeto, la duración de un evento y la amplitud de un ángulo. Los patrones estandarizados se utilizan después de realizar mediciones con unidades arbitrarias y sentir así la necesidad de una unidad común de medida aplicable en todos los casos. En los diferentes sistemas se realizan conversiones con sus aplicaciones y se hacen comparaciones.

4. Sistemas de datos

Se estudian algunos conceptos fundamentales de estadística que sirven para interpretar algunos modelos de la realidad. Se inicia con la recolección de datos, su organización en tablas de frecuencia y su representación en diagramas. Se hace algún análisis de los datos recogidos y tabulados, mostrando lo que puede deducirse de ellos y cómo pueden compararse entre sí; para ello se estudian al final de la Básica Primaria algunas medidas de tendencia central y al final de la Básica Secundaria se completan estas medidas y se introducen las medidas de dispersión.

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA PRIMARIA

TEMA / GRADO	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 SISTEMAS DE DATOS	5 SISTEMAS LOGICOS	6 CONJUNTOS	7 RELACIONES Y OPERACIONES
1o.	- Naturales de 0 a 100 con adición y sustracción. Simbolización. - Algoritmos con aplicaciones. - Orden aditivo: ...es mayor que..., ...es menor que... - Ordinales. - Operadores como-1, 1, -2, etc.	- Relaciones espaciales. - Algunos sólidos geométricos regulares. - Figuras planas. Bordes rectos y bordes curvos. - Introducción a la simetría. - Líneas (abiertas y cerradas).	- Introducción a la medición de longitudes: patrones arbitrarios, el dm. y el m. - Medición de tiempo. Duración.	- Iniciación a gráficas de barras.		- Clasificaciones - Conjuntos y elementos. - Conjuntos lo mismo de numerosos. Cardinal de un conjunto. - Noción de unión de conjuntos disyuntos. - Representación gráfica. - Arreglos sencillos.	- Iniciación a la representación de relaciones. - Diversas maneras de efectuar operaciones.
2o.	- Naturales de 0 a 1000 con adición, sustracción y multiplicación. División (iniciación). - Números pares y números impares. - Algoritmos con aplicaciones. - Orden multiplicativo: ...es múltiplo de..., ...es divisor de...	- Rectas paralelas y perpendiculares. - Rotaciones y giros. Angulos. - Formas geométricas regulares: cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares. - Noción de perímetro.	- Longitud: m, dm, cm. - Area: unidades arbitrarias, dm^2. - Unidades de duración: horas, minutos.	- Gráficas de barras.	- Significado de la "y" y de la "o" en una instrucción. - Expresiones: "Todos", "Algunos", "Ninguno".	- Pertenencia. - Noción de subconjunto. - Unión de conjuntos disyuntos y no disyuntos. - Cardinal de la unión. - Parejas con y sin orden.	- Propiedades: conmutativa, asociativa, modulativa de algunas operaciones. - Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (introducción).
3o.	- Numeración romana. - Naturales mayores que 1000 con adiadición, sustracción, multiplicación y división. - Algoritmos generalizados para adición, sustracción y multiplicación con aplicaciones. - Números primos. - Operadores multiplicativos. - Introducción a los operadores fraccionarios.	- Superficies (fronteras de sólidos). Superficies planas. - Líneas (fronteras de superficies). - Puntos (fronteras de líneas). - Caracterización de: Triángulo, cuadrado, rectángulo, círculo.	- Longitud: m, múltiplos y submúltiplos. Yarda y vara. - Area: Patrones estandarizados: m^2, cm^2 y mm^2. - Volumen: Patrones arbitrarios. - Capacidad: Patrones arbitrarios. Litro.	- Recolección de datos. - Tabulación y representación de datos.	- Diversos significados de la "y" y de la "O" en el lenguaje ordinario. - Diversas maneras de cuantificar expresiones en el lenguaje ordinario.	- Simbolización de las relaciones de pertenencia y contenencia. - Unión e intersección. - Algunos arreglos con o sin orden.	- Relaciones de orden. Representación con flechas. - Propiedades: Simétrica, antisimétrica y transitiva de algunas relaciones. - Propiedades: Conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones. - Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.
4o.	- Naturales con adición, sustracción, multiplicación y división. M.C.D. y M.C.M. - Fraccionarios con adición y multiplicación. - Decimales con adición y sustracción. - Algoritmos con aplicaciones. - Orden multiplicativo.	- Modelos de sólidos. -Cuadriláteros: trapecios. - Perímetro (generalizado). - Radios, diámetros. - Areas: Trapecio, cuadrado, rectángulo, triángulo. - Cuadrícula.	- Area: Algunos múltiplos y submúltiplos del m^2. Medidas agrarias. - Volumen: m^3, dm^3, cm^3. - Peso: gramo, kilogramo.	- Recolección de datos. - Tabulación y representación de datos. - Iniciación al análisis de datos. - Frecuencia y moda.	- Proposiciones: Significado, verdad y falsedad. - Proposiciones compuestas. - Negación de proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario.	- Relaciones de contenencia. - Igualdad de conjuntos. - Conjunto referencial. - Complemento de un conjunto. Simbolización y representación. - Algunos tipos de arreglos.	- Relación inversa. - Diagramas de flechas. - Propiedades: Simétrica antisimétrica y transitiva de algunas relaciones.
5o.	- Naturales con adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación, logaritmación. - Fraccionarios con adición, sustracción, multiplicación y división. - Decimales con adición, sustracción, multiplicación y división. - Algoritmos con aplicaciones. - Razones y proporciones. - Proporcionalidad directa e inversa.	- Construcciones con regla y compás. - Polígonos regulares. - Construcción de algunos sólidos. - Area del círculo. - Area y volumen de algunos sólidos.	- Conversiones con unidades de longitud, área, capacidad y peso. - Otras unidades de peso. - Unidades de duración. - Conversiones.	- Noción de promedio en un conjunto pequeño de datos.	- Proposiciones conjuntivas y disyuntivas y condicionales en el lenguaje ordinario. - Proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario.	- Extensión y comprensión. - Conjuntos: Infinito (N), unitario y vacío. - Unión e intersección. - Otros tipos de arreglos.	- Recopilación de las operaciones conmutativas, asociativas, modulativas estudiadas. - Igualdades.

5. Sistemas lógicos

No se pretende hablar de lógica matemática abstracta; sino de ciertos aspectos del lenguaje en los que se notan regularidades que se pueden manejar matemáticamente. Por eso, se parte de las expresiones que manejan los alumnos para ir introduciéndolos poco a poco en un lenguaje más riguroso, que tiene por objeto, entre otros, evitar las frecuentes ambiguedades del lenguaje usual, y más tarde, desarrollar las habilidades del pensamiento deductivo.

6. Conjuntos

Se trata la teoría mínima necesaria para introducir algunos conceptos fundamentales de la Aritmética, de la combinatoria y de la probabilidad, y para preparar una prosterior formulación unificada de las diversas áreas de las matemáticas.

7. Relaciones y operaciones

Se analizan algunos fundamentos teóricos sobre estos conceptos. Dicho análisis se insinúa empíricamente desde la Básica Primaria hasta llegar a una conceptualización más general al finalizar la Básica Secundaria. Las operaciones se estudian como transformaciones sobre los elementos de un sistema, mientras que las relaciones corresponden a la teoría acerca de los mismos. Se estudian también las propiedades, tanto de las operaciones como de las relaciones y se presentan algunos aspectos teóricos sobre las funciones.

Objetivos específicos, indicadores de evaluacion. Sugerencias de actividades y Metodología

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
1. Comparar nuestro sistema de numeración con el sistema de numeración romano.	El alumno explicará algunas diferencias entre nuestro sistema de numeración y el sistema de numeración romano.
2. Reconocer que nuestro sistema de numeración es posicional y de base diez.	El alumno explicará por qué nuestro sistema de numeración, a diferencia del romano, es posicional y de base diez.
3. Generalizar la obtención de unidades de orden superior (decenas, centenas, unidades de mil, etc).	
4. Escribir en cifras y en letras los nombres de números de cuatro o más dígitos.	Dado oralmente un número; el alumno lo escribirá en cifras, y dado un número en cifras, el alumno lo leerá y lo escribirá en letras.

Sugerencias de actividades y metodología

A la edad que tienen los alumnos en este grado, es posible que piensen que los números son los signos o figuras que los representan. El maestro puede hacerles notar que los números que sirven para contar, como el uno, el dos, etc., se pueden representar de muchas maneras según las diferentes épocas y culturas. Las representaciones más sencillas, llamadas cifras, con la manera ordenada de combinarlas para simbolizar otros números, forman un sistema de numeración.

Hasta ahora solo hemos usado el sistema de numeración decimal, con las diez cifras 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, y la utilización de la posición que ocupan para representar decenas, centenas, etc. Ahora vamos a ver que todavía se usan otros símbolos para representar los mismos números que ya conocemos. Son los llamados "números romanos".

Cuando los romanos contaban objetos usaban otras palabras como: "unus, duo, tres, quattuor..." y otros símbolos como I, II, III, IIII o IV...; pero ellos tenían en mente lo mismo que nosotros cuando contamos "uno, dos, tres, cuatro..." y utilizamos los símbolos 1, 2, 3, 4... Eso "mismo" es el concepto de número; pero los signos con los cuales se simbolizan son diferentes.

Para esta actividad, si existe en la comunidad alguna iglesia o establecimiento que tenga un reloj que emplee los símbolos romanos para indicar la hora, como el que se ilustra en la gráfica, conviene que los alumnos lo observen y, con base en el conocimiento que tienen del reloj, identifiquen cada uno de los símbolos que aparecen. También se puede conseguir un reloj de pared o un despertador que tenga numeración romana. En caso de que no se pueda usar este recurso, se podrán buscar en la prensa anuncios u otro tipo de avisos que empleen esta numeración.

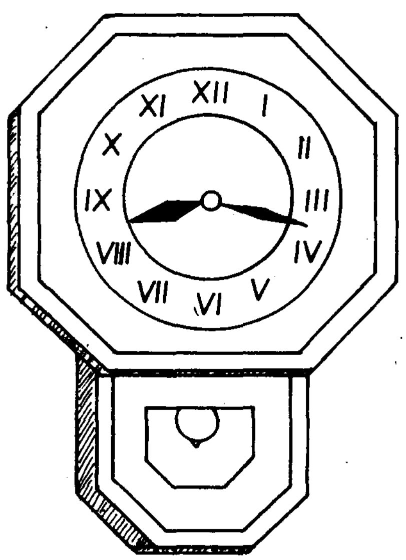
También se pueden encontrar dichos símbolos en la parte superior de la primera página de algunos diarios o revistas. Estos informan cuántos años hace que se fundó esa publicación, como lo ilustra el siguiente dato: AÑO XCI. Muchas veces los capítulos de los libros aparecen en numeración romana: Capítulo III.

Algunos calendarios emplean la numeración romana para numerar los meses; por eso en algunas ocasiones para escribir una fecha, a cambio del nombre del mes, se escribe el número que le corresponde así:

20 - julio - 1810   20 - VII - 1810

Luego de que los alumnos hayan trabajado estos ejemplos, el maestro puede indicarles que esta forma de representar números empleando letras fue ideado por los romanos hace unos dos mil quinientos años, cuando todavía no se había inventado nuestro sistema de numeración decimal.

En un dibujo como:



Los alumnos identifican los símbolos que se utilizan para representar los números de uno a doce, y pueden hacer una tabla con dos columnas: una con los símbolos empleados por los romanos, y al frente otra con los símbolos que en la actualidad empleamos (arábigos o indo-arábigos).

Símbolos romanos	Símbolos indo-arábigos
I	1
II	2
III	3
IV	4
V	5
VI	6
VII	7
VIII	8
IX	9
X	10
XI	11
XII	12

Para que los alumnos aprendan a representar los números empleando estos símbolos, el maestro les dirá que hay unos símbolos básicos y unas reglas con base en las cuales se representan los otros números; esos símbolos básicos llamados cifras son:

I	representa al uno
V	representa al cinco
X	representa al diez
L	representa al cincuenta
C	representa al cien
D	representa al quinientos
M	representa al mil

- Una raya horizontal colocada encima de un símbolo aumenta mil veces su valor. Ejemplo:

L : cincuenta   C : cien   M : mil

$\overline{L}$: cincuenta mil $\overline{C}$: cien mil $\overline{M}$: un millón

Con estos símbolos se forman los demás, así:

I   1

Para el dos se colocan dos rayitas que podrían interpretarse como: I + I = 2:

II   2

Para el tres se colocan tres rayitas que podrían interpretarse como: I + I + I = 3:

III   3

Para el cuatro se podría pensar en colocar cuatro rayitas y así lo hacían al principio los romanos, pero más tarde prefirieron quitarle uno a cinco para obtener cuatro; esto lo indicaban escribiendo una V que significa cinco y una línea vertical a la izquierda que significa que le está quitando una unidad:

IV 4

Esta es una regla que se puede considerar como general:

- Si a una cifra que representa un número mayor, se le coloca a la izquierda una cifra que representa un número menor, esto significa que el número mayor se encuentra disminuido en el valor que indica la cifra de la izquierda.

Para el número cinco se emplea la V:

V 5

Para obtener el número seis, al cinco le sumamos uno: $5+1=6$; para indicarlo escribimos la V y a derecha un línea vertical, así:

VI 6

Esta otra regla que de hecho ya se aplicó al formar el dos (II) y el tres (III), dice:

- Si a la derecha de una cifra se coloca otra que representa un número igual o menor, el número representado a la izquierda se aumenta en el valor que indica el que sigue.

La representación para el siete se obtiene sumando uno al seis; para indicarlo, al símbolo que representa al seis se le coloca otra línea vertical a la derecha así:

VII 7

Para obtener la representación del ocho se coloca otra línea vertical a la derecha del símbolo que representa al siete, así:

VIII 8

Para representar el nueve se podría pensar en aumentar una línea al símbolo que representa al ocho; pero en forma similar a como se obtuvo el cuatro, se recurre a disminuir a un valor mayor, en este caso al diez, una unidad; por eso se escribe una raya vertical a la izquierda de la X, que representa al 10, lo que indica que se ha disminuido en uno el valor representado por X:

IX 9

- También como regla general podría decirse que un mismo símbolo no puede aparecer más de tres veces seguidas; o sea que cuatro no se escribe IIII, y nueve no se escribe VIIII. Esta regla es la más común; pero no es necesario seguirla. Por eso algunos relojes a cambio de representar el cuatro así: IV, lo representan así: IIII.

El número diez se representa por X.

A continuación los alumnos pueden seguir representando números atendiendo a las reglas dadas; para ello conviene que cada alumno pase al tablero y escriba con símbolos romanos el número que verbalmente le proponga otro alumno. Los demás alumnos y el maestro estarán atentos a efectuar las correcciones que sean necesarias. La siguiente es la lista de algunos números:

Símbolos romanos	Símbolos indo-arábigos.	Símbolos romanos	Símbolos indo-arábigos
X	10	C	100
XX	20	CC	200
XXX	30	CCC	300
XL	40	CD	400
L	50	D	500
LX	60	DC	600
LXX	70	DCC	700
LXXX	80	DCCC	800
XC	90	CM	900
C	100	M	1000

Como ejercicio los alumnos podrán escribir con símbolos romanos la lista de los números desde uno hasta cien. Para su corrección por los mismos alumnos, el maestro puede inventarse algún juego o concurso.

El mil también podría representarse así: $\overline{I}$; el dos mil: $\overline{II}$ y el tres mil: $\overline{III}$; pero se escribe más bien: M, MM y MMM.

¿Cómo puede escribirse en otra forma el número cuarenta y nueve? El número cuarenta y nueve puede representarse también así: IL. ¿Cuál es la regla? Podemos escribir IL = XLIX, pues ambas escrituras representan el mismo número.

¿Qué significa: CD, XD, ID, CM, XM, IM? Conviene que los alumnos representen cualquier número entre mil y cuatro mil; utilizando barras encima de las cifras también podrán representar cualquier número entre dos mil y cuatro millones (exclusive). ¿Qué significa MMMIM?

Para continuar con las actividades es conveniente que en el salón de clase haya una cartelera con los símbolos básicos de la numeración romana, pues a partir de este momento, se van a comparar dos sistemas de numeración: el romano y el decimal.

El maestro invita a los alumnos a hacer una reflexión sobre el sistema de numeración usual, para lo cual podrá formular preguntas como:

- ¿Cuáles son las cifras y símbolos que tenemos para representar los números? ¿Cuántos son?

  Ya en la primera parte de esta actividad se dijo que las cifras son diez: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- Para representar un número mayor que los representados con las diez cifras básicas, ¿es importante la posición que ocupan las cifras?

  Con ejemplos como 321 y 123 se puede llegar a establecer la importancia de la posición que ocupan las cifras en la representación de los números.

  El maestro orienta a los alumnos para que hagan un análisis del valor de una misma cifra en los dos casos, por ejemplo, el 3 en 321 y 123.

  Dentro de este mismo análisis se ve que el valor de una cifra se hace diez veces mayor cuando dicha cifra avanza un lugar hacia la izquierda; así recordarán que:

  10 unidades equivalen a 1 decena
  10 decenas equivalen a 1 centena
  10 centenas equivalen a 1 unidad de mil
  10 unidades de mil equivalen a 1 decena de mil
  10 decenas de mil equivalen a 1 centena de mil
  10 centenas de mil equivalen a 1 unidad de millón.

  Es decir que una unidad de orden superior es diez veces mayor que la inmediata anterior.

  En representaciones como 111, 202, 1331 podrán reconocer cómo una misma cifra, para la representación de un número, tiene diferentes valores según la posición que ocupe, por ejemplo el 1 en 111.

  Es posible que se lleguen a esbozar algunas conclusiones como:

  Para representar los números se tienen diez cifras o símbolos.

- En el sistema de numeración que utilizamos es muy importante la posición que ocupan las cifras cuando se van a representar los números.

- Cada lugar a la izquierda de la última cifra, sirve para representar un número diez veces mayor que el lugar inmediatamente anterior, contando de derecha a izquierda.

  Si esta última conclusión presenta todavía dificultades, se puede trabajar con material concreto (granos de maíz, lentejas, piedritas, etc.) para formar los grupos de a diez y ver cómo diez objetos forman una decena de objetos y cómo diez decenas de objetos forman una centena de objetos, etc. Esto permitirá decirles que la **base es diez** porque los agrupamientos siempre se hacen de a diez de los anteriores. (Es mejor escribir con letras "base diez" y no "base 10", pues en todas las bases "10" representa la base).

Ahora los alumnos podrán organizarse en pequeños grupos para ver si a partir de sus conocimientos sobre el sistema de numeración romano pueden llegar a redactar conclusiones parecidas a las que se obtuvieron para el sistema de numeración decimal.

Para orientar la discusión de los grupos puede ser conveniente formular preguntas como:

- ¿Cuántos son los símbolos básicos?
- ¿Es importante la posición de los símbolos en la representación de los números?
- ¿Las representaciones de los números por medio de símbolos romanos permiten establecer cuántas veces mayor es el valor de un cifra en relación con el valor de la inmediata anterior?
- ¿Se puede hablar de una base para la numeración romana?
- ¿Qué ventajas tiene un sistema de numeración sobre el otro?

A partir de los trabajos de cada grupo podrá orientarse una discusión hacia los siguientes aspectos:

- Símbolos básicos en los dos sistemas.
- Reglas o normas que determinan la posición de un símbolo en la representación de un número.
- Determinación de una base en los dos sistemas.

- Ventajas y desventajas de cada uno de los sistemas.

Si el maestro domina sistemas de numeración en otras bases y con la debida cautela considera conveniente comparar uno de ellos con el sistema de base diez, podrá proceder como lo hemos hecho en esta actividad. La base cinco sería la más recomendable, pues se puede contar en los dedos de la mano derecha, y pasar las "manos completas" o quinas a los dedos de la otra.

Para generalizar la obtención de unidades de orden superior, el maestro puede organizar una actividad en la cual haya compradores, vendedores y cajeros y, además, sea indispensable el manejo de billetes y monedas. Es conveniente que las denominaciones de los billetes y de las monedas no incluyan aquellas que estén fuera de circulación, pero sí podrían entrar en juego billetes cuya aparición sea factible (billetes de 5000, 10000, 100000) y que faciliten apreciar la equivalencia entre las unidades de orden superior. Así verán, por ejemplo, como un billete de $1000 puede cambiarse por diez billetes de $100; uno de 10000 por diez de $1000. También verán que diez billetes de $ 100000 (diez centenas de mil) equivalen a un millón. Cada vez que se presente la necesidad de efectuar cambios de billetes se irá enfatizando la equivalencia entre las diferentes unidades.

Obsérvese que con los billetes se puede contar de 10 en 10, de 100 en 100, de 1000 en 1000, de 10000 en 10000 y de 100000 en 100000, según sea el orden de la unidad superior a la cual quiera llegarse.

Posteriormente pueden realizarse ejercicios como los siguientes:

- Expresar 32 decenas de mil en unidades de mil.

  Como la decena de mil es equivalente a 10 unidades de mil:

  32 decenas de mil = 32 x (10 unidades de mil) = 320 unidades de mil.

- Escribir el número que tiene 10 ó 100 unidades más (o menos) que un número dado.

- Hallar el siguiente de algunos números tales como 899, 999, 439, etc.

- Escribir el número que tiene unas decenas más o unas centenas más que otro.

- Comparar dos número como 567 y 587. (587 es mayor que 567 porque tiene más decenas, ¿cuántas más?).

- Dar un número de unidades sueltas para que el alumno diga cuántas decenas, cuántas centenas, cuántas unidades de mil, etc., hay.

- Dar un determinado número de unidades, decenas, centenas, o unidades de mil para que el alumno forme el número.

  Ejemplo: 5 decenas de mil, 3 unidades de mil, 1 centena, 4 decenas y 5 unidades.

  Se espera que el alumno forme el número de la siguiente manera:

  5 x (10 000) + 3 x (1 000) + 1 x (100) + 4 x (10) + 5 =

  50 000 + 3 000 + 100 + 40 + 5 = 53 145

Cuando los alumnos hayan realizado un número suficiente de ejercicios y estén familiarizados con las conversiones, pueden elaborar un cuadro resumen como el siguiente para que coloquen algunos dígitos al azar y los lean después en voz alta o los escriban en letras. El profesor puede anotarles también algunos dígitos en el cuadro, eligiendo ceros en algunos de los cuadros intermedios, para que ellos los lean o escriban.

Por ejemplo:

Unidades de millón	Centenas de mil	Decenas de mil	Unidades de mil	Centenas	Decenas	Unidades
2	3	0	6	0	1	2
6	5	1	0	2	0	2

Para ejercitarse en escribir nombres de los números en cifras y en letras, se proponen tres tipos de ejercicios:

1. Un alumno propone oralmente un número y dos alumnos pasan al tablero: uno de ellos escribe el nombre del número en cifras y el otro lo escribe en palabras:

   1043 mil cuarenta y tres

2. Los alumnos se dividen en dos equipos, cada equipo tiene a su disposición la mitad del tablero. Un alumno escribe el nombre de un número en cifras y otro alumno del equipo contrario lo escribe en letras y viceversa. Al final tendrá más puntos el equipo que trabajó mejor.

3. Para que trabajen individualmente, el maestro puede proponer tablas como las siguientes:

NUMEROS EN CIFRAS	NUMEROS EN LETRAS
12376	doce mil trescientos setenta y seis
195420	?
?	dos millones veinte mil ciento uno
27001403	?
?	ciento cincuenta y siete mil trece
500301	?
1000004	?
?	veinte millones cuarenta mil dieciseis

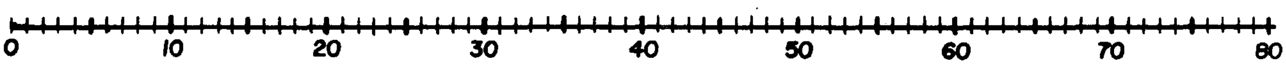
Las escrituras "doscientos", "trescientos", "seiscientos" pueden simplificarse a "docientos", "trecientos", "seicientos".

Para finalizar pueden hacer algunas estimaciones del número de objetos que hay en una caja, en un frasco, etc. Ejemplo: ¿Cuántas papas hay en un canasto?. ¿Cuántas naranjas hay en el bulto?.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
5. Contar hacia adelante y hacia atrás de 2 en 2, de 3 en 3, etc., a partir de cualquier número.	Dado un número, el alumno contará a partir de él, de 2 en 2, de 3 en 3, etc.

Sugerencias de actividades y metodología

Se puede dibujar en el patio una línea recta sobre la cual, partiendo del origen, se hacen marcas si es posible hasta llegar a 100, a distancias no muy grandes. Los niños van a saltar sobre la línea recta partiendo del origen o de cualquier otro punto. Para saber de qué número se parte, se marca el origen con el cero y las otras marcas se nacen en las decenas. Si se considera necesario, se hace una marca intermedia más grande cada cinco marcas.



Cada vez que un niño salte de una marca a otra, cuenta de 2 en 2, o de 3 en 3, etc., hacia adelante o hacia atrás a partir del número que indique el mastro. El alumno que esté saltando puede ir contando en voz alta y ojalá lo haga con cierta rapidez. Puede organizar un concurso entre dos equipos. Los alumnos saltan por turnos, uno de cada equipo, y gana el equipo en el que mayor número de alumnos haya saltado sin equivocarse y con rapidez. Cuando un niño se equivoque le corresponde el turno al siguiente del equipo contrario, quien comenzará en el sitio en el que se equivocó el que acaba de perder.

Posteriormente cada niño puede escribir en su cuaderno y en el tablero, los resultados de sus conteos.

Así pueden aparecer ejemplos como los siguientes:

- El niño que contó de 7 en 7 hacia adelante a partir de 8 escribe:
  8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64, ...
- El niño que contó de 9 en 9 hacia atrás a partir de 65 escribe:
  65, 56, 47, 38, 29, 20, 11, 1.

Se pueden dar algunos ejemplos para que los alumnos determinen de cuánto en cuánto contaron, a partir de qué número y si fue hacia adelante o hacia atrás.

En el siguiente ejemplo: 85, 79, 73, 67, 61, 55, 49,... se espera que digan que contaron de 6 en 6, a partir de 85 hacia atrás.

También puede dárseles los dos o tres primeros términos para que busquen los términos siguientes.

Ejemplos: 84, 79, 74, ...
50, 54, 58, ...

Se puede variar un poco la actividad, pidiendo a los niños que alternadamente cuenten hacia adelante o hacia atrás. Para esto, al saltar pueden, por ejemplo, avanzar cinco y luego retroceder dos, a partir de cualquier marca de la recta.

La habilidad de contar por saltos mentalmente y con rapidez es muy importante para afianzar el aprendizaje de las tablas de sumar, restar y multiplicar.

Pueden suponer que es una rana la que salta y hacer mentalmente los cálculos.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
6. Expresar verbalmente la relación de pertenecer a un conjunto.	Dados uno o más conjuntos y una lista de elementos el alumno dirá cuáles elementos pertenecen a cada uno de los conjuntos y cuáles no.
7. Expresar verbalmente la relación de estar contenido en un conjunto.	Dado un conjunto y varios de sus subconjuntos, el alumno explicará cuáles subconjuntos están contenidos en cuáles y por qué.

Sugerencias de actividades y metodología

En estas actividades puede trabajarse con conjuntos de números. Esto favorece la escritura y lectura de los conjuntos. Si el maestro lo considera conveniente, puede usar conjuntos cuyos elementos sean otros objetos, como letras, figuras, alumnos del curso, etc.

Si los alumnos trabajan en grupos, el maestro puede sugerir que cada grupo escriba la condición que deben cumplir los elementos del conjunto con el cual van a trabajar, y además los orienta para que el conjunto no resulte tan numeroso, pues sería muy demorado simbolizarlo y estudiarlo.

Algunos ejemplos de estos conjuntos pueden ser:

- Los números de tres cifras que terminen en 25.
- Los números de cuatro cifras que empiecen por 423.
- Los números de tres cifras que terminen en cero.
- Los números de 231 a 243 que sean pares.

Cada grupo escribe la lista de los elementos del conjunto escogido.

El maestro puede seleccionar uno de los conjuntos anteriores y, a propósito del mismo, hacer preguntas que lleven a los alumnos a utilizar las expresiones "pertenece" y "no pertenece". Es mejor no decir "la relación de pertenencia", sino más bien "la relación pertenece a" o "la relación de pertenecer".

Por ejemplo, si se selecciona el primero de los conjuntos y a éste se le llama A, algunas preguntas podrían ser:

- ¿El número 235 pertenece a A?
- ¿El número 1025 pertenece a A?

Los alumnos van explicando sus respuestas y escriben en el tablero las expresiones que indican la relación de pertenencia o de no pertenencia de los elementos al conjunto. Después de que hayan escrito las expresiones en palabras, el maestro puede decirles que hay una forma más corta de escribirlas, algo así como una taquigrafía o abreviatura de las expresiones largas:

325 pertenece a A: $325 \in A$
1 025 no pertenece a A: $1\,025 \notin A$

Para estudiar el uso de expresiones como "está contenido" y "no está contenido" entre conjuntos, puede pedirse a los alumnos un conjunto numérico cualquiera. Así por ejemplo, si el conjunto es el de los números desde 96 hasta 103, se le puede designar con la letra M, y se tiene:

$$M = \{96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103\}$$

Luego se les pide a los alumnos hallar subconjuntos de este conjunto, tales como:

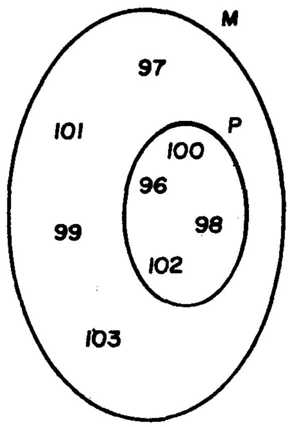
P es el conjunto de los números pares del conjunto M.

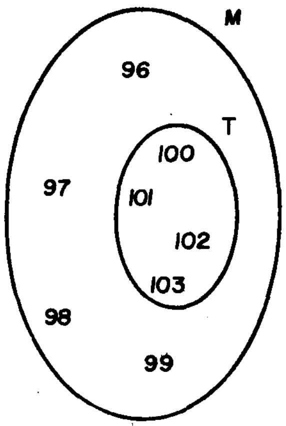
$$P = \{96, 98, 100, 102\}$$

T es el conjunto de los números de tres cifras del conjunto M:

T ={100, 101, 102, 103}

Enseguida pueden hacerse representaciones gráficas que muestren el conjunto dado y cada uno de los subconjuntos hallados:





Con gráficas como éstas se visualiza cómo el conjunto P es un subconjunto de M, es decir cómo P está contenido en . M.

De la misma manera se analizan otros ejemplos. También se dan ejemplos de conjuntos que no estén contenidos en M.

- Pueden hacer también otros ejercicios como el siguiente:

- Una rana parte del punto 0 sobre la recta numérica y salta de cinco en cinco hasta llegar a 100. Otra rana parte del punto 0 y salta de diez en diez sobre la recta numérica hasta llegar a 100.

¿Cuáles puntos fueron tocados por ambas ranas?.

¿Qué podemos decir del conjunto de los puntos tocados por la rana cuando saltó de diez en diez, con respecto al conjunto de puntos tocados cuando saltó de cinco en cinco?.

Finalmente se llega a establecer que algunas veces entre dos conjuntos existe una relación especial cuando uno de los conjuntos dados está contenido en el otro o (lo que es lo mismo) cuando es un subconjunto de éste último. Es mejor no decir "la relación de contenencia", sino más bien "la relación está contenido en" o "la relación es subconjunto de", o también "la relación de estar contenido", o "la relación de ser subconjunto".

Si el maestro cree conveniente integrar este tema con temas de otras áreas donde sea necesario hacer clasificaciones, hará notar a los alumnos que cada una de las clases resultantes en una clasificación es subconjunto del conjunto referencial que se haya propuesto para clasificar.

Es posible que los alumnos no acepten que todo el referencial sea subconjunto, ni que un solo elemento pueda formar un subconjunto. Es mejor seguirles sus ideas y no imponerles algo que no entienden.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
8. Reconocer las relaciones "... es mayor que..." y "...es menor que..." en números hasta de seis dígitos y representarlos gráficamente.	Dado un conjunto de números y una relación de orden, el alumno lo ordenará y hará la representación gráfica correspondiente.
9. Reconocer algunas propiedades de las relaciones "... es mayor que..." y "...es menor que..." en números hasta de seis dígitos.	El alumno explicará, mediante el diagrama de flechas de una de las relaciones en estudio, algunas de las propiedades de esa relación.
10. Reconocer que la relación "...es mayor que..." es la inversa de la relación "...es menor que...".	El alumno explicará por qué la relación "...es mayor que..." es la inversa de la relación "...es menor que...".

Sugerencias de actividades y metodología

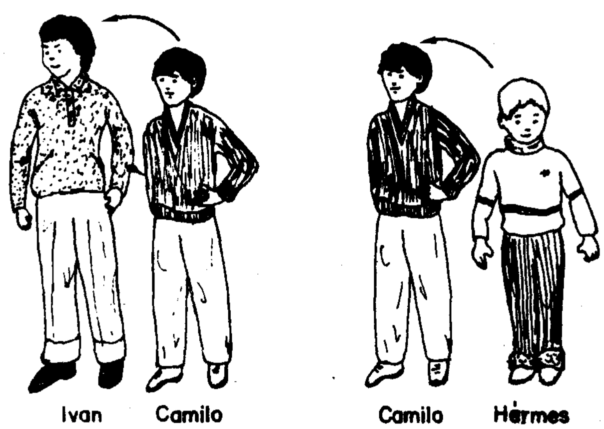
Antes de iniciar el estudio de las relaciones de orden en conjuntos numéricos, se puede realizar una actividad preliminar que consiste en ordenar otro tipo de objetos.

Los alumnos pueden organizarse en pequeños grupos para encontrar la respuesta a ejercicios propuestos por el maestro. Algunos ejemplos de tales ejercicios son:

Se escoge un conjunto de tres balones no conocidos y de diferente color (azul, rojo y amarillo) tales que el azul sea más grande que el rojo y el rojo más gránde que el amarillo. A los alumnos se les permite ver el azul y el rojo, y a continuación, se guardan; luego se les permite ver el rojo y el amarillo. Después de guardar los balones se les pregunta: ¿Cuál es más grande, el azul o el amarillo?

Conviene que cada vez que se les presente un par de balones se les pida verbalizar la relación entre ellos utilizando la expresión '...es más grande que...".

- Iván es más alto que Camilo y Camilo es más alto que Hermes. ¿Quién es más alto, Iván o Hermes?. Si se presenta alguna dificultad para hallar la respuesta, se puede recurrir a una representación gráfica.



La flecha señala al más alto de cada pareja.

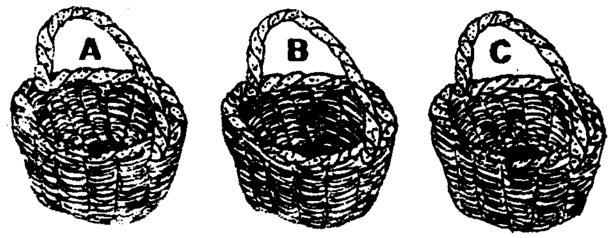
El maestro puede preguntar:

¿Quién quiere representar a Iván?
¿Quién puede ser Camilo?. ¿Quién Hermes?.

Cuando los tres alumnos estén adelante, cada uno señala a aquel que es más alto que él.

- En relación con el peso de tres canastos se tiene la siguiente información: los pesos son diferentes entre sí, el canasto A pesa más que el canasto B. Si solo te permiten comparar el peso de dos canastos (levantándolos del piso uno en cada mano) ¿podrías decir con toda seguridad cuál de los tres es el más pesado?.

¿Si escogieras los canastos B y C, cómo deberán ser sus pesos para poder concluir que el "canasto A pesa más que el canasto C"?.

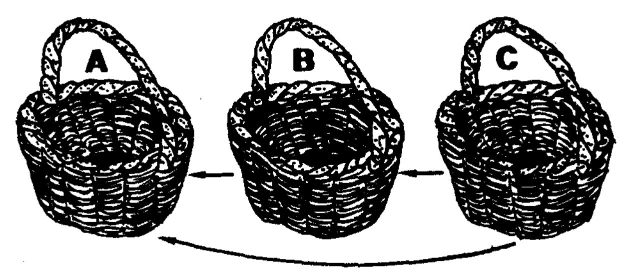


- Si en los canastos anteriores se cumple que:

  - el canasto A pesa más que el canasto B y
  - el canasto B pesa más que el canasto C

¿qué se puede concluir de los pesos de los canastos A y C?

Utilizando un dibujo podemos representar la relación "...pesa más que..." de la siguiente manera:



En este diagrama se puede observar que cada canasto "señala "a aquel que es más pesado que él. Se observa también que hay dos flechas seguidas y una flecha directa que permite "transitar" del canasto C al A saltándose el canasto intermedio. B

Cuando se hayan construido varios diagramas como el anterior, basados en otros ejemplos, ya se pueden hacer observaciones de tipo general como las siguientes:

- Siempre que hay dos flecha seguidas hay una flecha directa.

- Entre dos objetos solo es posible transitar en un sentido; es decir no hay entre ellos un par de flechas de ida y regreso.

Para ejercitar lo aprendido anteriormente, el maestro puede proponer actividades parecidas a las adivinanzas: se tiene un conjunto D, de bolas para algunos deportes, cada bola se representa por una letra, así: D= {t,v,r,}

Se dan pares de tarjetas en donde se representa por medio de flechas la relación "...es más grande que..." en el conjunto D; los alumnos exploran en qué caso un par de estas tarjetas permite ordenar el conjunto de bolas por su tamaño, y en qué casos no.

Estos pares de tarjetas serán como:

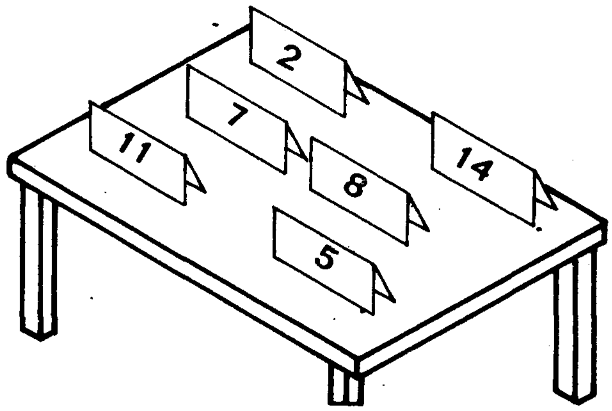
Primer caso: $\boxed{v \longleftarrow t}$ $\boxed{v \longleftarrow r}$

Segundo caso: $\boxed{v \longleftarrow t}$ $\boxed{t \longleftarrow r}$

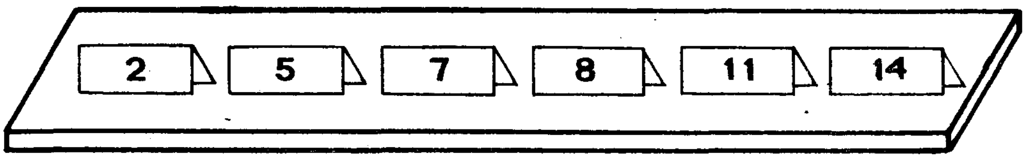
Los alumnos pronto descubrirán que con la información de las tarjetas, del primer caso no se puede ordenar el conjunto, porque se sabe que **v** es más grande que **t** y que **v** es más grande que **r**, pero no se sabe cuál es más grande de **t** y **r**.

En el segundo caso, por las tarjetas se sabe que **v** es más grande que **t** y que **t** es más grande que **r**, o sea que **t** es el término intermedio; entonces **v** es también más grande que **r**, y así el conjunto queda ordenado: **v** es la bola más grande, **t** es la que sigue y **r** es la más pequeña. Los alumnos comprenderán más fácilmente este resultado, si suponen por ejemplo, que **v** es un balón de volibol, **t** es una de caucho y **r** es una bola de cristal o mara.

Para realizar actividades semejantes a las anteriores, usamos conjuntos numéricos, el maestro puede llevar a la clase algunos números escritos en tarjetas dobladas por la mitad (5 ó 6), las cuales saca al azar; las va mostrando a los alumnos, quienes las van leyendo, y luego el maestro las va ubicando sobre el escritorio.



El maestro pide a los alumnos que le ayuden a ordenarlas partiendo del número más pequeño hasta llegar al más grande, y las va reorganizando en el orden indicado por los alumnos.



En seguida escribe estos números en el tablero en el orden indicado, dejando espacios grandes entre ellos.

Se da a los alumnos dos tarjetas como las siguientes:

| "...es mayor que..." | | "...es menor que..." |

Se pide que seleccionen cuál expresión escrita en estas tarjetas podrá copiarse en medio de cada dos números. Los alumnos van a seleccionar sin duda la tarjeta:

| "...es menor que..." |

y el maestro escribe en el tablero esta expresión en medio de cada dos números.

$\boxed{2}$ es menor que $\boxed{5}$ es menor que $\boxed{7}$ es menor que $\boxed{8}$ es menor que $\boxed{11}$ es menor que $\boxed{14}$.

Los alumnos se pueden repartir en grupos de 6 a 8. Elaboran tarjetas para cada par de números escritos en el tablero:

| 2 es menor que 5 | | 5 es menor que 7 | | 7 es menor que 8 |

| 8 es menor que 11 | | 11 es menor que 14 |

El maestro puede pedir a los alumnos que elaboren otras tarjetas, todas las que resulten del "tránsito" que permite un mismo número escrito a la derecha de la primera tarjeta y a la izquierda de la otra, por ejemplo:

| 2 es menor que 5 | y | 5 es menor que 7 | permiten la tarjeta | 2 es menor que 7 |

Se tendrán cinco tarjetas que empiezan con el número 2, cuatro tarjetas que empiezan con el número 5, tres que empiezan con el número 7, dos que empiezan con el número 8 y una que empieza con el número 11. Si algún grupo omite una o varias tarjetas, el maestro explica por qué es conveniente que las completen y les indica el proceso que permite elaborar esas tarjetas.

El maestro hace un resumen de lo aprendido, enfatizado que la relación "...es menor que..." permitió ordenar el conjunto.

Luego, cuando cada grupo tenga sus tarjetas completas, o sea, con todas las parejas que están relacionadas en el conjunto de números propuesto, el maestro puede pedir a los alumnos que analicen una de ellas y busquen en las demás si aparece otra en donde los números estén cambiados en el orden de escritura; por ejemplo si la tarjeta seleccionada es: $\boxed{\text{5 es menor que 11}}$ se les pide que busquen la tarjeta $\boxed{\text{11 es menor que 5}}$

Los alumnos seguramente no la van a buscar y probablemente se les va a ocurrir decir que esa tarjeta no debe aparecer, puesto que es falso que 11 sea menor que 5. Cuando dos números diferentes estén ordenados en un sentido no aparecen ordenados en sentido contrario por la misma relación.

En este momento se recuerda a los alumnos que cuando se trabaja con la relación "...es menor que...", en un conjunto numérico, los matemáticos abrevian la expresión por un símbolo, y en lugar de escribir: "...es menor que..." se emplea "...<...".

La representación inicial, escrita en el tablero, queda así:

$2<5<7<8<11<14$, y las tarjetas quedan así:

$\boxed{5<7}$ $\boxed{8<1}$ $\boxed{7<14}$ etc.

Para la relación "...es mayor que..." se podría desarrollar una actividad como la siguiente:

Sobre el mapa político del Departamento, Intendencia o Comisaría en donde esté ubicada la localidad donde viven los alumnos, señalan su capital y tres ciudades intermedias o poblaciones importantes y averiguan el número de habitantes de cada una de ellas; por ejemplo: si la localidad de los alumnos está ubicada en el Departamento de Caldas, pueden seleccionarse localidades como: Manizales, La Dorada, Salamina, Victoria.

Una vez seleccionadas las localidades, se busca el número de habitantes de cada una de ellas.

LOCALIDAD	No. DE HABITANTES
Manizales	197246
La Dorada	30995
Salamina	12585
Victoria	2584

Nota: estos datos se refieren a la población urbana, según el censo de 1973. (Datos preliminares del DANE). El maestro procurará mantenerlos actualizados.

Los alumnos elaboran tarjetas con estos datos y las ordenan de acuerdo con la relación: "...es mayor que..." según el número de habitantes que posea la localidad.

197246	30995	12585	2584
Manizales	La Dorada	Salamina	Victoria

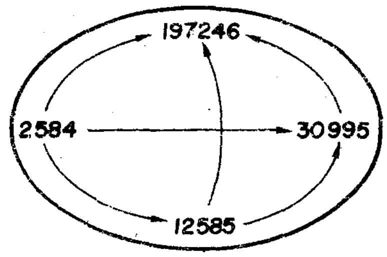
El maestro les recuerda el símbolo para reemplazar la expresión "... es mayor que..." y los alumnos hacen otras tarjetas para indicar el orden establecido:

$\boxed{197\,246>30\,995}$ $\boxed{30\,995>12\,585}$ $\boxed{12585>2\,584}$

Los alumnos van cayendo en la cuenta de que a partir de estas tarjetas se pueden elaborar otras. Por ejemplo:

$\boxed{197\,246>12\,585}$ $\boxed{197\,246>2\,584}$ $\boxed{30\,995>2\,584}$

En un conjunto de pocos elementos como éste, los alumnos pueden construir el diagrama de flechas:



En este diagrama resaltan aquellas flechas que permiten ir de un número a otro sin necesidad de "intermediarios". También pueden observar que entre dos números sólo hay una flecha (no hay caminos de doble vía).

En el diagrama de flechas anterior los alumnos pueden trazar, ojalá con otro color, las flechas correspondientes a la relación "...es menor que...". Así puede observar que el sentido de estas últimas flechas es contrario al de las primeras. También pueden comparar las frases relacionales de las dos relaciones y ver que para una misma pareja de números es necesario cambiar el orden de ellos si se quiere que tales frases sean verdaderas.

Las observaciones anteriores les van a permitir reconocer fácilmente que la relación "...es menor que..." es la inversa de la relación "...es mayor que...".

Objetivo específico	Indicador de evaluación
11. Generalizar un algoritmo para la solución de adiciones.	Ante una serie de adiciones el estudiante utilizará consistentemente una técnica que facilite la operación.

Sugerencias de actividades y metodología

Los estudiantes deben adquirir habilidad para efectuar las operaciones cada vez con mayor precisión y rapidez. Por esta razón, a medida que avancen en los conceptos relativos a las operaciones, el maestro puede ir sugiriendo la manera más práctica de efectuarlas. En esta forma los estudiantes van aprendiendo las reglas o instrucciones que conforman un algoritmo.

Antes de que los alumnos apliquen un algoritmo para efectuar la adición, es conveniente que hagan suficientes ejercicios de cálculo mental pues ésto agilizará la práctica de cualquier algoritmo.

Es posible que en ejercicios de cálculo mental algunos alumnos utilicen la descomposición de los números y asociación de centenas, decenas y unidades para encontrar el resultado.

El algoritmo que aquí se propone es tal vez el más utilizado y conocido. Pero de la experiencia del maestro y de la actividad del alumno pueden surgir otros algoritmos que en algunos casos den mejores resultados.

En segundo grado de educación básica se extendió el algoritmo para adiciones con resultados entre cien y mil, lo cual significa que los alumnos conocen métodos para escribir los sumandos en forma adecuada, por ejemplo en columnas, aprovechando el hecho de que el sistema de base diez que usamos es posicional; además conocen cómo proceder cuando al sumar cada columna se obtienen unidades de orden superior.

Para que los estudiantes repasen estos conceptos se pueden sugerir ejercicios que sean representativos de los diferentes casos:

a. Cuando la suma de cada columna no alcanza para completar unidades de orden superior inmediato; es decir "sin llevar":

```
  2 321      3 452
  1 463        316
  4 202      4 001
  -----      -----
  7 986      7 769
```

b. Cuando la suma en algunas de las columnas permite completar unidades de orden superior inmediato:

```
  2 11        22 11
  -----      -------
  6 932       59 432
    598       34 867
    849       87 642
  -----        5 620
  8 379      -------
             187 561
```

Una vez que los estudiantes adquieren suficiente habilidad, la línea superior sobre la cual se anotan las unidades de orden superior que se "llevan", puede suprimirse.

c. Un caso que puede presentar dificultades es aquel en el que al sumar una columna se obtienen unidades de orden superior y de la columna que se está sumando no quedan unidades sueltas, por lo cual se debe escribir 0 y "llevar" las unidades de orden superior a la siguiente columna.

```
   11 11       2 32
  -------     ------
   34 668      6 874
   21 021      1 295
   44 311      8 579
  -------      3 252
  100 000     ------
              20 000
```

A través de la práctica de ejercicios como son los anteriores los alumnos pueden ir generalizando el algoritmo.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
12. Estimar el orden de magnitud del resultado de una adición.	Propuesta una adición el estudiante encontrará mentalmente una aproximación al resultado.
13. Resolver y formular problemas que requieran el uso de la adición.	El alumno planteará y resolverá problemas que ejerciten la adición.

Sugerencias de actividades y metodología

El desarrollo de la habilidad de estimar el orden de magnitud del resultado de una operación puede considerarse como una buena competencia que facilita el análisis de muchas situaciones.

Se pueden proponer actividades de cálculo mental en donde una primera etapa esté dedicada a obtener una aproximación al resultado de una adición de varios sumandos.

Por ejemplo, se dan oralmente los siguientes sumandos: 45 + 43 + 37 + 35 + 24. Se puede hacer caer en la cuenta al alumno de que si suma las cifras de las decenas, o sea 4 + 4 + 3 + 3 + 2, se obtiene 160, lo que le permite asegurar que el resultado es mayor de 160; también puede hacerse un cálculo aproximando cada sumando a la decena superior o sea 5+5+4+4+3, así que el resultado es menor que 210. Se obtienen de esta manera dos números: uno menor que el resultado y uno mayor que él, los cuales permiten estimar el orden de magnitud del resultado de la adición.

Ahora el maestro pide a los alumnos que mentalmente calculen el resultado exacto y lo comparen con los resultados de estas dos aproximaciones: $160 < 184 < 210$.

Es posible que los alumnos sugieran una mejor aproximación, por ejemplo suponiendo que cada sumando tiene como cifra de las unidades 5, o sea sumarán: 45 + 45 + 35 + 35 + 25. Este cálculo será sencillo una vez que se adquiera habilidad en la suma de las decenas de los sumandos a la cual sumarán 5 unidades por cada sumando.

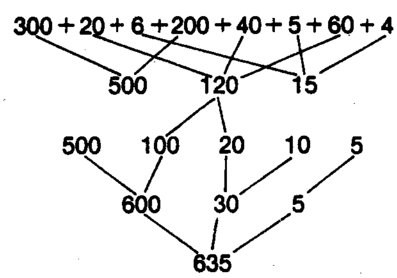
El maestro puede organizar concursos para que participen todos los alumnos: un grupo calculará la aproximación por defecto, otros la aproximación por exceso y otros la aproximación que podría llamarse "del centro". Es interesante que se comparen estas tres aproximaciones con el resultado exacto de la adición.

Los ejercicios podrán ampliarse tomando sumandos de tres y dos cifras, como por ejemplo: 210 + 46 + 92 + 15.

Es posible que en los cálculos los alumnos prefieran descomponer los sumandos de tres cifras en centenas y decenas sobrantes y usen estas últimas en un primer cálculo y al final sumen las centenas; o que procedan atendiendo al primer modelo. El maestro debe permitir que los alumnos procedan en la forma que sea más sencilla para ellos.

Es aconsejable que una vez que los alumnos den sus respuestas orales se haga un análisis de las adiciones y sus aproximaciones en el tablero. Quizás ejercicios de descomposición de los sumandos ayuden a los alumnos a encontrar caminos más fáciles para realizar la operación o sus aproximaciones.

Por ejemplo si se suman: 326 + 245 + 64. Los sumandos se pueden descomponer y sumar así:



Los alumnos deben ejercitarse en resolver y formular problemas usando la adición. Se tendrá especial cuidado en la elección de los datos numéricos de tal manera que correspondan a aquellos que manejan los alumnos en este grado. En la formulación de problemas por parte de los alumnos debe orientárseles para que den datos suficientes para lograr encontrar la respuesta que piden.

Algunos modelos de problemas pueden ser como:

- En el primer grado hay 120 alumnos, en el segundo hay 118, en el tercero hay 105, en el cuarto hay 102 y en el quinto hay 112. ¿Cuántos alumnos tiene, en total, la escuela?.

Sobre el río Magdalena hay muchos puertos, saliendo de la Dorada hacia Barranquilla, se pasa por Puerto Berrío por Gamarra. De la Dorada a Puerto Berrío hay 158 Km., de Puerto Berrío a Gamarra 257 Km., y de Gamarra a Barranquilla 473 Km. ¿Cuántos kilómetros hay desde la Dorada hasta Barranquilla?

En un mapa de Colombia pueden encontrar la representación del río Magdalena y la de los puertos que aquí se mencionan.

- Paco recibe \$30 diarios. Si debe coger cuatro buses que valen a \$6 cada uno, ¿le alcanzará el dinero para comprarse una empanada de \$10?

- Halle dos números de dos cifras cuya suma sea 156.

El maestro y los alumnos propondrán otros problemas que tengan alguna relación con cuestiones regionales o con temas de actualidad y que faciliten la integración con otras áreas.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
14. Generalizar un algoritmo para la solución de sustracciones.	El estudiante utilizará normas que faciliten las sustracciones propuestas.

Sugerencias de actividades y metodología

En el segundo grado de educación básica los alumnos realizaron sustracciones en las cuales el minuendo es un número menor que mil y donde es necesario "prestar" de las unidades de orden superior para poder efectuar la operación.

Generalizar un algoritmo para la solución de sustracción significa aplicar una serie de reglas o instrucciones que faciliten cualquier sustracción propuesta. Para este fin propondremos diferentes tipos de ejercicios que el maestro podrá seleccionar de acuerdo con las necesidades de los alumnos en lo que se refiere a desarrollar habilidades en el uso del algoritmo.

1. Casos en los cuales el minuendo, el sustraendo y la diferencia son úmeros que se presentan con una sola cifra.

4 - 2	6 - 4	9 - 8
2 - 1	7 - 6	9 - 7
6 - 1	8 - 1	5 - 1
4 - 4	6 - 6	7 - 7

2. Casos en los cuales la sustracción se efectúa entre un minuendo cuya representación tiene dos cifras y un sustraendo de una cifra.

15 - 4	29 - 7	58 -5
16 - 6	32 - 2	46 - 6
18 - 9	43 - 8	76 - 7
10 - 8	30 - 7	50 - 9

Nota: para sustracciones entre números pequeños es posible que los alumnos cuenten a partir del sustraendo hasta llegar al minuendo y encontrar así la diferencia. Este hecho puede ser usado para hacer caer en la cuenta que la sustracción es la operación inversa de la adición y verificar a partir de esta última la respuesta a la sustracción.

Por ejemplo: $9 - 7 = 2$ porque $7 + 2 = 9$

$15 - 4 = 11$ porque $4 + 11 = 15$

Para lograr el mismo resultado pueden presentarse ecuaciones sencillas como:

$9 - \square = 2$; $\square + 2 = 9$

Otra ayuda qué suelen usar los alumnos para realizar la sustracción es descomponer el minuendo en dos sumandos de tal manera que uno de ellos facilite la operación, por ejemplo:

$29 - 7 = (20 + 9) - 7$	$53 - 8 = (40 + 13) - 8$
$29 - 7 = 20 + (9 - 7)$	$53 - 8 = 40 + (13 - 8)$
$29 - 7 = 20 + 2$	$53 - 8 = 40 + 5$
$29 - 7 = 22$	$53 - 8 = 45$

Este procedimiento aclara muy bien por qué es necesario "prestar" de la unidad de orden superior para poder realizar la sustracción, y por qué en realidad nunca se "devuelve" lo prestado: es simplemente una descomposición del minuendo.

3. Sustracciones con números de dos cifras tanto en el minuendo como en el sustraendo.

96	48	59	72	40	70
-34	-36	-47	-58	-19	-65

Nota: en los casos en que no es necesario "prestar", lo más sencillo es que los alumnos procedan restando unidades de unidades y decenas de decenas. En los segundos ejercicios propuestos se hace necesario "prestar" una decena para tener unidades suficientes y poder efectuar la sustracción. Los alumnos necesitan inicialmente señalar que acaban de prestar una decena e indicarlo de alguna manera, así:

Cambiando el minuendo:

En este caso, rebajándolo de 4 a 3:

$$\begin{array}{r} 3 \\ \cancel{4}\,{}^{1}6 \\ -1\;9 \\ \hline 2\;7 \end{array}$$

Cambiando el sustraendo:

En este caso, aumentándolo de 1 a 2:

$$\begin{array}{r} 4\;6 \\ -1_{1}9 \\ \hline 2\;7 \end{array}$$

Estas ayudas deben permitirse y aun sugerirse, hasta que el alumno haga mentalmente el cambio necesario para poder seguir adelante.

Otro algoritmo aconsejable contempla completar hasta la próxima decena así:

Para efectuar la sustracción 34-17, sumamos 3 tanto al minuendo como al sustraendo obteniendo 37-20 y estamos en el caso donde no hay necesidad de prestar.

4. En el cálculo de sustracciones entre números que se representan con tres, cuatro o más cifras, sólo será necesario aplicar estos procedimientos varias veces, generalizando más el algoritmo.

496	774	908	346	826
- 38	- 98	- 49	-251	-598

1 276	7 329	4 032	98 762
- 594	- 877	- 975	- 1 497

Objetivo específico	Indicador de evaluación
15. Resolver y formular problemas que requieran el uso de adiciones y de sustracciones.	El alumno formulará un problema cuya solución requiera el uso de la adición y de la sustracción y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

El maestro propone problemas de este tipo siempre que lo considere oportuno y orienta a los alumnos para que formulen correctamente otros.

- En el curso tercero hay 45 estudiantes. El lunes de la semana pasada asistieron 39, el martes 42, el miércoles 44, el jueves 41 y el viernes 39. ¿Cuántas ausencias hubo en total en la semana pasada en tercero?.
- De la Dorada a Barranquilla, a lo largo del río Magdalena, hay una distancia de 888 Km; entre estos dos puertos se encuentran, entre otros, primero Gamarra y luego el Banco. De la Dorada a Gamarra hay 415 Km y a El Banco 509 Km. ¿Cuál es la distancia entre Gamarra y El Banco, y entre Gamarra y Barranquilla?. Observar un mapa de Colombia.
- Si tu vas a un almacén y compras un par de medias en 115 pesos, una camisa en 358 pesos y un cinturón en 217 pesos y pagas con un billete de 1 000 pesos ¿Cuánto dinero te devolverán?.
- En el bazar de la escuela se recolectaron 135600 pesos. De ese dinero 60000 se destinarán para reparar la escuela, 53800 para libros, y el resto para útiles de enfermería. ¿Cuánto dinero quedó para la enfermería?.

puede

Para formular problemas se pude pensar en primera instancia dar los datos para que formulen el problema que los contenga. Ejemplo: 43 - 28 = 15

89 + 13 − 57 = 45

Se pueden aprovechar los problemas que formulen los alumnos para discutir con ellos la importancia de los temas tratados en el problema, la falta o exceso de información en las situaciones que ellos seleccionen, las distintas maneras de llegar a una solución correcta, la importancia de tener una estimación aproximada de la solución, y las maneras de comprobar ellos mismos si la solución es correcta o no.

Se pueden hacer otros ejercicios en los que faltan algunas cifras o donde algunas cifras se representan por letras.

Ejemplos:

$$\begin{array}{r} AB \\ -A \\ \hline B9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12A \\ -A7 \\ \hline 68 \end{array}$$

Cada letra representa un dígito y letras diferentes representan dígitos diferentes.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
16. Realizar ejercicios de cálculo mental en los cuales hay que efectuar multiplicaciones.	El estudiante hallará sin la ayuda de papel y lápiz el resultado de algunas multiplicaciones y explicará el procedimiento empleado.

Sugerencias de actividades y metodología

Se puede comenzar la actividad haciendo un repaso de las tablas de multiplicar con suficientes ejercicios para memorizarlos, ya que es posible que algunos niños las hayan olvidado, o que otros no las hayan memorizado todavía. Esto podrán hacerlo a través de problemas sencillos que los niños formulen, concursos y juegos que los motiven a aprenderlas.

Un ejercicio que puede servir para que los niños afianzen el aprendizaje de las tablas es la descomposición en dos factores de un número que sea resultado de alguna de las tablas.

Ejemplo: $20 = 4 \times 5 = 2 \times 10 = 5 \times 4 = 10 \times 2 =$

$$20 \times 1 = 1 \times 20$$

Posteriormente se pueden proponer algunas multiplicaciones como las siguientes para que los niños las realicen mentalmente:

9×4, $7 \times 4 \times 2$, 6×15, 9×12

3×20, 11×8, 23×7, $6 \times 8 \times 5$

Cuando los niños hayan hecho algunas multiplicaciones se les puede preguntar sobre el procedimiento que han empleado; con base en estas explicaciones y en las dificultades encontradas se repasan algunas propiedades de esta operación para emplearlas como una ayuda que facilite los cálculos. Los procedimientos para efectuar multiplicaciones abreviadas pueden servir también para agilizar los cálculos en forma mental y escrita.

Ejemplos: Es posible que para algunos niños sea más fácil calcular 4×9 que 9×4. Observarán que están cambiando el orden de los factores y que en cualquiera de los dos casos se obtiene el mismo resultado $9 \times 4 = 4 \times 9 = 36$.

En una multiplicación de 3 o más factores, la operación se realiza en varios pasos, en cada uno de los cuales sólo hay que multiplicar dos números.

En la multiplicación de $7 \times 4 \times 2$ puede resultar más fácil para algunos niños multiplicar 4 por 2 y este resultado multiplicarlo por 7; que multiplicar 7 por 4 y luego este resultado por 2.

En $3 \times 3 \times 8$ puede ser más fácil efectuar primero 3×3 y luego este resultado por 8; que 3×8 y luego este resultado por 3.

En $3 \times 9 \times 2$, puede ser más fácil efectuar 3×2 y luego este resultado por 9 que cualquier otra forma de agrupar los factores.

Cada niño buscará la forma más fácil de agrupar los factores para efectuar mentalmente y en forma rápida los cálculos.

Otra forma de facilitar el desarrollo de algunas multiplicaciones consiste en descomponer en sumandos uno de los factores, multiplicar el otro factor por cada uno de los sumandos y sumar estos resultados.

Para hallar mentalmente el resultado de 6×15, es más fácil descomponer $15 = 10 + 5$, efectuar la multiplicación de $6 \times 10 = 60$ y $6 \times 5 = 30$ y luego sumar estos resultados: $60 + 30 = 90$.

En la multiplicación 12 x 9 pueden descomponer el 12 en varias maneras: 12= 10+ 2 = 8+ 4 = 6+ 6 = 5 +7 = 9 + 3. Luego multiplicar cada uno de los dos sumandos por 9, según la descomposición que cada niño haya elegido, y finalmente sumar los resultados de las multiplicaciones:

9 x12= 9 x (10 +2) = 90 + 18 = 108
9 x (5 +7) = 45 + 63 = 108
9 x (6 +6) = 54 + 54 = 108, etc.

Puede ser que resulte más fácil para hacer el cálculo mental, la descomposición de 12 en 10 + 2.

También puede ocurrir que alguien descomponga el 12, en 3 o más sumandos: 12=5+4+3=2+1+5+4, y luego efectúe las multiplicaciones y la suma. Lo importante es que cada niño busque la manera que le quede más fácil para hacer los cálculos mentales con rapidez.

Los procedimientos para efectuar multiplicaciones abreviadas también ayudan al cálculo mental: al hallar 3x 40, basta multiplicar 3 x 4=12 y agregar un cero al resultado 3 x 40 = 120.

En algunos ejercicios como 23 x 7 pueden ayudarse tanto de las propiedades como de las multiplicaciones abreviadas.

23 x 7 = (20 + 3) x 7 = 20 x 7 + 3 x 7 = 140 + 21 = 161

En todos los ejercicios es mejor partir de una situación concreta cuya solución requiera de la multiplicación para que el alumno la resuelva mentalmente.

Es conveniente motivar a los alumnos para que empleen estos procedimientos de cálculo mental a lo largo de todo el programa, cada vez que haya que efectuar multiplicaciones.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
17. Ampliar el algoritmo para efectuar la multiplicación.	El alumno efectuará varias multiplicaciones aplicando el algoritmo y explicará cada uno de los pasos que desarrolla.

Sugerencias de actividades y metodología

Pueden comenzar la actividad con un concurso sobre tablas de multiplicar, para repasarlas.

Para que el niño vaya formando un algoritmo que le permita efectuar multiplicaciones, conviene iniciar con algunos casos sencillos de multiplicación vistos en el grado anterior: 23 x 3. Este ejemplo es uno de los más sencillos, porque para obtener el resultado bastará multiplicar cada cifra del número 23 por el factor 3, sin que sea necesario "llevar".

Un ejercicio en el que sí hay que llevar es: 47 x 6

```
  47
 x 6
----
 282
```

falta la línea.

En este ejercicio al multiplicar 6 por 7, se obtiene como resultado 42 pero no se escribe 42 en la columna de las unidades: solo se coloca el 2 en la columna de las unidades y se "llevan" 4 decenas.

Con la expresión "llevar" se quiere indicar que por ser decenas, éstas se suman al valor que se obtenga al multplicar la cifra de las decenas (para el ejercicio al efectuar 6 x 4 y obtener 24 decenas, debe sumarle 4 decenas obteniendo como resultado 28 decenas).

El maestro puede explicar que "llevar" las decenas es una manera rápida de obtener el resultado que se podría obtener también en esta forma:

centenas	decenas	unidades
	4 x	7 6
2	4 4	2
2	8	2

Se "llevan" mentalmente cuatro decenas para ahorrarse en el papel la suma intermedia 4 = 4 + 8.

Otros ejercicios similares al anterior son:

```
 25    48    64
x 5   x 6   x 4
```

Cuando hayan hecho suficientes ejercicios de estos, se les puede proponer multiplicaciones entre números de dos cifras. Algunos ejemplos pueden ser los siguientes:

```
 34    47    98
x12   x25   x76
```

Obsérvese que el resultado de multiplicar las decenas del segundo factor se escribe una columna corrida hacia la izquierda, ya que se está multiplicando por las decenas.

Se tiene un caso especial de este tipo de multiplicaciones que puede ofrecer dificultad al niño y que por lo tanto debe ser tratado en detalle, cuando el valor de las unidades de uno de los factores es cero, como en el ejercicio: 45 x 50.

Los niños podrán resolverlo aplicando el algoritmo o en forma abreviada.

```
  45          45
 x50         x50
----        ----
  00        2250
 225
----
2250
```

Conviene recordar el procedimiento abreviado para multiplicar por 10, 20, ..., 90 y recalcar en la importancia de utilizarlo para agilizar los cálculos. Si el resultado es incorrecto, el maestro puede pedir un estimativo aproximado del resultado para que el mismo alumno caiga en la cuenta de que hay un error.

Antes de pasar a un nuevo tipo de multiplicaciones de mayor complejidad, el maestro debe asegurarse de que los alumnos pueden efectuar con cierto grado de facilidad multiplicaciones cuyos factores sean de dos cifras.

Posteriormente pasarán a multiplicaciones en las que uno de los factores es de dos cifras y el otro de tres, como las siguientes:

378	608	370	878	52
x 45	x 73	x 68	x 60	x372

Para hallar el resultado se sigue el procedimiento empleado en los ejercicios anteriores.

En ejemplos como el segundo hay que tener cuidado que al multiplicar por cero el alumno no olvide colocar el valor de las unidades de orden superior que "llevaba".

Casos como el tercer ejemplo, cuando la última cifra del primer factor es cero, se pueden efectuar siguiendo el algoritmo o abreviadamente, suprimiendo el cero en cada producto parcial y escribirlo solo al final.

```
   870
x   68
------
   696
  522
------
 59160
```

Al multiplicar un número de tres cifras por un número de dos cifras donde la última cifra es cero, como el cuarto ejemplo, se podrá realizar de dos formas diferentes:

```
  878
 x 60
-----
  000             878
 5268            x 60
-----           -----
52680           52680
```

Obsérvese que en el último ejemplo propuesto, el resultado de multiplicar las centenas del segundo factor se escribe dos columnas corridas hacia la izquierda, ya que se está multiplicando por las centenas. Es conveniente que los alumnos tengan claridad sobre esto, para evitar posibles equivocaciones como la de olvidar correr las cifras hacia la izquierda.

Para finalizar se pueden proponer multiplicaciones entre números de tres cifras. Una posible secuencia de ejercicios es la siguiente:

432	971	275	325	809
x121	x897	x509	x600	x333

Algunos de estos ejercicios también se pueden realizar en forma abreviada: el tercero, suprimiendo la fila de ceros y colocando el resultado de multiplicar 5 x 275 dos columnas corridas hacia la izquierda ya que se está multiplicando por la cifra de las centenas:

```
   275
 x 509
------
  2475
1375
------
139975
```

El cuarto, multiplicando el primer factor por 6 y agregando dos ceros a este resultado.

Otro tipo de multiplicaciones es el siguiente:

```
   706
 x 509
------
  6354
3530
------
359354
```

Es conveniente que los niños se vayan acostumbrando a utilizar los métodos abreviados, cuando los hay, pues estos contribuyen a agilizar los cálculos.

Si el maestro lo cree conveniente los alumnos pueden realizar multiplicaciones con números de más de tres cifras, siguiendo el mismo procedimiento, aunque este algoritmo se va a ampliar en cuarto grado con esos y otros casos.

Hay que dar a los alumnos el tiempo que requieran para interiorizar los procedimientos hasta que efectúen con rapidez y sin dificultad estas multiplicaciones, y hasta que ellos mismos puedan corregir sus propios errores.

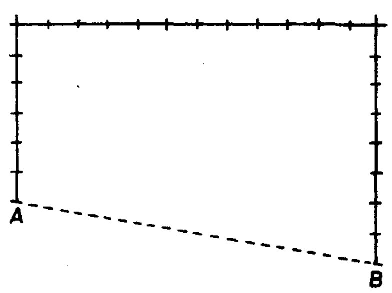
Objetivo específico	Indicador de evaluación
18. Efectuar multiplicaciones abreviadas por 10, 100 y 1 000; por 11, 12, ..., 19; por 21, 31, ..., 91.	El alumno efectuará abreviadamente algunas multiplicaciones por 10, 100 ó 1 000, otras por 11, 12, ..., ó 19, y otras por 21, 31, ..., 91.

Sugerencias de actividades y metodología

Para motivar a los alumnos y hacerles ver la importancia y utilidad que tiene el conocer algunas formas rápidas y abreviadas de realizar ciertas actividades, y concretamente de desarrollar algunas operaciones, el maestro puede proponer una actividad como la siguiente: escoge dos niños que tengan aproximadamente el mismo desarrollo físico. Los dos niños corren de un punto A a otro B, siguiendo caminos diferentes; el maestro selecciona los caminos de tal forma que el uno sea más largo que el otro, y que se pueda prever que el niño que tome el camino más corto llegue primero.

Los dos puntos deben ser visibles para el resto de los niños.

El diagrama sugiere una forma de plantear los recorridos.



Primer camino - - - - - - - - - -

Segundo camino -+-+-+-+-+-

Los dos niños parten al mismo tiempo del mismo sitio; sin embargo, al sitio B llega primero aquel que hizo el recorrido más corto. Esta razón puede ser dada, entre otras, por los niños, si se les pregunta por qué un niño llegó primero que otro.

A continuación el maestro puede comentar que para realizar algunas multiplicaciones también se han encontrado caminos más cortos; plantear en el tablero multiplicaciones por 10, 100 y 1 000 para que los niños las realicen, utilizando el procedimiento largo aprendido antes:

16	27	54	47	187	10
x 10	x 100	x 10	x 1000	x 100	x 54
00	00	00	00	000	40
16	00	54	00	000	50
160	27	540	00	187	540
	2700		47	18700	
			47000		

Luego de varios ejercicios, los niños empiezan a comparar el factor diferente de 10, 100 ó 1 000 con el resultado de la multiplicación. De esta observación pueden concluir que el resultado es dicho factor con uno, dos o tres ceros a la derecha. Como regla para este tipo de multiplicaciones, los mismos alumnos pueden establecer que: Para multiplicar abreviadamente un número por 10, 100 y 1000 basta escribir el número y agregarle a la derecha un cero, dos ceros o tres ceros respectivamente.

Ejemplos: 17 x 10 = 170
76 x 100 = 76 00
100 x 432 = 43 200

Pueden realizar algunos ejercicios de cálculo mental para practicar estos procedimientos. Lo importante es que el maestro no empiece por enseñar la regla y luego haga ejercicios, sino que a partir de los ejercicios los propios alumnos formulen la regla.

Posteriormente el maestro les plantea multiplicaciones por 11, 12, 13, ..., 19 como estas:

24	24	24	24
x 11	x 12	x 13	x 14
24	48	72	96
24	24	24	24
264	288	312	336

Si es necesario, continúa con el 15, 16, etc., hasta que los niños descubran que el producto parcial de multiplicar 24 por 1 de las decenas, siempre vuelve a dar 24. Les pedirá que se inventen una manera de ahorrarse la repetición de este número 24 que ya está escrito arriba.

Aunque el maestro esté acostumbrado al método usual de abreviar estos productos, que llamaremos forma A, es mejor que deje libertad para que los alumnos inventen ésta u otras formas, y que les facilite el hacerlo. (Ver por ejemplo las formas B, C, D, E).

```
Forma A:   24  x 11        24  x 12
           24               48
           ------           ------
           264              288

Forma B:       24               48
           11 x 24          12 x 24
           -------          -------
              264              288

Forma C:   24               48
24 x 11    24 x 11          24 x 12
           -------          -------
           264              288

Forma D:   11 x 24          12 x 24
                24               48
           -------          -------
               264              288

Forma E:    264             288
           -----            -----
             24               48
            24               24
           x11              x12
           -----            -----
```

En la puesta en común de los métodos abreviados descubiertos por los alumnos, se discuten las ventajas y los peligros de equivocarse, que presente cada uno.

La forma abreviada usual (Forma A) tiene el inconveniente de que el producto parcial se escribe debajo y a la derecha del factor 24, cuando en la forma larga corriente el 24 aparece abajo a la izquierda del producto parcial.

A continuación se muestra la forma larga corriente de multiplicar por 12, y su forma abreviada usual (Forma A).

```
  24           24 x 12
x 12            48
----           -------
  48           288
 24
----
 288
```


Obsérvese que al abreviar, los productos parciales se han cambiado de orden:

centenas	decenas	unidades
 2	4 4	8
2	8	8

centenas	decenas	unidades
2 	4 4	 8
2	8	8

Al cambiar el orden de los productos parciales, el resultado de multiplicar 2 por 24, o sea 48, debe aparecer un lugar corrido hacia la derecha de 24, para que las cifras queden en la misma columna, es decir, unidades con unidades, decenas con decenas, etc.

Este inconveniente se evita con las formas B, C y E aunque en este último hay que sumar hacia arriba. Lo importante es que los alumnos descubran la posibilidad de inventar algoritmos o modificaciones a los algoritmos, y no queden con la impresión de que ya está todo hecho y fijado definitivamente, o que tienen que aprender de memoria cuál es la forma A, o la B, etc. (Las letras no tienen importancia).

Como ejercicio, el maestro puede decir a los niños que inventen maneras de multiplicar abreviadamente por factores terminados en 1.

Por ejemplo:

```
 37      37      37
x21     x31     x41
----    ----    ----
```

El maestro los puede orientar para que caigan en la cuenta de que así como en las multiplicaciones por 11, 12, 13, ... 19 se abrevia la multiplicación al no escribir el resultado de multiplicar el factor por uno, sino utilizando la escritura que ya se tiene de ese factor, también al multiplicar por números como 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81 y 91, se puede hacer algo similar.

Después de comparar y analizar los distintos métodos propuestos, se puede elegir el más conveniente. Posiblemente sea el siguiente:

	Forma abreviada
45	45 x 21
x21	90
45	945
90	
945	

Observan que en este caso el resultado de multiplicar el número 45 por 2 se escribe un lugar a la derecha porque se está multiplicando por las decenas. En forma similar se efectúan las multiplicaciones abreviadas por 31, 41, ..., 91.

Ejemplos:	76 x 31	347 x 41	49 x 51
	228	1388	245
	2356	14227	2499

Es conveniente, luego de que los niños han aprendido por separado los métodos para multiplicar en forma abreviada por 11, 12, 13, ... 19 y por 21, 31, 41, ..., 91, proponerles ejercicios alternos donde empleen uno de los dos métodos, para que establezcan las diferencias entre ellos, sobre todo en la colocación de los productos parciales.

Para finalizar conviene hacer ejercicios de cálculo mental para emplear estos procedimientos, por ejemplo:

¿Cuáles son las últimas dos cifras (de las decenas y de las unidades) en el producto 11 x 11 x 11?
¿o en el producto 987654321 x 11?.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
19. Resolver y formular problemas que requieran del uso de la multiplicación.	El estudiante formulará algunos problemas que requieran de la multiplicación y los resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Se puede empezar con problemas sencillos donde solamente se tenga que hacer una multiplicación para hallar la respuesta pedida; luego se proponen problemas en los que haya que hacer dos o más multiplicaciones, procurando aumentar cada vez el grado de complejidad de éstas, para que se tenga la oportunidad de aplicar al algoritmo. Se debe procurar que los problemas para resolver sean basados en datos reales y con significación para el alumno.

Ejemplo 1. Un cuaderno vale 100 pesos. ¿Cuánto valen 5 de ellos?

Ejemplo 2. Rosita va al mercado y compra 5 libras de papa a 10 pesos cada libra, 6 naranjas a 3 pesos cada una, y una piña en 45 pesos. ¿Cuánto gastó Rosita?

Ejemplo 3. Un camión repartidor de leche vende diariamente 945 botellas de leche durante el mes de abril. ¿Cuánta leche vendió en este mes?.

En este problema los alumnos pueden concretar más las condiciones según sus experiencias. Así es posible que ellos consideren los domingos y festivos como días en los cuales no pasa el camión.

Ejemplo 4. En un pueblo hay 897 familias y cada familia consume semanalmente 6 libras de arroz. ¿Cuántas libras de arroz consumirán en 8 semanas?.

Es mejor orientar a los alumnos para que la respuesta que den no sea sólo un número a secas, sino que digan a que corresponde ese número, si a metros, pesos, personas, etc, y que reflexionen sobre esta respuesta. Para ésto pueden volver al problema inicial y probar si el dato hallado es realmente la solución al problema.

Posteriormente los alumnos ensayan a formular sus propios problemas y a resolverlos. Se procura revisar todos estos problemas y orientarlos para que ellos mismos vean los datos que sobran, o los que faltan, o vean que han formulado el problema correctamente, así como para que discutan maneras alternas de solucionarlos y para que comprueben si esas soluciones son correctas.

Pueden iniciar formulando un problema para unos datos dados.

Ejemplo: 31 x 20 620.

La formulación de problemas por los mismos alumnos es una ocasión apropiada para la integración de las matemáticas con otras áreas curriculares.

Como los alumnos han tratado los conceptos de par e impar, podrían formularse preguntas como éstas:

- ¿Qué sabe del producto de un número par por un impar?.
- ¿Cuándo es el producto de dos números par por un impar?
- ¿Por qué hay más números pares que impares en las tablas de multiplicar?.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
20. Resolver ejercicios de cálculo mental en los cuales haya que efectuar divisiones entre números de una cifra y cuyo cociente sea de una cifra.	El alumno resolverá mentalmente algunas divisiones, determinando el cociente y el residuo.

Sugerencias de actividades y metodología

En el grado anterior los alumnos reconocieron la división como la operación inversa de la multiplicación y con base en esto resolvieron algunas divisiones sencillas.

Pueden comenzar haciendo este repaso, por escrito y mentalmente, con ejercicios como:

$\underbrace{5 \times 7 = \square}$ $\square \div 5 = 7$ $\square \div 7 = 5$

Luego calculan mentalmente el cociente aproximado de algunas divisiones, en las que el divisor y el cociente tienen una cifra, como estas:

$38 \div 9 = \square$ $75 \div 8 = \square$ $85 \div 9 = \square$ $10 \div 3 = \square$

Al resolver estos ejercicios ayudándose de las tablas de la multiplicación, no encontrarán un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo. Buscan entonces el número que multiplicado por el divisor dé un número menor que el dividendo y que sea el más próximo: $38 \div 9 = 4$ aproximadamente, ya que $9 \times 4 = 36$, 36 es el número menor más próximo a 38.

La habilidad de calcular rápida y mentalmente el cociente en estas divisiones es muy importante para formular posteriormente un algoritmo para la división.

Cuando los alumnos calculen con rapidez estos cocientes pueden calcular también el residuo, en cada caso; primero por escrito y después mentalmente.

Pueden hallarlo así como lo hicieron en segundo grado:

$$\begin{array}{r|l} 38 & 9 \\ \cline{2-2} -36 & 4 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

También pueden hallarlo de la siguiente manera:

El mayor número que multiplicado por 9 dá un número menor que 38, es 4.

$$38 = 9 \times 4 + \square$$

El residuo lo hallan multiplicando $9 \times 4 = 36$ y restando 36 de 38 ($38 - 36 = 2$). Así obtienen $38 = 9 \times 4 + 2$.

Es conveniente que los alumnos se familiaricen con esta otra forma de expresar los resultados de la división.

Al calcular mentalmente estos resultados pueden expresarlo con expresiones como:

38 dividido entre 9, dá 4 y sobran 2, o simplemente: el cociente es 4 y el residuo es 2.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
21. Formular un algoritmo para la división.	Ante una serie de divisiones, el alumno utilizará consistentemente una técnica que facilite la operación.

Sugerencias de actividades y metodología

En este grado se comienza a formular un algoritmo o procedimiento para efectuar cualquier división. Este algoritmo, tal vez el más conocido por los maestros, es solo una propuesta que puede ser modificada o cambiada por otra que el maestro conozca y que considere que dá mejores resultados.

La secuencia aquí propuesta también puede ser variada por el maestro, según las circunstancias en que se encuentren los alumnos.

En este momento es necesario que los alumnos manejen correctamente las operaciones de adición, sustracción y multiplicación y que calculen mentalmente cocientes de una cifra en divisiones de números de dos cifras entre números de una cifra, como:

$$\begin{array}{r|l} 72 & 9 \\ \cline{2-2} -72 & 8 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 76 & 8 \\ \cline{2-2} -72 & 9 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Se comienza el algoritmo con divisiones en las que el divisor tiene una cifra y el dividendo dos, tres, cuatro, etc., cifras.

Es importante que cada vez que los alumnos efectúen una resta se fijen en cada residuo, pues a algunos puede resultarles residuos mayores que el divisor, ocasión que se puede aprovechar para propiciar una discusión entre los alumnos y orientarlos para que caigan en la cuenta de que cada residuo debe ser menor que el divisor.

Posteriormente se puede pasar a divisiones en las que el divisor sea de dos cifras. Pueden iniciar con divisiones en las que el dividendo es también de dos cifras.

$$\begin{array}{r|l} 96 & 32 \\ \cline{2-2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 82 & 12 \\ \cline{2-2} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 94 & 53 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Es posible que los alumnos tengan dificultad para encontrar un número que multiplicado por el divisor del dividendo o un número menor. Se pueden ensayar algunas multiplicaciones para encontrarlo. En la primera división propuesta se tiene:

$32 \times 1 = 32$
$32 \times 2 = 64$
$32 \times 3 = 96$

El número buscado es 3, y el ejercicio se resolvería así:

$$\begin{array}{r|l} 96 & 32 \\ \cline{2-2} -96 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

En los otros casos pueden seguir este procedimiento: Cuando hayan calculado el cociente de estas divisiones, ensayando algunas multiplicaciones, el maestro puede pedirles que entre todos busquen una manera más fácil de calcular dichos cocientes. Pueden sugerir, entre otras, la siguiente: calcular el cociente de las decenas del dividendo entre las decenas del divisor. Para ver más fácilmente las decenas se pueden tapar con un objeto, con la mano o imaginariamente las unidades.

Para las divisiones anteriores sería calcular cuántas veces cabe 3 en 9, 1 en 8 y 5 en 9.

Algunas veces el cociente que resulta es muy grande y la resta no se puede realizar, otras veces es muy pequeño y el residuo es mayor que el divisor; en cada caso el maestro puede orientarlos para que ellos mismos decidan cuál debe ser el cociente y a través de estos ensayos cada uno vaya adquiriendo la habilidad de calcularlo con más precisión y en la forma más rápida.

El maestro puede proponerles otras divisiones entre números de dos difras para que las resuelvan mediante el criterio anterior. Es muy importante que el alumno desarrolle la habilidad de calcular estos cocientes con rapidez, ya que esto le ayudará a realizar divisiones con un número mayor de cifras.

Hagamos primero divisiones en las que el dividendo es de dos cifras y el cociente es un número de dos cifras como los siguientes ejemplos:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ \cline{2-2} -3\downarrow & 12 \\ \cline{1-1} 06 & \\ -6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 89 & 8 \\ \cline{2-2} -8\downarrow & 11 \\ \cline{1-1} 09 & \\ -8 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ \cline{2-2} -5\downarrow & 17 \\ \cline{1-1} 35 & \\ -35 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 97 & 7 \\ \cline{2-2} -7\downarrow & 13 \\ \cline{1-1} 27 & \\ -21 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

Obsérvese que en algunas divisiones el residuo es cero y en otras es diferente de cero. Se debe procurar que los alumnos coloquen correctamente los términos y que expresen cada división en términos de la multiplicación. Así expresarán los ejercicios anteriores de la siguiente manera:

$36 = 3 \times 12 \qquad 85 = 5 \times 17$
$89 = 8 \times 11 + 1 \qquad 97 = 7 \times 13 + 6$

Cuando los alumnos hayan resulto sin dificultad un número suficiente de estos ejercicios pueden pasar a divisiones en las que el dividendo es de tres cifras.

Una posible secuencia para estas divisiones es la siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 126 & 6 \\ \cline{2-2} -12\downarrow & 21 \\ \cline{1-1} 06 & \\ -6 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 328 & 7 \\ \cline{2-2} -28\downarrow & 46 \\ \cline{1-1} 48 & \\ -42 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 282 & 4 \\ \cline{2-2} -28\downarrow & 70 \\ \cline{1-1} 02 & \end{array}$$

En estas divisiones el cociente es de dos cifras.

Ahora veamos algunas en las que el cociente es de 3 cifras:

```
 936 |3         895 |5         783 |4         985 |9         630 |3
- 9  |312      - 5  |179      - 4  |195      -9   |109      - 6  |210
  03            39             38            085              03
- 3            - 35           - 36          - 81             - 3
  06             45             23             4               00
-  6           - 45           - 20
   0              0              3
```

Algunos alumnos pueden tener dificultad en colocar la cifra que se baja, para lo cual se les recalca que ésta siempre se coloca a la derecha del residuo parcial. Esta dificultad crece cuando una vez que se ha bajado la cifra siguiente, el divisor no cabe y se coloca el cero en el cociente, como en el penúltimo ejercicio. Muchos alumnos olvidan colocar este cero y además no saben dónde colocar la cifra siguiente que se baja.

Enseguida se pueden proponer las divisiones cuyo dividendo tiene 3 cifras, como las siguientes:

```
144 |12      375 |28      528 |22      985 |95
```

En estos casos el cociente tiene dos cifras.

Veamos algunas en las que el cociente va a tener una cifra

```
195 |25      893 |99      273 |58
```

Posiblemente los alumnos tengan dificultad en calcular el cociente en estas divisiones; el maestro los puede ir orientando para que utilicen las decenas tanto del dividendo como del divisor. Para los ejemplos, sería calcular cuántas veces cabe 2 en 19, 9 en 89 y 5 en 27.

Es conveniente dar tiempo suficiente a los alumnos para que interioricen el procedimiento empleado en cada una de las divisiones. Se avanzará a medida que el alumno vaya efectuando con rapidez y sin dificultad cada tipo de división.

Según el nivel de los alumnos y si el maestro lo considera conveniente se pueden hacer divisiones en las que el dividendo y el divisor tengan mayor número de cifras.

Este algoritmo se va a ampliar en cuarto grado con estos y otros casos.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
22. Formular y resolver problemas que requieran el uso de por lo menos dos de las siguientes operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división.	El alumno formulará un problema cuya solución requiera el uso de por lo menos dos de las operaciones mencionadas anteriormente y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Es conveniente que el maestro proponga problemas que estén relacionados con situaciones ocasionales o permanentes de la vida de los alumnos; así resultarán de algún interés para ellos y se les facilitará la formulación de otros.

- Un señor trabaja 6 horas diarias de lunes a viernes y recibe 480 pesos por cada día de trabajo. ¿Cuántas horas trabaja semanalmente y cuánto gana por hora de trabajo?.

- ¿Cuál es la diferencia entre 3 veces y 8 y 5 veces 5?

- Ana, Rosa y Juan llegan a una tienda, cada uno tiene 58 pesos. Después de pensar qué podrían comprar, hicieron el siguiente pedido:

	Precio Unidad	Pidió Ana	Pidió Rosa	Pidió Juan
Colombinas	$3	IIII	IIIII	III
Chocolates	$12	II	III	
Galletas	$7	III	I	II
Gasto total				

Los alumnos completan el cuadro agregando otras tres columnas encabezadas por títulos como: Gastó Ana, Gastó Rosa, Gastó Juan. Luego calculan los datos pedidos y finalmente hallan cuánto le sobró a cada niño.

- Un salón de clase tiene 4 ventanas, cada ventana tiene 8 vidrios, si los salones son 15. ¿Cuántas ventanas hay en total y cuántos vidrios hay en total?.

Cada vez que resuelvan un problema se debe procurar que reflexionen sobre la respuesta, para lo cual pueden retomar el problema y comprobar que el dato o datos hallados es realmente la solución a dicho problema.

Esta actividad se correlaciona fácilmente con Ciencias Sociales y Naturales.

Objetivo específico	**Indicadores de evaluación**
23. Descomponer números en factores.	Dado un número, el alumno lo descompondrá en factores.
24. Reconocer que los divisores de un número son también sus factores.	Dado un número, el alumno lo expresará como el producto de dos o más factores y comprobará que cada uno de éstos factores es divisor del número.
25. Identificar números primos y compuestos.	Dada una lista de números, el estudiante identificará los que sean primos y los que sean compuestos.
26. Enumerar todos los números primos de uno y dos dígitos.	El estudiante escribirá la lista de los números primos menores que 100.

Sugerencias de actividades y metodología

Se puede comenzar recordando que en una multiplicación los términos que se multiplican se llaman factores.

En 4 x 5 =20 4 y 5 son factores de 20

Un número puede descomponerse en dos o más factores. En el grado anterior los alumnos descompusieron un número en dos factores, con la ayuda de las tablas de multiplicar. A continuación pueden dividir 20 por algunos números, incluidos los factores de éste, y reconocer como divisores de 20 a aquellos divisores que dejan como residuo cero.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 5 \\ \hline 0 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 4 \\ \hline 0 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 10 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ \hline 2 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 8 \\ \hline 4 & 2 \end{array}$$

Así mediante la realización de divisiones distinguen los divisores y los no divisores de un número dado.

Los alumnos caen en la cuenta de que la lista de los divisores de un número es la misma de los factores del mismo número.

Ahora pueden descomponer números en dos o más factores, ejemplos:

40 = 8 x 5	60 = 30 x 2	17 = 17 x 1
40 = 4 x 2 x 5	60 = 6 x 5 x 2	53 = 53 x 1
40 = 2 x 2 x 2 x 5	60 = 3 x 2 x 5 x 2	

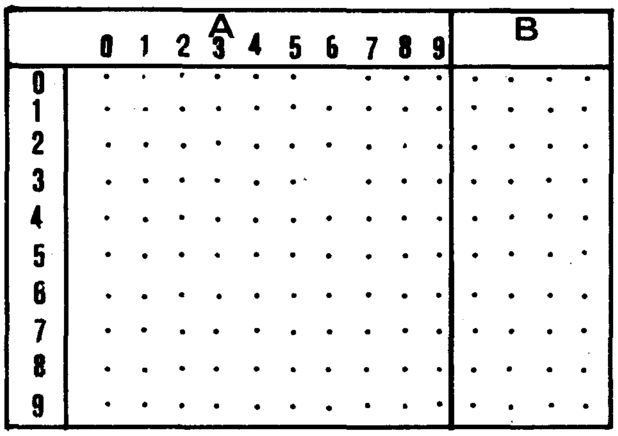
Así encuentran que hay números cuyos únicos factores son 1 y el mismo número, o cuyos divisores son 1 y el número.

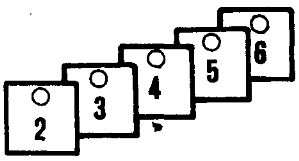
Esto puede visualizarse más fácilmente si se ponen filas de tapas con 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 tapas, y se les pide que las reorganicen en forma de rectángulos. Con el 5, el 7 y el 11 siempre sobran o faltan tapas para formar un rectángulo, pues sus únicos factores son el 1 y el número mismo: estos son los números primos.

Para iniciar el estudio de los números primos se pueden tener disponibles tarjetas con los números de 2 a 99 y un tablero con puntillas para colgar las tarjetas, dividido en dos partes: A y B. En la parte A quedan los números compuestos y en la parte B los números primos.

Si no hay tabla y puntillas, se puede colocar las tarjetas en una mesa grande, o cuadricular el tablero, e ir escribiendo y borrando los números.

Se reparten las tarjetas entre los niños. El juego consiste en ir encontrando todos los múltiplos





estrictos del número 2. El niño que tenga en la tarjeta el número 2 la cuelga en la primera puntilla de la parte B del tablero, los demás niños del curso miran sus tarjetas y determinan si tienen algún múltiplo estricto de 2; si la respuesta es afirmativa, cuelgan la tarjeta con ese múltiplo en el puesto que le corresponde en la parte A del tablero. Ejemplo: si un niño tiene en la tarjeta el número 28, debe colocarlo en la tercera fila de la parte A del tablero, o sea, la encabezada con el número 2 y en la novena columna, o sea, la encabezada con el número 8.

Cuando se hayan colgado todos los múltiplos estrictos de 2 en la parte A del tablero, se busca cuál es el número que sigue a 2 y cuya tarjeta no está colgada en la parte A del tablero. En este caso el número 3; su tarjeta se debe colgar al lado de la del 2 en la parte B del tablero y sus múltiplos estrictos en la parte A. El juego se continúa identificando el número que sigue a 3 y cuya tarjeta no esté colgada en el tablero. Ese número es 5, pues como 4 es múltiplo estricto de 2, su tarjeta debe estar colgada en la parte A del tablero.

El diagrama siguiente muestra el tablero cuando se ha trabajado siguiendo las reglas del juego y se han encontrado los múltiplos estrictos del 2, 3 y 5, pero todavía no se han comenzado a buscar los múltiplos estrictos de 7. Algunos múltiplos estrictos de 7 ya están en el tablero porque son también múltiplos de 2, de 3 ó de 5 pero quedan otros múltiplos de 7 como 49 cuya tarjeta falta en la parte A del tablero.

	A										B PRIMOS			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9				
0	•	•	•	•	4	•	6	•	8	9	2	3	5	7
1	10	•	12	•	14	15	16	•	18	•	•	•	•	•
2	20	21	22	•	24	25	26	27	28	•	•	•	•	•
3	30	•	32	33	34	35	36	•	38	39	•	•	•	•
4	40	•	42	•	44	45	46	•	48	•	•	•	•	•
5	50	51	52	•	54	55	56	57	58	•	•	•	•	•
6	60	•	62	63	64	65	66	•	68	69	•	•	•	•
7	70	•	72	•	74	75	76	•	78	•	•	•	•	•
8	80	81	82	•	84	85	86	87	88	•	•	•	•	•
9	90	•	92	93	94	95	96	•	98	99	•	•	•	•

La elección de un número para colgar su tarjeta en la parte B y de sus múltiplos estrictos, para colgar sus tarjetas en la parte A del tablero, se hace de acuerdo con las reglas dadas. El juego concluirá cuando las tarjetas estén colgadas o en la parte A o en la parte B del tablero. El siguiente es el conjunto de números que deben estar en la parte B del tablero.

B={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, 83, 89, 97}

El maestro puede recordar a los alumnos que este es el conjunto de números que no son múltiplos, en sentido estricto, de otros números del conjunto de 2 a 99. Si se intenta descomponer estos números en factores, se encontrará que los únicos factores de cada uno, son 1 y el mismo número.

Con la expresión "múltiplo estricto" o "múltiplo en sentido estricto" se hace referencia a aquellos números que son múltiplos de un número dado y además son estrictamente mayores que él por ejemplo: 8 es multiplo de 2 y además 8 es estrictamente mayor que 2. Por el contrario 24 no es múltiplo en sentido estricto de 24, porque aunque 24 por 1 da 24, 24 no es estrictamente mayor que 24.

También, se suele decir que un númro **a** es múltiplo estricto de otro número **b**, si **a** es el resultado de multiplicar **b** por un número diferente de 1.

Ejemplo: 24 es múltiplo estricto de 3, porque 24 es el resultado de multiplicar 3 por 8, que es un número diferente de 1.

$24 = 3 \times 8$ y $8 \neq 1$ (8 es diferente de 1)

Por el contrario 7 no es múltiplo estricto de 7, porque no hay un número diferente de 1 que multiplicado por 7 de como resultado 7. Aunque los matemáticos prefieren la relación "múltiplo o igual" o "múltiplo en sentido amplio", los niños prefieren la relación "múltiplo estricto". El conjunto B está formado por todos aquellos números que no son múltiplos estrictos de otros números diferentes de 1, o sea, que no hay números diferentes de uno y del mismo número que sean divisores de él. Este tipo de número se designa con el nombre de números PRIMOS. A los que aparecen en el conjunto A se les llama números COMPUESTOS, pues en cierto sentido están compuestos por sus divisores.

El conjunto de números primos menores que 100 es, pues, el conjunto B; por la inicial de la palabra "primos" podemos llamarlo también el conjunto P.

P={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 61, 71, 73, 79, 83, 89, 97}

El maestro puede explicar a los alumnos que el conjunto que se ha designado por la letra P, es sólo el conjunto de los números primos menores que 100, y es posible encontrar números primos mayores que 100.

Es probable que los alumnos pregunten si el número uno es primo o no. En ese caso el maestro puede explicar que si el uno llegara a figurar en el conjunto B, que es el mismo P, habría que colgar todas las tarjetas de 2 a 99 en el lado correspondiente al conjunto A, y no quedaría ningún número, fuera del uno, en el lado B. Por eso no se considera el uno como primo. Pero tampoco se considera como compuesto, pues no hay ningún número diferente de él que sea divisor suyo. El uno no es, pues, ni primo ni compuesto. Con una sola tapa no se puede formar ni una línea ni un rectángulo.

Como ejercicio, los alumnos encuentran algunos números primos mayores que 100.

Es conveniente hacer a los alumnos la aclaración de que aunque es difícil encontrar números de más de dos cifras que sean primos, esta dificultad para hallarlos no significa que no existen; solo muestra la falta de un método rápido para encontrarlos. Habría que ensayar muchas divisiones para descartarlas todas. Se puede ensayar muchas divisiones para descartarlas todas. Se puede estudiar por ejemplo el 143 y el 149.

Otra forma de hallar los números primos, consiste pues en intentar realizar con cada número todas las divisiones posibles con los números menores que él y diferentes de uno. Estos ejercicios permiten que los alumnos vayan eliminando posibilidades y construyendo sus criterios de divisibilidad, los cuales se explicitarán en 4o. gado. Si el resultado de alguna de estas divisiones da con residuo igual a cero, el número no es primo; por el contrario, si todas las divisiones dan con residuo diferente de cero el número es primo.

Ejemplo: se desea saber si 9 es un número primo; una forma de averiguarlo es intentar dividirlo por los números menores que él, pero diferentes de 1. así:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \hline 1 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

Como se ha encontrado que 9 dividido 3 da como resultado cero, entonces 9 no es un número primo porque tiene por lo menos un divisor diferente de él mismo y de 1. Las demás divisiones no se efectuaron, porque es suficiente encontrar un divisor diferente del número y de uno para concluir que no es primo.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
27. Construir números a partir de los números primos como factores.	Dados varios números primos, el alumno construirá otros números que tengan como factores dos o más de los números primos dados.

Sugerencias de actividades y metodología

En los objetivos anteriores los alumnos han identificado los números primos menores que 100 y las propiedades de este conjunto de números, pues al buscarles sus posibles divisores se concluyó que sólo eran divisibles por uno y por el número mismo. Por ejemplo: 17 es un número primo porque sólo es divisible por 1 y por 17. Por el contrario 12 no es un número primo porque además de ser divisible por 1 y por 12 lo es por 2, 3, 4 y 6. Una actividad que se puede plantear a los alumnos es la siguiente: con el tablero y las tarjetas empleadas en la actividad anterior desarrollan un concurso; para ello, se reparten en dos grupos. El concurso consiste en obtener los números de la parte A del tablero, o sea, los números compuestos usando los números de la parte B (números primos) del tablero como factores.

Como las tarjetas de la parte B no son suficientes para tal efecto, entonces los números representados en ellos se toman solamente como referencia y la descomposición se escribe en el tablero y en los cuadernos.

	A										B PRIMOS			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9				
0	·	·	·	·	4	·	6	·	8	9	2	3	5	7
1	10	·	12	·	14	15	16	·	18	·	11	13	17	19
2	20	21	22	·	24	25	26	27	28	·	23	29	·	·
3	30	·	32	33	34	35	36	·	38	39	31	37	·	·
4	40	·	42	·	44	45	46	·	48	49	41	43	47	·
5	50	51	52	·	54	55	56	57	58	·	53	59	·	·
6	60	·	62	63	64	65	66	·	68	69	61	67	·	·
7	70	·	72	·	74	75	76	77	78	·	71	73	79	·
8	80	81	82	·	84	85	86	87	88	·	83	89	·	·
9	90	91	92	93	94	95	96	·	98	99	97	·	·	·

Ejemplos:

a) $40 = 8 \times 5$ — Como 8 no está en la parte B del tablero, lo descomponemos.

$40 = 4 \times 2 \times 5$ — Como 4 no está en la parte B del tablero, lo descomponemos.

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$ — Aquí todos los números son primos.

b) $65 = 5 \times 13$ — Los dos factores son primos.

c) $72 = 8 \times 9$

$72 = 2 \times 4 \times 3 \times 3$

$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

El ganador del concurso será aquel grupo que logre expresar la mayor cantidad de números de la parte A del tablero, empleando los de la parte B como factores.

Para llevar la cuenta, los alumnos pueden escribir en el tablero con tiza los productos y los resultados y, del tablero donde están las tarjetas, irán quitando aquellas tarjetas cuyos números se hayan expresado como el resultado de multiplicar dos o más primos. También se podrá escribir al respaldo de cada tarjeta el producto de los números primos que dan como resultado ese número, como se muestra a continuación:

$\boxed{82} \longrightarrow \boxed{2 \times 41}$

$\boxed{42} \longrightarrow \boxed{2 \times 3 \times 7}$

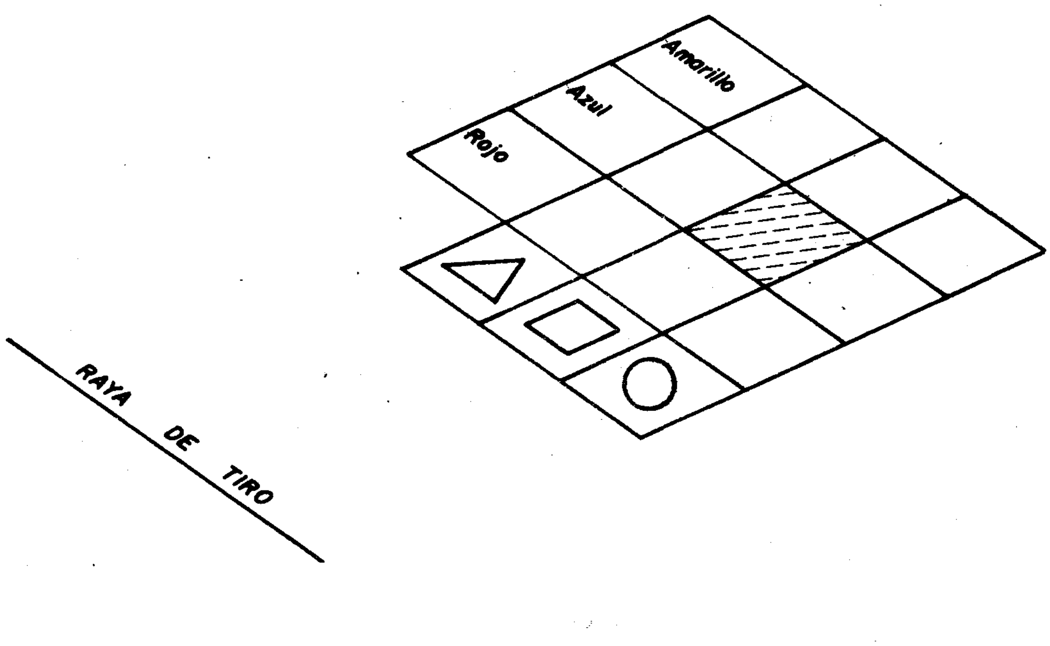
Al finalizar el concurso los alumnos pueden estar en capacidad de concluir por sí mismos que todos los números de la parte A del tablero se pueden expresar como el resultado de multiplicar dos o más números primos.

Otra actividad interesando para el logro del mismo objetivo consiste en construir la llamada CRIBA DE ERATOSTENES que el maestro puede encontrar en algunos textos escolares de matemáticas.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
28. Hallar la unión y la intersección entre conjuntos.	Dados dos conjuntos el alumno efectuará la unión y al intersección de ellos.
29. Reconocer el uso de la "y" y del "que" en el lenguaje ordinario para referirse a uniones e intersecciones de conjuntos numéricos.	
30. Reconocer el uso de la "o" y de la "y" en el lenguaje ordinario para referirse a las condiciones que debe cumplir un número para pertenecer a una unión o a una intersección de conjuntos numéricos.	Dadas la unión y la intersección de dos conjuntos, el alumno expresará las condiciones que cumplem los elementos que pertenecen al conjunto unión y al conjunto intersección.

Sugerencias de actividades y metodología

Para el logro de estos objetivos se puede trabajar inicialmente con un conjunto de fichas de diferente forma, color y tamaño, o con otro material que esté al alcance del maestro y de los alumnos. Si los alumnos tienen dominio de este material, la actividad que se propone puede omitirse. El material se reparte entre varios alumnos. Se preparan varios juegos de nueve fichas: 3 triángulos de diferente color, 3 cuadrados de diferente color y 3 círculos de diferente color. Se puede organizar un juego con el fin de que los alumnos identifiquen las cualidades de cada ficha. Esto facilitará el trabajo posterior. En el piso puede trazarse un cuadro como el siguiente:



El juego consiste en que un alumno o el maestro determina en voz alta un conjunto de fichas explicando qué condiciones deben cumplir las fichas de ese conjunto; por ejemplo: "Las que sean redondas o cuadradas!"; "las redondas y las verdes!". Al oir las características los alumnos que tengan fichas que las cumplan, las lanzarán desde la raya de tiro de manera que caigan en el cuadrito respectivo.

Se pueden poner reglas como las siguientes: el que tire una que no corresponde sale del juego, el que tire una que sí corresponde pero no le caiga en el cuadrito respectivo tendrá solo otra oportunidad más y el que lance la ficha indicada y ésta caiga en el cuadrito correspondiente, gana un punto y puede seguir jugando.

El orden de tirada lo determinan los mismos alumnos, quienes pueden agregar otras reglas al juego. Por ejemplo, si el maestro dice "los cuadrados azules", en la casilla sombreada quedarán los cuadrados azules.

Para trabajar con conjuntos de números que cumplan una determinada condición, a algunos alumnos podrá entregárseles una tarjeta en la cual esté escrito uno de los números comprendidos entre 2 y 20 (incluidos éstos). Es conveniente que los alumnos que tienen las tarjetas pasen adelante con el fin de formar dos conjuntos: el de los múltiplos de 3 que llamaremos A y el de los múltiplos de 2 que llamaremos B.

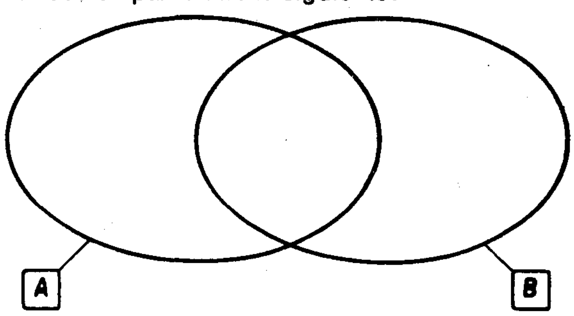
$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$$

Si se dan instrucciones como:
- Pasen acá los múltiplos de 3.
- Pasen acá los múltiplos de 2.

Seguramente los alumnos caen en la cuenta de cuál es el conjunto al que pertencen. Aquellos alumnos que tienen las tarjetas marcadas con los números 6, 12 y 18 responden ante ambas instrucciones porque dichos números son múltiplos de 3 y también de 2.

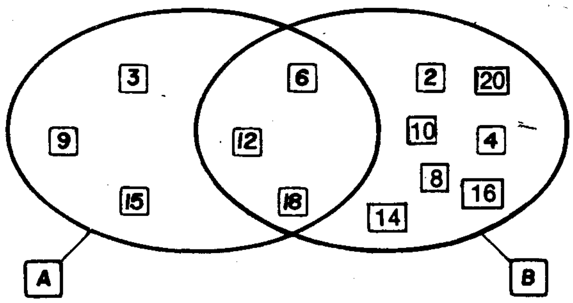
En el piso se puede hacer un diagrama y dar una instrucción parecida a la siguiente:



En este diagrama se van a colocar de manera tal que se pueda observar cuáles son los elementos de A y cuáles los de B. Posiblemente los alumnos cuyas tarjetas están marcadas con números que pertenecen a ambos conjuntos tendrán alguna dificultad para ubicarse y al ser interrogados al respecto es de esperar una respuesta parecida a la siguiente:

- Nuestros números pertenecen a ambos conjuntos, pues son múltiplos de 2 y múltiplos de 3.

- Nuestros números son los múltiplos de 2 **que** son múltiplos de 3.



Es conveniente explorar cuidadosamente el lenguaje que utilicen los niños y el significado que para ellos tienen sus expresiones ya que en ocasiones ellos utilizan la "y" y la "o" en forma diferente a la acostumbrada en los libros de matemáticas. Por ésto se recomienda que para realizar la unión y la intersección de conjuntos se parta de expresiones del lenguaje ordinario, sin tratar de forzar a los alumnos a repetir las definiciones establecidas.

Otros ejemplos de conjuntos que puede utilizar el maestro para el mismo fin son:

- Los múltiplos de 2; los múltiplos de 5. Su intersección da información importante acerca de la factorización de los números. Puede introducirse así el concepto de mínimo común múltiplo y explorar algunas de sus características (sin necesidad de definirlo explícitamente).

- Los divisores de 15 y los divisores 35. Nuevamente su intersección da información importante acerca de los números, el concepto de máximo común divisor y algunas de sus características.

- El conjunto de los números menores que 30 que terminan en 2; el conjunto de los números menores que 30 que son divisibles por 2.

- El conjunto de los números menores que 25 divisibles por 3; el conjunto de los números menores que 25 tales que la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
31. Identificar frases del lenguaje común en las cuales se emplean las palabras: todos, todo, cada uno, alguno, algunos, hay. (Opcional).	Dadas varias frases el alumno señalará aquellas en las que se dice, de alguna manera, cuántos elementos cumplen una condición determinada.
32. Formular frases que incluyan las palabras todo, cada uno, todos, agunos, alguno, hay. (Opcional).	Los alumnos formularán frases que incluyan las palabras todo, cada uno, todos, algunos, alguno, hay.

Sugerencias de actividades y metodología

En el lenguaje diario frecuentemente tenemos que recurrir al empleo de palabras como: todos, todo, cada uno, alguno, algunos, hay, etc., para expresar nuestras ideas. Esta experiencia que los alumnos tienen puede servir como punto de partida en el estudio de tales palabras.

Para iniciar, el maestro puede organizar con los alumnos una actividad como una tarde deportiva. Durante la elaboración de los preparativos posiblemente sea necesario dar instrucciones como:

- Todos los alumnos deben participar en la tarde deportiva. (1)
- Ningún niño debe estar en más de un equipo a la vez. (2)
- Algunos niños tienen que hacer de árbitros para los partidos. (3)
- Cada uno de los equipos debe entregar la lista de los jugadores. (4)
- Todo jugador debe tener un número en la espalda. (5)
- Cada equipo debe tener un nombre. (6)

Se espera que cuando se dé una de tales instrucciones sean los mismos alumnos quienes decidan si ésta se cumplió o no. En cada caso es conveniente explicar por qué.

Ejemplo: Para que instrucciones como la (1), (2), (4), (5) y (6) dejen de cumplirse basta con que un solo alumno infrinja lo expresado en tales instrucciones. Una instrucción como la (3) se cumple si uno o más alumnos hacen de árbitros.

Otro ejercicio que el maestro puede proponer para continuar con el estudio de este tipo de frases, consiste en escribir en unas tarjetas varias frases, algunas de las cuales signifiquen lo mismo; un alumno toma una tarjeta, lee la frase y busca aquella tarjeta donde aparezca una frase que signifique lo mismo.

Ejemplo. Supongamos que algunas de las frases que se tienen son:

- Todo alumno del curso debe practicar algún deporte. (a)
- Ningún niño del curso debe practicar algún deporte.
- Algunos niños del curso practican algún deporte. (b)
- Cada niño del curso debe practicar algún deporte. (a)
- Hay niños del curso que practican un deporte. (b)

Las frases señaladas con la misma letra significan lo mismo.

Aunque en las frases que se han propuesto no se dice el número exacto de alumnos de que se habla, sí se dice de alguna forma **cuántos** cumplen la condición de realizar una actividad determinada. Por esta razón, se dice que dichas **frases** están **cuantificadas.**

El maestro puede proponer otros ejemplos para que los alumnos distingan las frases cuantificadas de las que están sin cuantificar, y además para que identifiquen las expresiones que sirven para cuantificar frases, aunque no precisen el número de elementos. No hace falta introducir la palabra "cuantificador".

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
33. Reconocer en las fronteras de los sólidos algunas superficies planas: triángulares, rectangulares, cuadrangulares, circulares, etc.	Dados varios sólidos, el alumno reconocerá sus superficies: triangulares, rectangulares, cuadrangulares o circulares.
34. Reconocer que algunas superficies poseen fronteras y otras no.	Dados dos sólidos como una caja y una esfera, el alumno comparará sus superficies y reconocerá sus fronteras.

Sugerencias de actividades y metodología

El material estará conformado por los sólidos que tengan a su alrededor o al alcance de su mano, por ejemplo: lápices, borradores, cuadernos, libros, canicas, naranjas, cajas, tarros, latas vacías, tizas, monedas, botellas, balones, etc., o de sólidos construídos en cartulina por los alumnos, como los que elaboraron en el grado anterior.

El maestro puede pedir que formen grupos de unos 5 alumnos cada uno. Es conveniente que cada alumno disponga de un sólido; quien no disponga de un objeto puede observar alguno de los que se encuentran a la vista, como una caja, un tarro, etc.

Se les puede pedir que observen las fronteras o superficies de los sólidos; que las recorran con sus manos y que describan con sus propias palabras cómo es este movimiento en relación con las superficie sobre la cual se deslizan las manos.

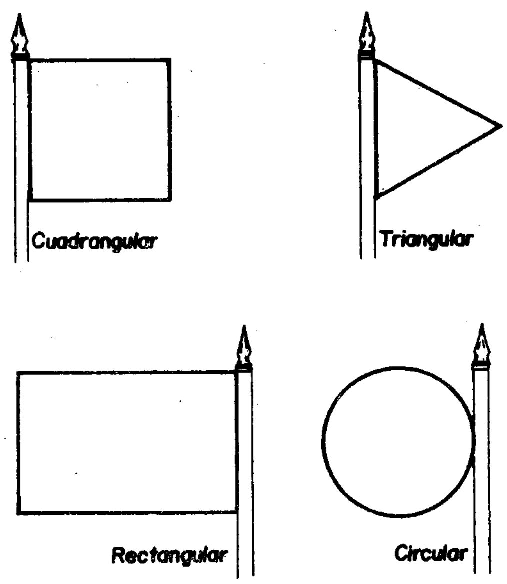
Los alumnos observan que las fronteras o superficies de los sólidos son pianas o curvas (pueden notar también que son lisas o rugosas, blancas, negras, frías, etc.).

La frontera o superficie del cuerpo permite que las manos se deslicen en forma continua sobre ella; también hace que este movimiento cambie de dirección o se interrumpa. O sea que la superficie limita el movimiento.

El maestro pregunta a los alumnos por los sólidos que solamente están limitados por superficies planas: cubos, cajas, dados, etc., y por los sólidos que solo están limitados por superficies curvas: canicas, balones, naranjas, etc. Luego pregunta por los sólidos que están limitados por superficies planas y curvas: tarros, botellas, algunos lápices, tizas, etc.

A los alumnos se les ocurren muchas maneras de expresar las formas,que tocan o ven en los objetos. Se pueden emplear las palabras de ellos y completar su vocabulario para que mediante la observación de las superficies de los sólidos señalen aquellos que tienen forma de cuadrado, las que tienen forma de rectángulo, las que tienen forma de círculo, y las que tienen forma de triángulo.

Como los grupos de trabajo son de unos 5 alumnos, a 4 de ellos se les puede entregar una banderita donde figure uno de los siguientes nombres: cuadrangular, rectangular, circular, triangular. El quinto se llamará "sin fronteras" y no tendrá bandera.



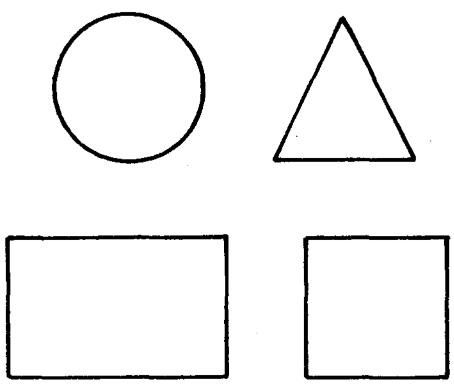
El grupo que tiene la bandera "cuadrangular" recibe todos los sólidos que estén limitados por superficies de forma cuadrangular, y así los demás grupos. Es posible que el quinto grupo solo reciba balones, canicas o naranjas.

En caso de que el grupo que tiene la bandera "triangular" no reciba ningún sólido, cada grupo puede recortar una pirámide, o buscar objetos que tengan esta cualidad: estar limitados por una o varias superficies de forma triangular.

El maestro puede seleccionar a un estudiante del grupo "cuadrangular" para que muestre a los demás compañeros las superficies planas de los sólidos de su grupo que tienen esa forma. Luego pregunta a los demás grupos si en los sólidos que ellos analizaron hay algunos cuyas superficies planas tienen forma cuadrangular; en caso afirmativo el alumno cuyo sólido tenga esta característica lo muestra, mientras otro alumno del mismo grupo dibuja en el tablero algunas de estas superficies.

Los demás grupos pueden turnarse en hacer un juego parecido al anterior.

Los alumnos empiezan a proponer clasificaciones y seguramente llegan a concluir que muchos sólidos tienen como fronteras superficies planas de estas formas:



Ahora se pueden analizar los sólidos que recibió el grupo "sin fronteras". Para ello se compara uno de ellos, un balón o una naranja, con una caja.

Se selecciona a un alumno que disponga de una caja y éste pasa al frente de los demás. El maestro pregunta al alumno por las caras o superficies de la caja; después de haberlas identificado, el maestro pregunta de nuevo dónde empieza o termina cada superficie. Muy probablemente el alumno señala los bordes de la caja. O sea que reconoce las fronteras de las superficies de la caja. Al mover la mano sobre la superficie nota que tiene fronteras o bordes; estos bordes se recorren con el dedo.

Otro alumno que disponga de un balón, naranja o pelota de básketbol puede pasar la mano por su superficie, y el maestro le pregunta dónde empieza y dónde termina la superficie de ese sólido.

Los alumnos observan fácilmente que dicha superficie no tiene fronteras.

Se puede concluir que algunas superficies poseen fronteras y otras no. Por ejemplo, un huevo tiene una superficie que no tiene fronteras. Estos cuerpos que tienen superficies sin fronteras son difíciles de pintar. Los alumnos pueden intentar pintar algunos cuerpos sólidos y el maestro los orientará para que caigan en la cuenta de que lo que pueden pintar son las caras o superficies de los sólidos, y que para ello lo que pintan son fronteras o bordes de esas caras.

Esos bordes limitan la superficie que se quiere pintar. Ya en el primer grado los niños clasificaron los bordes de algunas superficies en rectos y curvos y los representaron mediante líneas rectas y líneas curvas.

Los alumnos pueden observar que cuando rellenan con colores las superficies así limitadas por esos bordes sí están pintando la superficie.

Los alumnos pueden también trazar en el tablero algunas líneas que limiten superficies. Luego pueden señalar cuáles son las superficies y cuáles las líneas, y cuáles son rectas y cuáles son curvas.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
35. Reconocer que algunas líneas poseen fronteras y otras no.	Diferenciar los bordes de una caja y los de un tarro como líneas con frontera o sin ella.
36. Reconocer algunas clases de líneas.	Dadas varias líneas, el alumno las clasificará en rectas y curvas y a éstas en cerradas y abiertas.

Sugerencias de actividades y metodología

Con esta actividad se pretende que los niños realicen algunas observaciones y manipulaciones de objetos que les permitan elaborar algunos conceptos tales como: punto, recta, segmento de recta, etc.

Los niños orientados por el maestro pueden empezar a señalar y a tocar las superficies que servirán de base para desarrollar estas actividades. Por ejemplo, pueden reconocer superficies en el salón, en una caja, en un cubo, en un libro, en una regla, en una teja, en un tarro, en el tablero, etc.

El maestro puede permitir que los alumnos observen y pasen la mano por la superficie del tablero y señalen sus fronteras.

Por medio de preguntas puede ir logrando que se fijen en el hecho de que donde termina una superficie, empieza otra.

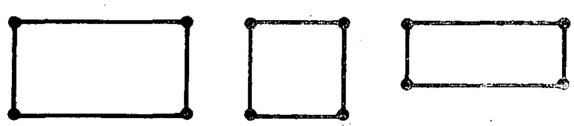
Después de que los alumnos hayan identificado diferentes tipos de bordes, el maestro les puede mostrar un cubo o una caja, para que señalen en dónde empiezan y en dónde terminan dichos bordes; es decir para que señalen las fronteras de los bordes.

Los alumnos orientados por el maestro van notando que las fronteras de las superficies son líneas rectas o curvas, y que al recorrer con el dedo algunas líneas, se encuentra que tienen extremos, puntas, fronteras.

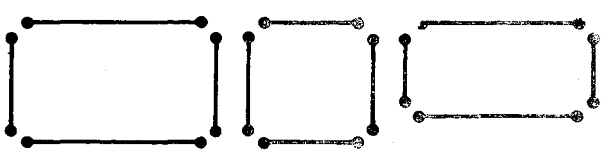
Para llegar a las conclusiones anteriores podría proponerse también la siguiente actividad: mostrar a los alumnos una caja cerrada que puede ser la de la tiza, una de fósforos, o cualquier otra caja, y pedirles que pinten en el cuaderno cómo ven una de las caras.

Al pasar por los puestos puede comentarles que han usado líneas rectas para señalar la frontera de estas superficies.

Se les puede preguntar de dónde a dónde van esas líneas para que caigan en la cuenta de que son las puntas o vértices de la caja los que limitan estas líneas. Los alumnos pueden señalar en sus dibujos estos puntos con otro color o con un trazo grueso, o con una bolita. El maestro les dice que tanto el trazo grueso como la bolita son representaciones de un punto, pero que ellos se lo pueden imaginar tan pequeñito como quieran.



Se les pedirá que dibujen cada línea de las que han utilizado en sus dibujos, un poco separada de las líneas vecinas, así:



De esta manera se visualiza que las líneas tienen diferentes fronteras, y que estas son los puntos extremos.

Los alumnos pueden observar igualmente, que cuando recorren con el dedo los bordes de la caja, al llegar a los vértices o puntas, el movimiento del dedo cambia de dirección o se interrumpe.

Ahora el maestro puede pedir a los alumnos que observen un tarro, luego pregunta: ¿Cuáles son las fronteras del tarro?. Se espera que señalen las superficies curvas y planas del tarro. Ahora se puede preguntar por las fronteras de las superficies planas y curvas; seguramente los alumnos señalarán los bordes circulares. Luego pregunta por las fronteras de dichos bordes, es decir, dónde empiezan o terminan. Se verá que no es posible señalar fronteras de la línea circular.

Después de una breve discusión, es posible concluir que existen algunas líneas que no poseen fronteras, como las curvas cerradas.

Mediante la observación de otros sólidos se puede reafirmar las conclusiones que se obtuvieron a partir de la caja y del tarro.

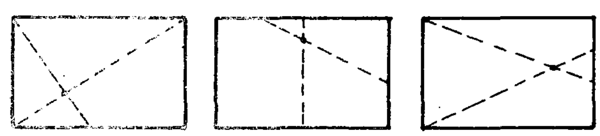
En las representaciones hechas por los alumnos, se puede observar que algunos de los caminos simples cerrados están formados por la unión de tres o más segmentos de recta. El maestro les dice que a las líneas rectas con límites por lado y lado se les llama segmentos. A estos caminos cerrados simples se les denomina polígonos. Los segmentos de recta se llaman lados del polígono y los puntos extremos, vértices.

Todos los polígonos de tres lados se llaman triángulos; los de cuatro lados se llaman cuadriláteros.

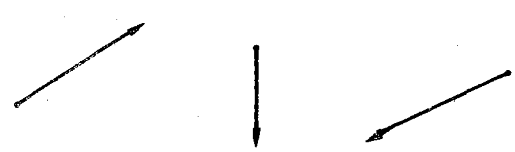
Para finalizar se puede pedir a los alumnos que tomen una hoja de papel, la doblen y observen el doblez.

Estos dobleces representan líneas rectas que se pueden prolongar indefinidamente en ambos sentidos.

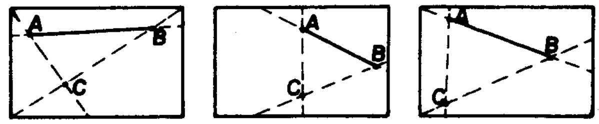
Si se dobla dos veces la hoja de manera que los dobleces se corten; la intersección de los dobleces representa un punto.



Si se considera la línea que sale de cada uno de estos puntos se tienen semirectas, que se prolongan indefinidamente en un sentido.



Si a la hoja anterior se hace un tercer doblez se obtienen otros puntos y así se pueden observar segmentos.



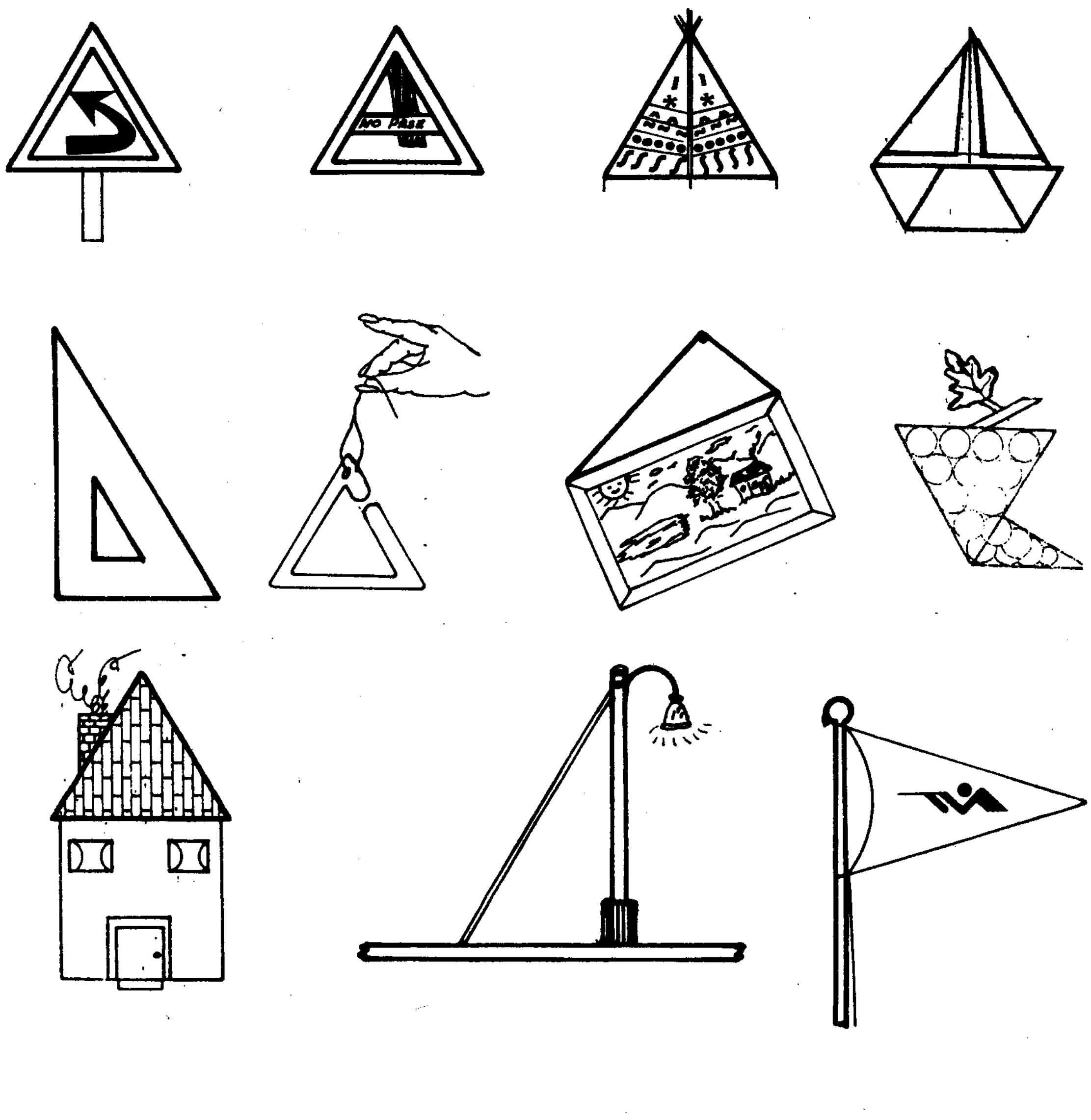
Segmento AB que simbolizamos $\overline{AB}$

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
37. Caracterizar el triángulo.	El niño dibujará un triángulo y dirá cuantos lados y cuántos ángulos tiene.
38. Clasificar los triángulos en equiláteros, isósceles o escalenos.	Dados varios triángulos, el niño los clasificará según sean equiláteros, isósceles o escalenos.

Sugerencias de actividades y metodología

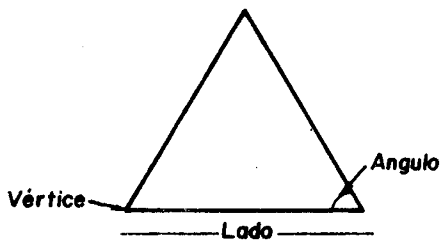
Para esta actividad se recomienda disponer de objetos que tengan caras triangulares. Los siguientes dibujos ilustran algunos objetos donde es posible diferenciar triángulos, ya sea por la forma del objeto o por la forma de una de sus caras:

Luego de observar estos objetos e ilustraciones se puede pedir a los alumnos que dibujen algunos de ellos y preguntarles qué semejanzas encuentran. Cuando hayan dado sus opiniones cerca de las semejanzas, el maestro les pide que dibujen esa forma común que observaron en los objetos.

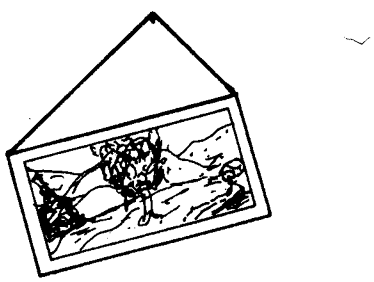


De ser posible conviene emplear una regla para dibujarlos. Se espera que caigan en la cuenta de que tuvieron que trazar líneas y que descubran otras características de esta figura como son: poseer 3 ángulos internos y 3 puntos o vértices. Cuando hayan encontrado estas características el maestro les explica que a esta figura se le denominó triángulo.

Los alumnos pueden escribir esta palabra debajo del triángulo que dibujaron. Como explicación del nombre, el maestro les puede decir que significa que tiene 3 ángulos y 3 lados y los indica en el dibujo; también puede explicarles que tiene 3 vértices y los indica en el dibujo, así:

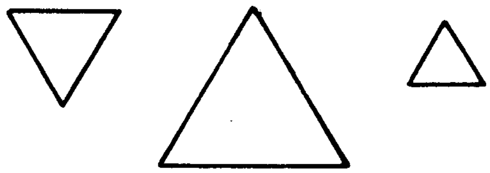


Luego se pide que dibujen el triángulo que forma la pita y un lado del marco de un cuadro al colgarlo. Una vez lo hayan dibujado, el maestro hace uno en el tablero como el siguiente, para que lo comparen:

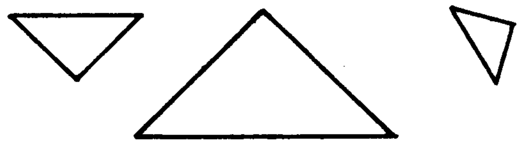


Lo más probable es que digan que está mal dibujado, o que el cuadro está mal colgado y expresen la condición que se debe cumplir para que el cuadro quede bien colgado: los dos lados del triángulo formados por la pita deben ser de igual longitud. El maestro aprovecha para decir que en ocasiones importa la relación que exista entre los lados de un triángulo y que se encuentran triángulos en los cuales los tres lados son de diferente longitud (como es el caso del cuadro cuando está mal colago), triángulos que tienen dos lados de igual longitud, y triángulos donde los tres lados son de igual longitud, y que para diferenciarlos a cada uno se le ha dado un nombre, así:

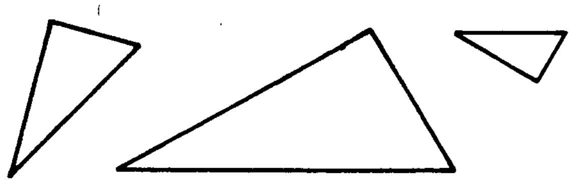
Triángulo equilátero: tiene los tres lados de igual longitud.



Triángulo isósceles: tiene dos lados de igual longitud.



Triángulo escaleno: tiene los tres lados de diferente longitud.



Es necesario hacer suficientes ejercicios para que los alumnos clasifiquen correctamente triángulos según la longitud de sus lados. Es posible que sea difícil clasificar algunos triángulos a primera vista; en este caso puede medir la longitud de cada uno de sus lados y luego clasificarlos.

Algunos alumnos pueden clasificar como isósceles a los triángulos equiláteros; el maestro debe aceptar como correcta esta clasificación, aclarándoles que los triángulos equiláteros cumplen la condición necesaria para ser triángulos isósceles y, además, como sus tres lados tienen la misma longitud se clasifican en un grupo especial: los equiláteros.

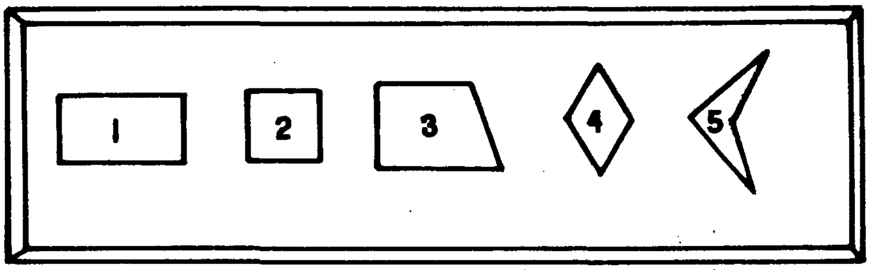
Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
39. Caracterizar el rectángulo por sus simetrías, por sus ángulos y por el paralelismo de sus lados.	Dados dos rectángulos, el alumno dibujará dos ejes de simetría, identificará los lados paralelos y comparará los ángulos contiguos.

Sugerencias de actividades y metodología

Antes de realizar esta actividad el maestro puede pedir a los alumnos que consigan una lámina metálica, un pedazo de cartón, una regla, un pedazo de tabla, etc.; que estén limitados por cuatro bordes o superficies.

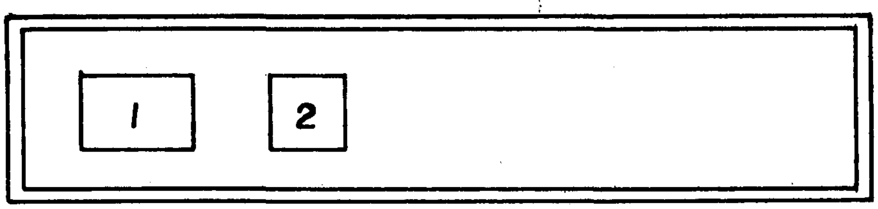
Algunos alumnos pueden colocar sobre el tablero el objeto que han traído y con una tiza trazar sus fronteras. Si alguno tiene un objeto cuya frontera es distinta a las ya dibujadas, es conveniente que la dibuje.

Es posible que estas fronteras sean como las siguientes:



En general, figuras como las anteriores se llaman cuadriláteros o polígonos de cuatro lados.

Se analizan las semejanzas y diferencias existentes entre las figuras y luego se borran los cuadriláteros que no tiene forma rectangular, o sea que solo quedan figuras como estas:

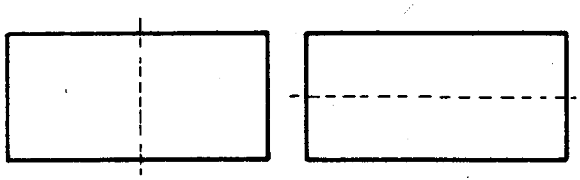


El maestro puede decir que los cuadriláteros o polígonos de cuatro lados que tienen esta forma se llaman RECTANGULOS, incluyendo los cuadrados. De esta manera pueden formular frases como: "Todos los cuadrados son rectángulos", "Algunos rectángulos son cuadrados".

El maestro pregunta a los alumnos qué superficies presentan esta forma. Las respuestas podrán ser: el tablero, una pared del salón, la pasta de un libro, una hoja de cuaderno, etc.

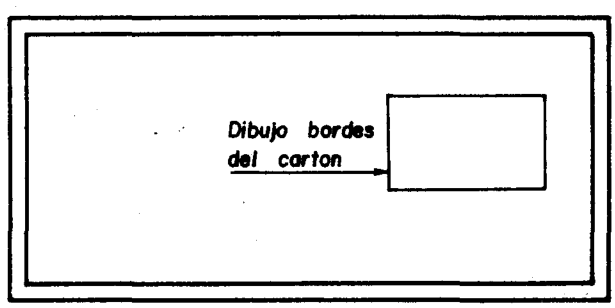
Ahora se pueden formar grupos de 5 alumnos y a cada grupo se le entrega una hoja; luego se les pide que doblen la hoja, una sola vez. Posiblemente varios grupos hicieron dobleces tomando como ejemplo la línea punteada de las figuras 3A y 3B.

También es posible que, por las experiencias que los alumnos traen desde el primer grado, digan que estos dobleces son ejes de simetría y que la figura es simétrica.



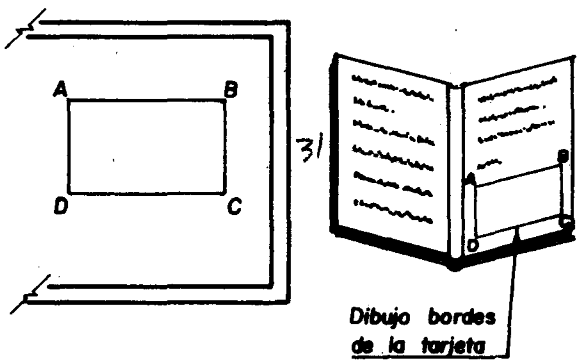
En estos casos conviene resaltar que si se sostiene con una mano una parte de la hoja y se hace girar la otra sobre el doblez, la parte que se hizo girar coincide exactamente con la parte que se quedó quieta.

El maestro puede pedir a los alumnos que consigan una tarjeta rectangular de cartulina, que podría ser de 10 centímetros de largo por 5 de ancho; él a su vez puede disponer de un cartón de forma rectangular, para hacer la explicación. Los bordes de este cartón se dibujan sobre el tablero. Así puede obtenerse una figura como:



Lo mismo hacen los alumnos con su tarjeta en el cuaderno.

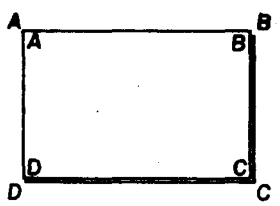
Ahora se nombran los vértices del rectángulo, representado tanto en el tablero como en los cuadernos, con letras mayúsculas, escribiéndolas afuera de los vértices, así:



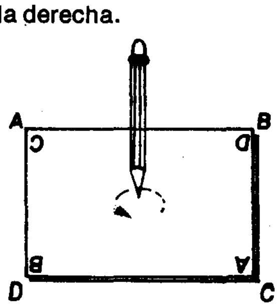
A la tarjeta también se le colocan sobre los vértices las mismas letras mayúsculas, de tal manera que aparezcan las mismas letras por ambas caras de cada esquina de la tarjeta.

Ahora se trata de hallar las simetrías activas del rectángulo; es decir, si al girar o al rotar la tarjeta, se obtienen figuras que se superpongan exactamente sobre la original. Para hacerlo, colocan la tarjeta sobre el rectángulo dibujado en el cuaderno y en el tablero (figura 5), teniendo cuidado de que coincidan las letras.

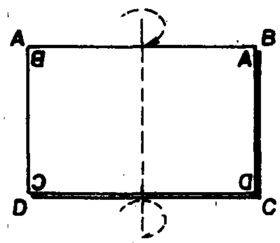
Luego se coloca la punta del lápiz, más o menos sobre el centro de la tarjeta y se gira la tarjeta sobre la izquierda hasta que los lados del rectángulo dibujado coincidan con los bordes de la tarjeta. Se espera que al hacer la rotación la figura obtenida sea:



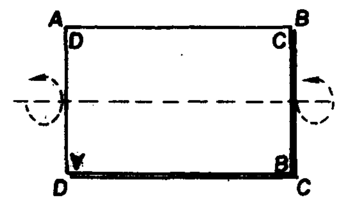
O sea que los vértices quedan en la posición indicada en la figura 7. Al comparar esta nueva figura con la figura 5 se observa que las dos coinciden aunque los vértices han cambiado de posición. Los alumnos pueden comprobar que se obtiene la misma situación si el giro de media vuelta se hace sobre la derecha.



Ahora se coloca la tarjeta sobre la figura 5 y se rota sobre los dos ejes trazados inicialmente (ver figuras 3A y 3B). Si se hace la rotación sobre el eje central paralelo a los lados más cortos (cambiéndole de cara a la tarjeta), se obtiene una figura que al dibujarla queda así:



Se hace la rotación sobre el eje central paralelo a los lados más largos, la figura obtenida es:

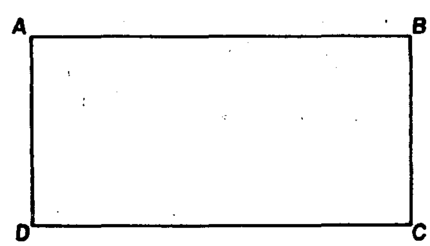


Los alumnos han observado que el rectángulo tiene 3 ejes de simetría: un eje perpendicular a la hoja de sus cuadernos que pasa por el centro de la tarjeta, y dos ejes que pueden pintar en la hoja de sus cuadernos; uno paralelo a los lados más largos y otro paralelo a los lados más cortos. Estos dos últimos ejes coinciden con los dobleces que habían hecho en la tarjeta rectangular al comienzo de la actividad.

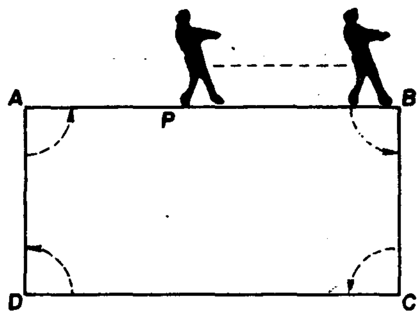
Es de esperar que lleguen a concluir que el rectángulo es una figura simétrica, pues tiene tres simetrías diferentes además de la que lleva a la figura a la posición inicial, en la cual las letras de los vértices son las mismas.

En el patio se puede continuar el estudio de las características de los lados y de los ángulos del rectángulo.

Para ello se puede trazar en el piso una figura como:



A continuación un alumno se para en cualquier punto del segmento AB, por ejemplo P, y luego camina sobre el lado AB. Puede ser en uno de los dos sentidos: dirigiéndose hacia el vértice A o hacia el B. Si se dirige hacia el B, cuando llegue a dicho vértice da el último paso de manera que el pié que va adelante quede sobre el vértice y el otro pié quede sobre el lado en el cual estaba caminando. Con el pié que iba atrasado "barre" el ángulo interno del rectángulo, teniendo cuidado que el otro pié no se mueve del vértice B.



Al girar el pié que ha barrido el ángulo hasta que quede sobre el lado BC, el alumno queda de espaldas a C.

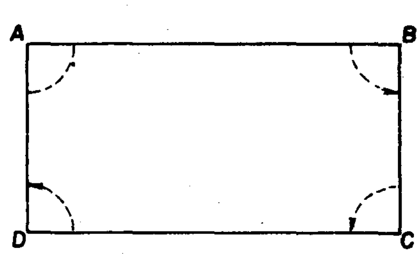
Ahora el alumno camina en reversa hacia el vértice C, cuando uno de sus pies quede sobre el vértice, con el otro pié "barre" el ángulo interno hasta que dicho pié se ubique sobre el lado CD; luego camina hacia el vértice D; allí hace lo mismo para continuar hacia el vértice A, caminando de espaldas sobre el lado DA.

Por último gira en el vértice A, y sigue caminando hasta volver al punto de partida P.

Varios alumnos pueden hacer el recorrido sobre el rectángulo y así todos observan cómo han sido los giros que han hecho en los vértices, cuánto se ha girado, etc.

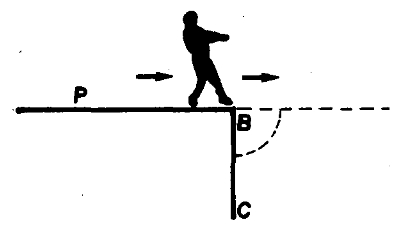
En caso de que los alumnos no respondan acertadamente, conviene que uno de ellos se coloque en un vértice y gire una vuelta, media vuelta, un cuarto de vuelta, hasta que todos caigan en la cuenta de que el giro que se hizo en cada vértice fue de un cuarto de vuelta por consiguiente el giro total fue de una vuelta completa.

Los ángulos internos del rectángulo se pueden señalar así:

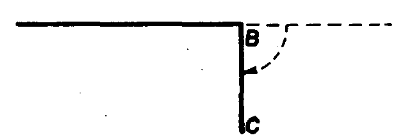


Recordarán que estos ángulos se conocen con el nombre de "ángulos rectos" y que los dos lados que llegan a un vértice son perpendiculares.

Ahora los alumnos pueden recorrer de nuevo el rectángulo esta vez con otras reglas de juego: al llegar de P a B y dar el paso que termina con el pie que va adelante en el vértice B, el alumno debe dar un paso más en la misma dirección que lleva, como si fuera a seguir derecho.

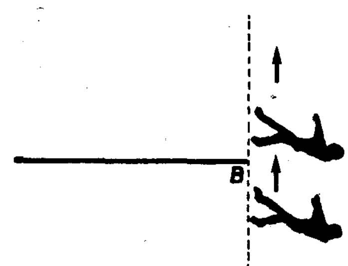


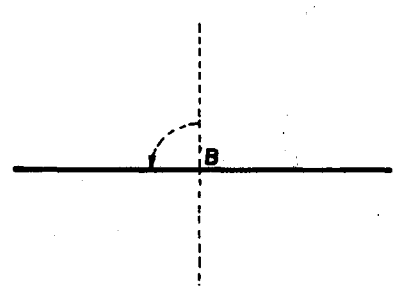
Con el pié de adelante barre el ángulo necesario para que ese pié quede sobre el lado BC, sin mover el pie de atrás del vértice B.



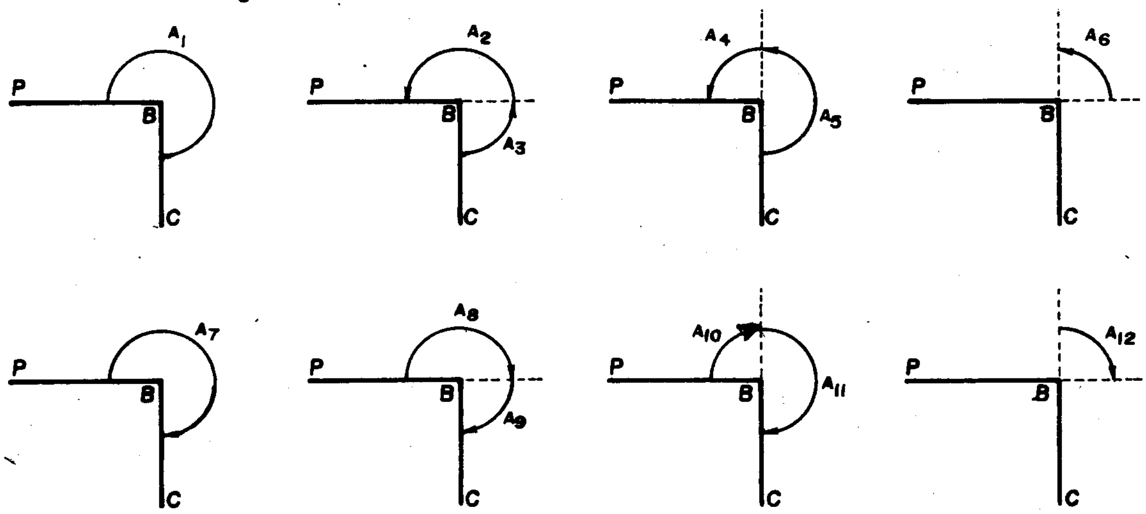
El ángulo barrido es el ángulo externo para ese recorrido.

Si el alumno salió de P a A y de allí a D y a C, al llegar a B e intentar seguir derecho, tiene que barrer el ángulo externo que corresponde a ese sentido del recorrido.





Nótese que si no se sabe el sentido del recorrido, no se sabe cuál es el ángulo externo.



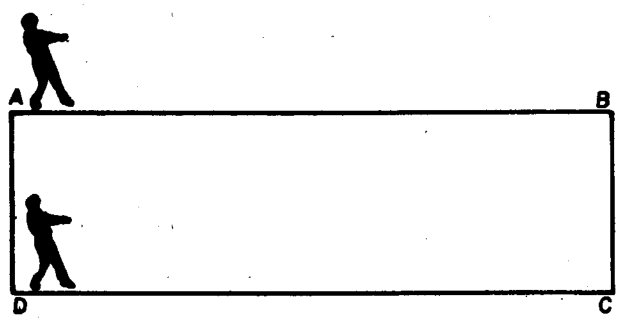
Habrá doce posibilidades para escoger el "ángulo externo" en B, y no hay manera de decidir cuál es el más apropiado. Pero si se viene haciendo un recorrido, no hay ninguna duda de que para el recorrido **PBC el ángulo externo es A9 y para el** recorrido CBP es A4.

Es conveniente que varios alumnos hagan el recorrido en diversos sentidos con estas mismas reglas de juego para que se les facilite llegar a concluir que los cuatro giros son iguales, o sea de la misma amplitud: un cuarto de vuelta cada uno. El maestro puede resaltar que los ángulos externos del rectángulo son todos cuatro ángulos rectos, aunque de distintos sentidos según el sentido del recorrido. recorrido.

¿Cuánto ha girado en total un alumno que haga el recorrido completo? Se espera que los alumnos caigan en la cuenta de que en cada esquina han girado un cuarto de vuelta en el mismo sentido (siempre sobre la derecha si empezaron de P a B, y siempre sobre la izquierda si empezaron de P a A). Al volver a P están mirando hacia el mismo vértice, y por lo tanto hicieron un giro total de una vuelta completa. Así se ve que la suma de los ángulos externos del rectángulo es un ángulo de una vuelta completa.

Los alumnos pueden volver a hacer el recorrido para convencerse de que si han dado una vuelta completa al terminar el último giro antes de volver a P.

Posteriormente se dibuja otro rectángulo en el patio y se pide a dos alumnos que se ubiquen en dos de sus vértices, por ejemplo A y D como se indica en la figura:



Estos dos alumnos caminan hasta llegar a los vértices de los extremos B y C respectivamente.

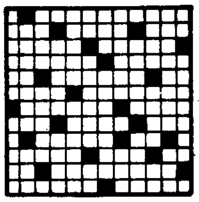
Otros dos alumnos caminan partiendo de los vértices A y B para llegar a los vértices D y C. Luego se les puede preguntar a todos: ¿En caso de continuar caminando en la misma dirección y en el mismo sentido se encontrarán más adelante?

Se espera que los alumnos respondan que los que salieron de A y D hacia B y C no se encuentran nunca, y los que salieron de A y B hacia D y C tampoco, esto para concluir que los lados opuestos de un rectángulo son paralelos.

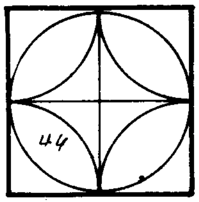
Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
40. Caracterizar el cuadrado por sus simetrías. por sus ángulos y por sus lados.	Dado un cuadrado, el alumno lo caracterizará por sus simetrías sus ángulos y sus lados.

Sugerencias de actividades y metodología

Se pueden buscar objetos que tengan una o varias de sus caras de forma cuadrangular, como las siguientes:



Crucigrama



Baldosín para el piso

Marco de algunas fotografías

A continuación se puede pedir a los alumnos que reproduzcan algunas de estas ilustraciones para que luego dibujen la figura que es común a todas ellas (el cuadrado). Es conveniente facilitar una regla para que el dibujo quede bien elaborado.

A continuación los alumnos pueden responder algunas preguntas sobre la figura dibujada y anotar las respuestas; por ejemplo:

¿Cuántos lados tiene la figura?

Tiene 4 lados o bordes rectos.

¿Cuántos vértices tiene la figura?

Tiene 4 vértices o puntas.

¿Cuántos ángulos internos tiene?

Tiene 4 ángulos internos.

¿Cómo son esos ángulos internos?

Son ángulos rectos o de un cuarto de vuelta.

¿Cómo son los lados opuestos?

Son paralelos.

En este momento se pueden comparar las características encontradas en esta figura con las del rectángulo, para comprobar que esta figura cumple con todas las características para ser rectángulo, y se dibuja un rectángulo que no sea cuadrado al lado del cuadrado, para compararlos. El maestro puede preguntar a los alumnos si encuentran una característica que cumple esta nueva figura y que no la cumpla el rectángulo.

Los alumnos pronto descubren que la nueva figura tiene los cuatro lados de igual longitud. El maestro les puede preguntar cómo llaman ellos esas figuras y recoger los nombres que ellos les den.

También podrán comprobar que, como en el rectángulo, si se prolongan dos lados no consecutivos del cuadrado, estos no se encuentran: o sea que el cuadrado tiene los lados paralelos de dos en dos.

A continuación los alumnos pueden recortar un cuadrado en papel grueso o cartulina. El maestro puede preparar un cartón de forma cuadrada para utilizarlos en el tablero para hacer lo mismo que el alumno va a hacer con la tarjeta en el cuaderno.

Cada alumno coloca su tarjeta en el cuaderno y traza su silueta colocando las letras A, B, C, D al lado de afuera de los vértices de la figura trazada.

En la tarjeta también se colocan las mismas letras mayúsculas, de tal manera que quede la misma letra por ambas caras de cada esquina.

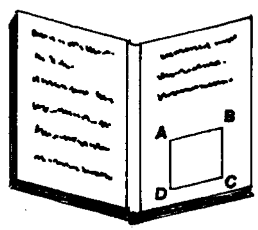
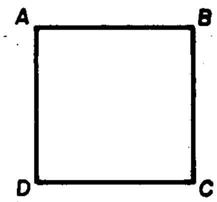


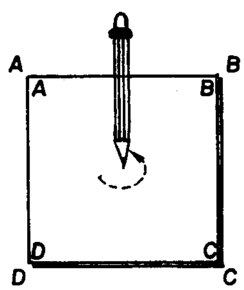
Figura trazada en el cuaderno



Tarjeta de cartulina

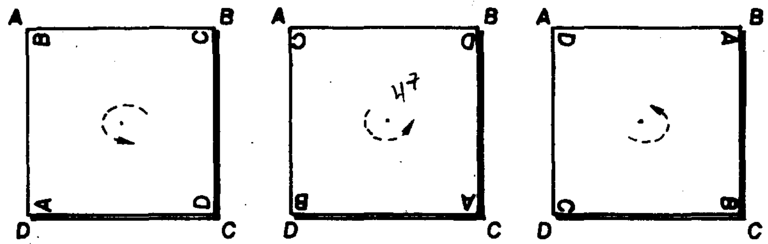
El alumno coloca la tarjeta sobre la figura trazada en su cuaderno. Luego intenta encontrar diferentes formas de hacer girar el cuadrado alrededor de un eje de tal manera que al hacerlo, la figura resultante se superponga exactamente sobre la original.

Por ejemplo: puede poner su lápiz verticalmente encima de la tarjeta de manera que la punta esté sobre el punto central. Se hace girar la tarjeta, de modo que los vértices de la tarjeta vayan cambiando de sitio hasta que coincidan con los de la figura trazada.



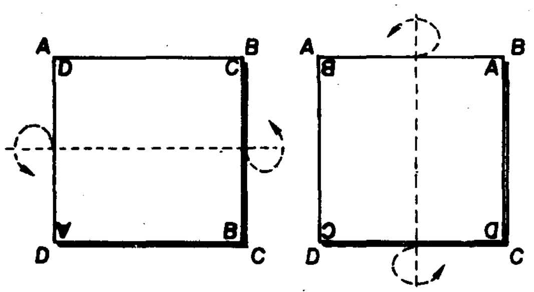
Tarjeta

Los alumnos pueden dibujar las figuras hasta que no haya otras posibles (Figuras 3, 4, 5).

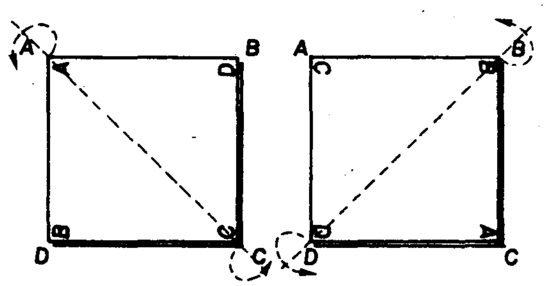


Así han encontrado un eje de simetría que pasa por el punto central y que permite tres simetrías activas (además de la que deja la figura como estaba antes): un cuarto de vuelta sobre la izquierda, media vuelta, y tres cuartos de vuelta (o un cuarto de vuelta en el sentido opuesto).

De nuevo colocan la tarjeta sobre la figura trazada en el cuaderno y la hacen girar sobre otros posibles ejes de simetría. Si hacen la rotación sobre los ejes, que pintado en el tablero se ven horizontal y vertical, obtendrán las siguientes figuras:



Ahora, si hacen la rotación sobre los ejes diagonales que pasan por A y C o por B y D, obtendrán las siguientes figuras:

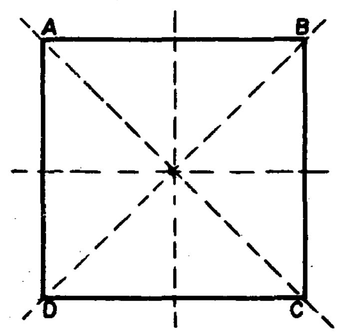


Los alumnos exploran activamente estas situaciones; pueden observar por ejemplo, que si se tiene una figura, en este caso el cuadrado (figura 1), y se gira hasta obtener una figura congruente antes de dar una vuelta completa, (figuras 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) han encontrado un eje simetría. Una figura que tenga por lo menos un eje de simetría se llama figura simétrica. Por lo tanto el cuadrado es una figura simétrica.

Una rotación de menos de una vuelta completa sobre un eje de simetría lleva a la figura a una posición coincidente con la posición original.

Los alumnos han encontrado un eje de simetría perpendicular a la hoja de sus cuadernos, que permite tres simetrías no triviales, y cuatro ejes que pueden pintar en su cuaderno, que permiten una simetría no trivial cada uno. (Una simetría trivial es la que deja la figura como estaba antes; por ejemplo, dar una vuelta completa sobre cualquier eje de simetría deja todo como estaba. Los alumnos encuentran fácilmente nombres más pintorescos para las simetrías triviales: simetrías bobas, simetrías mansitas que no hacen nada... Es importante utilizar el nombre que ellos le den, pues así se les apoya en la construcción del operador idéntico. Aprender de memoria un nombre como "simetría trivial" u "operador idéntico" puede bloquear la construcción mental.

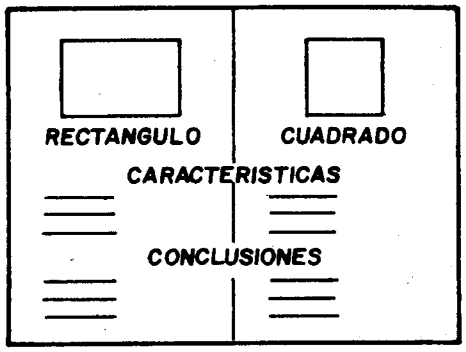
Los trazos de la siguiente figura ilustran los posibles ejes que se pueden encontrar. El punto en el centro representa el eje perpendicular al plano del papel.



Objetivo específico	Indicador de evaluación
41. Relacionar el rectángulo y el cuadrado.	El alumno enumerará las características comunes o no comunes del rectángulo y el cuadrado.

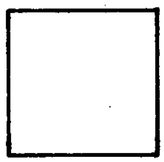
Sugerencias de actividades y metodología

El maestro puede pedir a los alumnos que se organicen en grupos de cuatro; y darle a cada grupo una hoja como la siguiente: **(Ver figura a la derecha)**



Se da un tiempo prudencial para que los alumnos anoten en la columna correspondiente las características del cuadrado y del rectángulo. El maestro los va orientando para que cuando examinen las características del rectángulo vean si también son o no características del cuadrado.

En las conclusiones anotan resumidamente la relación entre rectángulos y cuadrados. Ejemplo:

RECTANGULO	CUADRADO
	

CARACTERISTICAS

- Tiene cuatro lados - Los lados opuestos tienen igual longitud - Tiene cuatro ángulos rectos - Tiene tres ejes de simetría.	- Tiene cuatro lados - Los cuatro lados tienen igual longitud - Tiene cuatro ángulos rectos - Tiene cinco ejes de simetría.

Conclusiones: los cuadrados tienen las mismas características que los rectángulos, pero además tienen otras que no tienen los rectángulos.

Cuando todos los grupos terminen, el maestro puede recoger las hojas o puede pedirles que las intercambien con el compañero del lado para comparar y analizar las conclusiones.

Es posible que no todos hayan llegado a la conclusión de que el cuadrado cumple todas las características de rectángulo. Se pueden revisar las características enumeradas en la columna del rectángulo, para comprobar que todas aquellas las cumple el cuadrado; así podrán concluír que todo cuadrado es rectángulo; también podrán comprobar que no todos los rectángulos son cuadrados. Otras maneras de expresar esta misma situación son las siguientes:

- El conjunto de los cuadrados está contenido en el conjunto de los rectángulos, pero estos dos conjuntos no son iguales.

- El conjunto de los cuadrados es un subconjunto propio del conjunto de los rectángulos.

- Cualquier cuadrado que estudiemos resulta ser rectángulo, pero no es verdad que cualquier rectángulo que estudiemos resulta ser cuadrado.

En esta forma el alumno repasa los contenidos de conjuntos (relación de inclusión o contenencia) y los de lógica (cuantificadores) a propósito de un objetivo de geometría, sin necesidad de símbolos matemáticos, ni palabras técnicas de lógica y conjuntos.

Se pueden utilizar estas características del cuadrado y del rectángulo en la solución de problemas como los siguientes:

- Puedes construir un rectángulo de lados 10 cm y 5 cm (o de 10 cm por 5 cm), usando cuadrados de lado 1 cm?. ¿usando cuadrado de 2 cm?.

- Puedes construir un cuadrado de lado 6 cm usando rectángulos de lados 2 cm y 1 cm?. ¿Cuántos necesitas?. ¿Usando rectángulos de lado 3 cm y 1 cm?.

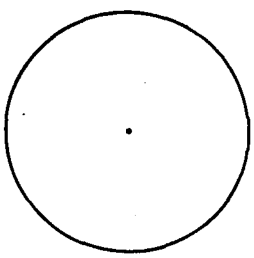
Objetivo específico	Indicador de evaluación
42. Caracterizar el círculo.	Dado un círculo el alumno identificará la región interior, la región exterior, la frontera y las características de esta última.

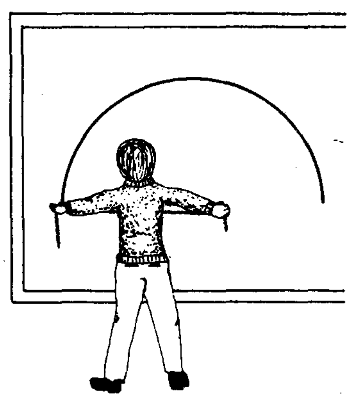
Actividades y sugerencias metodológicas

Los alumnos se pueden organizar en grupos; el primero usará como material objetos que presenten superficies planas circulares, como tapas de tarros, tapas de frascos, tapas de ollas, platos, monedas, etc.; el segundo grupo usará como material aros, anillos, ruedas; el tercer grupo usará cordeles, piolas, cabuyas, cordones, hilos, etc.

El primer grupo identifica las superficies de forma circular y recorre con un dedo su frontera. El segundo grupo recorre con un dedo el contorno de los aros, de los anillos, etc. El tercer grupo emplea un cordel y una tiza para trazar en el tablero una línea en forma circular. En cada grupo se selecciona un alumno para que explique en el tablero, mediante un gráfico la acción desarrollada. El Reprèsentante del primer grupo dibuja la frontera de una de las superficies; para ello puede colocar la superficie circular sobre la superficie del tablero y pasar una tiza por el borde de manera que quede dibujada la frontera de la superficie circular. El representante del segundo grupo hace algo similar colocando un arco sobre el tablero.

El maestro los orienta para que comenten los procedimientos que emplearon para trazar líneas de forma circular. Se puede hacer énfasis en el procedimiento empleado por los alumnos del tercer grupo. Si es necesario, se explica que el trabajo se facilita eligiendo un punto sobre el cual se apoya un extremo del cordel, mientras con el otro extremo, se sujeta la tiza para trazar la línea. Los alumnos van siguiendo esas instrucciones para trazar líneas circulares en sus cuadernos y destacan el punto en el cual apoyaron el extremo del cordel que no tenía la tiza. El maestro les pregunta el nombre de ese punto; seguramente algunos de ellos saben que se llama centro.





Si en la escuela hay un compás grande, el maestro podrá mostrarlo a los alumnos, explicarles para qué sirve y trazar algunas líneas circulares en el tablero, para que identifiquen la región interior o región que queda dentro de la línea, y también la región exterior o región que queda fuera de la línea.

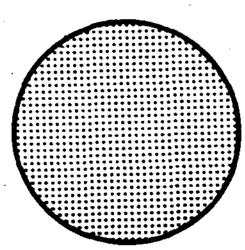
Se puede trazar una línea circular en el suelo para que los alumnos la recorran. Pueden ir cayendo en la cuenta de que tienen que girar un poco con cada paso que dan, y que la región interior sigue estando a su derecha (o a su izquierda) aunque den toda la vuelta.

REGION EXTERIOR

Se llama región interior a la región que queda dentro de la línea circular.

Se llama región exterior a la región de la hoja o del tablero que queda afuera de la línea circular.

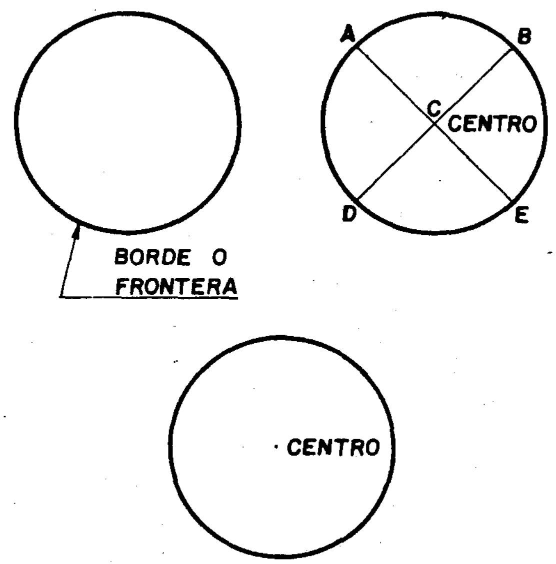
El maestro puede explicarles que para el desarrollo de diversas actividades tienen especial interés la región interior y la línea que la delimita, que es a la vez su borde o frontera. Se traza en el tablero y en los cuadernos una línea con las mismas características de las anteriores y se sombrea o colorea la región interior de modo que obtengan una figura como la que se muestra a continuación:



La figura representa un círculo. Un círculo está formado por la región interior y por la línea que lo delimita y que le sirve de borde o de frontera.

Pueden dibujar otra línea circular y destacar el punto llamado centro; pueden señalar varios puntos sobre la línea y medir la distancia que hay del centro a cada uno de los puntos marcados sobre la línea. Se espera que concluyan que en todos los casos hay la misma distancia.

El maestro puede preguntar si conocen un nombre para líneas circulares como ésa. Si alguno lo sabe, dirá que a esa línea se le llama CIRCUNFERENCIA. Para finalizar la actividad podrán hacer un resumen de las características de la circunferencia.



CIRCUNFERENCIA

La distancia AC es igual a la distancia DC. La distancia DC es igual a la distancia BC.

El borde o frontera de un círculo puede representarse con una línea curva cerrada que se llama CIRCUNFERENCIA y que posee algunas características entre las cuales están las siguientes:

1. La circunferencia divide la superficie del papel donde se pinta en dos regiones: una interior y una exterior.
2. La circunferencia no tiene ningún trozo que coincida exactamente con un segmento de recta.
3. Hay un punto que no está en la circunferencia, que se llama el centro de la circunferencia, y que está a la misma distancia de todos y cada uno de los puntos de ella.
4. La circunferencia es una línea curva que va volteando continuamente y se cierra al dar la vuelta completa.
5. Otra característica que se le ocurra a algún alumno.

La discusión de estas características que los alumnos proponen, permite distinguir las que sí cumplan todas las circunferencias de las que no sean comunes a todas (por ejemplo ser grandes o pequeñas, estar pintadas con tiza, etc.). En esta contrastación los alumnos van construyendo los conceptos de una manera mucho más eficaz que con las definiciones usuales. Aprender de memoria una definición puede bloquear la construcción del concepto.

Para analizar las características de la circunferencia pueden utilizar "círculos recortados" en el papel para que hagan dobleces que les permitan ver el centro, los radios, diámetros, etc. y resolver algunos problemas sencillos como los siguientes:

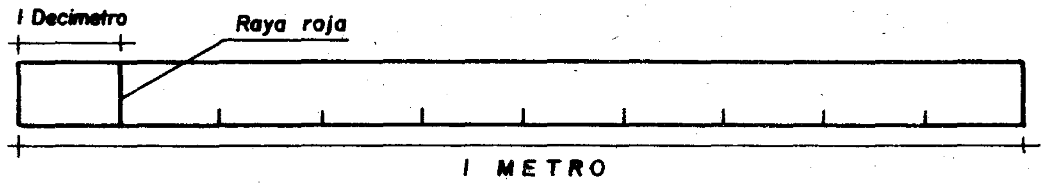
- Teniendo un círculo recortado ¿cuántos dobleces puede encontrar que formen dos "mitades" iguales?.
- Puedes hallar dos dobleces que dividan el círculo en 4 partes iguales?. ¿Puedes encontrar 4 puntos sobre la circunferencia, que son los vértices de un cuadrado?.
- Teniendo una circunferencia trazada sobre el papel, ¿puedes dibujar un triángulo con sus vértices sobre la circunferencia?, ¿un rectángulo?.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
43. Definir el decímetro, el centímetro y el milímetro como submúltiplos del metro y relacionarlos entre sí.	El estudiante explicará oralmente por qué el decímetro, el centímetro y el milímetro son submúltiplos del metro.

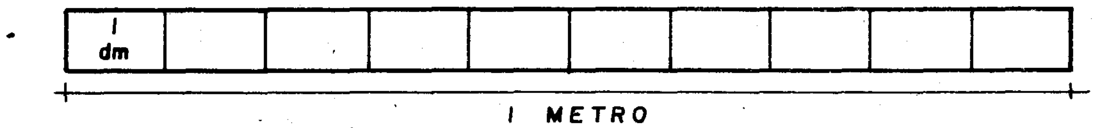
Sugerencias de actividades y metodología

Para realizar esta actividad los alumnos elaboran previamente un metro, un decímetro y un centímetro; podrán hacerlos cortando el borde de un periódico o una cartulina. Aunque estas unidades de medida ya son conocidas por el alumno, conviene que el maestro vigile si están bien tomadas las medidas de los patrones de medición que elaboraron los alumnos.

Cada alumno toma su metro y su decímetro. Sobre uno de los bordes del metro coloca el decímetro y hace una marca con lápiz rojo sobre el metro en el lugar exacto donde termine el decímetro.



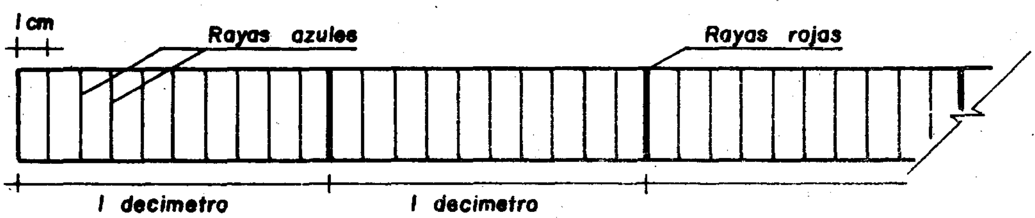
Sobre la raya roja coloca de nuevo un borde del decímetro y donde termina hace otra raya roja; así sucesivamente va colocando el decímetro y marcando sobre el metro hasta llegar al final de éste. El metro queda marcado así:



Cuando todos hayan terminado esta actividad, el maestro pregunta a los alumnos cuántas veces pudieron colocar el decímetro sobre el metro y si les faltó espacio para completar una última colocación del decímetro sobre el metro.

Los alumnos comprueban que en el metro pudieron colocar 10 veces exactas el decímetro. El maestro recoge observaciones de los alumnos, como que el decímetro es una unidad de medida menor que el metro, que 10 decímetros forman un metro, o que un decímetro es la décima parte de un metro.

Ahora sobre el metro donde se han marcado con líneas rojas cada decímetro, hacen marcas con líneas azules utilizando el centímetro previamente hecho así:



Cuando los alumnos hayan rayado todo el metro, el maestro les hace preguntas para que un alumno las responda observando su metro.

- ¿Cuántos centímetros hay en cada decímetro?

- ¿Cuántos centímetros hay en un metro?

Los alumnos comprueban que en cada decímetro hay 10 centímetros y que en cada metro hay 100 centímetros.

El maestro recoge y complementa observaciones como que el centímetro es otro patrón de medida más pequeño que el metro, o que si colocamos 100 centímetros uno a continuación de otro obtenemos un metro.

Ahora se pueden dar al alumno algunos ejemplos de longitudes muy pequeñas, como el espesor de un vidrio o el largo de la punta del lápiz, que difícilmente se pueden comparar con el centímetro porque son de longitud más pequeña. Mirando las rayitas de una regla podrán comprender que existe otra medida llamada milímetro, que por ser muy pequeña les queda difícil de recortar en papel, pero que de manera similar a los casos anteriores, si colocamos 10 milímetros, uno a continuación del otro se obtendrá un centímetro, es decir, que en un centímetro hay 10 milímetros. Para rayar milímetros sobre el metro, el alumno se podrá auxiliar con la regla. Como en el caso anterior observando su metro, podrá contestar las siguientes preguntas:

- ¿Cuántos milímetros hay en un centímetro?

- ¿Cuántos milímetros hay en un decímetro?

- ¿Cuántos milímetros hay en un metro?

El alumno puede rápidamente concluir que el decímetro, el centímetro y el milímetro, si se colocan uno tras otro, 10, 100 y 1000 veces respectivamente, en los tres casos se obtendrán un metro.

Estos tres patrones de longitud son **submúltiplos del metro.**

Para finalizar, el maestro puede pedir a los niños que comparen las cuatro longitudes y las ordenen descendentemente y ascendentemente. Pueden comprobar que:

- La longitud de un metro es mayor que la longitud de un decímetro.
- La longitud de un decímetro es mayor que la longitud de un centímetro.
- La longitud de un centímetro es mayor que la longitud de un milímetro.
- etc.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
44. Reconocer la necesidad de encontrar otros patrones de longitud para medir distancias grandes.	Dada una distancia grande el alumno propondrá maneras para encontrar su longitud.
45. Definir el Decámetro, el Hectómetro y el Kilómetro como múltiplos del metro y relacionarlos entre sí.	El alumno explicará por qué el Decámetro, el Hectómetro y el Kilómetro son múltiplos del metro y dará las equivalencias respectivas.

Sugerencias de actividades y metodología

El maestro explica a los alumnos que cuando se mide una longitud lo que se hace es, comparar dicha longitud con la longitud de alguna (o algunas) de las unidades de medida, por ejemplo, si comparamos la longitud de una mesa con la longitud de un metro y vemos que son iguales; entonces decimos que la mesa mide un metro, o, si comparamos el largo de un libro con la longitud de un decímetro y vemos que la longitud del libro es dos veces la longitud del decímetro, decimos que el largo del libro es dos decímetros, etc.

También se puede explicar que hay longitudes muy grandes comparadas con el metro y se necesitaría comparar muchas veces con él, para averiguar las medidas de dichas longitudes; por ejemplo: si un alumno trata de medir con su metro la distancia que hay desde su población a la población más cercana, no sería práctico porque tendría que colocar muchas veces su metro, una a continuación de la otra, para ver cuántas veces está sobre la carretera y gastaría varios días en este trabajo.

Como ya se tiene una unidad de medida que es el metro, se han formado a partir de este unos patrones de longitud mayores para medir grandes distancias, formando un sistema decimal de la siguiente manera: con 10 metros uno a continuación del otro se forma una medida de longitud llamada **Decámetro;** para que los alumnos tengan idea de la longitud de una Decámetro podrán pegar por los extremos 10 de los metros que ellos han elaborado, formando así una tira mucho más larga cuya longitud es de 10 metros o sea 1 Decámetro.

Si se toman 100 metros uno a continuación de otro esta longitud que resulta también se toma como patrón y se llama **Hectómetro;** para tener una idea aproximada de la longitud de un Hectómetro se puede realizar la siguiente actividad: los alumnos dan unos cuantos pasos (5 ó 6) y toman la medida de la longitud que avanzan, en cada paso. La medida que más se repita se toma como guía. (Esta medida estará entre 40 y 50 centímetros aproximadamente). Con base en esta medida el maestro puede sugerir que marquen en el piso el lugar de donde parten y caminen 200 pasos o más (si la medida del paso es menor de 50 centímetros) en la misma dirección haciendo otra marca al terminar, esta longitud entre las dos marcas será aproximadamente igual a la longitud de un Hectómetro.

Por último el maestro puede averiguar si los alumnos conocen la unidad usual para medir las distancias entre las poblaciones (o la longitud de las carreteras). Estas distancias se miden en Kilómetros. Esta unidad de medida se obtiene a partir del metro tomando 1000 metros uno a continuación del otro.

El maestro explica a los alumnos que, como estas tres medidas contienen un número exacto de veces al metro, son unidades de longitud múltiplos del metro y podrá hacer un cuadro para especificar su relación.

MULTIPLOS DEL METRO	
1 Decámetro	10 metros
1 Héctómetro	100 metros
1 Kilómetro	1000 metros

Es importante que los alumnos tengan una idea aproximada de la longitud de cada una de estas unidades y estimen, dentro de un prudente margen de error la medida de algunas longitudes: por ejemplo: la longitud del salón de clase, la distancia entre la casa y el colegio, etc.

Algunos ejercicios que se prestan para estas estimaciones pueden ser los siguientes:

- Amanda midió el alto de la puerta del salón con su metro y halló que medía más de dos metros y menos de tres. Si Luis mide la misma puerta colocando una regla de un decímetro de largo, marcando donde termina, colocando la regla en la marca, marcando nuevamente donde termina y así sucesivamente ¿Cuántas veces tendrá que colocar la regla para medir la puerta?.

  a) Más de 5 pero menos de 10 veces

  b) Más de 10 pero menos de 20 veces

  c) Más de 20 pero menos de 30 veces

  d) Más de 30 veces.

- ¿Qué es más práctico, usar el metro o la reglita de un decímetro, para medir la puerta?
- ¿Se podrá pasar una escalera de 3 m de alto por la puerta?. ¡Piénselo bien!.
- Carmenza midió el ancho de la puerta del salón con un metro y se dió cuenta que midió un poco más de un metro ¿Cabrá un cubo de 79 cm de arista (lado) por la puerta? ¿Cabrá un cubo de 125 cm de lado?.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
46. Reconocer algunas unidades de longitud que no pertenecen al sistema métrico decimal y relacionarlas con las que pertenecen a él.	Los alumnos identificarán algunas unidades de longitud no decimales y hallarán su equivalencia en el sistema métrico decimal.

Sugerencias de actividades y metodología

Hay algunas unidades de longitud que no pertenecen al sistema métrico decimal y que todavía son usadas en algunas regiones.

Algunas de estas unidades son: la vara, la yarda, la pulgada, el pié, la legua, la milla, etc.

Para desarrollar esta actividad el maestro puede hacer una pequeña investigación en la comunidad donde está ubicada la escuela para determinar cuáles de estas unidades son las que allí se emplean. Dichas unidades serán reconocidas por los alumnos.

Si en una región las unidades más usadas son la vara y la yarda. Los alumnos averiguan la equivalencia aproximada en centímetros que se usa en esa región. Posiblemente encontrarán que la aproximación más conocida es 90 cm para la yarda y 80 cm para la vara.

Utilizando el metro, pueden observar la longitud de una yarda y una vara y comparar estas longitudes.

Pueden hacer algunos ejercicios como los siguientes:

- La tía de Mónica vive en los Estados Unidos. Le escribió una carta donde le contó que una milla tiene 1760 yardas. ¿Que distancia es más larga: una milla o dos kilómetros?.
- Juan midió un lote con su metro y encontró que tenía 12 m de frente. Si Esteban mide el mismo lote con una yarda ¿obtendrá más de 12 yardas o menos de 12? ¿Por qué?.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
47. Desarrollar procedimientos para hallar el perímetro del triángulo, del rectángulo y del cuadrado.	Dadas las longitudes de los lados de un triángulo, un rectángulo y un cuadrado el alumno hallará los perímetros correspondientes.

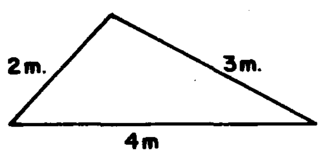
Sugerencias de actividades y metodología

Esta actividad se puede desarrollar por grupos y en el patio. El maestro puede pedir a cada grupo que dibuje en el piso un triángulo, un rectángulo y un cuadrado y que averigue cuánta pita necesitaría para cercar cada uno de ellos.

Los alumnos intercambian ideas sobre cómo hacerlo. Es posible que lleguen a conclusiones como las siguientes:

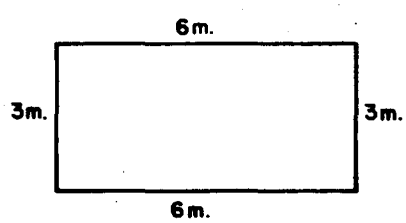
- Para el triángulo: Después de medir la longitud de cada uno de los lados, se suman estas tres longitudes.

  Ejemplo:



  2 metros + 3 metros + 4 metros = 9 metros

- Para el rectángulo: Los lados paralelos del rectángulo tienen la misma longitud. Para hallar la longitud de la pita necesaria para cercar un terreno rectangular como el siguiente se pueden seguir estos procedimientos:



  a) Sumar la longitud de sus cuatro lados

  6 m + 6 m + 3 m + 3 m = 18 m

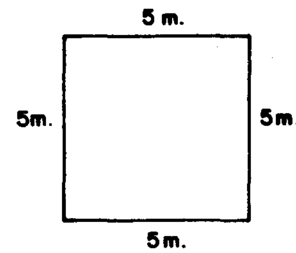
  b) Sumar las longitudes de los lados paralelos y luego sumar estos resultados
  6 metros+6 metros= 12 metros
  3 metros+3 metros= 6 metros
  12 metros+6 metros= 18 metros

  c) Multiplicar por 2 cada medida y luego sumar esos resultados
  2 x (6 metros) = 12 metros
  2 x (3 metros) = 6 metros
  12 metros + 6 metros = 18 metros

  d) Sumar las medidas hechas y luego multiplicar por 2 ese resultado

  2 x (9 metros) = 18 metros

- Para el cuadrado: Como los cuatro lados tienen la misma longitud basta con medir solo uno de ellos. Para hallar la longitud de la pita necesaria para cercar un terreno cuadrado como el siguiente se pueden seguir varios procedimientos:



  a) Sumar la longitud de los cuatro lados

  5 m + 5 m + 5 m + 5 m = 20 m

  b) Multiplicar por 4 la longitud de uno de los lados

  4 x (5 metros) = 20 metros

Después el maestro les explica que lo que han hecho en cada caso es "hallar el perímetro". Así encuentran procedimientos para hallar el perímetro de un triángulo, de un rectángulo y de un cuadrado, es decir hallar la longitud total que tiene alrededor cada uno.

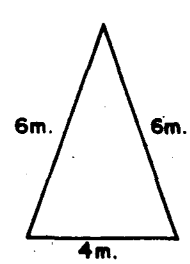
Pueden resolver algunos problemas sobre el cálculo del perímetro, como los siguientes:

- Cuántos metros de alambre se necesitarán para cercar un terreno de forma rectangular que tiene 30 metros de largo y 18 metros de ancho?

- ¿Cuántos decímetros de un marco se necesitarán para enmarcar una pintura de forma cuadrada cuyo lado mide 6 decímetros?

- ¿Cuál es el perímetro de un triángulo equilátero cuyo lado mide 8 centímetros?

- Hallar el perímetro del siguiente triángulo.



Otros problemas que pueden resolver son los siguientes:

Se tiene un triángulo equilátero de 35 cm de lado. ¿Alcanzará una pita de un 1 m de largo para cercarlo?.

Un cuadrado y un rectángulo tienen igual perímetro. Si cada lado del cuadrado mide 10 cm y si el ancho del rectángulo es de 5 cm, ¿cuál es el largo del rectángulo?.

- ¿Puedes encontrar dos puntos que separan el perímetro de un triángulo equilátero en dos partes de igual longitud?. ¿De un triángulo isósceles? ¿De un rectángulo? ¿De un cuadrado?.

Objetivo específico	**Indicado de evaluación**
48. Resolver y formular problemas que requieran el uso de diferentes unidades de longitud.	El alumno formulará un problema que requiera de unidades de longitud y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Para iniciar conviene hacer un repaso de los múltiplos y submúltiplos del metro estudiados, y de las equivalencias anotando en el tablero un resumen como el siguiente:

1 Kilómetro = 1000 metros

1 Hectómetro = 100 metros

1 Decámetro = 10 metros

1 metro = 10 decímetros = 100 centímetros =

1 000 milímetros = 1 decímetro = 10 centímetros = 100 milímetros

Luego el maestro puede proponer a los alumnos algunos problemas en los que se empleen las unidades de longitud estudiadas ya sea para hacer conversiones sencillas o para efectuar operaciones entre longitudes.

Ejemplos:

- Un señor camina 200 metros en un minuto. ¿Cuántos metros caminará en 12 minutos?
- La distancia entre la casa de Gustavo y la escuela es de 25 Hectómetros, y la distancia entre la casa de Miguel y la escuela es de 3 Kilómetros. ¿Cuál de los dos niños vive más lejos de la escuela?
- Una modista compra 98 metros de una tela para hacer uniformes para la escuela. Si en cada uniforme gasta 2 metros, cuántos uniformes hará con la tela que compró?
- A un potrero rectangular que tiene 9 metros de largo por 5 metros de ancho se le pone una cerca que vale $85 el metro. ¿Cuánto vale la cerca?

Para resolver estos problemas pueden ayudarse de algún gráfico. Cada vez que resuelven un problema, conviene reflexionar sobre la respuesta con el fin de averiguar si ella es correcta.

Para finalizar cada alumno formula dos o tres problemas y entre todos los resuelven. Es posible que al intentar resolver algunos de estos problemas, los datos no sean suficientes o la pregunta no es coherente con los datos, entonces el maestro los orienta para que los formulen de la mejor manera. Se puede organizar un concurso para motivar a los alumnos a que formulen problemas diversos, ojalá diferentes a los realizados en clase.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
49. Reconocer el metro cuadrado y el centímetro cuadrado como unidades estandarizadas de área.	El alumno explicará por qué el metro cuadrado y el centímetro cuadrado son unidades estandarizadas de área.
50. Relacionar el metro cuadrado con el decímetro cuadrado y con el centímetro cuadrado.	El alumno comparará el metro cuadrado con el decímetro cuadrado y con el centímetro cuadrado y dirá cuántas unidades de éstas hay en el metro cuadrado.

Sugerencias de actividades y metodología

En el curso anterior los alumnos midieron por recubrimiento áreas de algunas superficies con unidades arbitrarias y vieron la necesidad de tener una unidad estandarizada; así reconocieron el decímetro cuadrado y lo emplearon para medir por recubrimiento el área de superficies como: la del tablero, la de la tapa del pupitre, la de la mesa, la de la puerta, etc. Conviene que cada alumno construya con anterioridad, en cartulina, una superficie que tenga un decímetro cuadrado de área para que se comience la actividad haciendo un repaso de los conocimientos sobre áreas de superficies vistos en el grado anterior.

Luego el maestro puede pedir a los alumnos que midan por recubrimiento el área del piso del salón empleando como unidad de medida el decímetro cuadrado. Es posible que se cansen colocando el patrón sobre la superficie del piso y que alguno diga que es muy largo ese procedimiento y pregunte que si no hay un patrón un poco más grande para medirla.

El maestro puede aprovechar esta situación para decirles que hay una unidad de medida de área, más grande que el decímetro cuadrado que es el metro cuadrado, y que se utiliza para medir el área de superficies como la del piso o la del patio. Este patrón de medida puede dibujarse en el tablero o construirse en cartulina.

Los alumnos pueden formar grupos de a 4 y recortar una cartulina (o un papel periódico) que tenga 1 metro cuadrado de área para medir el área de la superficie del piso del salón, colocando los patrones uno a continuación del otro. Si los que tienen no son suficientes para cubrir dicha superficie se pueden colocar nuevamente los patrones ya utilizados, teniendo el cuidado de contar cuántos patrones han colocado.

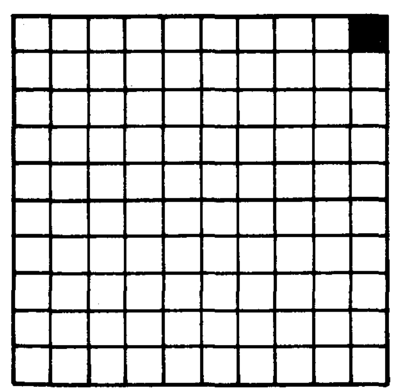
Pueden obtenerse respuestas como la siguiente: la superficie cuya área es 1 metro cuadrado cabe 24 veces en la superficie del piso, o sea que el área del piso es de 24 metros cuadrados; también se puede medir el área de otras superficies empleando como unidad el metro cuadrado.

El maestro puede pedir a cada grupo que mida el área de una superficie pequeña como la de una hoja de cuaderno, o una hoja de un libro. Como con las dos unidades que conocen resulta un poco complicado el proceso de medición ya que son superficies muy grandes con respecto a la superficie cuya área se quiere medir es posible que los alumnos propongan la utilización de un patrón más apropiado. Así el maestro puede introducir el estudio del centímetro cuadrado, pidiendo a los alumnos que observen una mancha de tiza de un centímetro cuadrado dibujada en el tablero y un cuadrito de esa misma área recortado en una cartulina o dibujado en papel cuadriculado.

En cada grupo también construyen unos cuadritos de un centímetro cuadrado y proceden a hallar el área de la tapa del cuaderno, colocando el patrón sobre la superficie; al final se cuentan y así se ve cuantas veces hubo que colocar dicho patrón para cubrir la superficie de la tapa del cuaderno.

Pueden obtener una respuesta como la siguiente: la superficie cuya área es un centímetro cuadrado cabe 60 veces en la superficie de la tapa del cuaderno, es decir que el área de la tapa es de 60 centímetros cuadrados.

Cuando los alumnos hayan reconocido estos tres patrones: metro cuadrado, decímetro cuadrado y centímetro cuadrado, el maestro los motivará para que averiguen cuántos decímetros cuadrados hay en un metro cuadrado y cuántos centímetros cuadrados hay en un metro cuadrado. Así cada grupo busca la manera de obtener estas respuestas; si no encuentran la manera de hacerlo, el maestro los puede ayudar diciéndoles que superpongan la superficie que tiene un decímetro cuadrado de área sobre la superficie que tiene un metro cuadrado de área y marquen cada decímetro cuadrado para después contar el número de veces que "cabe"; se obtendrá una situación como la siguiente:



Así resulta fácil concluir que en un metro cuadrado hay 100 decímetros cuadrados.

Para hallar la relación entre el metro cuadrado y el centímetro cuadrado los alumnos pueden seguir el mismo procedimiento, o sea superponiendo la superficie que tiene un centímetro cuadrado de área sobre la que tiene un metro cuadrado de área. Posiblemente van a decirle al maestro que este procedimiento es muy largo, el maestro los puede orientar para encontrar una forma más corta: colocar solo una franja de cuadritos sobre el borde horizontal inferior y otra franja de cuadritos sobre el borde vertical izquierdo; como en la franja horizontal caben 100 unidades y en la vertical 100, observarán que se necesitan 100 veces 100 centímetros cuadrados para cubrir la superficie cuya área es 1 metro cuadrado.

Lo anterior se puede resumir así:

100 x (100 centímetros cuadrados) =

10000 centímetros cuadrados

Así se puede concluir que: 1 metro cuadrado = 10000 centímetros cuadrados.

Los alumnos pueden hacer como ejercicio averiguar cuántos centímetros cuadrados hay en 1 decímetro cuadrado.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
51. Emplear el metro cuadrado, el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado en la medición de áreas.	Dada una superficie, el alumno medirá su área empleando el metro cuadrado, el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado.

Sugerencias de actividades y metodología

Cuando los alumnos se hayan familiarizado con las tres unidades de área estudiadas y con sus equivalencias se procede a emplearlas en la medición de áreas.

Estos ejercicios de medición pueden hacerse de la siguiente manera: Se forman grupos de cinco; cada grupo escoge una superficie para medirle el área. Estas superficies pueden ser: el piso del salón, la tapa del pupitre, la superficie de la mesa, la superficie del tablero, la superficie de una puerta, la superficie de una ventana, la superficie del patio, la superficie de un cuaderno, la superficie de una de las caras de una caja de fósforos, etc., procurando que las superficies que utilicen sean de forma rectangular o de forma cuadrangular.

Cada grupo prepara con anterioridad el siguiente material: superficies de 1 metro cuadrado, 1 decímetro cuadrado y 1 centímetro cuadrado de área que pueden ser elaborados en cartulina o en papel periódico.

En cada grupo se trabaja con el patrón que sea más adecuado para hacer la medición, es decir que si un alumno va a medir el área de la tapa del pupitre no es conveniente que utilice el metro cuadrado, ya que una superficie de un metro cuadrado de área es más grande que la superficie de la tapa del pupitre, y no se podría determinar con precisión cual es el área de la tapa utilizando este patrón; en esta caso es más conveniente que utilice el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado. La elección del patrón se hace de acuerdo con la superficie cuya área van a medir.

La medición se hace colocando la representación del patrón sobre la superficie; para determinar cuántas veces cabe la unidad de medida se puede marcar con tiza o con lápiz la región que ya se ha medido para diferenciarla de la que no se ha medido.

Inicialmente se hacen mediciones dentro del salón de clase utilizando el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado. Si al hacer una medición un grupo está utilizando el decímetro cuadrado y al final le queda una región en la cual no cabe un decímetro cuadrado, se puede recurrir al centímetro cuadrado y así la medida se expresa en decímetros cuadrados y en centímetros cuadrados.

Supongamos que un grupo midió el área de la superficie de una mesa y encontró que el decímetro cuadrado cupo 15 veces y sobró una pequeña región en la cual no se pudo colocar un decímetro cuadrado; estos alumnos pueden recurrir al centímetro cuadrado, lo colocan en la región que no se ha medido y ven que cupo 45 veces, o sea que el área de la mesa es igual a 15 decímetros cuadrados, 45 centímetros cuadrados.

Esta medida se puede expresar solo en centímetros cuadrados de la siguiente manera: 15 decímetros cuadrados = 15 x (100 centímetros cuadrados) = 1 500 centímetros cuadrados.

Es decir que el área de la superficie de la mesa es igual a: 1 500 centímetros cuadrados + 45 centímetros cuadrados = 1 545 centímetros cuadrados.

Cada grupo expresa la medida de las dos formas y cuando haya que hacer conversiones se tendrá el cuidado de que siempre se haga una unidad mayor a una menor.

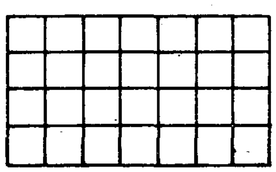
Es interesante salir al patio con los alumnos con el fin de medir su área; cada grupo lleva al material que posee. Colocan las superficies cuya área es un metro cuadrado y si no alcanzan para cubrir la región, volverán a utilizarlas, pasándolas a otro sitio sin perder la cuenta de las que ya han colocado. Si la medida no es exacta en metros cuadrados se puede recurrir al decímetro cuadrado.

Supongamos que se encontró que el metro cuadrado "cupo" 20 veces y el decímetro cuadrado "cupo" 30 veces en la superficie del patio. Esto quiere decir que el área del patio es de 20 metros cuadrados y 30 decímetros cuadrados. Al expresar esta medida en decímetros cuadrados se tiene: 20 metros cuadrados = 20 x (100 decímetros cuadrados) = 2 000 decímetros cuadrados. Es decir que el área del patio es igual a: 2 000 decímetros cuadrados + 30 decímetros cuadrados = 2 030 decímetros cuadrados.

Después el maestro puede orientar a los alumnos para que encuentren otra forma de hallar el área sin necesidad de recubrirla con los patrones de medida, ya que en algunas superficies se presentan obstáculos para hacer tal recubrimiento.

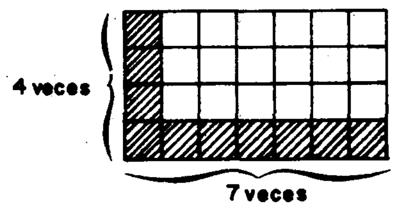
Pueden tomar la superficie del tablero para hallar su área.

Si en el ejercicio anterior se halló que la superficie cuya área es un decímetro cuadrado cabía 28 veces en la superficie del tablero, es decir que el área del tablero es de 28 decímetros cuadrados, los alumnos observan que primero se colocó 7 veces el decímetro cuadrado, luego otras 7 veces, a continuación otras 7 veces y finalmente 7 veces, así:



Se pueden dar cuenta fácilmente que todo este trabajo de colocar representaciones materiales de estos patrones se puede abreviar cubriendo solamente una franja por el borde horizontal inferior del tablero y otra franja por el borde vertical izquierdo del tablero y que el número de unidades que caben en la franja horizontal se repite tantas veces como lo indica el número de unidades que caben en la franja vertical.

O sea que se necesitarán 4 veces 7 decímetros cuadrados para cubrir la superficie del tablero. Esto se expresa escribiendo:



4 x (7 decímetros cuadrados) = 28 decímetros cuadrados.

Ahora en cada grupo se hallará el área de la superficie que midieron anteriormente, con el método abreviado.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
52. Resolver y formular problemas que requieran el uso de diferentes unidades de área.	El alumno formulará un problema en el que se empleen unidades de área y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

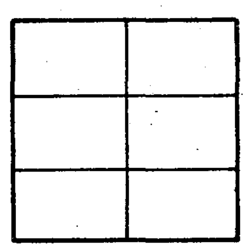
Para resolver estos problemas es conveniente que los alumnos conozcan las equivalencias entre las unidades de área hasta este momento estudiadas ya que esto se requerirá para las conversiones de una unidad a otra.

Se pueden resolver algunos problemas como los siguientes:

- Un piso tiene 150 decímetros de ancho y 2 metros de largo, si se quiere cubrir con baldosines de 1 decímetro cuadrado de área. ¿Cuántos de ellos se necesitarán?

- Si cada uno de los baldosines del problema anterior cuesta $5. ¿Cuánto valen todos los baldosines?.

- Un cuadrado que tiene 144 cm^2 de área se ha subdividido en seis rectángulos iguales como se muestra en la figura. Halle el perímetro de cada uno de estos rectángulos.



Silvia mide los lados de un cuadrado, y un rectángulo y observa que cada lado mide un número entero (o exacto) de centímetros. Si ambos tiene un perímetro de 48 cm ¿Cuál tiene mayor área?.

- ¿Puedes encontrar dos puntos sobre los lados de un cuadrado que al unirse por un segmento dividen el área del cuadrado en dos partes ¿iguales?. ¿Cuántos pares de puntos puedes obtener?.

- Puedes hacer lo mismo con un rectángulo, un triángulo equilátero, un triángulo isósceles , un círculo?.

- Tengo un metro cuadrado de tela. Debo recortar dos rectángulos de 80 cm por 40 cm y dos de 70 cm, para hacer una falda recogida con pretina ¿Me alcanzará la tela?. ¿Cómo debo ubicar los pedazos para recortarlos?

Después de que hayan resuelto un número suficiente de problemas el maestro les pide que formulen problemas. Se resaltan aquellos que sean diferentes a los desarrollados en clase. Es conveniente revisar todos los problemas formulados ya que a veces los niños omiten datos, agregan datos innecesarios o hacen preguntas que no son coherentes con la situación dada.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
53. Medir volúmenes con patrones arbitrarios.	Los alumnos medirán el volumen de un objeto, como un ladrillo, empleando un patrón arbitrario como una caja de fósforos.
54. Definir el decímetro cúbico como unidad estandarizada de volumen.	El alumno explicará por qué el decímetro cúbico es una unidad estandarizada para medir volúmenes.

Sugerencias de actividades y metodología

Los alumnos pueden ayudar a conseguir el material para esta actividad llevando cajas de fósforos de diferentes tamaños, cajas de cigarrillos, dados, cubos de azúcar o si es posible cubos de algún otro material, como madera o plástico. Otros objetos que se podrán emplear son ladrillos, bloques, recipientes, frascos, botellas, canecas, baldes, ollas, vasos.

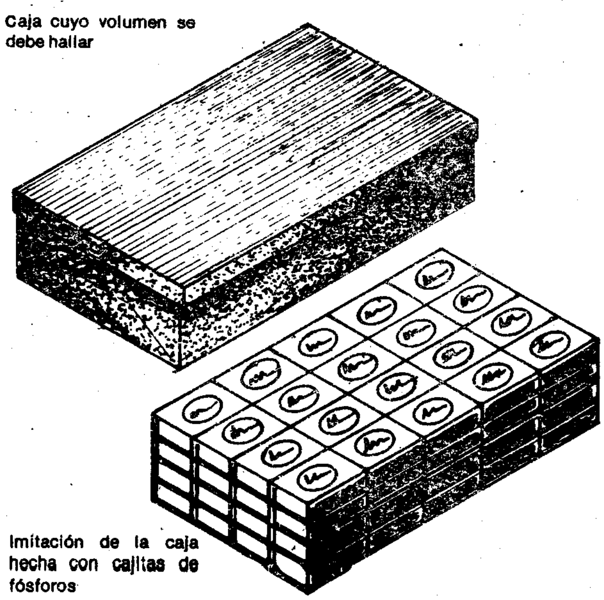
La experiencia de guardar, sacar y organizar objetos en baúles, cajas, armarios, pupitres, etc., ayuda a los niños a construir el concepto de volumen y a distinguir objetos que tienen mayor, menor o el mismo volumen que otros.

Es deseable que se disponga de material suficiente para los requerimientos de esta actividad. El maestro puede sugerir que los alumnos guarden el material en un pupitre. En estas experiencias posiblemente los alumnos observan que unos cuerpos ocupan más espacio que otros o que tienen más volumen que otros. Ejemplo: en un pupitre caben dos o tres ladrillos, mientras que en otro pupitre caben seis o siete libros. Esto quiere decir que el ladrillo ocupa más espacio que el libro, o que el ladrillo tiene más volumen que el libro. También pueden expresar esto diciendo que el libro tiene menos volumen que el ladrillo o que ocupa menos espacio que el ladrillo.

Ahora pueden escoger una caja para hallarle el volumen. Entre todos discuten la forma de encontrar este volumen utilizando el material que poseen. Si no hay una propuesta adecuada, el maestro puede sugerir que construyan varios sólidos similares a la caja, utilizando las cajitas de fósforos para un sólido, cajitas de cigarrillo para otro, cajas de fósforos más grandes para otro, dados o cubitos de madera, etc.

Cuando se hayan construido los sólidos similares a la caja se cuenta el número de unidades de volumen empleadas, y ese número de cajitas, cubos, etc., es el volumen aproximado de la caja.

Si se utilizaron cajitas de fósforos, puede obtenerse una situación como la siguiente:



El dibujo permite observar que para construir un sólido similar a la caja se necesitaron 80 cajitas de fósforos. Esto indica que el volumen de la caja es aproximadamente el mismo que el de las 80 cajitas reunidas. Si el volumen de una de estas cajitas se utiliza como unidad de volumen, se tiene que el volumen de la caja es de 80 unidades aproximadamente.

Los alumnos observan que de acuerdo con la unidad de volumen que hayan empleado para construir la imitación de la caja obtuvieron respuestas diferentes.

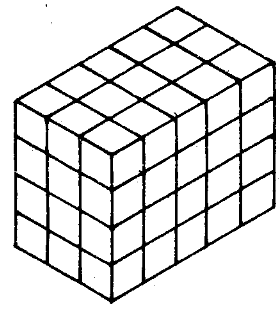
El maestro puede propiciar una discusión sobre la actividad exponiendo las ventajas y desventajas del método empleado, y lo comparan con los métodos usados para medir longitudes y áreas. Por medio de preguntas se puede llegar a que los alumnos deduzcan las ventajas de emplear una unidad común o estándar para medir volúmenes, así como emplean unidades estandarizadas para medir longitudes y áreas.

También se puede preguntar cómo debe ser esa unidad de volumen. Si los alumnos recuerdan que como unidad de longitud tomaron determinada longitud y que como unidad de área tomaron determinada área, es fácil que lleguen a concluir que como unidad de volumen deben tomar un volumen determinado.

Para decidir cuál debe ser esa unidad de volumen, conviene hacer alusión al hecho de que para medir áreas se tomó como unidad el área de un cuadrado (una de cuyas características es la de que todos sus lados tienen la misma longitud) y con base en las consideraciones anteriores posiblemente se llegue a pensar en encontrar como unidad de volumen, el volumen de un cuerpo que tenga ciertas características, cierta regularidad. El maestro muestra a los alumnos varios sólidos para que los estudien, entre ellos un cubo de un decímetro de arista y los orienta para que elijan el más apropiado para tomarlo como unidad. Puede orientar el estudio haciendo que los alumnos observen cómo todas las caras del cubo son cuadrados que tienen la misma área: un decímetro cuadrado, y cómo todos los lados de estos cuadrados tienen la misma longitud: 1 decímetro.

Así se introduce el estudio del decímetro cúbico como un patrón estandarizado para medir volúmenes.

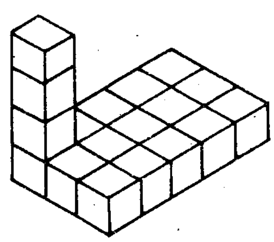
Como es difícil disponer de un número suficiente de cubos cuyo volumen sea de un decímetro cúbico, para que cada grupo realice mediciones de volumen, puede pedirse que de cada grupo pase al frente uno de los alumnos, lleve la caja e intente determinar aproximadamente cuántos decímetros cúbicos tiene construyendo un sólido similar con los cubos. El volumen de la caja está dado por el volumen de los cubos necesarios para construirlo.



Luego de varias mediciones, el maestro puede pedir a los niños que resuman el procedimiento para hallar el volumen de una caja. Posiblemente ellos digan que para encontrarlo pueden armar un piso con objetos que tengan un decímetro cúbico de volumen, luego repetir la operación formando pisos hasta construir la imitación de la caja. Caerán en la cuenta de que todos los pisos tienen igual número de decímetros cúbicos y que por tanto el volumen de la caja se obtiene sumando los decímetros cúbicos de cada piso tantas veces como lo indique el número de pisos. Ejemplo: en la figura anterior hay 4 pisos y cada piso tiene 15 cubos de un decímetro cúbico de volumen, luego el volumen de la caja es: 15 decímetros cúbicos + 15 decímetros cúbicos + 15 decímetros cúbicos + 15 decímetros cúbicos = 60 decímetros cúbicos.

Posteriormente, como una forma más abreviada, podrán a cambio de sumar cuatro veces quince, multiplicar cuatro por quince, así: 4 x (15 decímetros cúbicos) = 60 decímetros cúbicos.

Para medir más rápidamente el volumen se puede hacer un piso de cubos de un decímetro de volumen y luego hacer una columna para determinar cuántos pisos se necesitan para construir la caja. Como todos los pisos tienen igual número de decímetros cúbicos, se multiplica el número de pisos de la columna que formaron, por el número de decímetros cúbicos que hay en cada piso.



Cada piso tiene 15 decímetros cúbicos de volumen y la columna indica que se construirán 4 pisos.

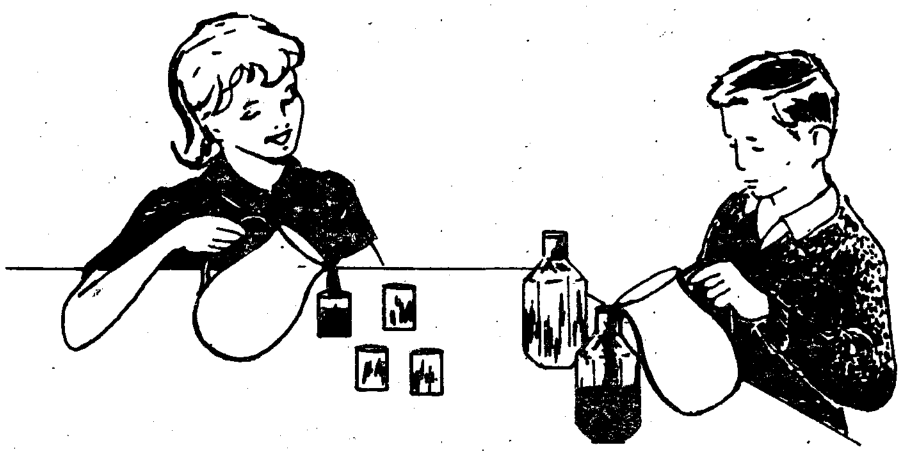
Cada grupo puede comprobar experimentalmente el método abreviado para calcular el volumen.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
55. Realizar mediciones de capacidad empleando patrones arbitrarios.	Dado un recipiente, el alumno hallará su capacidad, empleando para ello un patrón arbitrario.
56. Definir el litro como una unidad estandarizada de capacidad.	El alumno explicará qué es un litro y para qué se emplea.
57. Relacionar el volumen de un decímetro cúbico con la capacidad de un litro.	Dado el volumen de un líquido el alumno dirá cuál será la capacidad mínima del recipiente que lo puede contener.

Sugerencias de actividades y metodología

Seguramente los alumnos han realizado trabajos en los cuales han llenado recipientes con agua, leche, sopa, gasolina, petróleo, etc. Con los recipientes que los alumnos y el maestro hayan llevado para el trabajo de este día, se pueden hacer algunas mediciones. Ejemplo: Tomar dos ollas y comprobar en cuál cabe más agua; llenar una olla con agua y medir cuántos vasos de agua salen; llenar dos botellas y comprobar si se llenan con la misma cantidad de agua o no. Los siguientes dibujos muestran algunas actividades de medición:

Anita desea saber cuántos vasos puede llenar con el agua que cabe en la jarra.



Juanito desea saber cuántas botellas puede llenar con el agua que cabe en la misma jarra.

Cada alumno obtiene un resultado diferente: Anita puede llenar varios vasos mientras que Juanito tal vez no alcance a llenar las dos botellas.

Los alumnos pueden proponer una forma de hacer la medición para que ambos obtengan el mismo resultado. Se espera que digan que la solución es hacer la medición empleando ambos la misma clase de vasos o la misma clase de botellas.

Cuando los alumnos hayan comprendido varias formas de las empleadas para medir el líquido que cabe en un recipiente, el maestro les puede explicar que desde hace muchísimos años los hombres tuvieron necesidad de elegir una unidad para realizar dicha actividad y eligieron el litro; se pregunta a los alumnos si conocen un recipiente llamado "litro". Si entre los materiales hay alguno, se les permite que lo observen, que lo llenen de agua, que lo dibujen, que lo comparen con otros frascos o con una jarra o con una olla.

A continuación el maestro puede anotar en el tablero expresiones como las siguientes:

- Si en un recipiente cabe más agua que en otro, la capacidad del primero es mayor que la del segundo.

- Dos recipientes de la misma altura pueden tener diferente capacidad.

- Dos recipientes de diferente forma pueden tener la misma capacidad.

- El litro es la unidad más común para medir la capacidad de un recipiente.

- El litro se emplea para comparar la capacidad de los recipientes.

Los alumnos pueden analizar las expresiones anteriores y con la ayuda del maestro llegar a concluir que la expresión "capacidad de un recipiente" se emplea para designar la "cantidad de líquido" que puede contener. Conviene tener presente que la palabra "capacidad" en algunos casos, tiene significado diferente al que se le atribuye en esta actividad. Así por ejemplo, se usa para referirse al trabajo que puede realizar una persona, al número de alumnos que caben en un salón.

Se espera que los alumnos lleguen a reconocer el litro como la unidad más común para medir la capacidad, a nombrar varios líquidos que se midan en litros y comenten las formas que puede tener el recipiente cuya capacidad es de un litro.

Para la última parte de esta actividad se necesita un cubo hueco de 1 decímetro de arista. Se toma un litro de agua o de cualquier otro líquido y se vierte en el recipiente de 1 decímetro cúbico. De esta experiencia los alumnos orientados por el maestro pueden concluir que la capacidad de un litro es equivalente al volumen de un decímetro cúbico. Así pueden escribir:

volumen	capacidad
1 decímetro cúbico ⟶	1 litro

Finalmente, pueden resolver algunos problemas sencillos utilizando el decímetro cúbico, el litro y la relación que hay entre ellos.

Ejemplos:

- ¿Cuántos paquetes de 4 decímetros cúbicos caben en una caja que tiene 64 decímetros cúbicos de volumen?

- ¿Cuántos litros de agua caben en un depósito que tiene 36 decímetros cúbicos de volumen?

- En un tanque caben 68 litros de agua. ¿Cuál es el volumen del tanque?

Pueden formular algunos problemas y resolverlos.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
58. Identificar algunas unidades para medir lapsos de tiempo y aplicarlos en la resolución de problemas.	El alumno expresará la duración de algunos lapsos de tiempo en las unidades que convengan.

Sugerencias de actividades y metodología

En primero y segundo grado se vió la necesidad, tanto de medir algunos lapsos de tiempo como la de utilizar una unidad estandarizada para expresar la duración de dichos lapsos. Se inició así la lectura de las horas en el reloj y se llevó a los alumnos a establecer la relación entre la duración del recorrido del horario, desde un número hasta el número siguiente, y la duración del recorrido del minutero cuando este recorrido es de una vuelta completa.

En este grado conviene trabajar con un reloj que tenga, además de horario y minutero, segundero y si es posible con un reloj digital.

Mediante la observación del movimiento de uno de los dos relojes se puede llegar a recordar que una hora es lo mismo que sesenta minutos. Para que los alumnos tengan una apreciación acerca de la duración de un minuto, conviene fijar la atención en el movimiento del segundero, en el reloj tradicional, o en el paso rápido de los números que cuentan los segundos en el reloj digital. En el primer caso es fácil ver que cuando el segundero gira una vuelta, el minutero se desplaza de una rayita a la siguiente. La duración del lapso de tiempo transcurrido es de un minuto. En el caso del reloj digital, el conteo de los segundos, que tiene un minuto, se inicia cuando el reloj marca O1 y termina cuando pasa de 59 a 00 y simultáneamente la hora pasa de un minuto siguiente.

01	59	00
10:35	10:35	10:36

En esta actividad lo más importante es que los alumnos lleguen a apreciar lo que es el minuto. Decir que 1 minuto es igual a 60 segundos, es secundario.

El maestro puede proponer otros ejercicios que permitan afinar la apreciación del minuto. Por ejemplo, cuántos latidos da el corazón de cada alumno en un minuto; cuántas aspiraciones se ejecutan en un minuto; cuántos pasos dan en un minuto, en cuántos minutos recorren una cuadra, etc.

Una vez realizadas las lecturas de algunas horas, es conveniente discutir la respuesta a preguntas parecidas a las siguientes:

- ¿En cuántas horas da el horario una vuelta completa?
- ¿Cuál es, en horas, la duración de un día?
- ¿Cuándo decimos que es medio día?
- ¿Cuándo decimos que es media noche?
- Si en el radio escuchamos que son las diecisiete horas, en qué período del día estamos? ¿Cuál debe ser la posición de las manecillas del reloj?

Estas y otras preguntas que el maestro considere necesarias ayudan a los alumnos a resolver y a formular problemas como:

- Hermes se quedó dormido a las 21 h, y se despertó a las 6 h. ¿Cuántas horas durmió Hermes?
- Doña Francisca salió de su casa a las 8:35 y regresó a las 11:25. ¿Cuántas horas estuvo fuera de su casa doña Francisca?

Conviene también utilizar aquellas expresiones del lenguaje ordinario que indican algunas horas, por ejemplo: las cinco y cuarenta y cinco (5:45); las diez y cuarto (10:15); falta un cuarto para las once (10:45); las doce y media (12:30), etc.

Otras unidades para medir lapsos de tiempo que pueden estudiarse en este grado, son: la semana, el mes, el año, el bimestre, el trimestre, y el semestre.

También puede resolver algunos problemas como los siguientes:

- Si el primero del mes fue un martes, ¿qué día de la semana será el 16?.
- ¿Cuál es el máximo número de días martes que puede haber en mayo?, ¿en junio?, ¿en febrero?.
- Si el 31 de octubre es un domingo, ¿cuántos días lunes hubo en el mes de octubre?.

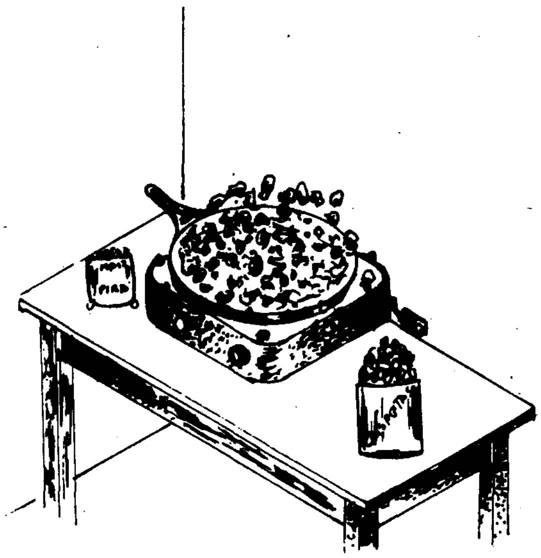
La creatividad del maestro y de los alumnos, con base en sus experiencias puede ayudarles a formular y resolver problemas mucho más interesantes que aquellos ya elaborados en cualquier texto. Un almanaque o calendario, las fechas de los cumpleaños de los alumnos, la división del calendario escolar, las fechas de entrega de los boletines de calificaciones, etc., serán muy útiles para las actividades que el maestro realice.

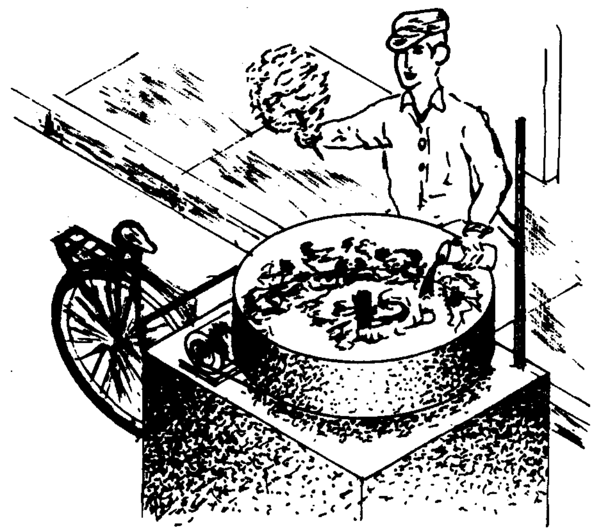
Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
59. Reconocer los efectos de la aplicación de un operador multiplicativo de la forma **n**x a un número.	El alumno aplicará operadores como el duplicador, el triplicador, etc., a un número y explicará qué hizo el operador.
60. Aplicar sucesivamente operadores multiplicativos de la forma **n**x y relacionar esta aplicación con la multiplicación de números naturales.	Dado un número el alumno aplicará sucesivamente dos operadores multiplicativos de la forma **n**x y explicará el resultado.

Sugerencias de actividades y metodología

Con estas actividades no se pretende que los niños utilicen la expresión "operador multiplicativo de la forma **n**x (léase: ene veces) de la misma forma que en el primer grado no se pretendió que utilizaran la expresión "operador aditivo de la forma **-n**". La expresión no es importante. Pero sí es necesario que los niños capten el carácter dinámico que tienen estos operadores, y cómo al actuar sobre un número lo transforman en otro. Por esta razón es conveniente empezar con ejemplos de la vida real donde se den transformaciones o cambios, en este caso ampliaciones: 2x (dos veces), 3x (tres veces), ...**n**x (ene veces).

El maestro puede preguntar a los niños qué observan cuando van a una venta de crispetas. De las respuestas de los alumnos se tomarán aquellas que permitan explicar cómo los granos de maíz se ponen en una máquina, en donde por la acción del fuego y del aceite se transforman en crispetas. Otro ejemplo que se presta a las mismas explicaciones es el del algodón de azúcar que se obtiene batiendo azúcar y colorante en una máquina batidora.





Seguramente surgirán otros ejemplos como el de la fotocopiadora en donde se pone un original y salen varias copias; el de la máquina lavadora en la cual entra ropa sucia y sale limpia; la licuadora donde se colocan alimentos en trozos y salen licuados; algunas máquinas automáticas donde se echa una moneda y sale el producto que vende la máquina. Estas máquinas que reciben una materia prima y los transforman en un producto terminado son buenos modelos de los operadores que transforman un número en otro o una magnitud en otra.

Las semejanzas y las diferencias entre las máquinas matemáticas como las utilizadas en esta actividad, y las máquinas mecánicas, pueden proporcionar interesante material para una unidad integrada de matemáticas y ciencias sociales.

Para reconocer los efectos de aplicar un operador multiplicativo de la forma **n**x el maestro puede proponer un juego que se denominará: "La Fábrica Mágica", en donde hay varias máquinas cuya función es la de duplicar, triplicar, cuadruplicar, etc., el número de objetos que se lleven.

Los niños se pueden organizar en equipos de seis; como material de trabajo se pueden emplear, tapas, palos de colombina o de paleta, bolas, granos de maíz, fichas de papel, etc. Cada equipo de la fábrica dispondrá de una caja para colocar el material de trabajo y de una hoja para consignar los datos. La caja representa una máquina de la Fábrica Mágica.

Se le asigna un número a cada equipo comenzando por el número 2. Este número se escribe en la caja en un rótulo grande: $\boxed{2x}$ que se lee "dos veces" o "el doble".

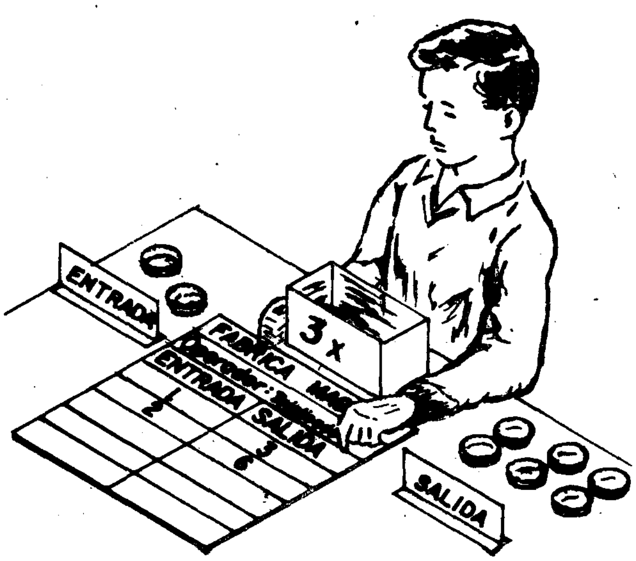
En cada equipo se escoge un niño que será el operador de la máquina. Los restantes 5 jugadores son las personas que llevan los objetos a la entrada de la máquina y pasan luego a recoger el resultado. Supongamos que el material con que va a trabajar el equipo 3 es un montón de tapas; entonces uno de los 5 niños toma una tapa, otro toma dos y así sucesivamente hasta que el quinto tome 5 tapas. La caja con el resto del material la toma el operador del equipo.

El oficio del operador del equipo 3 consiste en tomar los objetos que lleva cada persona, depositarlos en la caja y entregar tres objetos por cada uno de los que recibe. El operador de cada equipo cumple una labor diferente así: el operador del equipo 2 entrega el doble del número de fichas que recibió, el operador del equipo 5 entrega 5 veces el número de objetos que recibió, etc.

Cada operador tendrá un nombre que se relacione con el número de objetos que entregue por cada uno de los que recibe. El operador que entregue dos objetos por cada uno de los que recibe, se llamará DOBLADOR o DUPLICADOR; el que entregue tres, TRIPLICADOR, el que entregue cuatro, CUADRUPLICADOR; el que entregue cinco, QUINTUPLICADOR, etc. También pueden elegir los alumnos nombres equivalentes como "el doble", "el triple", etc., o "dos veces", "tres veces",...

Cada equipo lleva un registro de su producción; para ello cada jugador anota en una hoja el número de objetos que entregó al operador y el número de objetos que recibió. Para anotar los datos se sugiere que todos los equipos empleen una tabla como la siguiente:

FABRICA MAGICA	
OPERADOR:	
ENTRADA	SALIDA



Si un integrante del equipo 3 entrega una tapa al operador, escribe el número 1 en la columna encabezada con el título ENTRADA; el operador toma esa tapa, la echa en la caja y entrega el triple del número de tapas que recibió. En la columna encabezada con el título SALIDA el jugador que entrega la materia prima escribe el número de tapas que le entregó el operador.

La siguiente tabla pudo haberla elaborado el equipo TRIPLICADOR después de haber jugado hasta con 5 objetos en la entrada.

FABRICA MAGICA	
Operador: TRIPLICADOR	
ENTRADA	SALIDA
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15

A continuación se puede proponer un ejercicio de interpretación de la tabla que consiste en expresar con palabras lo que se ha anotado en las columnas de entrada y salida. El maestro los estimula para que busquen expresiones como las siguientes:

tres veces dos es igual a seis
tres veces dos es seis
el triple de dos es seis
Triplicar el dos da seis

En forma similar pueden trabajar los demás equipos. Cada equipo presenta su tabla en el tablero o en una hoja de papel. Todos los alumnos observan las columnas de entrada y de salida de las diferentes tablas y las comparan. Los datos en la columna de entrada son los mismos en todas las tablas; los datos en la columna de salida son distintos para cada tabla.

Entre todos buscan la causa de esto y seguramente llegan a conclusiones como que ésta diferencia se debe a que los operadores cumplían distintas funciones con los objetos que recibían a la entrada; mientras el operador de un equipo los duplicaba, el operador de otro equipo los triplicaba, etc. Otros alumnos no hablarán del operador, sino de la máquina que duplica, la que triplica, etc. También se puede cubrir el encabezamiento de una tabla para que los alumnos adivinen el nombre del operador o el letrero de la máquina (el multiplicador).

La máquina que triplica tiene el letrero $\boxed{3x}$. Si se le mete el 2, el trabajo hecho por la máquina puede simbolizarse de la siguiente manera: $\boxed{3\ x}\ 2=6$ o $3 \times (2)=6$ o simplemente $3 \times 2=6$.

Ahora los alumnos podrán colocar un número de objetos a la entrada de la máquina, esperar que el operador entregue el resultado, tomar ese resultado, colocarlo en la entrada, nuevamente esperar la segunda respuesta del operador y analizar cuántos objetos se obtienen después de que el operador ha trabajado dos veces.

Supongamos que un alumno del equipo 3 coloca cuatro objetos en la entrada; el operador debe colocar a la salida 12 objetos; si toma los 12 objetos y los coloca a la entrada, a la salida debe encontrar el triple o sea 36 objetos.

La simbolización se hace por pasos, así:

$\boxed{3\ x}\ 4=12$ $\qquad 3 \times\ (12)= \qquad 3 \times\ 4=12$

$\boxed{3\ x}\ 12=36$ $\qquad 3 \times (12)=36 \qquad 3 \times 12=36$

o en un solo paso así:

$$\underbrace{\boxed{3\ x}\ \underbrace{\boxed{3\ x}\ 4}_{1\ \text{paso}}}_{2\ \text{paso}}=36 \qquad \underbrace{3 \times (\underbrace{3 \times (4)}_{1\ \text{paso}})}_{2\ \text{paso}}=36 \qquad \underbrace{3 \times \underbrace{3 \times 4}_{1\ \text{paso}}}_{2\ \text{paso}}=36$$

Pueden aplicar sucesivamente otros operadores, para lo cual pueden seguir jugando con las máquinas aplicando dos o más operadores diferentes en cada caso. Por ejemplo si un alumno lleva 5 palitos, los pasa por el duplicador y luego por el cuadruplicador, obtendrá los siguientes resultados:

$\boxed{2x}\ 5=10 \qquad 2 \times (5)\ =10 \qquad 2 \times 5=10$

$\boxed{4x}\ 10=40 \qquad 4 \times (10)=40 \qquad 4 \times 10=40$

$\boxed{4x}\ \boxed{2x}\ 5=40 \qquad 4 \times (2 \times (5))=40 \qquad 4 \times 2 \times 5=40$

Estos ejercicios y la orientación del maestro los pueden llevar a concluir que para hallar el resultado en cada uno de los casos lo que han hecho es multiplicar el número correspondiente al operador por el número de objetos que entraban en la máquina; así tendrán una forma de verificar si la máquina ha trabajado bien. Por este motivo estos operadores se llaman también "multiplicadores".

Para continuar con la actividad se pueden formar otros dos grupos. A los alumnos que van a tener el cargo de operadores se les dan instrucciones precisas y secretas: a uno de ellos se le entrega una caja marcada con el No. 1 y se le dice que su oficio es el de recibir los objetos y devolverlos tal y como se los entregaron; al otro se le entrega una caja marcada con el No. 0 y se le dice que su oficio es recibir los objetos y no devolverlos.

El maestro pide a varios alumnos que lleven sus objetos al operador No. 1 y a otros que los lleven al operador No. 0. Luego pregunta qué hacen estos dos operadores de la fábrica. Seguramente dirán que uno de los operadores no hace nada y que el otro se queda con las cosas. Después de la discusión que pueda darse, se pide que utilicen las tablas para representar la labor que hicieron estos dos nuevos operadores.

Para colocar los datos en estas tablas, el maestro pregunta a cada alumno que lleve objetos al operador de la caja No. 1, cuántos objetos entregó y cuántos recibió. La tabla para este caso será:

FABRICA MAGICA	
Operador:	
ENTRADA	SALIDA
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

De la observación de la tabla anterior, los alumnos tratarán de encontrar un nombre para este operador. Es posible que uno de los nombres sugeridos sea: el operador que dejas las cosas como entran, o el que deja quieto el número, o el operador mansito, etc.

Para representar cómo actuó este operador sobre el número de objetos se escriben expresiones como:

$\boxed{1\ x}\ 3=3 \qquad 1 \times (3)=3 \qquad 1 \times 3=3$

Para hacer la tabla correspondiente al operador No. 0 es importante que el maestro insista en preguntar a los alumnos cuántos objetos llevaron y cuántos recibieron, para que quede muy claro que estos alumnos llevaron sus objetos pero no recibieron nada.

La tabla sería:

FABRICA MAGICA	
Operador:	
ENTRADA	SALIDA
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0

$\boxed{0}$x 4 =0
0 x (4)=0
0 x 4 =0

Como en el caso anterior, se discute el nombre de este operador para que asocien la actuación del operador con la multiplicación cuando uno de los factores es cero. Posibles nombres para este operador puede ser: el anulador, o el destructor, o el aniquilador, etc.

Enseguida se pueden hacer ejercicios de aplicación de varios operadores uno detrás de otro, utilizando diferentes operadores, uno de los cuales sea el $\boxed{1\ x}$ o el $\boxed{0\ x}$. Se explora la situación para observar que el operador $\boxed{1x}$ se puede eliminar, y que el operador $\boxed{0x}$ acaba con todas las ampliaciones que hicieron los otros:

$\boxed{2\ x}$ $\boxed{1\ x}$ $\boxed{3\ x}$ 6 = 36=$\boxed{2\ x}$ $\boxed{3\ x}$ 6
$\boxed{0\ x}$ $\boxed{2\ x}$ $\boxed{3\ x}$ 6 = 0=$\boxed{0\ x}$ 6

Los operadores con los que se ha venido trabajando hasta aquí, como los duplicadores, triplicadores, etc., se aplican a magnitudes concretas fácilmente observables o imaginables por los alumnos, como la longitud de una pita, el área de una hoja de papel, el volumen de un líquido, la amplitud de un giro, el peso o la masa de un pan, etc. Los juegos de transformaciones y relaciones con cada una de esas magnitudes son los sistemas concretos de los que se construye el sistema conceptual de los operadores fraccionarios con sus operaciones y relaciones.

Para el alumno es más fácil imaginar las ampliaciones que las reducciones, que exigen mayor desarrollo de la reversibilidad de las operaciones. Por esto se ejercita primero la aplicación de estos operadores ampliadores o agrandadores a magnitudes concretas. Por ejemplo, si la longitud de una pita es de 15 centímetros y se necesita saber cuánto tiene una el triple de larga, se le aplica el operador $\boxed{3\ x}$ a la longitud de 15 centímetros y la longitud queda triplicada:

3 x (15 cm)=45 cm

3 x 15 cm = 45 cm

De la misma manera, si el volumen de la leche contenida en una bolsa plástica es de 750 cm3 (centímetros cúbicos) y se necesita el cuádruple, se le aplica el operador 4 x al volumen dado y queda cuadruplicado:

4 x (750 cm^3) = 3 000cm^3

4 x 750 cm^3 =3 000 cm^3, o sea tres litros.

A estas magnitudes también se les puede aplicar uno tras otro varios de estos operadores ampliadores. Es lo que hace una costurera que tiene cinco clientes y quiere saber cuántos metros de tela necesita para hacerles tres delantales a cada una de sus cinco clientas. Si se necesitan dos metros de tela para cada delantal hay que triplicar el largo de la tela para saber cuánto se necesita para cada clienta y después ampliar ese largo cinco veces para saber cuánto hay que comprar en total; o sea que a los 2m se le aplican sucesivamente los operadores 3x y 5x.

3 x (2 m) = 6 m	3 x 2 m = 6 m
5 x (6 m) =30 m	5 x 6 m =30 m
5 x (3 x (2 m)) =30 m	5 x 3 x 2 m =30 m

Se recomienda conservar siempre a la derecha la abreviatura de la magnitud respectiva. Una vez ejercitada la aplicación de operadores ampliadores, se pasa a la de operadores reductores o achicadores.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
61. Reconocer los operadores multiplicativos de la forma $\frac{1}{n}$ x como operadores fraccionarios, que disminuyen la magnitud a la cual se aplican.	Dada una magnitud el alumno le aplicará operadores como: la cuarta parte, la mitad, la octava parte y explicará los resultados.
62. Comparar los efectos que producen en una magnitud la aplicación de dos operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$x, diferentes.	Dada una magnitud el alumno le aplicará operadores de la forma $\frac{1}{n}$ x y comparará los resultados.

Sugerencias de actividades y metodología

El lenguaje usual y muchas de las actividades que realizan diariamente los alumnos en la escuela y fuera de ella, son un recurso muy valioso para la adquisición de los conceptos matemáticos. Con seguridad la mayoría de ellos se han visto involucrados en situaciones en las que se emplean expresiones como las siguientes:

- La mitad de los alumnos de tercero juega fútbol.
- Dé media vuelta a la derecha.
- Compre un cuarto de libra de queso.
- Cómase la mitad de la torta.
- Véndame un cuarto de kilo de arroz.
- Véndame media docena de plátanos.
- Recorte la tercera parte de esa cinta.
- Barra la mitad del patio y yo barro la otra mitad.
- Cuando iba en la mitad del camino me cansé.
- Gástese la mitad de ese billete y tráigame las vueltas.
- Tómese la mitad del jugo.
- Gasté un cuarto de hora caminando de mi casa a la escuela.

Expresiones como éstas pueden ser el punto de partida para el estudio de los operadores fraccionarios. Es importante tener presente que los operadores fraccionarios se aplican a números o a magnitudes como amplitud de ángulos de giro, peso o masa de un alimento, longitud de una cinta, área de un patio, volumen de un líquido, etc. Para los alumnos de esta edad debe estar siempre muy claro a qué le están aplicando un operador fraccionario. Por ejemplo, la mitad de medio litro de leche, un cuarto de galón de pintura y otro cuarto de galón de pintura, etc. No hay que forzarlo a que diga "un medio de un cuarto" ni "un cuarto más un cuarto" sin saber un medio de qué o un cuarto de qué.

Se puede comenzar simulando algunas de estas actividades con la ayuda de algún material real para que los alumnos lo manipulen y vivan en la práctica este tema. Dicho material puede ser: un billete de cualquier denominación, vasos del mismo tamaño con agua o leche; piolas, pitas o cabuyas de la misma longitud, panes, superficies, como el patio de la escuela, o un reloj para cronometrar el tiempo.

Cada alumno realiza delante de sus compañeros una actividad sugerida por el maestro. Se procura que los alumnos trabajen con magnitudes diferentes. Ejemplos de estas actividades pueden ser:

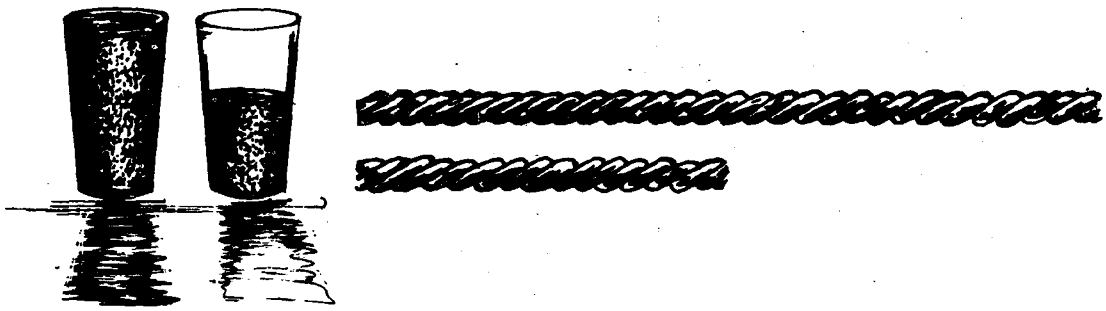
- Camine la mitad de la longitud de este trayecto. (Se habrá determinado con anterioridad un trayecto, y cuando se haya caminado la mitad de la longitud se marca el punto a donde se llegó).
- Pase a este frasco la mitad de esta cantidad o volumen de agua.
- Averigue cuánto es la mitad del valor de este billete.
- Corte la mitad del largo de esa cabuya.
- Barra la mitad del área del patio.
- En media hora me presentan un resumen de las actividades realizadas.
- Tráigame la mitad del peso de este talego de arena.

Una vez efectuadas las tareas se puede comparar la magnitud inicial con la magnitud que resultó después de realizada cada tarea.

Para los ejemplos se puede comparar:

- La longitud del trayecto inicial con la mitad de la longitud del trayecto recorrido.
- El volumen de un líquido con la mitad de ese volumen.
- Una hora con la mitad de una hora.
- El valor de un billete, con la mitad de su valor.
- La longitud de una cabuya con la mitad de la longitud de la cabuya.
- El área del patio, con la mitad de dicha área.
- El peso de un talego de arena con la mitad de ese peso.

Para casos como la capacidad de un recipiente, la longitud de una cabuya, etc., es conveniente visualizar la magnitud inicial y la final con dos recipientes, dos cabuyas, etc., así:



Es posible que por las experiencias vividas por los alumnos, a partir de esta comparación concluyan que al realizar las tareas asignadas por el profesor lo que se hizo fué disminuir a "la mitad". Esto se puede asociar con el trabajo de un operador que al aplicarlo disminuye una magnitud a la mitad. Dicho operador se llama: "un medio" o "la mitad".

Ahora se puede aplicar este operador a números, seleccionados con cuidado para que el resultado sea entero, tomando la medida de cada una de las magnitudes, tanto la inicial como la disminuída. Posiblemente los alumnos emplearán expresiones como éstas:

La mitad de 10 metros son 5 metros.

La mitad de 100 pesos son 50 pesos.

La mitad de una hora es media hora.

La mitad de 20 alumnos son 10 alumnos.

La mitad de 2 litros es un litro, etc.

En este momento el maestro les puede decir que la expresión "la mitad de" se puede simbolizar así:

$\frac{1}{2}$ x ( ), ó $\boxed{\frac{1}{2} \text{x}}$ que es el operador un medio.

De esta manera las expresiones anteriores se pueden simbolizar así:

$\frac{1}{2}$ x (10 metros) = 5 metros

$\frac{1}{2}$ x (100 pesos) = 50 pesos

$\frac{1}{2}$ x (una hora) = media hora

$\frac{1}{2}$ x (20 alumnos) = 10 alumnos

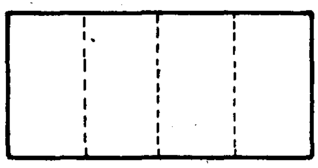
$\frac{1}{2}$ x (2 litros) = 1 litro.

En el lenguaje usual parece que los operadores se aplicaran a los objetos mismos: decimos que hay el doble de botellas o que nos tomamos la mitad de un vaso de leche. Pero en realidad las botellas no se duplican; lo que se duplica es el número de éstas. Al vaso de leche no le puede sacar la mitad, tendría que romperlo; a lo que me refiero es a la capacidad del vaso de leche o al volumen de la leche. Lo mismo ocurre con magnitudes como el dinero. Si se tiene un billete de 100 pesos y se piensa en gastarse la mitad, esta mitad hace referencia a su valor (50 pesos) y no al objeto o al billete.

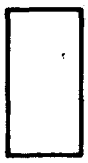
Lo que nos interesa es sacarle la mitad a una magnitud o a un número, no a los objetos.

Ahora se puede pedir a los alumnos que utilicen material similar para reducir las magnitudes a la cuarta parte. La magnitud seleccionada puede ser el área. Por ejemplo, si se va a reducir a la cuarta parte el área de una hoja de papel, podrían plegarla o cortarla así:

1.

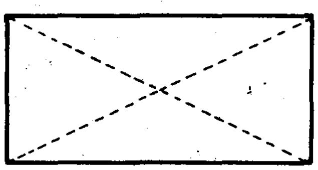


Hoja de papel periódico

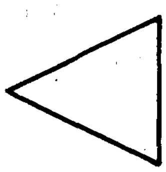


Hojita de papel periódico que tiene la cuarta parte del área de la hoja original.

2.

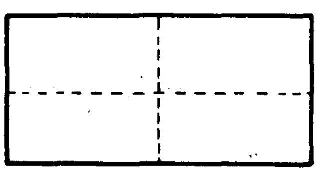


Hoja de papel periódico

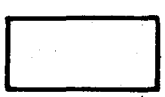


Hojita de papel periódico que tiene la cuarta parte del área de la hoja original.

3.

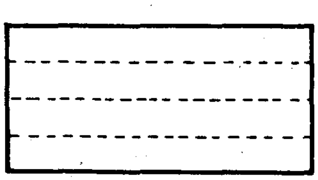


Hoja de papel periódico



Hojita de papel periódico que también tiene la cuarta parte del área de la hoja original.

4.



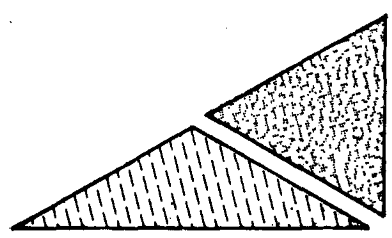
Hoja de papel periódico

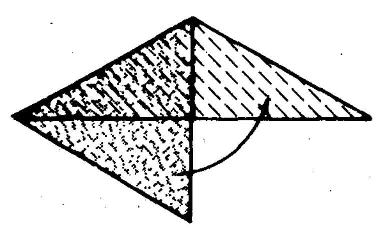
Hojita de papel periódico que también tiene la cuarta parte del área de la hoja original.

Cuando los alumnos hayan realizado el ejercicio compararán los diferentes resultados y concluirán que en cualquier de los casos obtienen cuatro hojitas iguales en área, independientemente de la forma que ellas tengan.

Es posible que los alumnos doblen la hoja como se muestra en las figuras señaladas con 1, 3, 4. Una razón para ello es que las cuatro hojitas resultantes tienen la misma forma, con lo cual es fácil verificar que tienen también la misma área. Parece que en la mente existen determinados acuerdos sobre la congruencia de las formas resultantes de dividir un objeto. Pero los operadores fraccionarios se aplican a la magnitud que uno elija (por ejemplo, la cuarta parte del área, de la masa, de la longitud máxima que se puede medir en la hoja, etc.) y no al objeto mismo. Por eso no se sabe qué es la "cuarta parte de la hoja" pero sí se sabe que cada uno de los cuatro pedazos tiene la cuarta parte del área de la hoja original.

Si ninguno de los niños dobló la hoja original en la forma que muestra la figura señalada con el 2, o si los niños dudan de que esa solución sea apropiada, el maestro les sugerirá una manera de comprobar que las cuatro hojitas resultantes si tienen la misma área aunque no sean congruentes. Para verificarlo basta con superponer las dos hojitas que no son congruentes y, recortar el pedazo que le sobra a una y superponerlo al pedazo que le obra a la otra. Las dos figuras así obtenidas serán congruentes.

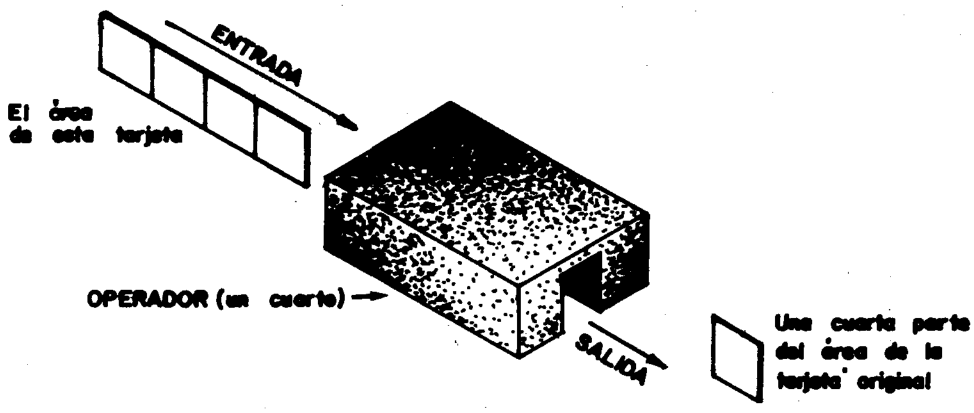




El área es una magnitud difícil de manejar para los niños de 8 a 10 años. En caso de que no puedan manejar el área, se puede trabajar con amplitud de giros (un cuarto de vuelta a la derecha), con longitudes de cuerdas, etc.

El maestro explica que el trabajo que acaba de realizar cada alumno se puede comparar con el del operador "un cuarto" que al aplicarlo a una magnitud, la disminuye a la cuarta parte.

Para el caso de otra hoja de papel (tarjeta) tenemos:



El maestro explica que al operador que reduce una magnitud a la cuarta parte, se llama "el operador un cuarto", y se simboliza así: $\frac{1}{4}$x ( ), o así: $\boxed{\frac{1}{4}\text{x.}}$ El operador un medio y el operador un cuarto son operadores fraccionarios y "achican" las áreas o las longitudes a la mitad y la cuarta parte.

Ahora pueden aplicar el operador un cuarto a la medida de las magnitudes seleccionando apropiadamente números que tenga cuarta parte entera. Así se tendrán resultados como estos:

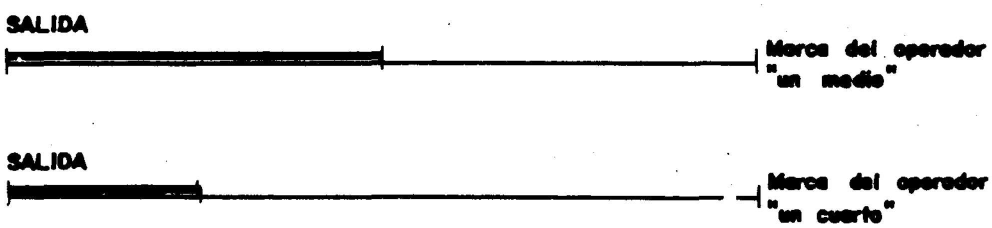
$\frac{1}{4}$ x (20 metros) = 5 metros

$\frac{1}{4}$ x (100 pesos) = 25 pesos

$\frac{1}{4}$ x (8 litros) = 2 litros

Para comparar el resultado de aplicar dos operadores diferentes a una misma magnitud se organizan parejas en las cuales uno de los dos alumnos aplica el operador "un medio" y el otro el operador "un cuarto" a las magnitudes con las cuales han venido trabajando. Si una pareja dibujó en el patio dos trayectos (rayas) de la misma longitud, uno de ellos señalará la mitad y el otro la cuarta parte de la longitud del trayecto.

Se puede obtener una situación como la siguiente:



De la misma manera pueden trabajar los demás alumnos con las otras magnitudes.

A continuación cada pareja observa la magnitud dada inicialmente, la magnitud reducida a la mitad y la magnitud reducida a la cuarta parte; al compararlas seguramente concluye que la magnitud original es la misma, mientras que las magnitudes que resultaron después de aplicarles los operadores fraccionarios son diferentes.

Los alumnos pueden preguntarse cuál es la causa de que esto suceda. Ellos mismos podrán concluir que esta diferencia se debe a que operadores fraccionarios diferentes producen efectos diferentes sobre las magnitudes: mientras que el operador fraccionario "un medio" reduce a la mitad la longitud, el operador fraccionario "un cuarto" la reduce a la cuarta parte.

Así mismo pueden trabajar con otros operadores fraccionarios tales como:

"Un octavo" que se simboliza: $\frac{1}{8}$x ( ) o $\boxed{\frac{1}{8}\text{ x}}$

"Un décimo" que se simboliza: $\frac{1}{10}$ x ( ) o $\boxed{\frac{1}{10}x}$

"Un quinto" que se simboliza: $\frac{1}{5}$ x ( ) o $\boxed{\frac{1}{5}x}$

Cuando se hayan aplicado estos opeadores a magnitudes y a la medida de éstas, se pueden aplicar a números naturales cuidadosamente seleccionados para que el resultado sea un número natural, haciendo algunos ejercicios como:

$\frac{1}{2}$ de 24 es igual a 12, $\frac{1}{2}$ x (24) = 12

$\frac{1}{8}$ de 32 es igual a 4, $\frac{1}{8}$ x (32) = 4, etc.

Es fácil lograr que los alumnos caigan en la cuenta de que aplicar el operador un medio a un número es equivalente a dividirlo por dos; aplicar un quinto es equivalente a dividirlo por cinco, etc. Probablemente los alumnos se refieran a estos operadores fraccionarios como "achicadores" y los relacionen con los ampliadores o agrandadores de las actividades anteriores.

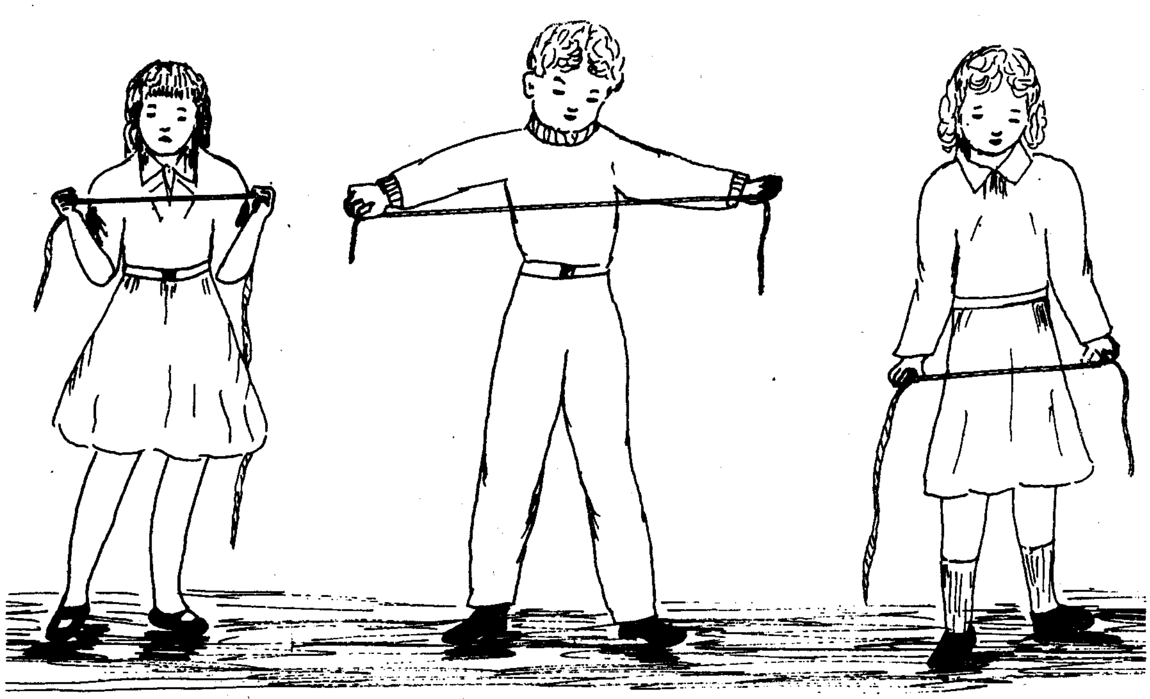
Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
63. Reconocer los operadores multiplicativos de la forma $\frac{1}{n}$ x como los inversos de los operadores multiplicativos de la forma **n**x.	A una magnitud ampliada por un operador de la forma **n**x, el alumno le aplicará el operador inverso, para reducirla a su valor original.

Sugerencias de actividades y metodología

Los alumnos se pueden organizar en grupos. A cada grupo se le da un cordel o una cabuya o un pedazo de lana; además se nombran en cada grupo dos alumnos que hagan el papel de operadores, de tal manera que si uno es el "duplicador", el otro es el que "reduce a la cuarta parte", etc.

Inicialmente cada grupo señala con un nudo el largo de un pedazo de cordel. El alumno que aumenta tomará este largo las veces que lo indique el operador que él represente, y el que reduce hará esto las veces que lo indique el operador que él representa.

Si un grupo trabaja con los operadores "duplicador" y "reduce a la mitad", la situación será:



1. Longitud que se señala inicialmente.
2. Resultado de duplicar el largo del cordel.
3. Resultado de reducir a la mitad el largo ya duplicado.

Pueden observar que después de aplicar los dos operadores, la longitud que se obtiene es la misma que se tenía inicialmente.

En cada grupo se realizan ejercicios como el anterior, pero indicando cuál es la longitud inicial de la cuerda en metros, en decímetros o en centímetros.

Después se puede hacer en el tablero una tabla que recoja los datos obtenidos en cada grupo.

Longitud inicial	Longitud después de aplicar el operador que aumenta	Longitud después de aplicar el operador que reduce	Longitud final
2 m	2 x (2m) =4m	$\frac{1}{2}$ x (4m)=2m	2 m
5 dm	3 x (5dm)=15 dm	$\frac{1}{3}$ x (15 dm)=5 dm	5 dm
3 m	4 x (3m) =12 m	$\frac{1}{4}$ x (12m)=3 m	3 m
40 cm	5 x (40 cm)=200 cm	$\frac{1}{5}$ x (200 cm) =40 cm	40 cm

Se puede trabajar con otras magnitudes para llegar a resultados como los siguientes:

4 veces (5 litros)=20 litros; $\frac{1}{4}$ de (20 litros)=5 litros

2 veces (2 vueltas)=4 vueltas; $\frac{1}{2}$ de (4 vueltas)=2vuelt. tas.

3 veces (4 horas) =12 horas; $\frac{1}{3}$ de (12 horas)=4 horas

10 veces (100 pesos) =1 000 pesos; $\frac{1}{10}$ de (1 000 pesos)=100 pesos

Cuando los alumnos hayan logrado este objetivo podrán sacar conclusiones como las siguientes:

- Para operadores multiplicativos como "duplicador", "triplicador", cuadruplicador", es posible encontrar el respectivo operador multiplicativo inverso: "un medio, "un tercio", "un cuarto".
- Un operador como el "duplicador" y su operador inverso "un medio", producen efectos contrarios.
- Una magnitud no se altera si se le aplican dos operadores multiplicativos inversos uno del otro: uno de la forma $n\times$ y el otro de la forma $\frac{1}{n}\times$.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
64. Reconocer los efectos de aplicar sucesivamente operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$ x a una magnitud.	El alumno hallará el resultado de aplicar sucesivamente varios operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$ x a una magnitud.
65. Calcular el operador resultante de la aplicación sucesiva de dos operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$ x	Dados dos operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$ x el alumno calculará el operador que resulta de aplicarlos sucesivamente a una magnitud.

Sugerencias de actividades y metodología

Se pueden repasar las actividades en las cuales se analizaron los efectos que producen algunos operadores cuando son aplicados a una magnitud.

Los alumnos pueden realizar ejercicios que consisten en aplicar varias veces a una magnitud operadores como los siguientes:

el que reduce a la mitad: $\frac{1}{2}$ x

el que reduce a la cuarta parte $\frac{1}{4}$ x

el que reduce a la tercera parte $\frac{1}{3}$ x

Este es el momento para identificar los símbolos $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ como **fracciones,** el numerito escrito encima de la raya como el **numerador** de la fracción, y el numerito escrito debajo de la raya como el **denominador** de la fracción. La fracción sirve para decir cuál es el operador fraccionario en el que uno está pensando. Lo importante es ese operador, y no la fracción, porque puede haber muchas otras maneras de simbolizar el mismo operador.

Si se toma como magnitud de una cuerda de 12 metros de largo, al actuar sobre la longitud de la cuerda, el operador $\frac{1}{2}$x, la reduce a la mitad: 6 metros. Para simbolizar se escribe:

$\frac{1}{2}$ x (12 metros) = 6 metros

Al actuar sobre la longitud de la cuerda de 12 metros el operador que reduce a la tercera parte, se tendrá que la longitud de la cuerda se ha reducido a 4 metros. Para simbolizar se escribe:

$\frac{1}{3}$ x (12 metros) = 4 metros

Al actuar sobre la cuerda de 12 metros el operador que reduce a la cuarta parte, se tendrá que la longitud de la cuerda se ha reducido a 3 metros.

$\frac{1}{4}$ x (12 metros) = 3 metros

Enseguida se puede proponer que hagan pasar por varios operadores para observar cuál es el resultado que se obtiene al final. Inicialmente se tomará una magnitud y se le aplicarán dos operadores sucesivamente; luego el número de operadores que se aplican se irá aumentando. Ejemplo: a los 12 metros de longitud de la cuerda se les aplica primero el operador que reduce a la mitad y luego el que reduce a la tercera parte. Para indicarlo escribimos:

$\frac{1}{3}$ x ($\frac{1}{2}$ x (12 metros))

Para indicar el orden en que se van a aplicar los operadores se han empleado paréntesis: primero se reduce la magnitud a la mitad, así:

$\frac{1}{3}$ x ($\frac{1}{2}$ x (12 metros)) = $\frac{1}{3}$ x (6 metros)

Luego de aplicar el operador que reduce a la mitad, se aplica el operador que reduce a la tercera parte, así:

$\frac{1}{3}$ x ($\frac{1}{2}$ x (12 metros)) = $\frac{1}{3}$ x (6 metros) = 2 metros

Los alumnos pueden comprobar la validez del método mediante el manejo del material real como la cuerda, comparando los resultados que obtienen al trabajar con la cuerda y al trabajar con la simbolización.

Otros ejemplos con otras magnitudes pueden ser:

$\frac{1}{4}$ x ($\frac{1}{3}$ x (12 litros)) = $\frac{1}{4}$ x (4 litros) = 1 litro

$\frac{1}{5}$ x ($\frac{1}{3}$ x (30 pesos)) = $\frac{1}{5}$ x (10 pesos) = 2 pesos

Luego de que hayan realizado varios ejercicios como estos, el maestro puede pedir a los alumnos que traten de construir un operador que al plicarlo a la magnitud produzca el mismo resultado que se obtiene al aplicar sucesivamente los dos operadores dados.

Para que los alumnos trabajen, se les proporciona un problema concreto como el siguiente: ¿Será posible construir un operador que al aplicarlo a la longitud de la cuerda de 12 metros produzca el mismo resultado que se obtuvo al aplicarle sucesivamente el operador que reducía a la mitad y luego el que reducía a la tercera parte?

$\frac{1}{3}$ x ($\frac{1}{2}$ x (12 metros)) = $\frac{?}{?}$ x (12 metros)

Los alumnos tardan poco tiempo en descubrir que ese operador es el que reduce a la sexta parte y que se escribe $\frac{1}{6}$x. Se les puede poner a averiguar una manera fácil de encontrar la fracción $\frac{1}{6}$ sabiendo las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$. Pronto descubren que basta multiplicar los dos numeradores de las fracciones para obtener el numerador de la nueva fracción y multiplicar los denominadores de las fracciones para obtener el denominador de la nueva fracción.

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \qquad \frac{\boxed{1 \times 1}}{\boxed{3 \times 2}} = \frac{1}{6}$$

$\frac{1}{6}$x produce el mismo efecto sobre los 12 metros que $\frac{1}{3}$x de $\frac{1}{2}$x.

En esta forma los alumnos pueden obtener el operador que al aplicarlo a una magnitud produzca el mismo efecto que se obtiene al aplicar sucesivamente los operadores.

Otro ejemplo: ¿Qué operador produce el mismo efecto que $\frac{1}{3}$x de $\frac{1}{5}$x sobre la longitud 45 metros?

Se espera que los alumnos multipliquen los numeradores de las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$ para obtener el numerador de la nueva fracción y multipliquen los denominadores para obtener el denominador de la nueva fracción, así:

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \qquad \frac{\boxed{1 \times 1}}{\boxed{3 \times 5}} = \frac{1}{15}$$

Concluirán que el operador buscado es $\frac{1}{15}$x que hace el mismo efecto sobre la longitud de 45 metros que $\frac{1}{3}$x de $\frac{1}{5}$x.

También podrán encontrar el operador que al aplicarlo a una magnitud produzca el mismo efecto que se obtiene al aplicar sucesivamente tres operadores.

Multiplicarán los numeradores de las fracciones para obtener el numerador de la nueva fracción y multiplicarán los denominadores para obtener el denominador.

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{60} \qquad \frac{\boxed{1 \times 1 \times 1}}{\boxed{3 \times 4 \times 5}} = \frac{1}{60}$$

Esto significa que al aplicar sucesivamente los operadores $\frac{1}{5}$x, $\frac{1}{4}$x, $\frac{1}{3}$x a una magitud, se obtiene el mismo resultado que al aplicar el operador $\frac{1}{60}$x a la misma magnitud.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
66. Resolver y formular problemas que requieran de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$x.	El alumno formulará un problema que requiera de la aplicación de operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$x y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Se parte de situaciones en las que se necesite aplicar operadores fraccionarios de la forma $\frac{1}{n}$x. Estos son algunos ejemplos:

- Un padre da a su hijo un billete de $1000 y le dice: Gasta la cuarta parte, y la mitad de lo que te queda dásela a tu hermano. ¿Cuánto gastó el muchacho? ¿Cuánto recibió el hermano? ¿Cuánto le quedó al papá?
- En el curso tercero B hay 45 alumnos. La tercera parte de los alumnos son niñas. ¿Cuántas niños y cuántos niños hay?
- Para una competencia de patinaje se inscribieron 30 alumnos. A las semifinales solo aceptan la tercera parte de los inscritos y a las finales la mitad de los niños que pasaron las semifinales. ¿Cuántos alumnos pueden ir a la final del campeonato?
- Un señor camina diariamente 6 000 metros y su hijo la décima parte de esta longitud. ¿Cuánto camina el niño?
- Pedro gasta la sexta parte del día estudiando. ¿Cuántas horas estudia?
- Si alguien te ofreciera regalar la sexta parte de un paquete de 48 dulces; y luego otra persona te ofreciera la octava parte de un paquete de 48 dulces y si solo puedes aceptar una de las ofertas, ¿cuál de las dos aceptarías?.

Para la formulación de problemas pueden iniciar formulando el problema para unos datos dados por el maestro. Por ejemplo: $\frac{1}{4}$ de 20.

Luego los alumnos intentarán formular sus propios problemas basados en sus experiencias y los resolverán. Pueden ayudarse de material concreto para resolverlos.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
67. Interpretar los datos presentados en tablas y en diagramas de barras.	Dado un diagrama de barras, el alumno interpretará los datos allí presentados.

Sugerencias de actividades y metodología

Para esta actividad los alumnos se podrán organizar en grupos de ocho; supondrán que cada grupo va a integrar un equipo de basquetbol con cinco titulares y tres suplentes y nombrarán capitán a uno de los integrantes.

Uno de los deberes del capitán será registrar la estatura en centímetros de cada uno de los jugadores para entregar esta información al maestro.

Cuando todos los grupos hayan entregado dicha información, el maestro podrá anotar en el tablero el registro de uno de los grupos de esta manera:

TABLA DE ESTATURAS

ALUMNO	ESTATURA (en cm)	ALUMNO (en cm)	ESTATURA
Tomás	130	Antonio	135
María	125	Luis	140
Guillermo	135	Leonor	125
Ana	120	Carlos	130

Enseguida el maestro explica que informaciones como estas usualmente reciben el nombre de **datos.** Con base en estos datos, en cada grupo podrán responder algunas preguntas como la siguientes:

¿Cuánto mide el jugador más alto?

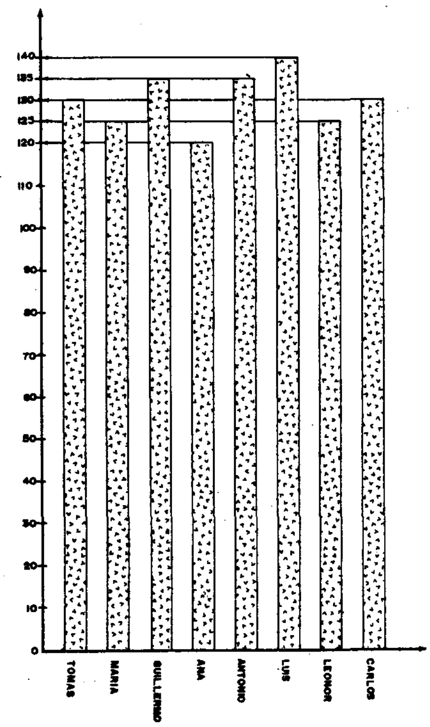
¿Quiénes son los cinco jugadores más altos?

¿Los 3 más bajos?

¿Cuánto mide el jugador más bajo?

¿Hay dos jugadores que tengan la misma estatura?

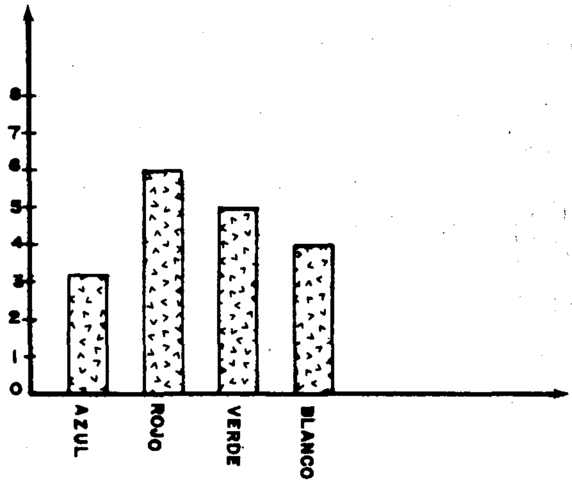
sencilla, puede ser utilizando una gráfica como la siguiente, llamada diagrama de barras:



En esta gráfica cada barra (o columna) está representando al alumno cuyo nombre aparece escrito en la misma columna en la parte de abajo. La altura de la columna está determinada por la estatura del alumno correspondiente, en la gráfica puede leerse ese dato en la parte izquierda.

El maestro podrá plantear otros ejercicios como los que aparecen a continuación:

Ejemplo 1. En un cajón se encuentran objetos de diferentes colores, Alberto los está organizando según el color y anota en una tabla, para luego elaborar una gráfica como la siguiente:



Con base en los datos de la gráfica o diagrama de barras los alumnos tratan de responder las siguientes preguntas:

¿De qué color hay más objetos?

¿De qué color hay menos objetos?

¿Cuántos objetos hay en total?

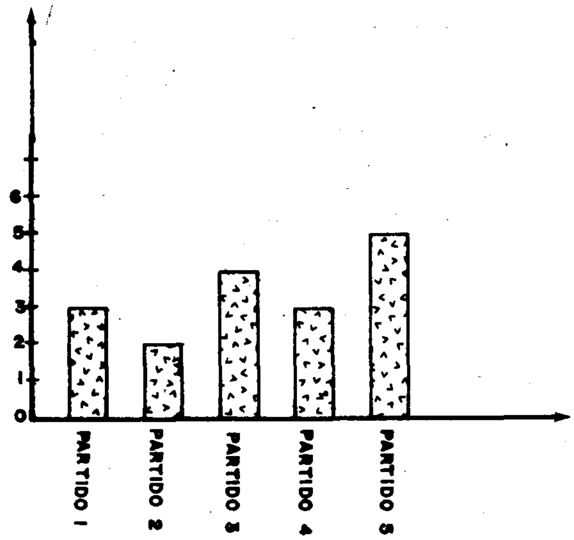
¿Cómo era la tabla de datos que tenía Alberto?

Ejemplo 2. Miguel juega en un equipo de basquetbol y lleva un registro de las canastas que anota en cada partido así:

TABLA DE ANOTACIONES

Partido 1 : 3 canastas
Partido 2 : 2 canastas
Partido 3 : 4 canastas
Partido 4 : 3 canastas
Partido 5 : 5 canastas

Los alumnos tratan de construir un diagrama de barras para representar los datos de Miguel. Puede resultar una gráfica como la siguiente:



Observando la gráfica, sin mirar la tabla de datos anotados por Miguel, podrán contestar las siguientes preguntas:

¿En qué partido anotó Miguel más canastas?

¿En qué partido anotó menos?

¿Cuántas canastas anotó en total?

Se podrán plantear a los alumnos otros ejercicios similares.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
68. Utilizar diferentes tipos de gráficas para representar datos.	Dado un conjunto de datos, el alumno los representará en tres gráficas diferentes.

Sugerencias de actividades y metodología

El maestro puede escribir en el tablero un poema o una canción que conozcan los alumnos, para que reunidos en cada grupo de a cuatro, elaboren una tabla de datos en donde se diga cuántas palabras del poema se escriben con una letra, cuántas palabras se escriben con dos letras, cuántas palabras se escriben con tres letras, etc.

Ejemplo: Si el maestro escribe el siguiente poema:

LAS GOTAS DE AGUA

Las gotas de agua
son bailarinas
que el traje sueltan
para danzar,
cuando las nubes
allá en los cielos
abren los ojos
para llorar.

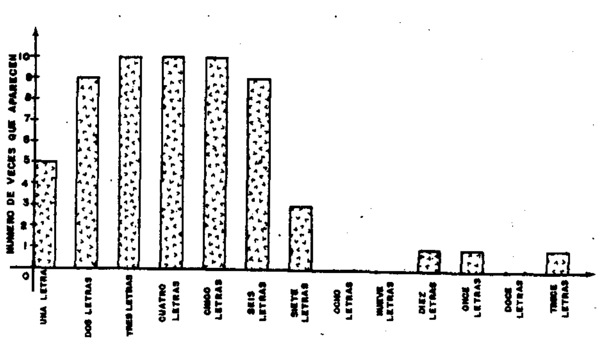
Cantan y bailan
alegremente
repiqueteando
en el tejar
golpean los vidrios,
rien y gritan,
y antes que el agua
vaya a cesar
las gotas juntas
se dan la mano
y el campo besan
para bailar.

(MIRIAM ALVAREZ BRENES)

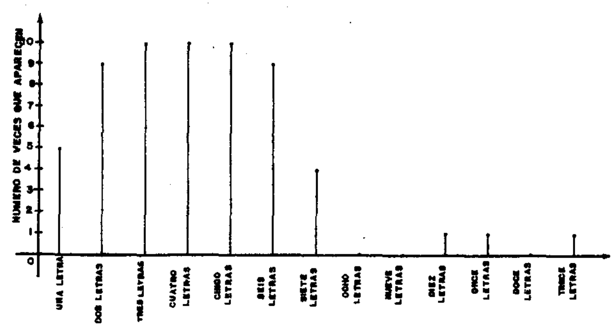
Los datos que se van a anotar son los siguientes:

PALABRAS QUE SE ESCRIBEN CON:	HAY EN EL POEMA
Una letra	cinco
Dos letras	nueve
Tres letras	diez
Cuatro letras	diez
Cinco letras	diez
Seis letras	nueve
Siete letras	tres
Ocho letras	—
nueve letras	—
Diez letras	una
Once letras	una
Doce letras	—
Trece letras	una

Cuando todos los grupos hayan terminado la tabla, pueden representar los datos en una gráfica de barras.



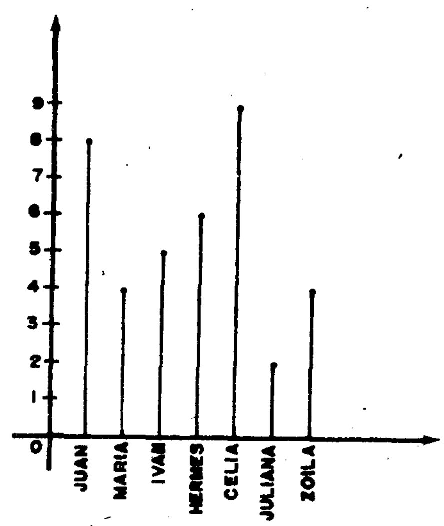
Después de que hayan representado los datos en una gráfica de barras, el maestro les puede presentar otra gráfica de los mismos datos pero utilizando líneas rectas en lugar de las barras.



Pueden interpretar los datos representados en esta gráfica, y compararlos con los representados en la gráfica de barras. Observarán que las dos gráficas representan los mismos datos.

El maestro puede explicarles que en las gráficas de barras, las barras se pueden reemplazar por rectas, puesto que la información no depende del ancho de las barras y se puede pensar que la recta es como una barra delgada.

Pueden hacer ejercicios como el siguiente: Siete alumnos reunieron datos sobre el número de libros de cuentos que leyeron el mes anterior, y los anotaron en una gráfica como la siguiente:



Después de analizar la gráfica los alumnos tratan de contestar las siguientes preguntas:

¿Quién leyó el mayor número de libros? ¿Cuántos libros leyó?

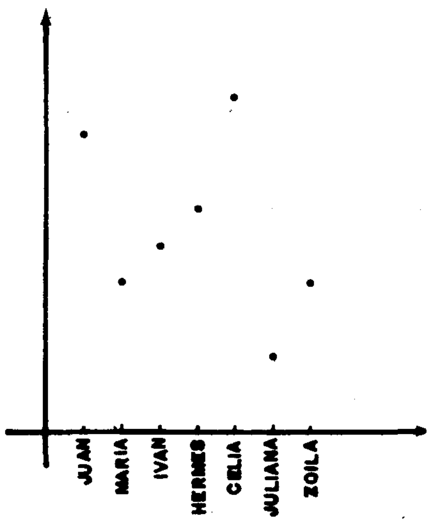
¿Quién leyó el menor número de libros? ¿Cuántos libros leyó?

Si en una pareja ordenada se coloca en el primer lugar el nombre de un niño y en el segundo lugar el número de libros que leyó, ¿Qué parejas se formarán según los datos de la gráfica? Ejemplo: (Juan, 8).

Se puede proponer ejercicios similiares a los anteriores utilizando los dos tipos de gráficas: el de barras y el de líneas.

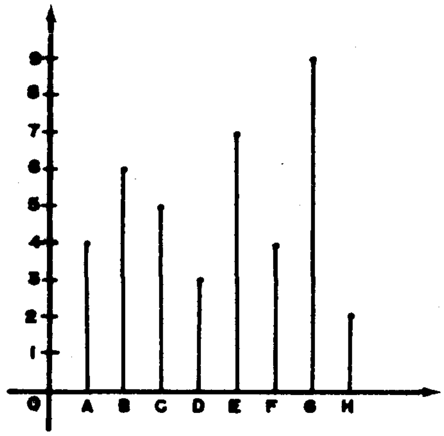
Luego pueden observar una gráfica o diagrama de líneas y concluir que, si en una diagrama marcan únicamente el punto donde termina cada línea, pueden obtener la misma información.

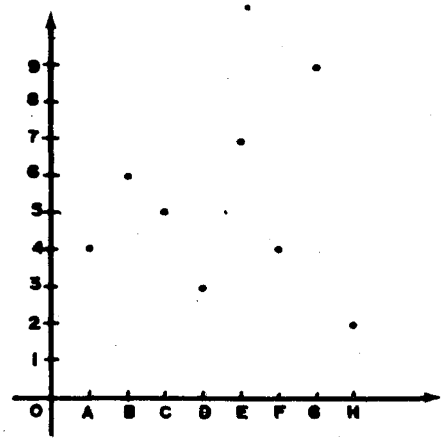
Ejemplo. Marquemos sólo los puntos del diagrama anterior:



En este caso las dos gráficas están representando los mismos datos.

Otro ejemplo de dos gráficos que representan los mismos datos es el siguiente:





Enseguida se podrán proponer dos tipos de ejercicios: uno, donde dado un conjunto de datos, los alumnos los representan en una gráfica de puntos (gráfica cartesiana), y otro en donde dada una gráfica de puntos, el alumno interpreta los datos allí representados.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
69. Efectuar arreglos de objetos.	Dados varios objetos y unas reglas para formar arreglos, el alumno encontrará por lo menos tres arreglos diferentes que cumplan las reglas dadas.
70. Reconocer que hay arreglos que requieren orden y arreglos que no requieren orden.	Dados varios arreglos el alumno identificará los que requieren orden y los que no lo requieren.

Sugerencias de actividades y metodología

Esta actividad se puede desarrollar mediante algunos juegos, para los cuales los alumnos pueden formar grupos de a cuatro.

El primer juego consiste en formar un comité, de tres alumnos, escogidos entre los cuatro del grupo, para que represente al curso tercero en cualquier evento de la escuela. Los alumnos buscan las formas de organizar dicho comité.

Se espera que encuentren las siguientes formas de organizar el comité:

Luis, Esperanza y Carlos
Luis, Carlos y Olga
Esperanza, Carlos y Olga
Luis, Esperanza y Olga

Es posible que los alumnos no encuentren las 4 formas de organizar el comité, pero lo más importante es que entiendan las reglas.

Cuando los alumnos hayan encontrado estas 4 maneras de formar el comité de 3 personas, pueden seguir jugando a formar comités.

El segundo juego consiste en buscar los posibles comités de 2 alumnos eligiéndolos de un grupo de alumnos. Los alumnos de los grupos se pueden combinar de a dos, hasta encontrar todas las maneras de formar el comité.

En el grupo formado por Luis, Esperanza, Carlos y Olga, las formas de organizar el comité son:

- Luis y Esperanza
- Luis y Carlos
- Luis y Olga
- Esperanza y Carlos
- Esperanza y Olga
- Carlos y Olga

Es importante que los alumnos se esfuercen en encontrar estas 6 maneras diferentes de formar el comité y que observen que el orden no es importante en la escogencia de sus integrantes.

Para el tercer juego los alumnos se organizan en grupos de a tres. Este juego consiste en formar la mesa directiva de la comisión de deportes del curso tercero. Esta debe tener un presidente, un vicepresidente y un secretario que se elegirán de entre tres alumnos que se han seleccionado. Los alumnos buscan todas las formas posibles para organizar dicha mesa directiva. Los resultados se anota en una tabla. En el grupo formado por Luis, Carlos y Olga pueden obtener una tabla como la siguiente:

PRESIDENTE	VICEPRESIDENTE	SECRETARIO
Carlos	Luis	Olga
Carlos	Olga	Luis
Luis	Carlos	Olga
Luis	Olga	Carlos
Olga	Luis	Carlos
Olga	Carlos	Luis

El maestro al revisar el trabajo de cada uno de los grupos puede hacerles caer en la cuenta de que en estos arreglos el orden sí es importante.

Otro juego que se puede organizar es el que se llama "como otorgarnos las medallas". Consiste en que en un campeonato de atletismo hay tres medallas de plata para distribuirlas entre cuatro participantes con la condición de que se otorgará una medalla a cada uno de los tres atletas que lleguen primero.

Los alumnos se organizan en grupos de a cuatro, buscan tres objetos que reemplacen las medallas y juegan a buscar las maneras de otorgar las medallas.

Supongamos que un grupo de cuatro participantes está formado por: María, Juan, Antonio y Lolita.

Al buscar las maneras de otogar las medallas, se espera que encuentren lo siguiente:

María, Juan y Antonio
María, Juan y Lolita
Juan, Antonio y Lolita
María, Antonio y Lolita

Como las medallas son iguales, no hace falta tener en cuenta el orden.

Se puede variar este juego considerando ya no tres medallas para otorgar, enre los cuatro atletas, sino dos.

Finalmente se puede realizar otro juego, parecido al anterior que consiste en lo siguiente:

En un campeonato de atletismo hay tres participantes a quienes se otorgarán tres medallas así: al que llegue primero se le otorgará la medalla de oro, al que llegue de segundo se le otorgará la medalla de plata y al tercero la de bronce. Se espera que los alumnos busquen las maneras posibles de Otorgar estas medallas y que escriban las listas en un cuadro.

Para esto previamente se han organizado en grupos de a tres. En el grupo formado por Juan, Fernando y Alberto, se puede obtener una tabla como la siguiente:

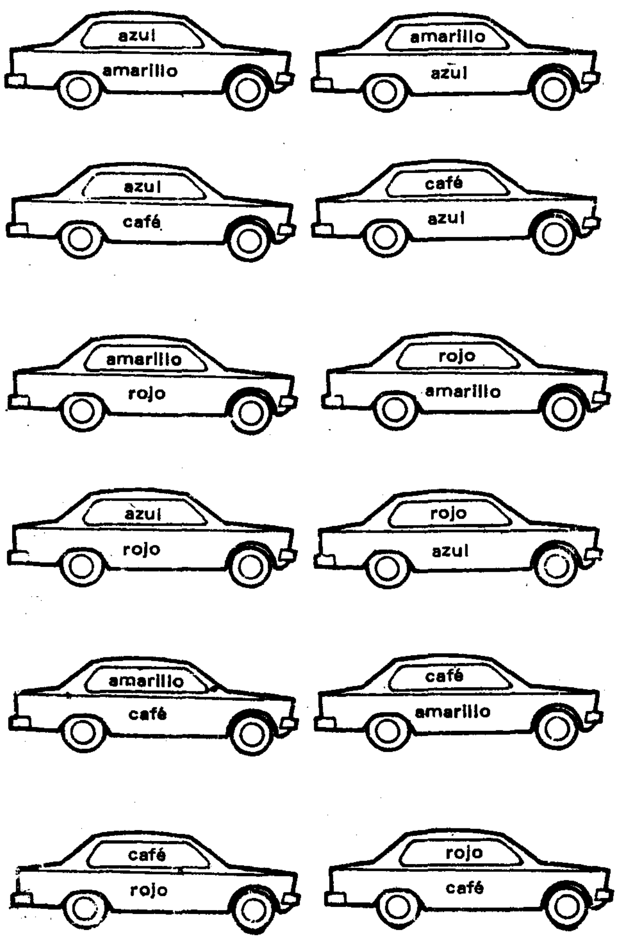
ORO	PLATA	BRONCE
Juan	Fernando	Alberto
Juan	Alberto	Fernando
Fernando	Alberto	Juan
Fernando	Juan	Alberto
Alberto	Juan	Fernando
Alberto	Fernando	Juan

Los alumnos observan que si a Juan le otorgan la medalla de oro, a Fernando la de plata y a Alberto la de bronce, no es lo mismo que si a Juan le otorgan la medalla de oro, a Alberto la de plata y a Fernando la de bronce; es pues muy importante tener en cuenta el orden para poder formar todos los arreglos posibles.

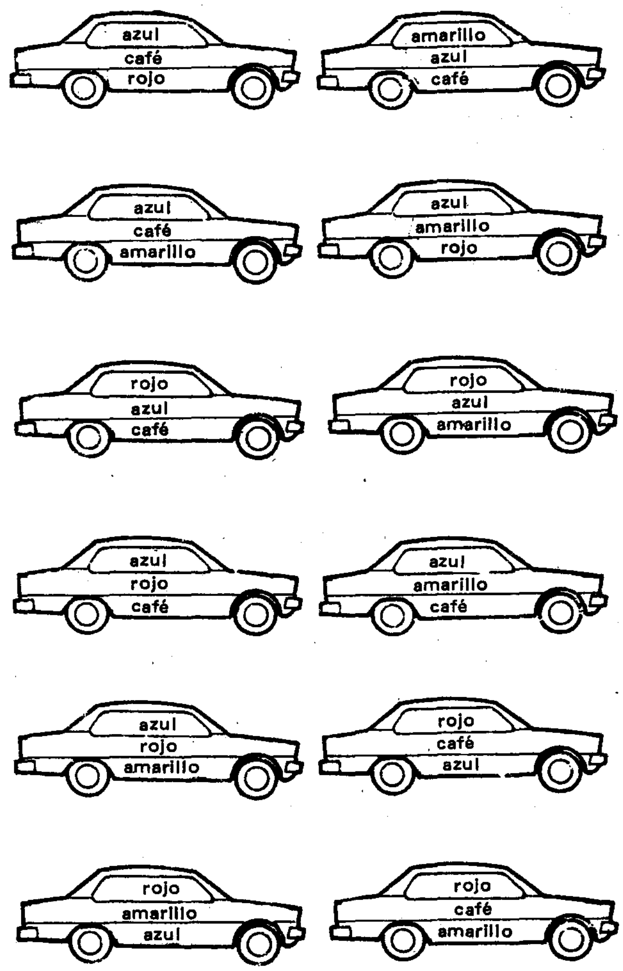
El maestro puede orientar a los alumnos para que observen que en todos los casos lo que han hecho es organizar ciertos objetos de acuerdo con ciertas reglas dadas, o sea que se han efectuado arreglos de objetos en los cuales el orden es importante.

Pueden continuar realizando otros juegos como los siguientes:

En una compañía el gerente desea pintar los carros de la empresa y comisiona a cuatro empleados para que busquen cuántas y cuáles serían las formas diferentes de pintar los carros si el desea que cada carro tenga dos colores diferentes, uno en la parte superior y otro en la parte inferior y les da cuatro colores para escoger que son: amarillo, azul, café y rojo. Cada vez que encuentren una forma de hacerlo, dibujan el carro de esos colores. Las siguientes son las formas de hacerlo.



Otro grupo de 4 alumnos puede introducir una variable a este juego y consiste en pintar los carros de tres colores diferentes utilizando los cuatro colores dados. Se obtienen 24 arreglos. Algunos de estos son:



Un grupo de cinco alumnos puede desarrollar el siguiente ejercicio: Para preparar las "onces", el "algo" o la merienda a su hijo una mamá dispone de los siguientes alimentos: pan, bocadillo, queso, dulce y torta. ¿Cuántas y cuáles serán las distintas maneras de prepararle las onces utilizando solo tres de los cinco alimentos?

Se espera que los alumnos obtengan las siguientes maneras de preparar las onces:

pan, bocadillo y queso
pan, bocadillo y dulce
pan, bocadillo y torta
bocadillo, queso y torta
bocadillo, queso y dulce
bocadillo, torta y dulce
torta, queso y dulce
torta, dulce y pan
pan, queso y dulce.
pan, queso y torta

Otro grupo de cinco alumnos puede buscar las maneras diferentes de preparar las onces utilizando cuatro de los cinco alimentos; en este caso se obtienen las siguientes:

pan, bocadillo, queso y dulce
pan, bocadillo, queso y torta
bocadillo, queso, torta y dulce
dulce, torta, queso y pan
pan, bocadillo, dulce y torta

Otro grupo de cinco alumnos puede buscar las maneras diferentes de preparar las onces utilizando dos de los cinco alimentos:

pan y bocadillo
pan y queso
pan y torta
pan y dulce
bocadillo y queso
bocadillo y torta
bocadillo y dulce
queso y torta
queso y dulce
torta y dulce

A un grupo de tres alumnos se le puede proponer el juego "formemos números" que consiste en buscar cuántos números de tres cifras diferentes se pueden formar con los números 2, 3 y 4.

Los alumnos los buscan y los anotan en sus cuadernos, es posible que encuentren los siguientes:

234
243
324
342
423
432

Otro grupo de cuatro alumnos puede jugar a lo mismo, pero formando números de cuatro cifras diferentes con los números, 2, 3, 4 y 5. Se espera que los alumnos encuentren algunos de los siguientes números (y ojalá todos):

2345	4235
2354	4253
2435	4352
2453	4325
2543	4523
2534	4532
3245	5243
3254	5234
3524	5432
3542	5423
3425	5342
3452	5324

Un grupo de cinco alumnos puede jugar a buscar las maneras como se puede contestar un examen, si se dan cinco preguntas para contestar cuatro. Los alumnos pueden encontrar las siguientes maneras:

Primera, segunda, tercera y cuarta
Primera, segunda, tercera y quinta
Segunda, tercera, cuarta y quinta
Primera, tercera, cuarta y quinta
Primera, segunda, cuarta y quinta

Otro grupo de cinco alumnos también puede jugar a buscar las maneras cómo un niño puede invitar a sus amigos a una fiesta si tiene cinco amigos y sólo puede invitar a tres de ellos. Supongamos que los amigos del niño son: Carlos, Eduardo, Gustavo, Oscar y Rafael. Las formas como el niño puede invitar a sus amigos son:

Carlos, Eduardo y Gustavo
Carlos, Eduardo y Oscar
Carlos, Eduardo y Rafael
Carlos, Gustavo y Oscar
Carlos, Gustavo y Rafael
Carlos, Oscar y Rafael
Eduardo, Gustavo y Oscar
Eduardo, Gustavo y Rafael
Eduardo, Oscar y Rafael
Gustavo, Oscar y Rafael

Para finalizar se puede propiciar una charla sobre los juegos realizados. De esta charla pueden salir algunas conclusiones como las siguientes:

- Hay diferentes tipos de arreglos

- En algunos arreglos importa el orden en que van a quedar los elementos, y en otros no importa.

- En algunos arreglos se toman todos los elementos dados y en otros se toman sólo algunos.