REPUBLICA DE COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL
Dirección General de Capacitación
y Perfeccionamiento Docente
Currículo y Medios Educativos

MATEMATICAS

MARCO GENERAL

PROPUESTA
PROGRAMA CURRICULAR

Sexto Grado de Educación Básica

Bogotá D. E. 1988

Edición a cargo de la Dirección General de Capacitación, Currículo y Medios Educativos del Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, 1988.

Producción:
División de Diseño y Programación Curricular de Educación Formal.

Diseño e Ilustración:
Grupo de Arte y Diseño.
División de Materiales Impresos y Audiovisuales

PRESENTACION

Por nuestra vinculación y compromiso con el sistema educativo seguramente hemos cuestionado y denunciado algunos de sus problemas principales.

En lo referente al currículo, la situación actual demuestra que, aunque se han realizado algunos esfuerzos por corregir las fallas de los planes y programas correspondientes a los Decretos 1710 de 1963 y 080 de 1974, sobre todo en la concepción educativa y su práctica, quedan problemas como: falta de continuidad entre grados y niveles, predominio de contenidos, poca atención a los intereses de los alumnos y a los asuntos de la vida diaria, escasa participación en los procesos de construcción de conocimiento, memorización ineficaz y aprendizaje verbal, rigidez de programas y falta de adecuación al medio.

Este diagnóstico ha comprometido al gobierno nacional en una política que perfeccione la calidad de la educación de modo que pueda responder con justicia a las necesidades, características, valores y aspiraciones de la sociedad.

Para hacer efectiva esta política se llevó a cabo la re-estructuración del sistema educativo (Decreto 088/76) con estrategias como la Renovación Curricular y se promulgaron decretos como el 1419/78 que explica los fines del sistema educativo y señala pautas para el diseño curricular y su administración y el 1002 de 1984 que establece el Plan de Estudios para Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional.

El diseño del nuevo currículo comprende los Fundamentos Generales, el Plan de Estudios, los Marcos Generales, los Programas Curriculares y materiales de apoyo.

Los Fundamentos Generales son una reflexión que, por su naturaleza, integra aspectos filosóficos, epistemológicos, sociológicos, psicológicos y pedagógicos, que permiten proponer en la educación la idea de hombre que se pretende hacer real. En ellos se concibe el conocimiento como proceso y conjunto de experiencias que dura toda la vida, transferible a otras situaciones y presente en diferentes contextos. Los conocimientos y verdades se consideran como proyectos que deben revisarse y corregirse permanentemente. El alumno es el centro del proceso y el maestro es su orientador y animador.

Así la educación llega a ser un proceso para posibilitar la autodeterminación personal y social y la escuela, el espacio necesario para el diálogo y el desarrollo de la conciencia crítica.

Los Marcos Generales son el sustento teórico de las áreas del Plan de Estudios e informan sobre el enfoque, la estructura y la metodología de cada área.

El eje organizativo del currículo es el alumno situado en la sociedad y la historia. Se busca educarlo para la vida con una formación integral, que incluya, además de lo cognoscitivo, lo socioafectivo y lo psicomotor; se proponen destrezas y habilidades necesarias para desplegar sus potencialidades y se lo orienta en los aspectos de socialización, participación y transformación de la realidad dentro de una perspectiva democrática.

Los contenidos y la metodología se refieren a conceptos básicos, principios generales y actividades que permitan enriquecer y sistematizar las experiencias y el propio aprendizaje del alumno. Tienen como punto de partida el mundo del educando y buscan desarrollar las áreas de manera integrada e interdisciplinaria, para respetar la percepción globalizante del niño y el mejor avance posible hacia los niveles de madurez.

La evaluación busca detectar fallas y aciertos para incluir los correctivos necesarios que garanticen el progreso del alumno.

Los nuevos programas de Educación Básica Secundaria son continuación de los de Básica Primaria. Surgieron como propuestas que se han debatido con los técnicos de los Centros Experimentales Piloto, por áreas específicas, y han sido estudiados y evaluados por profesores de distintas regiones del país. Siguiendo el proceso de revisión y ajuste, se espera mejorarlos en ediciones posteriores.

Por lo que se refiere a los Programas de Matemáticas, se busca superar algunas de las dificultades que durante muchos años han impedido una buena educación en esta área.

La propuesta requiere del docente un trabajo continuado de reflexión sobre la construcción del conocimiento por parte de los alumnos y sobre la búsqueda y construcción permanentes de una metodología apropiada que permita partir de su realidad, y apoyarse en sus vivencias para construir y organizar los conceptos y emplear símbolos inventados por ellos o aceptados culturalmente.

Después de comprobar que el procedimiento pedagógico usual de pasar de los sistemas simbólicos a los conceptuales lleva, en muchos casos, a la manipulación mecánica de símbolos y a la repetición de definiciones de memoria, consideramos conveniente partir de la investigación de los sistemas matemáticos (y aún pre-matemáticos) que ya se han vuelto concretos y que ya manejan de alguna forma los alumnos, para que de la actividad sobre ellos surjan los sistemas conceptuales que se desea que ellos construyan. Cuando ya se manejan los conceptos en forma de modelos mentales, actividades motrices, gestos y lenguaje ordinario, se procede a introducir los sistemas simbólicos como abreviaturas de dicho lenguaje, a inventar nuevos sistemas simbólicos y a traducir éstos a los sistemas usuales de los libros de matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, cualquier sistema matemático comprende:

- Sistemas simbólicos que aparecen a primera vista, con símbolos verbales del lenguaje ordinario y con símbolos formales u otros sistemas de representación gráfica.
- Sistemas conceptuales, que son los más importantes, y
- Sistemas concretos, que no necesariamente son objetos materiales, sino sistemas matemáticos (y aún pre-matemáticos) que ya maneja el alumno, y que por la familiaridad con ellos han pasado de ser abstractos a ser concretos para ellos.

Cada uno de estos sistemas incluye:

- Un conjunto de componentes, elementos u objetos con los que se juega.
- Un conjunto de transformaciones, operaciones o acciones sobre ellos, y
- Un conjunto de relaciones entre los mismos.

Con este sencillo análisis de cada sistema matemático que quiere trabajar con sus alumnos, el docente puede planear las actividades que conduzcan a la construcción del sistema conceptual por parte del alumno y su eficiente manejo simbólico.

Campo Elías Burgos
Jefe División de Diseño Programación
Curricular de Educación Formal.

CONTENIDO

MARCO GENERAL

PROGRAMADORES - AUTORES:
Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Virginia Cifuentes de Buriticá
Teresa León Pereira
Orlando Múnera Patiño
Carmen Lucila Osorno Reyes

ASESOR:
Universidad Nacional de Colombia
Carlos Eduardo Vasco Uribe

Introducción

Este documento contiene el Marco General del Programa de Matemáticas para la Educación Básica. En él se presenta un enfoque global de los contenidos acorde con el desarrollo de las Matemáticas y se sugiere un enfoque metodológico que se adecúe al elegido para los contenidos, a las características de los estudiantes colombianos y a las diversas transformaciones por las que pasa el conocimiento humano de los 6 a los 18 años.

Enfoque

A. JUSTIFICACION

La historia de las Matemáticas no puede aislarse de la historia de la humanidad puesto que el desarrollo de la una ha avanzado paralelamente con el desarrollo de la otra.

Es innegable el impulso que las Matemáticas le han dado al progreso de la humanidad, tanto en el aspecto científico como en el tecnológico.

Las aplicaciones que actualmente tienen las Matemáticas no se circunscriben a las de las Ciencias Naturales.

Todos en nuestra práctica cotidiana necesitamos, a menudo, efectuar cálculos y estimar rápidamente algunos resultados. Esta utilidad de las Matemáticas es tan antigua como lo es la historia del hombre. Es, por tanto, indispensable insistir en la operatoria y el cálculo mental, sin volver a las rutinas tediosas de antaño que provocaban en la mayoría de los alumnos una aversión permanente hacia las Matemáticas; se insiste más bien en la comprensión de los conceptos y de los procesos, y en la formulación y solución de problemas, para apoyar y motivar el ejercicio de los algoritmos de cálculo. Se introducen también explícitamente experiencias y ejercicios de estimación aproximada de los resultados de cálculos y de mediciones, y se desarrollan habilidades tan importantes como las de encontrar los resultados exactos a través de procedimientos de rutina. Las calculadoras y las computadoras harán cada vez más importantes las primeras que las segundas.

Para la comprensión de conceptos y procesos matemáticos se requiere un mínimo de teoría de conjuntos, la que comienza con el manejo concreto de colecciones figurales y no figurales, necesarias para la comprensión del concepto de número natural, y continúa, gradualmente, con un mínimo de simbolismo formal, a lo largo de toda la Educación Básica, para proporcionar un lenguaje común al estudio de los diversos sistemas matemáticos y preparar el paso al estudio de la teoría axiomática de conjuntos, en la Educación Media Vocacional.

La mayoría de las profesiones y oficios, y aún el desempeño exitoso en muchas circunstancias de la vida ordinaria, exigen un adecuado manejo del espacio y de sus representaciones plásticas, gráficas o simplemente imaginativas.

Por una falsa reacción contra la geometría euclidiana y por faltas de alternativas, el estudio de la geometría en la Educación Básica se había hecho cada vez más limitado, hasta llegar a desaparecer en muchos planteles, con resultados muy negativos en las habilidades de manejo del espacio. En este programa la geometría aparece enfatizada en todos los grados, como una exploración sistemática del espacio. Esta exploración es primordialmente activa, dinámica y sólo secundariamente un estudio de figuras trazadas en el tablero, o en el papel, que ya han perdido su carácter dinámico.

Los computadores encarnan en sus circuítos la lógica simbólica de Boole. Esta lógica, que en la época de su creación, a mediados del siglo XIX, sólo interesó a unos pocos especialistas, ocupa hoy un sitio privilegiado en el diseño y en el manejo de las calculadoras y los computadores y, en general, en todas las áreas de la informática. Por lo tanto, aparecen desde el primer grado algunos objetivos relacionados con la lógica y el seguimiento de instrucciones lógicamente estructuradas, que preparen a los alumnos a una fácil transición a la programación de calculadoras y computadores, cuando puedan tener acceso a ellos.

Hay otro aspecto muy importante, es el relacionado con el rigor y la precisión en la formación intelectual, y la contribución de las Matemáticas a esa formación.

El lenguaje de las Matemáticas intenta ser, esencialmente, preciso y general, en contraste con la ambigüedad y la particularidad del lenguaje usual. Mientras que el primero está sujeto a reglas estrictas que limitan su significación para disminuir las interpretaciones subjetivas, el segundo permite toda una serie de interpretaciones mediante las cuales el sujeto puede manifestar sus sentimientos e intuiciones.

Es de la síntesis de estos dos lenguajes de donde surge el factor de formación intelectual que permite distinguir lo preciso de lo ambiguo y lo particular de lo general.

En el currículo de Educación Básica se incluye el estudio de todos estos aspectos de las Matemáticas con el fin de contribuir decididamente a la educación integral del individuo, y llevarlo a participar activamente de ese gran patrimonio de la humanidad, que son las Matemáticas.

B. ENFOQUE DE SISTEMAS

En la Matemática como en todas las ciencias, ha habido diversas tendencias o enfoques que de alguna manera buscan organizar los contenidos, correlacionarlos, jerarquizarlos, etc., que han constituído "escuelas matemáticas".

Actualmente hay una corriente muy notoria que se propone presentar la Matemática como una ciencia unificada, en la cual las diversas ramas tienen estructuras comunes, afines, que pueden expresarse en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

Este enfoque unificador de todas las ramas de la Matemática (o sea de las Matemáticas) puede articularse o establecerse, de manera coherente, alrededor de un concepto clave más amplio que el de conjunto, que es el concepto de **Sistema.**

El concepto de sistema tiene la ventaja de no ser exclusivo de la Matemática, ya que es empleado en una u otra forma en todas las ciencias. Cada ciencia se ocupa de sistemas especiales; por consiguiente, debe establecer reglas específicas para interpretarlos y manejarlos, y garantizar, además, una utilización adecuada del lenguaje de los sistemas y de la teoría general de sistemas.

El enfoque elegido para el actual programa oficial de Matemáticas correspondiente al nivel de Educación Básica, es el enfoque de sistemas; por eso conviene analizarlo detalladamente.

En círculos dedicados en Colombia a la docencia y a la investigación matemática, son ya bien conocidos estudios como: **Relatores y operadores; Lógica, conjuntos y estructuras; Relaciones, operaciones y sistemas; El concepto de sistema como clave del currículo de Matemática,** en los cuales el asesor del Ministerio de Educación Nacional, en la elaboración de los programas de Matemáticas para el nivel Básico, Carlos E. Vasco U., desarrolla el enfoque de sistemas, analiza los conceptos asociados a dicho enfoque (como los de conjunto, objeto, relación, operación, sistema y estructura), y los especifica al caso particular de los sistemas matemáticos.[1]

1. CONCEPTO DE SISTEMA

Para definir un sistema hay que establecer previamente el significado de las palabras que se van a emplear. Esas palabras son: conjunto, objeto, relación, operación. Quien intente definirlas, se convencerá de que no es posible hacerlo en términos de conceptos más fundamentales, pues lo único que es posible encontrar, para cada una de esas palabras, es una lista de sinónimos, con diversas connotaciones y de que, con base en esos sinónimos, todo el mundo parece entender qué quieren decir esas palabras, sin detenerse a pensar si existe una definición precisa para cada una.

Los sinónimos más usuales para esas palabras son:

Conjunto: coleccion, clase, agrupación, agregado, montón, grupo (rebaño, jauría, bandada...).
Objeto: cosa, elemento, individuo, entidad, ser (persona, animal, planta, mineral...).
Relación: referencia, respecto, "ser hacia" (Aristóteles), nexo, lazo, vínculo, conexión.
Operación: acción, transformación, modificación, intervención, conversión (Relaciones 1978).

A partir de estas cuatro palabras, o de sus sinónimos, es posible expresar el concepto clave del currículo de Matemática: el concepto de sistema.

Sistema es un conjunto de **objetos** con sus **relaciones y operaciones**

Con base en esta definición, pueden identificarse y analizarse sistemas en diversos campos de la actividad científica, económica, política, etc.

2. SISTEMAS ESPECIFICOS DE LA MATEMATICA

En particular, para describir un sistema determinado de la Matemática hay que especificar un conjunto de objetos, un conjunto de operaciones y un conjunto de relaciones. Un ejemplo puede ser un sistema estudiado en la Aritmética, en el cual:
— el conjunto de objetos es el formado por los números enteros.
— el conjunto de operaciones es el formado por la adición y por la multiplicación, y
— el conjunto de relaciones es el formado por las relaciones de orden: "...es menor o igual que...", "...es mayor o igual que...", "...es estrictamente menor que...", "...es estrictamente mayor que...".

[2] Si cada uno de estos conjuntos se simboliza por una letra mayúscula, se tiene:

— Conjunto de objetos: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

---

[1] (Ver bibliografía. Las obras se citarán con la primera palabra del título y el año de su publicación).

[2] (Conviene recordar que el conjunto de los número enteros se simboliza mediante una $\mathbb{Z}$ y sus elementos son: el cero, todos los enteros positivos: 1, 2, 3, ... y todos los enteros negativos: -1, -2, -3, ...).

– Conjunto de operaciones: $\Omega = \{+, \times\}$

– Conjunto de relaciones: $R = \{\leqslant, <, >, \geqslant\}$

Es posible, pues, representar este sistema de los números enteros así:

$$(\mathbb{Z}, \{+, \times\}, \{\leqslant, <, >, \geqslant\}).$$

Para nombrar más abreviadamente este sistema, se puede establecer la convención de emplear solamente las letras mayúsculas, que simbolizan los conjuntos de objetos, de operaciones y de relaciones, en ese orden:

$$(\mathbb{Z}, \Omega, R)$$

Por las propiedades que cumplen las operaciones y las relaciones definidas en este conjunto específico de los enteros, se suele o se acostumbra mencionar este sistema indicando la estructura que tiene. Como en este caso el sistema tiene estructura de anillo ordenado, se denomina anillo ordenado de los números enteros.

En forma similar pueden describirse otros sistemas de la Aritmética, de la Geometría, de la Teoría de Conjuntos, de la Lógica Matemática, etc. En general, cada sistema queda perfectamente determinado por tres conjuntos:

a. **Un conjunto de objetos,** simbolizado por una letra mayúscula latina, por ejemplo A. Este conjunto, llamado **conjunto subyacente,** no puede ser vacío.

b. **Un conjunto de operaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula griega, por ejemplo Ω (omega). Este conjunto puede ser vacío en el caso de sistemas puramente relacionales, como el llamado **conjunto parcialmente ordenado,** en el que se tiene: $A \neq \phi$, $\Omega = \phi$, $R = \{\leqslant\}$ y que se puede simbolizar así:

$$(A, \phi, \{\leqslant\}), \text{ o },$$
$$(A, \{\leqslant\}), \text{ o },$$
$$(A, \leqslant)$$

c. **Un conjunto de relaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula cursiva, por ejemplo R. En este conjunto, se suelen indicar únicamente las relaciones binarias entre elementos del conjunto A.

Además de estas relaciones en A, se dan otras relaciones en las que intervienen elementos de A, operaciones de Ω y relaciones de R.

Estas relaciones se suelen enunciar en el lenguaje propio del sistema, y constituyen su teoría.

Abreviadamente, cualquier sistema específico de la Matemática puede simbolizarse por medio de una terna o tripla ordenada de conjuntos:

$$\mathcal{S} = (A, \Omega, R)$$

A : el conjunto de objetos del sistema $\mathcal{S}$
Ω : el conjunto de operaciones del sistema $\mathcal{S}$
R : el conjunto de relaciones del sistema $\mathcal{S}$

3. VENTAJAS DEL ENFOQUE DE SISTEMAS

El enfoque de sistemas contenido en los estudios mencionados anteriormente, contribuye al logro de los objetivos del Programa de Matemáticas porque organiza y unifica los diversos contenidos y las diversas ramas de la Matemática, a través de unos conceptos y un lenguaje común; facilita la articulación de la Matemática con las demás áreas del Currículo, y permite desarrollar los contenidos atendiendo a las características de los alumnos del Ciclo Básico y de la realidad en que viven, sin caer en el énfasis desmedido en los conjuntos, que se hace en cierto tipo (ya no tan moderno) de la llamada "Matemática Moderna".

Son, pues, tres las ventajas del enfoque de sistemas: una en el interior de la Matemática, otra en el campo de la integración o articulación de la Matemática con otras ciencias y otra respecto a la metodología propuesta para desarrollar los contenidos.

Conviene analizar las implicaciones que tiene este enfoque en la articulación de la Matemática con las demás ciencias. Basta una rápida revisión de los contenidos tratados en Ciencias Naturales, en Ciencias Sociales, en Administración, etc., para concluir que todas estudian determinados sistemas, y que, por consiguiente, hay en este concepto una fuente de articulación e integración.

Ejemplos de esos sistemas, no estrictamente matemáticos, son: el sistema ecológico (uno de los conceptos de más actualidad), el sistema respiratorio, el sistema circulatorio, el sistema social, el sistema económico, el sistema solar, etc. Sistemas como el social o el circulatorio son muchísimo más complejos que los sistemas matemáticos.

Los sistemas matemáticos son muy simplificados. Los sistemas reales son siempre más complejos. Esta es la regla clave para la articulación de la Matemática con las demás ciencias. El dominio del concepto de Sistema en Matemática prepara para el dominio de ese concepto y sus aplicaciones en las Ciencias Naturales y Sociales, en el Lenguaje, y en la solución de problemas de la vida real. (Ver: Relaciones, 1978; Concepto, 1980).

Las otras dos ventajas de este enfoque se explicitarán posteriormente en la estructura conceptual del área.

Objetivos

A. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA

El estudiante debe:

- Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente.
- Adquirir independencia en la actividad intelectual.
- Adquirir profundidad y perseverancia en la búsqueda del conocimiento.
- Ampliar su capacidad para realizar generalizaciones.
- Desarrollar habilidades en los procedimientos operativos aritméticos y geométricos.
- Familiarizarse con conceptos básicos de la Matemática.
- Adquirir precisión en la expresión verbal y familiaridad con el lenguaje y expresiones simbólicas.
- Interpretar la realidad a través de modelos matemáticos.
- Utilizar la Matemática para interpretar y solucionar problemas de la vida cotidiana, de la tecnología y de la ciencia.
- Ejercitar la agilidad mental para encontrar soluciones a problemas de diferentes tipos.
- Reconocer y valorar algunas de las funciones de la Matemática en el desarrollo de la ciencia y en el mejoramiento de las condiciones de vida.

B. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA EN LA EDUCACION BASICA

- Construir el conjunto de los números naturales a partir de colecciones, de objetos concretos y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva, multiplicativa y potenciativa.
- Adquirir habilidad para el cálculo aritmético mental y para el cálculo escrito, con ayuda de la calculadora y sin ella.
- Construir el conjunto de los números fraccionarios a partir de operadores sobre magnitudes concretas y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números fraccionarios y de las operaciones entre ellos.
- Construir algunos subconjuntos de números reales a partir de situaciones geométricas e inicar el estudio del conjunto de los números reales y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números reales y de las operaciones entre ellos.
- Realizar cálculos numéricos utilizando las propiedades de las operaciones fundamentales estudiadas en el conjunto numérico respectivo.
- Adquirir habilidades y destrezas para formular, plantear y resolver problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos.
- Explorar el espacio en dos y tres dimensiones y construir modelos imaginativos y pictóricos del mismo y desarrollar algunos sistemas conceptuales y simbólicos que permitan manejar esos modelos.
- Calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras en el espacio.
- Identificar diferentes sistemas métricos y ejercitar las conversiones de unidades.
- Analizar sistemas de datos estadísticos, calcular frecuencia y promedio y representarlos gráficamente.
- Identificar y utilizar correctamente las conectivas del lenguaje ordinario:y; o; si, ... entonces; si, ... entonces... y si no, no.
- Reconocer y utilizar correctamente los cuantificadores del lenguaje ordinario: todos, cada uno, algún, alguno, algunos, ningún, ninguno, nadie, algunos no, hay, no hay.
- Determinar y representar conjuntos y subconjuntos.
- Realizar operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento y producto cartesiano; analizar algunas propiedades de estas operaciones y utilizar correctamente sus símbolos más usuales.
- Reconocer relaciones de pertenencia, contenencia, disyunción y equinumerosidad; analizar algunas propiedades de estas relaciones y utilizar correctamente sus símbolos más usuales.
- Generar todas las permutaciones y combinaciones de objetos tomados de conjuntos de pocos elementos, atendiendo a condiciones previamente determinadas.
- Reconocer, analizar y representar relaciones en sistemas específicos y en particular relaciones de orden y de equivalencia.
- Reconocer, analizar y representar operaciones en sistemas específicos y en particular operaciones conmutativas y asociativas.

Estructura

Es fácil comprender ahora la ventaja del enfoque de sistemas, como organizador de los contenidos de Matemática (ver Cuadros Nos. 1 y 2). Este enfoque suministra una organización o estructura de carácter general para el área y un esquema de presentación de cada sistema, los cuales proporcionan las bases necesarias para desarrollar los contenidos mínimos del programa, para abordar otros temas de las diversas ramas de la Matemática, y aún de otras ciencias.

La estructura del área de Matemática, debe señalar, como mínimo, algunos aspectos, tales como: organización de los contenidos, grandes temas, secuencia, grado de profundidad, interrelaciones y desarrollo del enfoque. Los cuadros 1, 2, 3 y 4 que aparecen en las páginas siguientes constituyen una aproximación a dicha estructura.

CONTENIDOS (lo.a 5o. GRADOS)

Los contenidos del área para la Educación Básica Primaria (1o. a 5o. grados) se han organizado, bajo los siguientes títulos: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos, conjuntos, relaciones y operaciones. (Ver cuadro No. 1).

Los contenidos para la Básica Secundaria (6o. a 9o. grados) tienen además de los títulos anteriores, otro denominado análisis real (Ver cuadro No. 2).

1. SISTEMAS NUMERICOS

Estos se estudian de manera gradual. En la Educación Básica Primaria, el de los números naturales, comenzando con los números de 0 — 100 en primer grado y ampliando en cada grado el conjunto numérico. En cada uno de estos conjuntos se van introduciendo progresivamente las operaciones comenzando con la adición y la sustracción en primer grado, hasta llegar a las primeras nociones de potenciación, radicación y logaritmación en quinto grado y además las relaciones de orden aditivo y de orden multiplicativo. También en la Primaria se inicia el estudio de los números fraccionarios y de los decimales. En la Educación Básica Secundaria se avanza en el estudio de los números enteros, los racionales, los reales y los complejos, vistos como sistemas numéricos con sus operaciones y las relaciones que hay entre sus elementos. Se hace mucho énfasis en la solución y formulación de problemas, como aplicación de los algoritmos de las operaciones y en ejercicios de cálculo mental. Con ésto se espera que, a medida que los niños vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar las semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que más adelante les permitan integrar conocimientos y hacer generalizaciones.

2. SISTEMAS GEOMETRICOS

Se incorpora toda la parte de Geometría activa a través de la exploración del espacio. De esta manera se estudian los sólidos, las figuras planas, las líneas, los ángulos, etc.; destacando relaciones como paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza, y transformaciones como rotaciones, traslaciones, reflexiones, reducciones y ampliaciones.

3. SISTEMAS METRICOS

Se estudia el sistema métrico decimal y otros sistemas no decimales. En dichos sistemas se expresa el resultado de medir longitudes, superficies, el volumen de un cuerpo, la capacidad de un recipiente, el peso y la masa de un objeto, la duración de un evento y la amplitud de un ángulo. Los patrones estandarizados se utilizan después de realizar mediciones con unidades arbitrarias y sentir así la necesidad de una unidad común de medida aplicable en todos los casos. En los diferentes sistemas se realizan conversiones con sus aplicaciones y se hacen comparaciones.

4. SISTEMAS DE DATOS

Se estudian algunos conceptos fundamentales de estadística que sirven para interpretar algunos modelos de la realidad. Se inicia con la recolección de datos, su organización en tablas de frecuencia y su representación en diagramas. Se hace algún análisis de los datos recogidos y tabulados mostrando lo que puede deducirse de ellos y cómo pueden compararse entre sí; para ello se estudian al final de la Básica Primaria algunas medidas de tendencia central y al final de la Básica Secundaria se completan estas medidas y se introducen las medidas de dispersión.

5. SISTEMAS LOGICOS

No se pretende hablar de lógica matemática abstracta, sino de ciertos aspectos del lenguaje en los que se notan regularidades que se pueden manejar matemáticamente. Por eso se parte de las expresiones que manejan los alumnos para ir introduciéndolos poco a poco en un lenguaje más riguroso, que tiene por objeto, entre otros, evitar las frecuentes ambigüedades del lenguaje usual, y más tarde, desarrollar las habilidades del pensamiento deductivo.

6. CONJUNTOS

Como ya se dijo en la justificación, se trata la teoría mínima necesaria para introducir algunos conceptos fundamentales de la Aritmética, de la combinatoria y de la probabilidad, y para preparar una posterior formulación unificada de las diversas áreas de las matemáticas.

7. RELACIONES Y OPERACIONES

Se analizan algunos fundamentos teóricos sobre estos conceptos. Dicho análisis se insinúa empíricamente desde la Básica Primaria hasta llegar a una conceptualización más general al finalizar la Básica Secundaria. Las operaciones se estudian como transformaciones sobre los elementos de un sistema, mientras que las relaciones corresponden a la teoría acerca de los mismos. Se estudian también las propiedades, tanto de las operaciones como de las relaciones y se presentan algunos aspectos teóricos sobre las funciones.

8. ANALISIS REAL

Se estudian las funciones reales, en donde se incorporan algunos temas de los que se habían venido tratando en los programas tradicionales bajo el nombre de "Algebra", y que en realidad son solo el manejo de ciertas expresiones para las funciones reales o sus valores. Se enfatiza en los aspectos de representación gráfica de estas funciones. Se empieza estudiando funciones tan sencillas como la función lineal, con lo cual se cubren temas como la proporcionalidad y todas sus aplicaciones; posteriormente se trabajan las funciones cuadráticas y demás funciones polinómicas. Paralelamente a las funciones se van estudiando las ecuaciones e inecuaciones y en 9o. grado se introducen las funciones lineales en dos y tres dimensiones.

En este programa se hace énfasis en el estudio de sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos y en Secundaria en el análisis real. En cuanto a los demás sistemas se hace un manejo racional y prudente necesario para adquirir familiaridad con las matemáticas no numéricas y para contribuir al desarrollo de la capacidad de análisis, y a largo plazo, del pensamiento formal.

En síntesis, los contenidos básicos vistos en los cuadros 1 y 2, permiten: identificar los sistemas de la Matemática en los cuales se ubican los contenidos propuestos para el programa; identificar los grandes temas que se proponen para cada grado; reconocer la secuencia que debe seguirse al desarrollar los contenidos; apreciar el grado de profundidad con que deben ser tratados los contenidos en cada grado e identificar las correlaciones que hay entre los temas de un mismo grado o entre temas de diferente grado. El hecho de tener una visión global del programa de cada grado favorece la enseñanza correlacionada y permite además, obtener información sobre lo que un alumno, que cursa un determinado grado, estudió en el grado anterior y lo que va a necesitar para el grado siguiente.

El cuadro No. 3, titulado **Sistema,** señala una forma común para la presentación de los diversos sistemas. Según lo explicado anteriormente, es importante identificar en cada caso los elementos u objetos, las relaciones y las operaciones.

En el ejemplo tomado de la aritmética, los elementos son números enteros, las operaciones son la adición y la multiplicación y las relaciones son: "...es estrictamente menor que...", "...es menor o igual que..." , etc. En el ejemplo tomado de la geometría, los elementos son líneas del plano, las operaciones son las rotaciones y las traslaciones, y las relaciones son: "...es perpendicular a...", "...es paralela a...". En forma similar se explican los ejemplos tomados de la Teoría de Conjuntos y de la Lógica. Los ejemplos podrían ser otros, pero el esquema de presentación es el mismo en todos los casos.

No se pretende que los niños conozcan e interpreten ese cuadro. Pero sí se espera que a medida que vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que, más adelante, les permitan integrar los conocimientos y hacer generalizaciones. Por ejemplo el "descubrir"; en la primaria, que la adición y la multiplicación de números naturales son conmutativas y que la unión e intersección de conjuntos también lo son, debe llevar al estudiante de secundaria a elaborar un concepto más general de conmutatividad. Así se propicia el desarrollo mental del estudiante, se ahorra tiempo y se adquieren conocimientos más sólidos y duraderos. En esa forma, también, la mente del niño elabora progresivamente los conceptos y no tiene necesidad de repetir fórmulas y definiciones abstractas carentes de significado para él.

Además de los sistemas que se presentan en el cuadro No. 3 para la Aritmética, la Geometría, la Teoría de Conjuntos y la Lógica, podrían darse muchos otros sistemas de esas y otras ramas de las Matemáticas: por ejemplo, se puede hablar de muchos sistemas numéricos diferentes, no sólo cambiando el conjunto de los números enteros por los naturales, los fraccionarios, los reales o los complejos, sino distinguiendo varios sistemas diferentes sobre cada uno de esos conjuntos.

"Puede hablarse también de un sistema de numeración diferente de un sistema numérico: en el sistema de numeración los objetos son los símbolos, de los cuales hay primitivos (dígitos) y derivados, y la operación básica es la concatenación o yuxtaposición.

También puede enfocarse en este sentido el estudio de un sistema métrico, y comparar las presentaciones del sistema métrico decimal que dan los libros de Matemáticas, con los sistemas que aparecen en los libros de Física (IS, MKS, CGS, FPS). Se notará inmediatamente que ninguno de ellos es el presentado por los libros de Matemáticas; que las unidades de tiempo no son decimales; que la teoría de la dimensión se hace necesaria para entender el sistema; que la multiplicación de unidades produce múltiplos y submúltiplos, si es externa, pero que la multiplicación interna produce unidades de otra dimensión". (Concepto, 1980).

CUADRO No. 1

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA PRIMARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 SISTEMAS DE DATOS	5 SISTEMAS LOGICOS	6 CONJUNTOS	7 RELACIONES Y OPERACIONES
1o.	. Naturales de 0 a 100 con adición y sustracción y simbolización. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden aditivo ... es mayor que ... ... es menor que ... . Ordinales. . Operadores como -1, + 1, -2, etc.	. Relaciones espaciales. . Algunos sólidos geométricos regulares. . Figuras planas. Bordes rectos y bordes curvos. . Introducción a la simetría. . Líneas (abiertas y cerradas).	. Introducción a la medición de longitudes: patrones arbitrarios, el dm. y el m. . Medición de tiempo.	. Iniciación a gráficas de barras.		. Clasificaciones. . Noción de conjunto; elemento. . Conjuntos equinumerosos. Cardinal. . Noción de unión de conjuntos disyuntos. . Representación gráfica. . Arreglos sencillos.	. Iniciación a la representación de relaciones. . Diversas maneras de efectuar operaciones.
2o.	. Naturales de 0 a 1000 con adición, sustracción y multiplicación. División (iniciación). . Números pares y números impares. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo ... es múltiplo de ... ... es divisor de ...	. Rectas paralelas y perpendiculares. . Rotaciones y giros. Angulos. . Formas geométricas regulares: cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares. . Noción de perímetro.	. Longitud: m., dm., cm. . Area. Unidades arbitrarias, dm^2. . Unidades de duración: horas, minutos.	. Gráficas de barras.	. Significado de la "y" y de la "o" en una instrucción. . Expresiones "todos", "algunos", "ninguno".	. Pertenencia. . Noción de subconjunto. . Unión de conjuntos disyuntos y no disyuntos. . Cardinal de la unión. . Parejas con y sin orden.	. Propiedades: conmutativa, asociativa, modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (introducción).
3o.	. Nuestros sistema de numeración. . Numeración romana. . Naturales mayores que 1000 con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos generalizados para adición, sustracción y multiplicación con aplicaciones. . Números primos. . Operadores naturales. . Introducción a los operadores fraccionarios.	. Superficies (fronteras de sólidos). Superficies planas. . Líneas (fronteras de superficies). . Puntos (fronteras de líneas) . Caracterización de: triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo.	. Longitud, m., múltiplos y submúltiplos. Yarda y vara. . Superficie. Area. Patrones standarizados: m^2, cm^2, y mm^2. . Volumen. Patrones arbitrarios. . Capacidad: patrones arbitrarios. Litro.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos.	. Diversos significados de la "y" y de la "o" en el lenguaje ordinario. . Diversas maneras de cuantificar expresiones en el lenguaje ordinario.	. Simbolización de las relaciones de pertenencia y contenencia. . Unión e intersección. . Algunos arreglos con y sin orden.	. Relaciones de orden. . Diagrama de flechas. . Propiedades antisimétrica y transitiva. . Propiedades: conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.
4o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación y división. M. C. D. y M. C. M. . Fraccionarios con adición, sustracción y multiplicación. . Decimales con adición y sustracción. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo.	. Modelos de sólidos. . Cuadriláteros: trapecios. . Perímetro (generalizado). . Radios, diámetros. . Areas: trapecio, cuadrado, rectángulo, triángulo. . Cuadrícula.	. Area. Algunos múltiplos y submúltiplos del m^2. Medidas agrarias. . Volumen: m^3, dm^3, cm^3. Peso: gramo, kilogramo.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos. . Iniciación al análisis de datos. . Frecuencias, moda.	. Proposiciones: Significado verdad o falsedad. . Negación de proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario.	. Relaciones de contenencia. . Igualdad de conjuntos. . Conjunto referencial. . Complemento de un conjunto. Simbolización y representación. . Algunos tipos de arreglos.	. Relación inversa. . Diagramas de flechas. Propiedades antisimétrica y transitiva.
5o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación. . Fraccionarios con adición, sustracción, multiplicación y división. . Decimales con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos con aplicaciones. . Razones y proporciones. . Proporcionalidad directa e inversa.	. Construcciones con regla y compás. . Polígonos regulares. . Construcción de algunos sólidos. . Area de círculo. . Area y volumen de algunos sólidos.	. Conversiones con unidades de longitud, área, capacidad y peso. . Otras unidades de peso. . Unidades de duración. . Conversiones.	. Noción de promedio en un conjunto pequeño de datos.	. Proposiciones Conjuntivas, disyuntivas y condicionales.	. Extensión y comprensión. . Conjuntos: infinito (N), unitario, vacío. . Unión e intersección. . Otros tipos de arreglos.	. Recopilación de las operaciones conmutativas, asociativas, modulativas estudiadas. . Igualdades.

CUADRO No. 2

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA SECUNDARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 ANALISIS REAL	5 SISTEMAS DE DATOS	6 SISTEMAS LOGICOS	7 CONJUNTOS	8 RELACIONES Y OPERACIONES
6o.	. Sistemas de numeración: Historia Bases (sin operaciones): 2, 5, 10, 12. . $(\mathbb{N}, +, -, x, \div, \leq, \geq)$. Potenciación, radicación y logaritmación. . $(\mathbb{Q}^+, +, -, x, \div, \leq, \geq)$. Expresiones fraccionarias y decimales.	. Traslaciones. Paralelismo . Rotación. Angulos. . Perpendicularidad. . Triángulos y cuadriláteros. . Distancias. . Teorema de Pitágoras.	. Unidades de longitud (sistema métrico decimal y otros sistemas). . Repaso de unidades de área. . Unidades de amplitud de ángulos (vueltas y grados).	. Representación en la recta numérica $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}^+)$ (no "recta real"). . Relaciones: $<, \leq, >, >$	. Frecuencias absolutas. . Frecuencias relativas (porcentuales, fraccionarias). . Diagramas de barra y circular. . Frecuencias ordinarias o puntuales. . Frecuencias acumuladas.	. Conectivas. . Constantes y variables. . Términos y predicados. . Proposiciones abiertas y cerradas. Sustitución.	. Conjuntos finitos e infinitos. . Conjunto referencial. . Subconjunto. . Complemento de un conjunto. - Operaciones entre conjuntos numéricos.	. Relaciones binarias. . Propiedad antisimétrica y transitiva de algunas relaciones. . Operaciones unarias y binarias. . Diferencia entre operación y relación.
7o.	. $(\mathbb{Z}, +, -, x, \div, \leq, \geq, \llcorner, \lrcorner)$. $(\mathbb{Q}, +, -, x, \div, \leq, \geq)$. Valor absoluto . Algoritmos con aplicaciones: porcentajes, descuentos, interés, cambio de moneda. . Algunos reales: π $\sqrt{2}$	. Movimientos rígidos: Rotaciones Reflexiones Traslaciones . Congruencias y semejanzas. . Homotecias . Polígonos . Círculo . Perímetro	. Otros sistemas de unidades de amplitud de ángulos. . Unidades de duración. Conversiones ("Complejos").	. Funciones crecientes y decrecientes. Correlación. . Funciones lineales. Razones Proporciones . Representación gráfica de funciones lineales y de gráfica lineal. Ejes, cortes, intercepto. . Ecuaciones lineales. Solución de ecuaciones lineales.	. Medidas de tendencia central: moda, media y mediana.	. Afirmaciones y negaciones verdaderas y falsas. . Proposiciones abiertas y cerradas. Cuantificación. . Expresiones con variables y paréntesis. . Igualdades.	. Conjunto de partes. Cardinal del conjunto de partes. . Subconjuntos del conjunto de partes. Combinaciones.	. Operaciones binarias. Propiedades: operación clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertiva. . Distributividad. . Linealidad de operadores.
8o.	. $(\mathbb{R}, +, -, x, \div, <, >)$. Potenciación de: $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$.	. Simetrías activas . Grupo de simetrías Rotaciones, traslaciones y reflexiones (grupo de movimientos rígidos). . Homotecias (grupo). . Area del círculo	. Unidades de área en varios sistemas. . Conversiones.	. Función Lineal. Pendiente. . Función cuadrática. Gráficas. . Interpolación. . Función Cúbica. Gráficas. . Raíces cuadrada y cúbica. . Función inversa. Gráfica de la función inversa. . Restricciones de dominio y de recorrido. . Ecuaciones cuadráticas . Funciones exponenciales de base 2, 3, 4, ... 10. . Funciones logarítmicas de base 2, 3, 4, ... 10.	. Medición . Muestreo. . Disposición y representación de datos. . Escala.	. Predicados de uno y dos puestos. . Negación de cuantificadores.	. Colecciones finitas de conjuntos. . Colecciones exhaustivas de conjuntos disyuntos dos a dos. . Subconjuntos del producto cartesiano. Permutaciones.	. Relaciones binarias. Representación gráfica de relaciones. Propiedades: relación totalmente definida, sobreyectiva, funcional, inyectiva, biyectiva. Relación reflexiva, antireflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, antitransitiva. . Clasificaciones, particiones y equivalencias. . Seriaciones y órdenes. . Composición e inversión de relaciones.
9o.	. $(\mathbb{R}, +, x)$ y $(\mathbb{C}, +, x)$. $(\mathbb{R}^2, +)$ y $(\mathbb{R}^3, +)$ como espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.	. Proyecciones . Dibujo técnico (planos, cortes, escalas y perspectivas). . Cónicas . Volumen de sólidos.	. Unidades de volumen y capacidad en varios sistemas. . Unidades de peso y masa en varios sistemas (densidad y peso específico).	. Polinomios. Factorización, división. . Sistemas de ecuaciones. . Funciones de 2 y 3 variables. . Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Matrices y determinantes . Sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas. . Decimales infinitos. . Interés compuesto.	. Medidas de dispersión.	. Demostración: directa, indirecta, refutación, contraejemplos.	. Azar y necesidad: vocabulario de probabilidad. . Eventos, espacios muestrales. . Medidas normalizadas sobre conjuntos finitos.	. Funciones: Composición de funciones. Función idéntica. Inversión de funciones. Función de dos variables.

CUADRO No. 3

SISTEMA		
CONJUNTO DE OBJETOS A	CONJUNTO DE OPERACIONES $\cap$	CONJUNTO DE RELACIONES $\mathcal{R}$

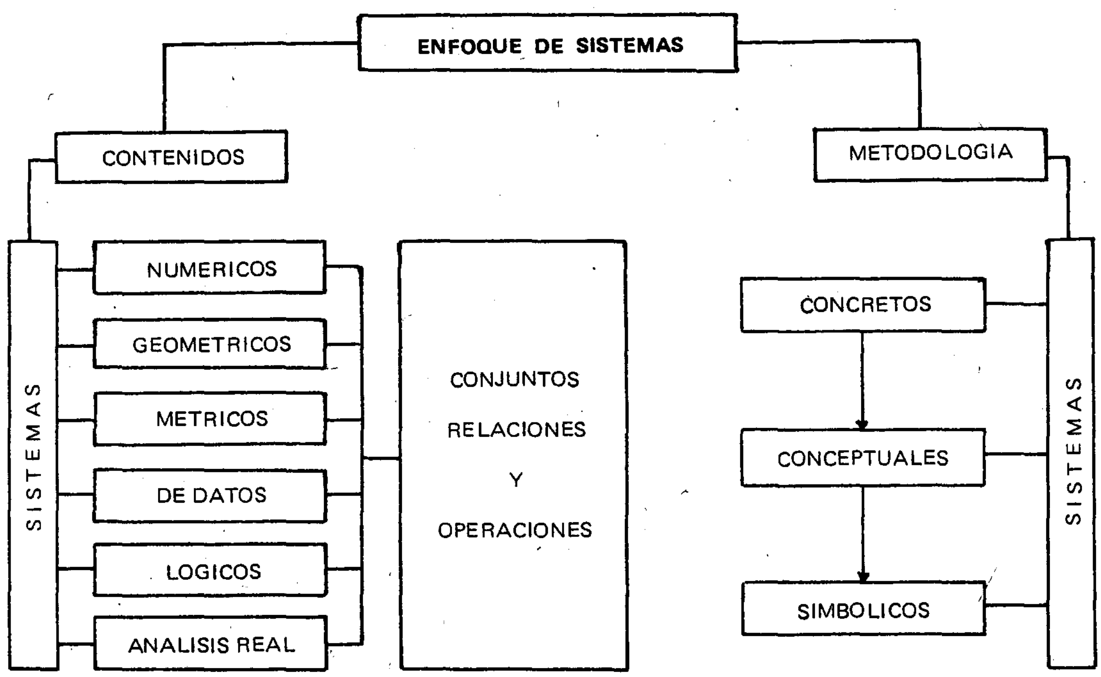
ARITMETICA		
Ejemplo: Un sistema de números enteros		$(Z\ \cap\ R)$
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	$\{+, \times\}$	$\{<, \leqslant, >, \geqslant\}$

GEOMETRIA		
Ejemplo: Un sistema de líneas en el plano		$(\mathcal{L}, T, P)$
$\{L, M, N, \ldots\}$	{rotaciones, traslaciones}	$\{\parallel, \perp\}$

TEORIA DE CONJUNTOS		
Ejemplo: Un sistema de conjuntos		$(P(U), \cap, C)$
$\{A, B, C, \ldots, \phi, U\}$	$\{U, \cap, '\}$	$\{\subset, \subseteq, \supset, \supseteq\}$

LOGICA		
Ejemplo: Un sistema de proposiciones		$(\mathcal{L}_\circ, K, R)$
$\{p, q, r, \ldots\}$	$\{\neg, \vee, \wedge\}$	$\{\equiv, \vdash\}$

CUADRO No. 4



Metodología

Vistas ya las ventajas del enfoque de sistemas, tanto en el interior de las Matemáticas, como en la articulación de las Ciencias, analicemos la metodología que se compagina mejor con este enfoque de sistemas elegido para los contenidos.

La metodología propuesta para el desarrollo del programa de Matemáticas está basado en la teoría sicológica de Jean Piaget, que se concreta en algunas técnicas de aprendizaje de las Matemáticas, como las de Zoltan P.Dienes, Hans Aebli, etc. Entre las varias que se podrían proponer, es quizá esta metodología la que resulta más acorde con los descubrimientos de la Sicología Evolutiva, con la Teoría de Sistemas, y con la realidad individual y social que vive el estudiante.

A. ASPECTO SICOLOGICO

La Sicología Evolutiva ha logrado establecer que los niños piensen en forma diferente a los adultos y que la evolución del pensamiento infantil al pensamiento adulto se logra a través de varios períodos sucesivos ordenados, identificados por características específicas y diferenciados por el grado de complejidad y de generalidad de las estructuras del pensamiento, propias de cada uno. Los períodos de la evolución del pensamiento son el Sensoriomotriz, el Preoperacional, el de las Operaciones Concretas y el de las Operaciones Formales.

Por consiguiente, un programa de Matemáticas centrado en el alumno debe atender a sus características, a sus posibilidades y a sus necesidades. Si atiende a sus características, se adecúa a su forma de pensar y a las capacidades que le ha permitido desarrollar el medio en que vive. Si atiende a sus posibilidades, establece metas cuyo logro supone un progreso siempre renovado hacia el nivel más desarrollado del pensamiento que sigue inmediatamente al nivel en que él se encuentra. Y si atiende a sus necesidades, constituye un estímulo constante que hace que el alumno se desarrolle día a día y adquiera las habilidades de razonamiento, cálculo y simbolización que le permitirán desempeñarse con éxito en su medio.

Un primer requisito para conseguir lo anterior es identificar los períodos y las etapas de desarrollo mental por los que atraviesan los estudiantes, en este caso, los estudiantes del Ciclo Básico. En Colombia puede decirse que los niños inician la Primaria aproximadamente a los 6 años y terminan la Secundaria hacia los 16. Según Piaget, entre estas edades el pensamiento, pasa por dos períodos: el de las operaciones concretas de 7 a 11 años, y el de las operaciones formales de 11 a 15 años.

En nuestro medio apenas se están realizando estudios exploratorios, que permiten conjeturar que el desarrollo de las operaciones concretas en los niños sí empieza hacia los siete años, aunque el período de adquisición de las operaciones formales puede prolongarse hasta los 17 ó 18 años en ciertos casos y ambientes el dominio de las operaciones formales no parece ser necesario, por lo cual este período no llega a estabilizarse ni siquiera en la edad adulta.[3]

Vale la pena insistir en que el maestro necesita conocer las características del pensamiento de sus alumnos, en cada una de estas edades, para poder realizar acertadamente su trabajo.

---

[3] Pre-escolar: Félix Bustos, Ministerio de Educación Nacional (MEN); Martha Arango, Centro Internacional de Educación (CINDE); Primaria: Araceli de Tezano, Universidad Externado de Colombia; Secundaria: Eloisa Vasco, CAFAM; Educación Especial: Miguel de Zubiría, Martha Lucia Pérez, Etti Stiwark, Mariela Tobón, Universidad Javeriana.

Dada la magnitud y la profundidad de la obra que Piaget y su escuela han realizado durante el medio siglo que llevan dedicado al estudio de la inteligencia, resulta muy difícil conocer completamente sus planteamientos y, más difícil aún, tratar de sintetizarlos o de explicarlos en pocas páginas. Sin embargo, dado que la metodología propuesta para desarrollar el programa oficial de Matemáticas está basada en gran parte en la Sicología Evolutiva Piagetiana, es preciso intentar un esbozo de varias de sus ideas. Por ejemplo, es importante mencionar algunas características del desarrollo intelectual en los períodos de operaciones concretas y de operaciones formales.

Una idea bastante general es que los niños pequeños son muy distintos de los adultos en aspectos tales como: métodos para conocer la realidad, ideas sobre el mundo y empleo del lenguaje. Un niño tiene una estructura mental diferente a la de un adulto y por eso muchas veces, aún cuando realicen las mismas acciones o repitan las mismas palabras, pueden pensar cosas muy diferentes. Por ejemplo, cuando un niño de menos de 7 años pasa un líquido del vaso a un plato, se fija solamente en los estados inicial y final del líquido y cree que hay más líquido en donde el nivel está más alto. Si el nivel más alto era el del vaso, dice que por pasarlo del vaso al plato se disminuyó el líquido. Un niño de 8 años, por ejemplo, ya sabe que por el solo hecho de pasarlo de un recipiente a otro no disminuye el líquido, pero no puede predecir acertadamente cosas que no se ciñan a lo que está viviendo. Un joven de 14 ó 15 años no tiene problema con el trasvase del agua y puede hacer conjeturas y formular hipótesis sobre cosas que no está viendo, y finalmente, los adultos pueden pensar que todo eso es tan fácil que no se justifica dedicarle tiempo.

Otro ejemplo: mientras un grupo de adultos puede realizar un diálogo o intercambiar diferentes opiniones, respetar puntos de vista diferentes, etc., los niños de pocos años realizan monólogos colectivos, donde cada uno habla y ninguno escucha. Para otros niños hablar entre sí puede constituir todo un descubrimiento porque les permite darse cuenta de que no todos piensan lo mismo.

De esta y otras consideraciones se puede concluir que el educador no puede suponer que lo que es válido para él, es también válido para el alumno. Y si aceptamos que los niños tienen una estructura mental diferente de la de los adultos, entonces el maestro debe estar atento a la forma como reaccionan los niños ante las distintas actividades y hechos de cada día. Algo muy importante que debe tener en cuenta el educador, es que los niños, especialmente los de menos edad, aprenden a partir de actividades concretas. El niño necesita actuar sobre las cosas para comprenderlas.

Mediante la actividad concreta y la manipulación de los objetos el niño va progresando en su desarrollo intelectual. Por eso en cada período se comporta de manera diferente. En los primeros años simplemente los manipula, los reúne o los separa, los hace girar, los golpea, etc. Unos años más tarde, no solo los manipula físicamente, sino que representa mentalmente operaciones que se puedan realizar con esos objetos y en un período posterior, puede representar mentalmente las actuaciones sobre los objetos, sin necesidad de mirarlos y puede expresar, mediante oraciones, su pensamiento, sus suposiciones y las consecuencias de las mismas.

Características como esas son las que se tienen en cuenta para decir que un niño está en uno u otro período de su desarrollo intelectual. Si solamente logra realizar ciertas manipulaciones coherentes, se ubica en el período preoperacional. Si además de las manipulaciones logra realizar representaciones mentales de acciones organizadas de modo que una acción puede combinarse con otra, y anularla o reforzarla, se ubica en el período de las operaciones concretas. Y cuando el joven además de todo lo anterior logra formular hipótesis sobre objetos que no están presentes, predecir conclusiones y trabajar con proposiciones en lugar de objetos concretos, se ubica en el período de las operaciones formales llamado también del pensamiento abstracto o hipotético - deductivo.

En términos generales, puede decirse que cuando el niño inicia la Educación Básica Primaria está pasando del período preoperacional al de las operaciones concretas y que en los primeros años de Educación Básica Secundaria debe empezar a tener comportamientos propios del período de las operaciones formales.

En cada uno de estos períodos el pensamiento se caracteriza por su habilidad para realizar ciertas acciones y por la propensión a hacer ciertas deducciones que a los adultos les parecen erróneas, aunque sean muy coherentes con la lógica predominante en ese período.

En el período de las operaciones concretas el pensamiento:

1) Adquiere propiedades como la reversibilidad, la transitividad, la asociatividad.
2) Realiza composiciones.
3) Reconoce transformaciones.
4) Puede realizar operaciones aritméticas (como la adición y la multiplicación).
5) Realiza mediciones (de longitud, de duración, de área, de masa, de peso, etc.).
6) Establece correspondencias, clasificaciones y seriaciones.

Resumiendo las características del pensamiento operatorio concreto, podemos decir que se caracteriza porque :

1) No se detiene en los estados inicial y final de las cosas o de los objetos, sino que tiene en cuenta las transformaciones e incluso las imagina.
2) Es reversible; ésto es, razona de modo que mentalmente puede imaginar una acción y anularla con la acción contraria para regresar al estado inicial.
3) Posee, en gran parte, las nociones de conservación.
4) No siempre requiere que las acciones que el niño realiza sobre los objetos o situaciones, se ejecuten "realmente", sino que pueden realizarse de manera imaginaria o mental. Por ejemplo, son operaciones concretas las que realizan los jugadores de ajedrez cuando frente al tablero piensan o se imaginan las posibles jugadas y sus consecuencias, tanto si tocan las fichas como si no tocan ninguna.

"El niño de 7 a 11 años actúa como si su principal tarea fuera organizar y ordenar lo que está inmediatamente presente: la extrapolación limitada de este organizar y ordenar hacia lo "que no está allí", es algo que hará cuando sea necesario, pero que es visto como una actividad restringida de casos especiales". (Sicología, 1978; p. 223).

El período siguiente es el de las operaciones formales, llamado también del pensamiento hipotético - deductivo. "La propiedad general más importante del pensamiento formal, aquella de la cual Piaget deriva todas las restantes, concierne a la distinción entre lo real y lo posible. A diferencia del niño del período de las operaciones concretas, el adolescente, al comenzar la consideración de un problema, trata de prever todas las relaciones que podrían tener validez respecto de los datos y luego intenta determinar, mediante una combinación de la experimentación y el análisis lógico, cuál de estas relaciones posibles tiene validez real". (Sicología, 1978; p. 224).

En la transición de las operaciones concretas a las operaciones formales se registra un paso inicial e importante, que equivale a una reorientación fundamental respecto de los problemas cognoscitivos. El adolescente ya no está preocupado exclusivamente por organizar aquello que llega de modo directo a sus sentidos; gracias a esa reorientación, tiene la capacidad potencial de imaginar todo lo que podría estar allí y de asegurarse, en mayor medida, de que hallará todo lo que de hecho se encuentra allí.

Esa reorientación implica algunas características del pensamiento formal:

El pensamiento formal es fundamentalmente hipotético - deductivo. El adolescente se mueve dentro del ámbito de lo hipotético con mucha más audacia que el niño.

El pensamiento formal es, por sobre todo, pensamiento proposicional.

Las entidades importantes que manipula el adolescente en su razonamiento ya no son los datos de la realidad en bruto, sino afirmaciones o enunciados (proposiciones) que "contienen" esos datos. El adolescente también realiza operaciones de primer orden, (clasificaciones, seriaciones, correspondencia), pero también hace algo más, que es precisamente lo que hace a su pensamiento formal antes que concreto. Toma los resultados de esas operaciones concretas, los moldea en la forma de proposiciones, y luego sigue operando con ellos. Es decir, establece diversos tipos de vínculos lógicos entre ellos.

Las operaciones formales son, pues, operaciones realizadas sobre los resultados de operaciones (concretas) anteriores.

Estas ideas sobre los dos períodos finales del desarrollo, pueden complementarse con otras ideas de John H. Flavell, un estudioso de la teoría Piagetiana y que ha sido ampliamente consultado en lo referente al aspecto sicológico de este marco teórico: "El desarrollo intelectual es un proceso de organización y lo que se organiza son operaciones activas, intelectuales, su organización en sistemas con estructura definible es el sine qua non (indispensable) para la "buena" cognición, vale decir, la cognición de mayor madurez genética". (Sicología, 1978; p. 180).

"El desarrollo ontogénico de estructuras puede verse como un proceso de aproximaciones sucesivas a una especie de equilibrio, un estado final que nunca se alcanza por completo. El desarrollo mismo pues, constituye una totalidad con una meta o ideal que subordina los medios". (Sicología, 1978; p. 67).

B. TRABAJO CON SISTEMAS

Lo expuesto acerca del enfoque de sistemas y de la Sicología Evolutiva debe orientar el trabajo del maestro en el desarrollo del programa de Matemáticas.

Una de las funciones de la metodología es la de determinar la forma de presentar los contenidos a los estudiantes. Específicamente en el caso de las Matemáticas, los contenidos deben trabajarse teniendo en cuenta las características y la forma de aprender propias del niño en cada período del desarrollo. En el Ciclo Básico, el niño aprende a partir de la experimentación y de la manipulación de los objetos.

El niño no encuentra los objetos en forma estática y aislada. El niño se encuentra siempre con sistemas. Pero, como se dijo al tratar las ventajas del enfoque de sistemas, no se pretende que los niños durante la Educación Básica Primaria aprendan en abstracto qué es un sistema ni qué estructura tienen los que con mayor frecuencia se trabajan (como serían las estructuras de grupo y anillo). La razón es que en los grados lo.,2o.,3o.,4o., y aún 5o., no poseen los conocimientos necesarios para entender lo que es un grupo o anillo. Es el maestro quien debe saber, en cada caso, con cuál sistema están trabajando los estudiantes; así podrá orientarlos para que lleguen a conclusiones válidas dentro de la situación que están trabajando y para que cuando se encuentren ante otra situación nueva, no le apliquen irreflexivamente las mismas conclusiones, sino que la analicen para ver en qué se parece y en qué se diferencia de la situación ya conocida.

El maestro acompaña al estudiante para que vaya adquiriendo conceptos que en la secundaria le permitirán estudiar más rigurosamente los sistemas y sus estructuras.

Tenemos, por ejemplo, el caso de un sistema formado por subconjuntos de un conjunto referencial (tapas de gaseosa). El niño de 6 ó 7 años no tiene la noción abstracta de conjunto. Se encuentra con una colección de tapas que forman una figura o agrupación visual. "Esa primera noción de colección figural que desarrolla el niño, es la de un sistema de objetos con sus relaciones de cercanía especial, en el contexto de la posibilidad de reunirlos o separarlos manualmente. No hay, pues, colecciones de un solo elemento y mucho menos colecciones vacías.

La noción de colección no figural que se va desarrollando poco a poco, es también la de un sistema de objetos capaces de una descripción común. Todavía aparecen las relaciones de cercanía, pero empiezan a predominar las relaciones de semejanza, en el contexto de la posibilidad de manipular, comparar, superponer, agregar y retirar objetos". (Concepto 1980).

Sólo más tarde, hacia los doce o catorce años, se independiza el niño de las colecciones figurales y no figurales y maneja un sistema con inclusiones, uniones e intersecciones. Así llega al concepto abstracto de conjunto y al de los sistemas formados por ellos con sus operaciones y relaciones. Este progreso puede permitirle pensar en conjuntos vacios, en conjuntos de un solo elemento, y distinguir un elemento aislado del conjunto formado por ese único elemento. Pero esa es una adquisición tardía. Por eso, no hace falta darle al niño de primaria definiciones de sistema, ni de conjunto, ni de la estructura de semigrupo o de álgebra de Boole. Pero sí es conveniente que el maestro sepa que los subconjuntos de ese referencial de tapas, T., con la unión, forman un semigrupo $(\mathcal{P}(T), \cup)$ y con la unión, la intersección y el complemento forman un álgebra de Boole $[\mathcal{P}(T), \cup, \cap, ']$.

El enfoque de sistemas permite estudiar articuladamente las diversas ramas de las Matemáticas; "no consideramos que la lógica, los conjuntos, las relaciones, las operaciones y las estructuras sean cinco regiones de las Matemáticas que puedan ser enseñadas sucesivamente y como temas completos y consistentes entre sí.

Nos parece que ellos deben aparecer conjunta y unificadamente como un lenguaje que permite no sólo expresar más precisamente las situaciones de la vida real, sino también comprenderla más profundamente" (Lógica 1976; p. 100).

En particular, el profesor debe preparar su clase estudiando cuidadosamente el sistema que va a presentar a sus alumnos. No todo lo que sepa e investigue sobre ese sistema se deberá explicar a los alumnos y, especialmente, se evitará dar palabras y definiciones abstractas, explicitar estructuras formales, o enseñar demasiados símbolos. Para orientación del profesor y para estructurar la presentación del material, podrán servir las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los objetos con los que estamos trabajando?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos objetos?
- ¿Cómo se agrupan esos objetos en conjuntos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos conjuntos?
- ¿Qué operaciones efectuamos con y entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas operaciones?
- ¿Qué relaciones descubrimos entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas relaciones?
- ¿Qué sistema estamos estudiando?
- ¿Cómo lo representamos?
- ¿Qué estructura tiene este sistema?
- ¿Cómo explicitamos simbólicamente esa estructura?

Estas doce preguntas aclaran la situación de cualquier cálculo matemático, desde el cálculo aritmético con números naturales, o el cálculo lógico con proposiciones, el cálculo de clases con los conjuntos como objetos, hasta el cálculo por antonomasia o por excelencia: el cálculo diferencial e integral en el cual los objetos son las funciones reales, o también, el cálculo geométrico sobre puntos, rectas, ecuaciones, o vectores.

Estas preguntas son perfectamente generales para todo tipo de descripción matemática y hasta para cualquier tipo de descripción científica que quiera ser rigurosa.

En particular, para el estudio de la lógica, todas estas preguntas deben estar activas desde el comienzo. "Recuérdese que los objetos son las proposiciones y las operaciones son la negación y las diez conectivas binarias. Para el estudio de las conectivas, recomendamos la utilización de los juegos lógicos al estilo de Dienes - Golding, Papy, etc., por coincidir con el enfoque que busca familiarizar al estudiante con una situación real hasta llegar a su normal formalización o matematización". (Lógica, 1976; pp. 100 - 101).

Este paso de las situaciones reales y concretas a la matematización conceptual y a algún tipo de formalización, así sea una simple simbolización, no es exclusivo de la lógica. Se trae este ejemplo porque las situaciones del lenguaje ordinario, tanto el de tipo declarativo, formado por proposiciones, como el de tipo imperativo, formado por instrucciones, presentan suficientes regularidades para servir de sistemas concretos, de los cuales puede construirse un sistema conceptual, el cual a su vez puede ser simbolizado con palabras, con símbolos, con circuitos, etc. La última formalización simbólica, con definiciones, axiomas y teoremas, puede esperar a la Media Vocacional o a la Universidad; en la Educación Básica es suficiente una mínima simbolización, así sea solo verbal y a lo más con algunos símbolos que sirven de "taquigrafías" de las expresiones verbales, para que esta simbolización ayude a manejar los sistemas conceptuales, no para estorbar su construcción.

La recomendación fundamental es la de no empezar por los sistemas simbólicos para tratar de que el alumno construya los sistemas conceptuales, sino comenzar por los sistemas concretos que él maneja, así el profesor los considere muy elementales, empíricos y pre-matemáticos, para que a través de la familiaridad con las regularidades de esos sistemas concretos vaya construyendo el sistema conceptual respectivo; una vez iniciada la construcción de éste, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aún traducir de unos sistemas simbólicos a otros, puesto que ya comprenden lo que quieren decir. Pero si se fuerza al alumno a manejar un sistema simbólico sin haber construido el sistema conceptual a partir de los sistemas concretos, ese sistema simbólico puede bloquear la construcción del sistema conceptual. La concepción de los sistemas matemáticos que motiva la recomendación anterior es la siguiente: cualquier sistema matemático que el profesor vaya a presentar a sus alumnos puede analizarse como un rayo de luz que pasa por un prisma: si se observa cuidadosamente, se encontrará que tiene un núcleo central, el que es verdaderamente importante, que es el respectivo sistema conceptual. Sobre él, a un nivel superficial, aparecen uno o varios sistemas simbólicos para representar ese único sistema conceptual. Y bajo el sistema conceptual, a un nivel profundo, casi diríamos; arcaico, aparecen uno o varios sistemas concretos, de cuyas regularidades es posible construir el mismo sistema consceptual.

Desafortunadamente, los libros solo pueden ofrecernos los sistemas simbólicos: no se puede imprimir otra cosa que palabras, símbolos y gráficas. Por eso es fácil creer que el verdadero sistema matemático es el sistema simbólico, y así trató de hacerlo creer la filosofía formalista de las matemáticas. Un buen matemático puede reconstruir el sistema conceptual a partir del sistema simbólico, pero los niños y jóvenes más bien pueden experimentarlo como un obstáculo para llegar al sistema conceptual. Ellos tienen una manera mucho más natural de construir el sistema conceptual: jugando con sistemas concretos que lleven a esa construcción. Tarea importante del profesor es la de identificar esos sistemas concretos, ojalá de entre los sistemas que sean familiares para el alumno en su cultura y en su edad específicas, para organizar actividades de juego, de ejercicio, de comparación, que hagan resaltar las regularidades que van a permitir la construcción conceptual respectiva.

Con las colecciones figurales y no figurales de dos o más objetos pueden organizarse una serie de juegos que lleven al sistema conceptual de los números naturales, resaltando las ordenaciones o seriaciones internas de cada colección y las clasificaciones en colecciones iguales de numerosas; la simbolización con palabras, palitos, cifras indo-arábigas o romanas vendrá después. Pero los mismos juegos de colecciones pueden servir para resaltar otras operaciones manuales como reunir y separar, y otras relaciones como las de inclusión y disyunción, para permitir una construcción de un primer sistema conceptual de tipo conjuntista, así no se simbolicen formalmente esas operaciones y relaciones.

Sistemas concretos como los de avanzar o retroceder por las calles de la ciudad, observar subidas o bajadas de temperatura en un termómetro, o jugar con consignaciones y retiros de una caja de ahorros, son la base para la construcción del sistema conceptual de los números enteros con las operaciones de adición y sustracción, y las relaciones de orden aditivo. Obsérvese que las calles mismas, o el termómetro, o el estado de cuenta, no es un buen modelo para el sistema conceptual: son los sistemas activos mencionados los que sirven de sistemas concretos para la construcción del sistema conceptual de los enteros como operadores activos, en los que la adición aparece como una mera composición o aplicación sucesiva de operadores. En la misma forma se aprovechan sistemas concretos conocidos por el alumno, como de las vueltas y fracciones de vuelta, el de los metros o pulgadas y fracciones de las mismas unidades, el de los litros o galones y fracciones de los mismos, para construir el sistema conceptual de los fraccionarios como operadores reductores o ampliadores sobre magnitudes. Los simbolismos vienen después: la mitad, 1/2, 0.5 o el 50% nos muestran cuatro símbolos posibles para el mismo concepto. Nótese que no hace falta "dividir un todo en partes" ni utilizar rectángulos o ponqués para dividirlos en partes de áreas iguales, entre otras cosas, porque este sistema concreto es el más difícil para los niños de 6 a 9 años. También podría utilizarse, si se está seguro de que los niños tienen suficiente familiaridad y dominio del mismo.

Lo ideal, en cuanto a metodología se refiere, es que el maestro organice las actividades de aprendizaje de modo que el estudiante se enfrente siempre con problemas apropiados para la etapa en que se encuentra, o sea aquellos que presentan situaciones propicias para el desarrollo de las estructuras de la etapa inmediatamente siguiente. La manipulación de objetos permite apreciar qué acciones son capaces de hacer los niños con ellos y, a partir de allí, diseñar actividades pedagógicas para llevarlos a imaginar acciones posibles sobre ellos y prever los efectos de éstas. Conviene organizar el trabajo escolar de modo que el estudiante pueda ir superando progresivamente las etapas del aprendizaje de las Matemáticas propuestas por Zoltan P. Dienes. Es muy acorde con la teoría de Piaget, permitir el juego libre y el juego estructurado durante un tiempo suficiente, para la familiarización con las operaciones y las relaciones y para la interiorización de las acciones concretas sobre los sistemas que inventa el niño.

En un grupo escolar puede suceder que el desempeño de los estudiantes refleje grados diferentes de su desarrollo cognoscitivo; que algunos reflejen una mezcla de estructuras (propias del período anterior al que se supone que les corresponde por su edad), organizadas pero inadecuadas; que otros presenten ya el uso vacilante y esporádico de estructuras nuevas que aún no se han organizado por completo; y que otros reflejen una mayor organización y estructuración del pensamiento. El maestro debe tratar de detectar esas diferencias, que, en la mayoría de los casos, pueden ser perfectamente explicables, ya que si bien los períodos y las etapas del desarrollo se suceden en un orden riguroso, no se presentan en todas las personas a la misma edad cronológica. En ese caso, no es preciso exigir a todos el mismo nivel de desempeño intelectual, sino tratar de que cada uno llegue al dominio de las estructuras del nivel en que se encuentra y presentarle situaciones en las que se pueda empezar a generar un avance al nivel siguiente. Ese avance solo comenzará cuando la maduración neuronal y el procesamiento más o menos consciente de la información ya adquirida, lo permitan.

Una actitud permanente de búsqueda, de observación, de análisis de las respuestas de los estudiantes, de las dificultades que encuentran, puede dar al maestro criterios y pautas para mejorar el programa, para adecuarlo al medio; en una palabra, para lograr que sea lo que debe ser: un instrumento que favorezca el desarrollo integral de los educandos y que los prepare en la vida para la vida.

BIBLIOGRAFIA

Bandet, J. R. Zarasana. ***Hacia el aprendizaje de las Matemáticas.*** Buenos Aires, Editorial Kapelusz, 1975.

Berman, Serge y René Bezard. ***Contando y Midiendo. Introducción a la Enseñanza de las Matemáticas. Números en la Escuela de Párvulos.*** México, Editorial Uthea, 1974.

Bustos, Félix. ***El aprendizaje. Alternativa Piagetiana.*** Cúcuta: Grupo Libertad Editores. 2a. edición, 1983.

Castelnuovo, Emma. ***Didáctica de la Matemática Moderna.*** México, Editorial Trillas, 1973.

Dienes, Zoltan P. ***Las seis etapas de aprendizaje en Matemática.*** 2a. edición. Barcelona, Teide, 1975.

Dienes, Zoltan P. y E. U. Golding. ***La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria.*** Barcelona, Editorial Teide, 1973.

Flavell, John H. ***La Sicología Evolutiva de Jean Piaget.*** 5a. edición, Buenos Aires, Paidós, 1975.

Furth, H. G. y Wachs, H. ***La Teoría de Piaget en la Práctica.*** Buenos Aires, Kapulusz, 1978.

Ginsburg, Helbert y Silvia Opper. ***Piaget y la Teoría del Desarrollo Intelectual.*** Madrid, Editorial Prentice, Hall Internacional, 1977.

Kline, Morris. ***El fracaso de la Matemática Moderna.*** Buenos Aires. Editorial Siglo XXI, 1976.

Mazure, Joseph. ***El aprendizaje de la Matemática Moderna.*** Barcelona, Editorial Planeta, 1981.

Mialaret, G. ***Las Matemáticas. Cómo se aprenden y cómo se enseñan.*** Madrid, Pablo del Río, editor, 1977.

Piaget, Jean. ***Sicología y Pedagogía.*** Barcelona, Ediciones Ariel, 1977.

Piaget, Jean y E. W. Beth. ***La Enseñanza de las Matemáticas.*** Madrid, Editorial Aguilar, 1963.

Piaget y otros. ***La Enseñanza de la Matemática Moderna.*** Madrid, Editorial Alianza, 1978.

Polya, G. ***Cómo Plantear y Resolver Problemas.*** México, Editorial Trillas, 1969.

Santalo, Luis A. ***La Educación Matemática Hoy.*** Barcelona, Editorial Teide S.A., 1975.

Vasco, Carlos E. ***Relatores y Operadores.*** Memorias del IV Coloquio Colombiano de Matemática. Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, 1975.

—. ***Lógica, Conjuntos y Estructuras.*** UNESCO - CIAEM. La Educación Matemática en las Américas IV. Montevideo, 1976.

—. ***Relaciones, Operaciones y Sistemas.*** Conferencia mimeografiada para el programa de Maestría Universidad NOVA - CAFAM y para el Seminario sobre Jean Piaget en la Universidad Nacional. Bogotá, 1978.

—. ***El Concepto de Sistema como Clave del Currículo en Matemática.*** Notas de Matemática No. 10. Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, 1980.

(Estos y otros trabajos de Carlos E. Vasco han sido reunidos en el libro: ***Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas.*** Bogotá, División de Materiales Impresos y Audiovisuales, Ministerio de Educación Nacional, 1984).

PROGRAMA CURRICULAR

PROGRAMADORES AUTORES:

Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Carmen Lucila Osorno Reyes

PROGRAMADORES REVISORES:

Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva

ASESOR:

Universidad Nacional de Colombia
Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

En la revisión de este programa se tuvieron en cuenta los aportes de los profesores de Matemáticas del Colegio Distrital Servitá, especialmente los de Francisca Cortés de Castañeda, Inés Araque de Moreno y Neris Galván de Frías, quienes han estado permanentemente vinculados al programa. Bogotá, 1988.

Recomendaciones generales

El programa de Matemáticas para la Educación Básica Secundaria es parte de una programación general, secuencial y progresiva de toda la Educación Básica (Primaria y Secundaria) y de la Media Vocacional.

Siendo consecuentes con lo anterior, el Marco General del Area (y por consiguiente su enfoque) es el mismo para los diferentes niveles; es conveniente hacer un estudio de ese Marco General, sea cual fuere el nivel de escolaridad en el cual se ejerza la labor docente. En particular, es importante recordar que aún en Secundaria se parte de los sistemas concretos que ya conoce el alumno, así el profesor los considere muy elementales, empíricos y pre-matemáticos, para que a través de la familiaridad con las regularidades de esos sistemas concretos vaya construyendo el sistema conceptual respectivo; una vez iniciada la construcción de éste, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aún traducir de unos sistemas simbólicos a otros, puesto que ya comprende lo que quieren decir. Pero si se obliga al alumno a manejar un sistema simbólico sin haber construído el sistema conceptual respectivo a partir de los sistemas concretos, ese sistema simbólico puede bloquear la construcción del sistema conceptual.

En cuanto a objetivos, la primera prioridad la tienen los objetivos generales de la Educación Básica, (que también figuran en el Marco General) y en particular los de motivación para las Matemáticas y los de resolución de problemas de la realidad a través de modelos matemáticos de la misma. La segunda prioridad la tienen los objetivos generales de sexto grado, y entre ellos los de manejo de los sistemas de los números naturales, fraccionarios y decimales.

Los objetivos específicos son ayudas para programar las clases y las evaluaciones, y para diagnosticar los tipos de errores que aparecen en los ejercicios y exámenes de los alumnos, y así poder ayudarles en las dificultades específicas que tengan.

Se supone que los alumnos ya traen un manejo inteligente de los fraccionarios como operadores de ampliación o reducción. Para este enfoque de los fraccionarios pueden consultarse los programas de 3o. a 5o. Primaria. Es conveniente repasar y ampliar el estudio de los fraccionarios con este enfoque y aplicarlos cuando se requieran para los sistemas métricos, los sistemas de datos, o para las mediciones en Ciencias Naturales.

Por la heterogeneidad de la proveniencia de los alumnos, se encontrarán muchas diferencias en la preparación de los mismos, no solo en el manejo de los fraccionarios, sino en otras áreas. Hasta que no se extiendan los programas experimentales a todos los planteles habrá especiales dificultades, y puede ser necesario hacer una nivelación inicial de una o más semanas para lograr un mínimo de homogeneidad.

Cuando en las unidades se incluye una lectura complementaria, se entiende que se trata de material de referencia para el profesor. Para que los alumnos consulten algo al respecto es mejor remitirlos a los textos y a las enciclopedias escolares usuales. El profesor juzgará si algunos alumnos de especial habilidad de comprensión de lectura pueden también utilizar las lecturas complementarias que se adjuntan.

Objetivos generales

- Describir algunos aspectos del desarrollo histórico de la numeración escrita.
- Analizar diferentes sistemas de numeración.
- Recopilar las operaciones binarias que aparecen en el sistema de los números naturales.
- Aplicar los algoritmos de algunas operaciones entre números naturales.
- Reconocer propiedades comunes a algunas operaciones entre números naturales y aplicarlas en el cálculo numérico oral y escrito.
- Reconocer que la división y la sustracción no cumplen algunas propiedades de la multiplicación y la adición.
- Formular y resolver problemas que requieran el uso de los números naturales.
- Avanzar en el estudio de la potenciación y en el de sus dos operaciones inversas.
- Reconocer algunas propiedades de la potenciación, de la radicación y de la logaritmación y aplicarlas en el cálculo numérico.
- Efectuar algunas operaciones entre potencias.
- Hallar un procedimiento para verificar si un número tiene o no raíz exacta y si la tiene obtenerla.
- Estimar, con o sin ayuda de la calculadora, la raíz cuadrada y la raíz cúbica de algunos números y los logaritmos de números que no son potencias de 10.
- Recopilar las relaciones binarias que aparecen en el sistema de los números naturales y compararlas con algunas relaciones del lenguaje ordinario.
- Diferenciar entre operación binaria y relación binaria.
- Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo entre dos números naturales.
- Hallar los requisitos necesarios para establecer la verdad o falsedad de frases cuantificadas.
- Analizar proposiciones simples y compuestas y hallar el valor de verdad de proposiciones.
- Distinguir proposiciones abiertas y proposiciones cerradas.
- Hallar conjuntos a partir de una condición o de la combinación de condiciones y viceversa.
- Establecer algunas relaciones entre conjuntos y realizar algunas operaciones entre ellos.
- Reconocer el conjunto de los números fraccionarios positivos y el de los decimales.
- Efectuar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de números fraccionarios.
- Repasar los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de decimales.
- Resolver y formular problemas que requieran de las operaciones con fraccionarios y con decimales.
- Organizar datos en tablas de frecuencias y representarlos mediante diagramas.
- Discriminar entre diferentes tipos de frecuencia y sus expresiones numéricas.
- Reconocer movimientos rígidos en el plano.
- Reconocer ángulos y medir su amplitud.
- Reconocer polígonos congruentes.
- Caracterizar el triángulo rectángulo.
- Reconocer y emplear unidades de longitud y de amplitud de ángulos.

Contenidos

SISTEMAS NUMERICOS

- Sistemas de numeración: Reseña histórica. Diferentes bases.
- (N, $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\leqslant$, $\geqslant$), potenciación, radicación y logaritmación.
- Fraccionarios positivos

  (Q^+ , $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\leqslant$, $\geqslant$)

Expresiones fraccionarias y decimales.

SISTEMAS GEOMETRICOS

- Transformaciones en el plano:
  - . Traslaciones . Paralelismo
  - . Rotaciones . Perpendicularidad . Angulos
  - . Reflexiones
  - . Triángulos y cuadriláteros
  - . Teorema de Pitágoras (comprobación por superposición de superficies).

SISTEMAS METRICOS

- Unidades de longitud del sistema métrico decimal y de otros sistemas.
- Repaso de unidades de área.
- Unidades de amplitud de ángulo (vueltas y grados).

ANALISIS REAL

- Representación en la recta numérica de N y Q^+.
- Relaciones: $\leqslant$, $<$, $>$, $\geqslant$, "... es múltiplo de ..." "... es divisor de ..."

SISTEMAS DE DATOS

- Frecuencias absolutas.
- Frecuencias relativas (porcentuales, fraccionarias).
- Diagrama de barras y circular.
- Frecuencias ordinarias o puntuales.
- Frecuencias acumuladas.

SISTEMAS LOGICOS

- Proposiciones simples y proposiciones compuestas.
- Proposiciones cuantificadas.
- Conectivas.
- Términos y predicados.
- Términos constantes y términos variables.
- Proposiciones abiertas y cerradas.
- Sustitución.

CONJUNTOS

- Conjuntos finitos e infinitos.
- Conjunto referencial.
- Subconjuntos.
- Complemento de un conjunto.
- . Operaciones entre conjuntos numéricos.

RELACIONES Y OPERACIONES

- Relaciones binarias.
- Propiedades antisimétrica y transitiva de algunas relaciones.
- Operaciones unarias y binarias.
- Diferencia entre relación y operación.

Unidad I

SISTEMAS DE NUMERACION

Introducción

En esta unidad se han incluído algunos temas del sistema de numeración. En este sistema los objetos son los símbolos, de los cuales hay primitivos ("dígitos") y derivados. Se pretende contribuir a la formación cultural del estudiante, para lo cual es necesario que se reconozca la importancia del aspecto histórico de la elaboración de los conceptos matemáticos.

"La tendencia cada vez mayor aunque todavía incipiente a escribir los textos de enseñanza con información histórica adicional e incluso siguiendo la evolución de las ideas es un reflejo del éxito que puede conseguirse en el mejoramiento de la docencia recurriendo a la historia. Como todo el mundo lo reconoce, la historia facilita el entendimiento de las teorías y conceptos, permite una mejor ubicación de los problemas, nos ofrece ideales a seguir, etc.; pero lo que nos interesa resaltar aquí es un aspecto un tanto descuidado e inexplorado y particularmente útil en el caso de las Matemáticas; la historia nos ofrece métodos y argumentos satisfactorios que pueden retomarse y emplearse de acuerdo con el nivel de profundidad que se requiera, máxime cuando se aplican a resultados ya universalmente aceptados" (*) Tomado del artículo "La historia al servicio de la Pedagogía" de Jesús Hernando Pérez, publicado en la Revista "Matemática, Enseñanza Universitaria". No. 18.

A partir de la experiencia que los alumnos ya tienen con el manejo del sistema de numeración en base diez, podrán identificar y manejar sin dificultad sistemas de numeración en cualquier otra base. Es importante que el alumno reconozca que hay muchas maneras de representar un mismo número, dependiendo del sistema de numeración que se esté utilizando y que los símbolos utilizados en cada sistema son puramente convencionales.

Objetivos generales

Describir algunos aspectos del desarrollo histórico de la numeración escrita.

Analizar diferentes sistemas de numeración.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
1.— Identificar algunos aspectos del desarrollo histórico de la numeración escrita.	El alumno enumerará cinco aspectos del desarrollo histórico de la numeración escrita.

CONTENIDOS BASICOS

Consultar algunas lecturas que estén relacionadas con este tema.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se organizarán con anterioridad algunos grupos para que cada uno consulte algunos aspectos relacionados con la numeración de algunas culturas. A cada grupo se le asignará una cultura, para que en un tiempo determinado haga una exposición a sus compañeros. Cuando todos los grupos hayan expuesto, se puede hacer una mesa redonda para que entre todos elaboren un resumen destacando las principales características de la numeración de cada cultura, como también que las comparen, destacando ventajas y desventajas de cada una.

Al final de esta unidad anexamos la lectura: "Recorrido histórico de la numeración escrita", como un recurso más de consulta para el profesor. Es conveniente adecuar esta lectura para los alumnos.

OBJETIVO ESPECIFICO

2 Practicar la notación de potencias indicadas.

INDICADORES DE EVALUACION

Dadas cinco potencias indicadas el alumno hallará el resultado.

Dado el resultado de algunas potencias indicadas, el alumno hallará dichas potencias.

CONTENIDOS BASICOS

Al producto de factores iguales se le llama **potencia.** Un producto de varios factores iguales se puede expresar de forma larga como el producto indicado: 4 x 4 x 4 o se puede expresar de forma corta: 4^3, a esta expresión se le llama potencia indicada.

En una potencia indicada se debe distinguir el significado de los dos numerales que aparecen en la expresión.

Ejemplo: 4^3, 4 es la base o factor que se repite. 3 es el "exponente" e indica el número de veces que se repite la base.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden hacer algunos ejercicios de repaso como los siguientes:

— Dar unas potencias indicadas para hallar el resultado, como:

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$
$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$
$$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

— Dar el resultado de efectuar algunas potencias indicadas, para hallar dichas potencias, como:

$$1000 = 10^3$$
$$16 =$$
$$8 =$$
$$625 =$$
$$144 =$$

— Dar un numeral para descomponerlo en dos factores, uno de los cuales sea el resultado de una potencia indicada, como:

$$400 = 4 \times 100 = 4 \times 10^2$$
$$96 = 3 \times 32 = 3 \times 2^5$$
$$50 = 5 \times 10 = 5 \times 10^1$$
$$48 = 3 \times 16 = 3 \times 2^4$$

OBJETIVO ESPECIFICO

3 Reconocer las características de nuestro sistema de numeración decimal y compararlas con las del sistema de numeración romano.

INDICADORES DE EVALUACION

El alumno elaborará un material que le permita explicar la formación de las decenas, de las centenas, y de las unidades de mil.

El alumno empleará los numerales del sistema romano para representar cinco números mayores que cien.

CONTENIDOS BASICOS

El sistema de numeración decimal tiene como base el diez.

Las cifras básicas que se utilizan para formar cualquier numeral son:

0, 1, 2. 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Para formar las unidades de las diferentes órdenes utiliza agrupaciones y reagrupaciones de diez en diez, así se da origen a las decenas o unidades de segundo orden, a las centenas, o unidades de tercer orden, etc.

En un numeral cada cifra tiene un valor de posición, es por ésto que la cifra de las decenas se escribe a la izquierda de la cifra de las unidades simples, las centenas a la izquierda de las decenas y así sucesivamente de tal manera que le asigna un valor 10 veces mayor a una cifra colocada inmediatamente a la derecha de otra.

Los símbolos utilizados en el sistema de numeración romano son:

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Se basa en los siguientes principios:

- Los signos fundamentales solo se pueden repetir tres veces, sumando sus valores.
- Utiliza la adición y la sustracción para formar los numerales. Así los signos colocados a la derecha de un valor superior le agregan su valor y los colocados a la izquierda le restan el valor.
- No tienen símbolo para el cero.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Recordarán como al contar cuando se tienen diez unidades se forma una unidad de orden superior que es la **decena**, en este caso se escribe 1 decena 0 unidades: 10 ya que no han quedado unidades sueltas al formar grupos de 10 de tal manera que no se necesitan más numerales pues se siguen utilizando los que se conocen. Así pueden escribir cualquier numeral hasta 99 y cuando se tienen diez decenas se forma la **centena** y se representa por 100: 0 unidades, 0 decenas y 1 centena.

Cuando se tienen 10 centenas se tiene una unidad de mil o millar: 1000.

Así recordarán que para tener una unidad de orden superior se necesitan 10 unidades del orden anterior.

Individualmente o en grupo se harán ejercicios como:

$$2498 = 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10 + 8 \times 1$$

$$= 2 \times 1000 + 4 \times 100 + 9 \times 10 + 8 \times 1$$

$$= 2000 + 400 + 90 + 8$$

Pueden hacer algunos ejercicios de repaso para escribir algunos numerales en el sistema de numeración romano. Entre todos pueden deducir las principales características de este sistema y luego compararlo con el sistema de numeración decimal y sacar algunas ventajas y desventajas de cada uno.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADORES DE EVALUACION
4 Identificar sistemas de numeración en otras bases diferentes.	Dado un número menor que cincuenta el alumno hallará su representación en base dos, base tres, base cinco y base doce. Dado un número representado en cuatro bases diferentes, el alumno hallará la representación en base diez.

CONTENIDOS BASICOS

La base de un sistema de numeración es un número natural diferente de cero y de uno.

Los números naturales se pueden escribir en un sistema de cualquier base, utilizando tantas cifras como lo indica la base. Un número de unidades de cualquier orden forman una unidad de orden inmediatamente superior (este número de unidades lo indica el número de la base).

Las reglas de numeración escrita en cualquier base son las siguientes:

- Un número natural se escribe en la base elegida con la ayuda de las cifras del sistema de numeración correspondiente, colocadas unas al lado de las otras. Cada orden de unidades es representado por una cifra, la cifra cero indica la ausencia de unidades del orden que representa.

- La primera cifra escrita a la derecha representa las unidades de primer orden.
- Toda cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades del orden inmediatamente superior.

Es muy importante que los alumnos puedan comprobar lo que han hecho manipulando objetos al escribir un número en cualquier base, haciendo la descomposición polinomial.

Ejemplo: $123_{cinco} = 1 \times 5^2 + 2 \times 5^1 + 3 \times 1$

ya que hay 3 unidades sueltas, 2 grupos de a cinco y, 1 grupo de 25 (5^2) o sean cinco grupitos de a cinco.

$$123_{cinco} = 1 \times 25 + 2 \times 5 + 3$$

$$= 25 + 10 + 3 = 38$$

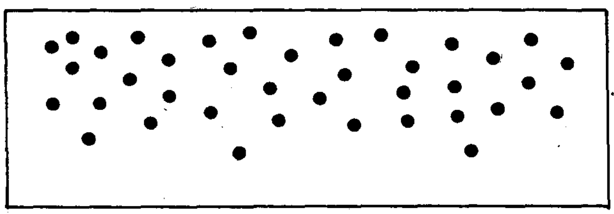
38 es el equivalente en base diez.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

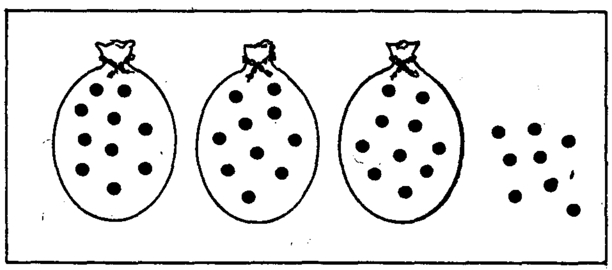
Individualmente trabajarán utilizando un número de material como: granos de maíz, fríjoles, bolitas dibujadas, etc. Inicialmente contarán la cantidad de granos que tienen en base diez y escribirán el numeral correspondiente.

Luego siguiendo el mismo procedimiento para contar en base diez (agrupaciones y reagrupaciones de diez en diez) hallarán el numeral correspondiente al número de elementos en otras bases (base cinco, base dos, base doce), haciendo agrupaciones y reagrupaciones según lo indique la base.

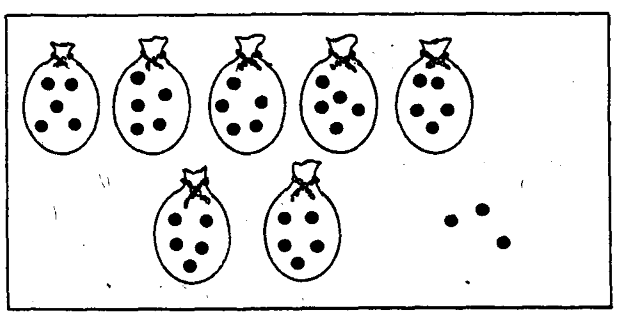
Ejemplo: Un alumno tiene los siguientes granos de maíz:



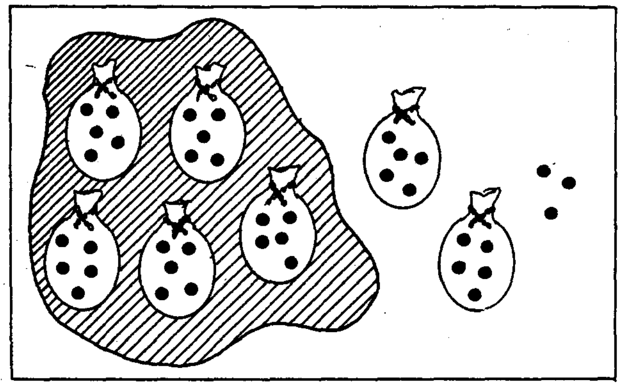
Observará que en base diez tiene 38 granos de maíz porque hay 3 decenas o unidades de segundo orden y 8 unidades de primer orden.



Agrupando de a cinco se tiene:

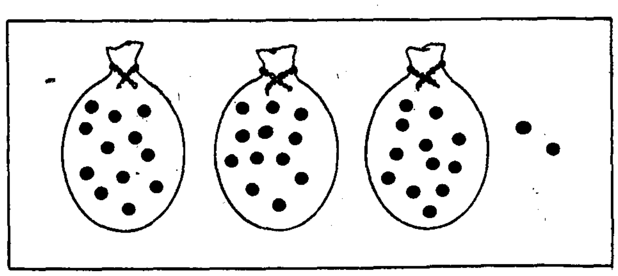


Como se está trabajando en base cinco, cada vez que se tengan cinco grupitos se volverá a reagrupar, en este caso pueden señalarlo con otro color, así:



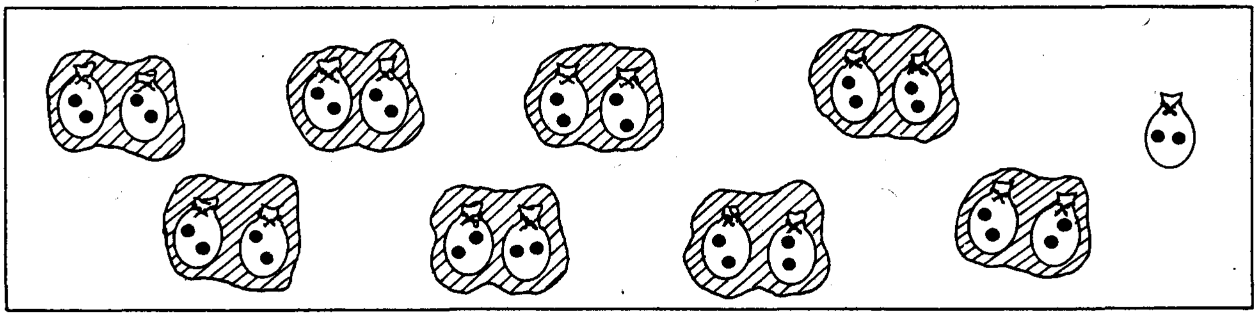
Hay tres unidades simples (o unidades de primer orden), dos grupos de a cinco (dos unidades de segundo orden) y un grupo que tiene cinco grupos de a cinco (o una unidad de tercer orden). Para escribir el numeral se hace lo mismo que en base diez, o sea la primera cifra de la derecha representa las unidades simples (en este caso 3) a la izquierda de ésta, las unidades de segundo orden (2) y a la izquierda de esta las unidades de tercer orden (1). El numeral es en 123 en base cinco que se puede simbolizar: 123_{cinco} para diferenciarlo de las representaciones hechas en otras bases se escribe la palabra cinco a la derecha en la parte inferior. Se lee uno, dos, tres en base cinco.

En base doce, para el mismo ejemplo se tiene:

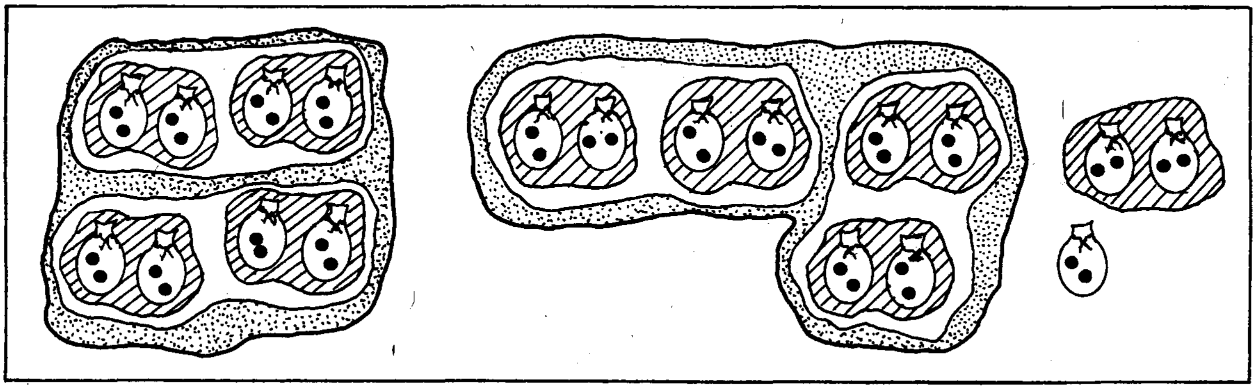


Tres unidades de segundo orden y dos unidades de primer orden: 32_{doce}. En esta base se suele llamar **docena** a las unidades de segundo orden y **gruesa** a las unidades de tercer orden (doce docenas).

En base dos para el ejemplo se tiene:



0 unidades de primer orden, 1 unidad de segundo orden y nueve unidades de tercer orden. Se siguen reagrupando las unidades de tercer orden para obtener las de cuarto orden y a su vez éstas se reagrupan para obtener las de quinto orden y así sucesivamente.



El resultado es:

Unidades de primer orden: 0
Unidades de segundo orden: 1
Unidades de tercer orden: 1 El número es: 100110_{dos}
Unidades de cuarto orden: 0
Unidades de quinto orden: 0
Unidades de sexto orden: 1

Se sugiere el trabajo con sistemas de numeración de otras bases: aquellas que el profesor considere más útiles para que los alumnos enfrenten con éxito los avances de la tecnología.

LECTURA (Recorrido Histórico de la Numeración Escrita)

INTRODUCCION

Los documentos que se tienen sobre la historia de la numeración permiten suponer que el hombre empezó a pensar en términos de relaciones numéricas antes del nacimiento de las grandes civilizaciones antiguas. Aunque el origen del hombre sea todavía enigmático se puede afirmar que para el hombre primitivo (hombre de Neandertal 40000 a J.C.) el concepto de número no era completamente extraño.

Antes de la existencia de un lenguaje capaz de posibilitar la comunicación verbal, el hombre primitivo podía observar en la naturaleza fenómenos cuantitativos: un árbol y un bosque, un lobo y una manada de lobos, que lo condujeron a distinguir muy pronto entre la unidad y la pluralidad.

Se puede entonces pensar que sus primeras observaciones lo condujeran a la **correspondencia término a término**[1].

A partir de simples observaciones, el hombre primitivo desarrolla gradualmente la idea de comparación y asocia un signo a cada objeto observado; por ejemplo, él

[1] N. T. Por ejemplo abrir o cerrar un dedo por cada objeto que vea; o hacer una ranura en una rama, o un nudo en una cuerda por cada animal que pase, o hechar una piedrita en una bolsa o recipiente por cada cosa que quiera cambiar u obsequiar.

utiliza como sistema de signos los trazos o incisiones marcadas en la madera o en un hueso.

Boyer menciona el descubrimiento, en Checoeslovaquia, de un hueso, perteneciente a un lobo joven, en el cual aparece una serie de 55 incisiones dispuestas en grupos de a cinco (30000 a J.C.).

La numeración surge, con la aparición del lenguaje, en el momento de efectuar la enumeración de un conjunto de objetos observados.

La numeración interviene, en particular cuando el hombre primitivo se vuelve comerciante.

Sin embargo, el hecho de reemplazar los objetos por palabras de un lenguaje, no significa que exista el concepto de número en el pensamiento de quien enumera.

Fue después de una larga evolución cuando el hombre se hizo maestro de dos métodos.

— El apareamiento (o correspondencia biunívoca) que lo lleva a la noción de cardinal.

— El inventariado o conteo que lo lleva a la noción de ordinal.

Una etapa muy importante fue superada cuando el hombre tuvo la idea de agrupar las muescas o incisiones en subgrupos de 5, 10 ó 20.

Esto posiblemente a causa de los dedos[2].

Estos procedimientos exigen para cada número:

— Una palabra para designarlo.

— Un signo para escribirlo.

Fue, sin duda, para evitar una enorme profusión de signos para lo que se tuvo la idea de dar un nombre a un "paquete" de unidades, 10 en la mayoría de los casos, o 20 para los Mayas, los Celtas y los Galos.

Con el fin de presentar una visión de conjunto sobre la evolución de la numeración escrita se procede a un rápido recorrido por los principales focos de civilización.

LA CIVILIZACION EGIPCIA

Ella nace probablemente de un gran número de comunidades urbanas que se unieron en dos reinos, el alto Egipto y el bajo Egipto. El primer Rey que unió los dos reinos fue Menes.

De Menes hasta Alejandro el Grande se sucedieron diferentes imperios. Este período empieza hacia el 3100 a. J.C. y se termina con la conquista de Alejandría hacia el 332 a. J.C.

La principal fuente de conocimiento que se tiene es un rollo de papel: el papiro de Rhind comprado en Luksor en 1858 por un joven abogado escocés: A. Henry Rhind.

Este manuscrito había sido escrito por un escriba llamado Ahmés hacia el año 1650 a.J.C. Pero el original es un documento más antigüo (2000 — 1800): El título parcial del papiro es: "direcciones para obtener un conocimiento de todas las cosas, inherentes a todo lo que existe...".

Se está en presencia de dos sistemas de numeración:

SISTEMA JEROGLIFICO

Es un sistema de base diez no posicional. Cada signo se repite tantas veces como se requiera; es un sistema de yuxtaposición.

Los símbolos utilizados en este sistema aparecen en el cuadro siguiente:

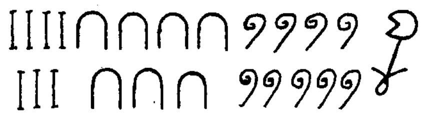
1	10	100	1000
			
trazo	arco	rollo manuscrito	flor de loto

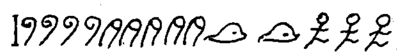
10000	100000	1000000
		
dedo indicando	renacuajo	hombre asombrado

Así los números 1977 y 3250401 se escriben bajo las formas siguientes:

---

[2] N.T. El número 5 tiene mucha importancia en los sistemas primitivos de numeración; todos ellos son de base quinaria o derivadas de éstas; la decimal o la vigesimal... En casi todos los idiomas primitivos el nombre del 5 equivale a mano. (Vera: Historia Ideas Matemáticas).

1977 = 

3250401 = 

Sólo se utilizaron tres símbolos

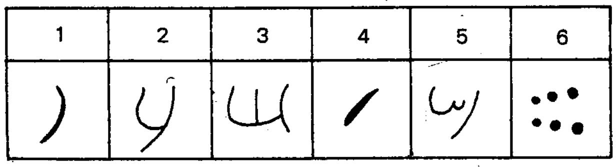
Estas escrituras parecen pesadas porque necesitan un gran número de signos; esta observación carece de fundamento porque en:

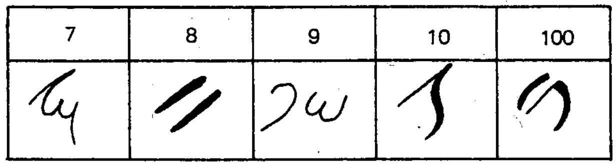
 = 1010001

SISTEMA HIERATICO

Sistema de los sacerdotes, que utiliza los **símbolos** cursivos y que en el siglo VIII a. J.C. conducirá al sistema demótico[3] o sistema del pueblo y de la forma abreviada.

Los símbolos utilizados en este sistema aparecen en el cuadro siguiente:





LA CIVILIZACION BABILONICA

Ella comprende un conjunto de pueblos que vivieron en Mesopotamia[4] en un período que comienza hacia 5000 a.J.C. para terminar al iniciarse el Cristianismo.

La ciudad de Babilonia fue un centro cultural fértil entre el 2000 y el 550 a. J.C.

A pesar de su caida en manos del Conquistador Persa Ciro en 538 a. J.C. la evolución de las Matemáticas babilónicas continúa durante el período-llamado Seléucida[5].

El conocimiento actual proviene de los hallazgos arqueológicos y de las tablillas de arcilla encontradas en Mesopotamia[6].

Las primeras formas de escritura[7] aparecen hasta el tercer milenio a. J.C.:

- El símbolo  representa la unidad y puede repetirse hasta nueve veces para representar el número 9.
- El símbolo  representa el número diez y se repite combinándolo con la unidad para representar los números de once a cincuenta y nueve[8].

A partir de 60 se utilizan las mismas combinaciones de los dos signos pero el principio de posición entra en juego[9].

Así: 45 =  mientras que

3721 = (1 x 3600) + (2 x 60) + 1 = 

Los textos babilónicos antigüos (hacia 1700 a.J.C.) no revelan la presencia de un símbolo específico para el cero. Sin embargo, los babilónicos utilizaban un espacio en blanco.

Es así que, sin texto,  designa 70 ó 3610 ó 4200 ó...

 designa

$$\begin{cases} 11 & \\ 11 \times 60 & [(10 \times 60) + 1] \\ 11 \times 60^2 & [(10 \times 60)^2 + 1] \end{cases}$$

> Este sistema es en efecto un sistema de numeración mixto de base sesenta y de base diez.

---

[3] N.T. Existe también un papiro demótico del período romano y unas tablas bizantinas y otras copias que no tienen nada que no esté incluído en el papiro de Rhind. (Vera: historia ideas Matemáticas).

[4] N.T. Región que se extiende entre los rios Tigres y Eufrates, o, más llanamente, lo que es hoy la República de Irak.

[5] N.T. Tres últimos siglos a. J.C.

[6] N.T. La mayor parte de estas tablillas datan de un par de siglos alrededor de 1700 a. J.C. ; las demás pertenecen a los tres últimos siglos anteriores a nuestra era. No se ha encontrado ninguna razón satisfactoria que explique tal discontinuidad entre las del primer grupo y las del segundo. (Asger Aaboe: Mat. Ep. Hist.).

[7] N.T. Esta escritura es llamada Cuneiforme porque los signos están compuestos por trazos simples semejantes a cuñas...

Los números babilónicos se expresan por medio de dos signos básicos: la cuña vertical para la unidad, y la cuña angular para la decena. (Asger Aaboe: Mat. Ep. Hist.).

[8] N.T. El 10 se utiliza como base para escribir los números enteros inferiores a 60.

[9] N.T. Si un dígito se desplaza un espacio hacia la izquierda su valor queda multiplicado por 60.

Después de una larga época de civilización neolítica se ve surgir en el Egeo durante la segunda mitad del décimo primer milenio una civilización que manifiesta durante 2000 años una marcada continuidad, y alcanza su apogeo en los siglos XVI y XV a. J.C.

La más antigüa historia de las matemáticas griegas fue escrita por Edudemo en el siglo IV a. J.C. Un corto extracto de esta obra perdida aparece en el comentario sobre el libro I de los elementos de Euclides, donde se dice que el fundador de las Matemáticas griegas fue Thales de Mileto[10], quien había adquirido sus conocimientos en el curso de sus viajes a Egipto.

Los datos históricos pertinentes son muy difíciles de recopilar porque con mucha frecuencia son copias de copias.

Entre los numerosos sistemas de numeración dos fueron esencialmente utilizados.

SISTEMA ATICO O HERODIANO

Su origen parece remontar al siglo VI a. J.C.

En este sistema los signos no son, propiamente hablando, símbolos numéricos ya que provienen, exceptuando el 1, de las primeras letras de palabras griegas:

	(penta)	(deka)	(hekaton)	(khilioi)	(Muriade)
1	5	10	100	1000	10.000
Ι	Γ	Δ	Η	Χ	Μ

Así : 7 = ΓΙΙ

50, 500, 5000 se escriben respectivamente:

𐅄, 𐅅, 𐅆

1977 = Χ𐅅ΗΗΗΗ𐅄ΔΔΓΙΙ

SISTEMA JONICO

Este sistema utilizado desde el siglo V a.J.C. Se codifica con la ayuda de las letras del alfabeto.

— Las unidades simples
— Las decenas
— Las centenas

α = 1	β = 2	γ = 3	δ = 4
ε = 5	ϛ = 6	ζ = 7	η = 8
θ = 9	ι = 10	κ = 20	λ = 30
μ = 40	ν = 50	ξ = 60	ο = 70
π = 80	ϟ = 90	ρ = 100	σ = 200
τ = 300	υ = 400	φ = 500	χ = 600
ψ = 700	ω = 800	ϡ = 900	

Como el alfabeto griego tiene solamente 24 letras se le agregan los tres signos siguientes:

ϛ (vau),	ϟ (koppa),	ϡ (sampi)

Para las unidades de mil se toman las letras de las unidades simples correspondientes acompañadas de una coma a la izquierda.

͵α = 1000	͵β = 2000

Las miríadas o decenas de mil se notan escribiendo encima de la letra M el número de miríadas.

Así : 18000 = $\overset{\alpha}{\mathrm{M}}{,}\eta$

ARITMETICA PITAGORICA

Se considera a Pitágoras de Samos (primera mitad del siglo VI a. J.C.) como el padre de las matemáticas griegas. Sin embargo, él persiste como una figura oscura, muy controvertida y mística.

La filosofía pitagórica reposa sobre la afirmación tácita de que el número entero es la causa de las cualidades diversas de los elementos del universo.

"Todo es número". Tal era la divisa de la escuela pitagórica.

Los antigüos griegos distinguian el estudio de las relaciones abstractas que ligan a los números y el cálculo práctico con los números.

— La primera actividad era conocida bajo el nombre de "aritmética" (hoy teoría de números).

— La segunda recibía el nombre de "logística" (nuestra aritmética).

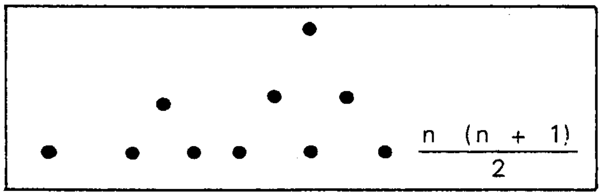
[10] N.T. El pensamiento matemático griego permanece dormido hasta el siglo VI a. J.C. en que, decaída la religión, y con ella los restos de la casta sacerdotal egipcia que acaparaba los conocimientos científicos, aparece el primer hombre que puede llevar dignamente el calificativo de pensador: Thales de Mileto, el cual señala el límite inferior de la Matemática griega prealejandrina. El límite superior está determinado por el momento en que, muerto Alejandro Magno, se desmembra el imperio que había fundado y los Ptolomeos hacen de Alejandría la capital científica del nuevo mundo griego. (Vera: Historia Ideas Matemáticas).

— Esta división subsistió hasta finalizar el siglo XV.

Entre otros, en el libro IX de los elementos de Euclides, se encuentran consideraciones sobre los números pares e impares (Nicómaco de Geraza)[11].

Los números figurados representaban un lazo de unión entre la aritmética y la geometría.

Ejemplo:



números triangulares y sus configuraciones

CIVILIZACION LATINA

Los pueblos latinos no son citados como ejemplo de la bella ciencia, pero parece necesario recordar sus concepciones para comprender mejor su evolución al contacto con los Arabes.

Su sistema de signos fue el siguiente:

1	5	10	50	100
I	V	X	L	C

500	1000	10.000	1.000.000
D	M ó $\overline{\text{I}}$	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\lvert\text{T}\rvert}$

En el sistema de numeración romana las correspondencias se efectúan de la siguiente manera:

IIIII	se remplaza	por	V
V V	se remplaza	por	X
XXXXX	se remplaza	por	L
L L	se remplaza	por	C
CCCCC	se remplaza	por	D

— etc. —

1977 se puede escribir MDCCCCLXXVII ó MCMLXXVII. Luego se tienen varias escrituras posibles de un mismo número.

Este sistema no se presta para el cálculo; se comprende que se haya tenido que recurrir a medios auxiliares para el cálculo: los ábacos y las tablas numéricas.

Sobre el ábaco los números se representaban con la ayuda de guijarros (en latín "calculi" (que originaría "cálculo")); así CCVI se representaba:

C	X	V	I
• •		•	•

Calculemos sobre el ábaco la suma siguiente:

M D C D L V I I I + M D C C L X V

M	D	C	L	X	V	I
I	I	IIII	I		I	III
I	I	II	I	I	I	

III	I	II		II		III
MMM	D	CC		XX		III

Luego: MDCDLVIII + MDCCLXV = MMMDCCXXIII

CIVILIZACION CHINA E HINDU

Las civilizaciones de la China y de la India son probablemente tan antiguas como la Persa y la Egipcia pero las crónicas que nos las hacen conocer son más que dudosas.

Parece que los primeros documentos históricos datan del III a. J. C.

CIVILIZACION CHINA

La tradición hace remontar a los años 2852 y 2738 a. J.C., los primeros emperadores (entre ellos Fou-Hi).

Una de las obras más antiguas que se puedan consultar en el I King, documento que contiene algunas huellas de elementos matemáticos; se encuentra allí el famoso Pa Kua formado de ocho trigramas (como las 8 direcciones celestes).

Estos trigramas están formados a partir de 2 formas primarias:

——— Yang — hsio

— — Ying — hsio

Algunos interpretan el Pa Kua como un ejemplo de numeración binaria.

El La-Shu es el cuadrado mágico más antiguo conocido (citado en el I King).

[11] N.T. Comentarista de fines de siglo I o comienzos del II.

Sistema de numeración. Se está en presencia de dos sistemas, uno de los cuales es el descrito en las tablas siguientes:

1	2	3	4	5
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤

6	7	8	9
𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

10	20	30	40	50
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭

60	70	80	90
𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Es un sistema posicional y utiliza dieciocho signos que sirven para designar: las unidades (9 signos) y las decenas (9 signos).

Cada número es considerado como formado alternativamente de unidades y de decenas.

Así a 1977 se le hace corresponder la sucesión 7, 70, 9, 10, de donde la escritura:

1977 = 𝍩𝍨𝍯𝍦

Lo mismo 𝍣𝍫𝍧𝍯𝍦 designa la sucesión (7, 70, 8, 30, 4) del número cuya escritura decimal es 43877.

El cero aparece muy tarde y los cálculos se hacen esencialmente con la ayuda de ábacos.

Se observan además, insuficiencias para designar las potencias sucesivas de diez.

CIVILIZACION DE LA INDIA

Hacia el tercer milenio a. J. C., los arios invaden la India y gradualmente una literatura sabia se desarrolla en lengua sánscrita: los textos del hinduismo.

Las dos notaciones principales utilizadas (bajo el reino del rey Asoka) son la Karoshti y la Brahmi, sistemas de numeración repetitivos que incluían nuevos símbolos para los números 4, 10, 20, 100; sin embargo, si la Brahmi contiene los gérmenes de un desarrollo ulterior, se ignora cuándo y cómo se efectuó la reducción a 9 símbolos; pero no se puede afirmar que la aparición de un símbolo para el cero (876 después de J.C.) esté ligada a la reducción a 9 símbolos.

CIVILIZACION DE LOS MAYAS

Se cree que ella remonta hasta el siglo IV de nuestra era.

El sistema de numeración utiliza dos símbolos principales: y ___ que designan respectivamente 1 y 5.

Así: 7 =  13 = 

Su sistema no era, propiamente hablando, un sistema de numeración de base 20.

Basados posiblemente en el número de días del año repartidos en 20 meses de 18 días, las primeras agrupaciones se efectuaban por veinte, las segundas por grupos de dieciocho (18 x 20 = 360).

Así:  designaba (6 x 20) + 12 = 132

Pero esta escritura era ambigua porque se podría interpretar como:

(6 x 360) + (2 x 20) + 10 = 2210

Esta ambigüedad desapareció desde que introdujeron un signo para el cero  o más exactamente un signo para indicar la ausencia de agrupamientos de un cierto orden.

Así:  = 18 + (0 x 20) + (7 x 360) = 2538

CIVILIZACION ARABE

Los árabes habían establecido un vasto imperio que se extendía desde el Indo hasta la península Ibérica y que sirvió de unión entre el pensamiento griego e hindú de una parte, y la Europa medioeval de otra parte.

Ellos supieron enriquecer algunas de las herencias recibidas.

Se señalan entre sus matemáticos a Al-Khuwarizmi (cuyo nombre daría "algoritmo"). Este presenta diversas reglas para el cálculo numérico, modeladas sobre los algoritmos hindúes (ésto no será más que la traducción en árabe de los trabajos de Brahmagupta (India)).

"Cero" vendría del árabe "cifr" que significa "vacío", que sería después "zifero" en italiano y finalmente "cero".[12]:

---

[12] N.T. De "cifr" viene también "cifra", y del nombre de Al-Khuwarizmi: la palabra guarismo.

Las invasiones bárbaras que devastaron Europa Occidental a partir del siglo IV destruyeron casi todos los focos de cultura.

Fue gracias a los árabes como los europeos volvieron a entrar en contacto con el pensamiento científico. (Se debe señalar la existencia de un cálculo digital en la Edad Media).

Sería un monje de Auvergnat (Gerberto de Aurillac), instruído en las cifras árabes cuando viajó a Cordoue (980), y que más tarde fue el Papa Silvestre II, quien dió una gran resonancia a estas ideas.

Los trabajos de Fibonacci[13] (libro del ábaco en 1202) ocuparon un lugar muy importante.

La forma de las cifras llamadas arábigas no fue fijada sino después de la invención de la imprenta (1440).

Fue más tarde cuando el cálculo con las escrituras de los números vino a remplazar el cálculo con las bolitas o piedritas ("calculi").

NOTA: Las letras para representar los números fueron utilizadas por primera vez por Francisco Viete (1540 - 1603).

A continuación se presenta un árbol genealógico de nuestro sistema de numeración.

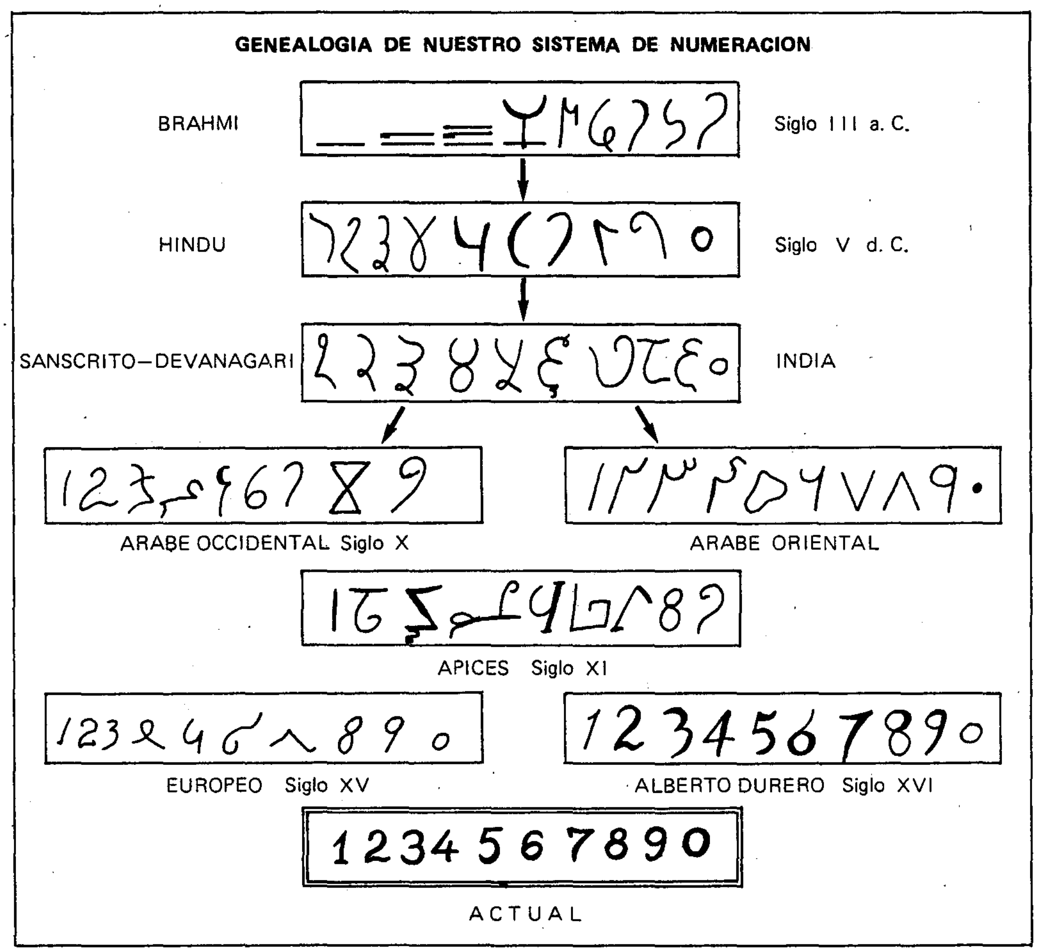
Condensado de:

TEULE – SENSACQ, Pierre. **"Tour d'horizon historique sur la numération écrite".** IREM de Bordeaux. Compte Rendu et analyse des travaux sur la numeration. Bordeaux 10 11 février, 17 - 18 Mars 1977.

Traducción: Cecilia Casasbuenas S. Grupo Matemáticas M.E.N.

Revisión: Dr. Carlos Eduardo Vasco U.

Febrero 1981.



[13] N.T. Leonardo de Pisa o Leonardo Pisano, apodado Fibonacci inició su obra el despertar matemático en el mundo occidental (siglo XIII). Nació en 1170 y murió en 1240.

Tabla de Contenido (Lectura)

Unidad II

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS NATURALES

Introducción

En la Educación Básica Primaria se estudió el sistema de los números naturales con sus operaciones y las relaciones de orden aditivo y multiplicativo. No se llegó a un nivel de formalización sino que partiendo de situaciones concretas y significativas para el educando se obtuvieron las conclusiones aplicables al referencial con el cual se trabajó.

Aquí se trata de ampliar el concepto de número y el de operación, y llegar a un cierto nivel de formalización en cuanto a las propiedades de las operaciones. Mediante la comparación de las propiedades de las operaciones binarias se espera, por ejemplo, que el estudiante llegue al concepto de operación conmutativa y que sea capaz de distinguir aquellas que tienen esta propiedad de las que no la tienen. En cuanto a la propiedad asociativa, de las expresiones que resultan de la práctica se pasa a aquellas que corresponden a su formalización, tomando como referencial los números naturales.

Se espera que el concepto de módulo de una operación surja después del estudio de la propiedad modulativa en las operaciones propuestas. A las propiedades estudiadas se les denomina por su nombre.

En cuanto al cálculo numérico se insiste tanto en el aspecto mecánico, es decir, en las técnicas operatorias como en la reflexión y justificación de esas técnicas. Un buen ejemplo de esto último es el estudio de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Se amplía el estudio de la potenciación y de sus operaciones inversas, se efectúan algunas operaciones entre potencias y se desarrollan procedimientos para verificar si un número tiene raíz exacta. También se resalta la importancia de fomentar la habilidad para estimar tanto la raíz cuadrada y cúbica de algunos números, como los logaritmos de números que no son potencias de 10.

Para cada operación se siguen varios caminos basados en las propiedades de la operacion de tal manera que la organización de los datos, el orden de los pasos a seguir y la estimación del resultado precedan a la aplicación automática de las técnicas operatorias.

Se analizan las relaciones de orden multiplicativo, se aplican algunos criterios de divisibilidad para hallar los factores primos de un número y finalmente se ve cómo hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de dos números.

Objetivos generales

- Recopilar las operaciones binarias que aparecen en el sistema de los números naturales.
- Aplicar los algoritmos de algunas operaciones entre números naturales.
- Reconocer propiedades comunes a algunas operaciones entre números naturales y aplicarlas en el cálculo numérico oral y escrito.
- Reconocer que la división y la sustracción no cumplen algunas propiedades de la multiplicación y la adición.
- Formular y resolver problemas que requieran el uso de los números naturales.
- Avanzar en el estudio de la potenciación y en el de sus dos operaciones inversas.
- Reconocer algunas propiedades de la potenciación de la radicación y de la logaritmación y aplicarlas en el cálculo numérico.
- Efectuar algunas operaciones entre potencias.

- Hallar un procedimiento para verificar si un número tiene o no raíz exacta y si la tiene obtenerla.
- Estimar, con o sin ayuda de la calculadora, la raíz cuadrada y la raíz cúbica de algunos números y los logaritmos de números que no son potencias de 10.
- Recopilar las relaciones binarias que aparecen en el sistema de los números naturales y compararlas con algunas relaciones del lenguaje ordinario.
- Diferenciar entre operación binaria y relación binaria.
- Hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo entre dos números naturales.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

5 Reconocer el conjunto de números naturales.

6 Reconocer la adición y la sustracción como operaciones binarias y aplicar los algoritmos de estas operaciones.

7 Aplicar las propiedades de la adición de números naturales en el cálculo numérico y examinar si la sustracción cumple estas mismas propiedades.

INDICADORES DE EVALUACION

Dadas varias listas de números naturales, fraccionarios y decimales el alumno dirá cuáles corresponden a los números naturales y cuáles no.

El alumno mostrará por medio de ejemplos cómo la adición y la sustracción entre números naturales son operaciones binarias y utilizará los algoritmos de estas dos operaciones no sólo en el sistema de base diez sino en otras bases.

Al realizar la suma de varios sumandos el alumno dirá qué propiedades de la adición utilizó y mediante un ejemplo mostrará por lo menos una de las propiedades de la adición que no tiene la sustracción entre números naturales.

CONTENIDOS BASICOS

El conjunto de los números que se estudian en esta unidad es el de los números naturales que denotaremos por N.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Este es el conjunto de los números que nos sirven para contar y para decir cuántos elementos hay en un conjunto; a veces no hay sino uno, y a veces no hay ninguno.

Hasta el siglo XVI se dudaba de si los números naturales empezaban por el uno o por el dos, pues para tener una colección parecía necesario tener por lo menos dos elementos, así se pensaba que el uno no era número, y hasta se llegó a decir que no era ni par ni impar (así como nosotros todavía decimos que no es ni primo ni compuesto). Pero si se acepta que hay conjuntos unitarios y vacíos, hay que poner el uno y el cero entre los números naturales.

En el conjunto de los números naturales se estudian las siguientes operaciones: la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la potenciación y las dos operaciones inversas de esta última.

La adición de dos números naturales es una operación que se realiza entre dos números naturales y da como resultado un número natural. Por ser una operación que se efectúa entre dos objetos, (en este caso los objetos son los números naturales) se dice que es una operación binaria.

Para indicar que se va a realizar esta operación se utiliza el signo $+$.

Los objetos (números naturales, en este caso) entre los cuales se va a efectuar la adición se suelen llamar sumandos y el resultado de haber efectuado la operación se suele llamar "suma".

La sustracción entre números naturales también es una operación binaria ya que se realiza entre dos objetos, produciendo otro objeto.

Se acostumbra llamar "minuendo" y "sustraendo" a los objetos entre los cuales se efectúa la sustracción y al resultado "diferencia".

El resultado de la sustracción entre dos números naturales no siempre está en el conjunto de los números naturales. Cuando el minuendo es mayor o igual que el sustraendo el resultado es un número natural y cuando el minuendo es menor que el sustraendo el resultado no está en el conjunto de los números naturales. Posteriormente se verá cuál es el resultado en este caso, y en qué conjunto está.

El algoritmo de la adición de números naturales es un conjunto de instrucciones o de reglas que permiten desarrollar ordenadamente la operación.

La adición es una operación que cumple ciertas propiedades que son muy útiles en el cálculo numérico. Algunas de estas propiedades son:

Conmutativa: el orden en que se tomen los números para adicionarlos no altera el resultado.

Asociativa: cuando se tienen tres o más sumandos, se pueden asociar de diferentes maneras para adicionarlos y siempre se obtendrá el mismo resultado.

Modulativa: esta propiedad hace referencia a la existencia de un elemento dentro del conjunto de los números naturales, que al ser adicionado con cualquier otro número natural da como resultado el otro número. Este elemento es el cero, pues cualquier número natural adicionado con cero da como resultado el otro número natural.

Cero es pues el módulo de la adición de números naturales, se dice también que cero es el elemento idéntico de la adición de números naturales o que es el elemento neutro.

Es indispensable que la modulativa se cumpla a derecha y a izquierda, esto es cuando el módulo está a la derecha o a la izquierda respectivamente. Aunque esto puede resultar insignificante, posteriormente se analizarán situaciones en donde se ve su importancia.

Ejemplos:

$0 + 5 = 5$	$5 + 0 = 5$
Módulo a la izquierda	Módulo a la derecha

Algunos autores no consideran el cero como número natural, en este caso la adición no cumple la propiedad modulativa puesto que el módulo no está en el conjunto en el cual se define esta operación.

La sustracción no cumple las propiedades de la adición que se han estudiado. Veamos:

Conmutativa: una operación es conmutativa si el resultado no se altera cuando se cambia el orden de los datos. Esto no ocurre con la sustracción, pues al cambiar el orden de los datos el resultado no es el mismo.

Asociativa: cuando se realiza una operación binaria con más de dos datos se llega al mismo resultado aunque los datos se asocien de maneras diferentes, se dice que la operación es asociativa. Veámoslo a través de un ejemplo:

$$12 - 6 - 5$$

$$(12 - 6) - 5 = 6 - 5 = 1$$

$$12 - (6 - 5) = 12 - 1 = 11$$

$$(12 - 6) - 5 \neq 12 - (6 - 5)$$

Modulativa: la sustracción solo tiene módulo a derecha. Cuando el sustraendo es el cero se cumple la propiedad modulativa: $3 - 0 = 3$. Cuando el minuendo es el cero, la sustracción no se puede hacer: $0 - 3 = ?$ por tanto no tiene módulo a izquierda. Como para ser modulativa es necesario que tenga módulo a derecha y a izquierda y en este caso solo hay módulo a derecha, la sustracción entre números naturales no cumple la propiedad modulativa.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En cuarto grado de Básica Primaria los alumnos distinguieron el conjunto de los números naturales de otros conjuntos numéricos.

Ejemplo:

D = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	Los dígitos
N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}	Los naturales
E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}	Los dígitos
C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}	Los de contar
P = {2, 4, 6, 8, 10, 12, ...}	Los pares
I = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...}	Los impares

Los alumnos pueden preguntar por qué los números naturales empiezan con el cero y no con el uno, como en el conjunto **C**, que podemos llamar "los números de contar". Cuando una persona quiere contar siempre señala los objetos y cuenta "uno, dos, tres, cuatro, . . .". Nunca empieza "cero, uno, dos, . . .".

Los alumnos tienen razón en pensar que los números de contar que comienzan con el uno son "más naturales" que los que comienzan con el cero. La humanidad se pasó miles de años contando sin necesidad del cero.

Se les puede decir que para contar objetos en fila se comienza por el primero, luego sigue el segundo, el tercero, etc. (que son los "números ordinales" usuales), y en esa actividad de contar parece mejor comenzar con el uno. Pero que otra cosa es utilizar los números naturales para decir cuántos elementos hay en un conjunto; a veces no hay sino uno, y a veces no hay ninguno; por ejemplo, escribimos 10 para decir que hay una decena y no hay ninguna unidad suelta. Es pues también "muy natural" decir "tiene un elemento" o "tiene cero elementos", y por eso se completa el conjunto de los números naturales (como cardinales de los conjuntos finitos) tomando también el cero.

En la Básica Primaria se estudiaron las cuatro operaciones básicas y se inició el estudio de la potenciación y el de sus dos operaciones inversas. Con respecto a las primeras se propone hacer un repaso de los procedimientos simbólicos (algoritmos) y aplicarlos para trabajar en otros sistemas de numeración de base diferente a la usual, por ejemplo, en base 5, 3 y 2.

Se puede proponer a los alumnos que formulen el algoritmo que ellos han utilizado para efectuar la adición de números naturales en base diez y que al mismo tiempo vayan efectuando algunas adiciones de varios sumandos, cada uno de estos sumandos con varias cifras (2, 3, 4, 5, etc.) y aumentando cada vez el grado de dificultad.

Se pueden resolver problemas que requieran de la adición para que los alumnos tengan la oportunidad de aplicar el algoritmo de esta operación, también se puede aprovechar para hacer ejercicios de estimación del resultado de una adición dando varios sumandos para que el alumno diga aproximadamente entre qué números está sin efectuar la operación. Se puede tomar como referencia las centenas, o las unidades de mil, dependiendo de la adición que se quiera efectuar. Se espera que den respuestas como "el resultado está entre 200 y 300" o "está entre 1500 y 2000", etc.

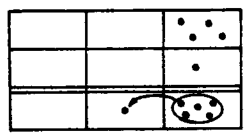
Se pueden hacer algunos ejercicios de cálculo mental para que el alumno dé el resultado o una aproximación de él.

Como los alumnos trabajaron con sistemas de numeración de otras bases es interesante que realicen adiciones en alguno de ellos. Cuando se presenten dificultades en "la llevada" se puede recurrir a la representación de los sumandos mediante la utilización de casillas. Estas no aceptan un número de objetos igual o superior a la base.

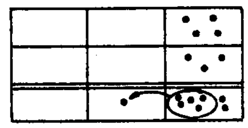
Si se trabaja en el sistema de base 5 puede construirse inicialmente la tabla de la adición:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\,1 \\ \hline 10 \end{array}$$

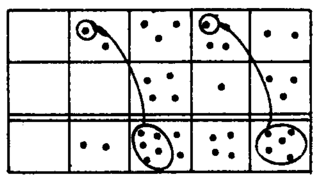


$$\begin{array}{r} 4 \\ +\,3 \\ \hline 12 \end{array}$$



Otro tipo de adiciones pueden ser:

$$\begin{array}{r} 1042 \\ +\,2102 \\ \hline 3144 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1322 \\ +\,413 \\ \hline 2240 \end{array}$$



2 2 4 0

En cuanto a la sustracción se pueden seleccionar algunos problemas cuya solución requiera de la sustracción para que el alumno tenga la oportunidad de aplicar el algoritmo de esta operación. Se puede trabajar en grupos e ir resolviendo los problemas en orden de dificultad.

Es conveniente recordar que la sustracción es la operación inversa de la adición y hacer ejercicios en donde se aplique esto.

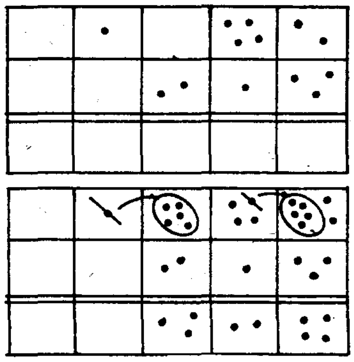
Ejemplos: La suma de dos números es 53 y uno de ellos es 35. ¿Cuál es el otro número?

La diferencia de dos números es 38 y el mayor de ellos es 55. ¿Cuál es el otro número?

También se pueden hacer ejercicios de cálculo mental y de estimación del resultado de una sustracción.

La aplicación del algoritmo de la sustracción también se puede aplicar en otros sistemas de base diferente a la usual (diez). Veamos algunos ejemplos en base cinco.

1324	1042
− 203	− 203
1121	324



3 2 4

Para la aplicación de las propiedades de la adición se pueden realizar ejercicios en donde los alumnos las apliquen espontáneamente y aprecien cómo la aplicación de estas propiedades facilita el cálculo numérico oral y escrito. En cada caso conviene destacar la propiedad que se aplica.

Es conveniente que los alumnos prueben que han hecho correctamente la adición para lo cual pueden emplear las propiedades. Una forma de hacerlo es utilizando la propiedad conmutativa, cambiando el orden de los sumandos.

Ejemplo: 838 prueba

325
38
427
48

838

Para probar la adición, también se pueden asociar los sumandos y efectuar sumas parciales para luego adicionarlas.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r}3184\\215\end{array}\right\}\ 3399 \qquad \left.\begin{array}{r}729\\6134\\9318\end{array}\right\}\ 16181$$

19580 19580

Cuando una operación es asociativa los paréntesis pueden omitirse; se entiende que se va agrupando por la izquierda: 132 + 57 + 18 significa (132 + 57) + 18 que por la asociativa podríamos agrupar: 132 + (57 + 18). A veces es más fácil agrupar de un modo y a veces de otro.

En este caso podría resultar más fácil sumar mentalmente: 132 +18 = 150, así la adición se transforma en 150 + 57 = 207, cuyo resultado es más fácil de obtener mentalmente.

Hallar la adición de los nueve primeros números naturales empezando por 1. Se puede resolver aplicando la propiedad conmutativa y la asociativa, así:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

$$(1 + 8) + (2 + 7) + (3 + 6) + (4 + 5) + 9 =$$

$$9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 45$$

Resolver: $37 + 8 + 5 - 8$

$$37 + \cancel{8} + 5 - \cancel{8} = 42$$

Se tacharon los números que al sumarlos da cero y luego se halló el resultado.

Las propiedades aplicadas fueron la conmutativa y la modulativa.

37 + 5 + 8 − 8	conmutativa
(37 + 5) + (8 − 8)	
42 + 0	modulativa
42	

Después de que los alumnos verifiquen que la adición cumple las propiedades: conmutativa, asociativa y modulativa, efectuarán algunas sustracciones y verificarán si esta operación cumple las tres propiedades mencionadas. Concluirán que no cumple la conmutativa y la asociativa, y que la modulativa sólo se cumple cuando el cero está de sustraendo.

OBJETIVO ESPECIFICO

8 Reconocer la multiplicación y la división de números naturales como operaciones binarias y aplicar los algoritmos de estas operaciones.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno explicará por qué la multiplicación y la división de números naturales son operaciones binarias y aplicará los algoritmos respectivos en la resolución de ejercicios.

CONTENIDOS BASICOS

La multiplicación entre números naturales es otro ejemplo de operación binaria. Esta operación transforma una pareja de números naturales en su producto. Así de la pareja (a, b) se obtiene, mediante la operación, el elemento $a \times b$ que es el producto o resultado.

Un esquema usual de lectura para el resultado de la operación, es: "el ______ de ... y ...". En el caso de $a \times b$, se lee: "el producto de a y b".

Otro esquema abreviado es: " ... ____________ ...".

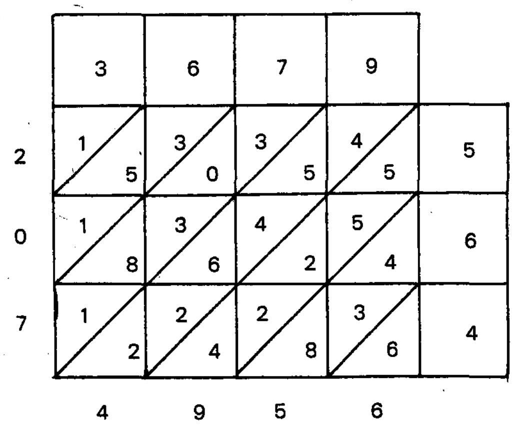
Para el ejemplo que se trae, se lee: "*a* por *b*"

Para efectuar multiplicaciones se aplica el algoritmo que todos conocemos para multiplicar números naturales y que se basa en la numeración en base diez. Existen otras formas, relativamente más sencillas, de efectuar la operación.

En la lectura "recorrido histórico de la numeración escrita" se ilustra con un ejemplo, el método de multiplicación duplicando, empleado por los antiguos egipcios, veinte siglos antes de nuestra era. Para aplicar este método basta conocer la tabla del dos.

Otro método, el de multiplicación sin llevar, era empleado por los árabes del medioevo, quienes probablemente lo tomaron de los hindúes.

Ejemplo: 3679 x 564



Adicionando los numerales de cada diagonal, se obtiene el resultado: 2074956.

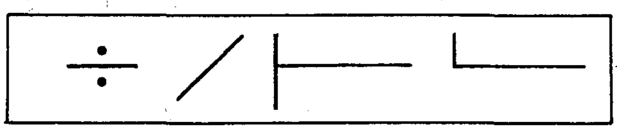
"El anterior método, fundamentalmente idéntico al usualmente empleado, se distingue de éste porque deja las adiciones para el final y en consecuencia puede resultar más cómodo de manejar para algunas personas" (PEREZ, Hernando, Matemática. Enseñanza Universitaria, No. 18, Marzo de 1981).

La división de números naturales también es una operación binaria puesto que se efectúa entre dos números llamados dividendo y divisor. El objeto que se produce puede ser:

a) Otro número natural llamado cociente, cuando la pareja de naturales es tal que el dividendo es un múltiplo del divisor.

   El esquema de lectura para el resultado es: "el cociente de ... y ...".

   Los símbolos para la operación son:



Ejemplo: $(36, 9) \longrightarrow 36 \div 9 = 4$ ó

$(36, 9) \longrightarrow 36 \;/\; 9 = 4$

El resultado se lee: "el cociente de 36 y 9", ó "36 dividido por 9".

Otra forma de simbolizar el resultado es:

$36 \,\underline{|\,9\,}$ ó $36 \,\underline{|\,9\,}$

b) Una pareja de números naturales (cociente, residuo) cuando el dividendo no es un múltiplo del divisor. Esta es la llamada división euclidiana o división con residuo.

   El caso a) se puede considerar como un caso particular del b) donde el residuo es cero.

   Si el residuo no es cero, ya no se usan los símbolos $\div$, /, sino los otros dos:

$$\begin{array}{r|l} 41 & \underline{9} \\ 5 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 41 & \underline{|\,9} \\ 5 & 4 \end{array}$$

Lo anterior se simboliza:

$(41, 9) \longrightarrow (4, 5)$, ó:

$$\begin{array}{r|l} 41 & \underline{9} \\ \underline{36} & 4 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 41 & \underline{|\,9} \\ \underline{36} & 4 \\ 5 & \end{array}$$

Esta es la división euclidiana o con residuo.

En la aplicación de cualquier técnica es conveniente no hacerlo todas las veces en forma puramente mecánica.

El algoritmo de la división es la técnica para efectuar dicha operación en nuestro sistema decimal. Sin embargo, las técnicas operatorias muchas veces nos ocultan las propiedades y relaciones de los números que intervienen en la operación que se efectúa.

Es conveniente que el proceso de aplicación se interrumpa en un paso intermedio para hacer resaltar las relaciones y propiedades que se han tenido en cuenta. Algunas de estas relaciones, ya conocidas por los alumnos, son: " ... es un múltiplo de ..." y " ...es un divisor de ...".

Una pareja (dividendo, divisor) puede producir varias parejas (cociente, residuo) tales que: dividendo = (divisor x cociente) + residuo.

Ejemplo: (345,8)

$$\begin{array}{r|l} 3\,4\,5 & \underline{8\;\;\;} \\ 2\,5 & 40 \end{array} \qquad 345 = (8 \times 40) + 25$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,4\,5 & \underline{8\;\;\;} \\ 2\,5 & 42 \\ 9 & \end{array} \qquad 345 = (8 \times 42) + 9$$

$$\begin{array}{r|l} 3\,4\,5 & \underline{8\;\;\;} \\ 1\,0\,5 & 30 \end{array} \qquad 345 = (8 \times 30) + 105$$

En la división euclidiana no es suficiente que la igualdad: dividendo = (divisor x cociente) + residuo, sea satisfecha. Es necesario que el residuo sea cero o un natural menor que el divisor.

Ejemplo: $(45, 8) \rightarrow (4, 13)$ cumpliría que

$$(8 \times 4) + 13 = 32 + 13 = 45$$

Pero 13 no es menor que 8.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El profesor iniciará la clase formulando preguntas que lleven a los alumnos a recordar el concepto de operación binaria. Luego pedirá que escriban parejas de números naturales y que al lado de cada una de ellas escriban el resultado de realizar entre las dos componentes la operación multiplicación. Al lado de la lista formada por parejas de naturales, estará la lista de los resultados o productos.

Ejemplo: $(1, 4) \rightarrow 1 \times 4 = 4$

$(3, 5) \rightarrow 3 \times 5 = 15$

Se enfatizará el hecho de que la operación se efectúa entre dos elementos, las componentes de la pareja. 1×4, 3×5, representan el resultado y se leen: "el producto de 1 y 4" "el producto de 3 y 5" o también: "1 por 4" "3 por 5".

Como los alumnos ya traen una práctica y cierta técnica para efectuar multiplicaciones, el profesor puede proponer ejercicios desde los más sencillos hasta aquellos que exijan un dominio completo del algoritmo de la multiplicación.

Para que los alumnos recuerden algunos números que tienen propiedades especiales que permiten realizar fácilmente la multiplicación sin utilizar papel ni lápiz, el profesor les puede proponer ejercicios de cálculo mental en los cuales: uno de los factores es 10 ó 100; uno de los factores es 5; uno de los factores es 9; uno de los factores es 50 y uno de los factores es 11.

El profesor y los alumnos pueden enriquecer esta lista de casos ya sea por combinación de los casos dados o por otros que contribuyan igualmente a agilizar el cálculo mental. Un nuevo caso sería, por ejemplo, cuando uno de los factores es 18.

Aplicarle a un número el operador 18x es equivalente a aplicarle sucesivamente los operadores 9x y 2x. El profesor tendrá en cuenta la justificación general siguiente: $18a = (2 \times 9)\ a = 2 \times (9 \times a) = 2 \times (10a - a)$.

Otros ejercicios de cálculo mental consisten en estimar el resultado de una multiplicación. Así 2100 ó 2150 son buenas estimaciones del producto 180×12. Más de 1800 y menos de 2200 es también una buena estimación.

Para que los alumnos eleboren el algoritmo de la multiplicación, el profesor sugiere que trabájen en grupos de a cinco, de manera que dos alumnos efectúen la operación, otro consigne el proceso (los pasos), y los otros vigilen y colaboren en ambas actividades. Las instrucciones que escriba el relator deben estar tan claras y precisas que las pudiera seguir un robot. Una vez terminadas, se intercambian con las de otro grupo, y cada grupo trata de seguir las instrucciones del otro, procurando cometer todos los errores que sean compatibles con las instrucciones escritas.

El algoritmo de la división lo vienen aplicando los alumnos, con diferentes grados de complejidad, desde el grado segundo de básica primaria.

Para recordar cuál es la técnica que usualmente se emplea para efectuar una división, el profesor puede proponer varios ejercicios que consistan en encontrar el cociente y el residuo, conociendo el dividendo y el divisor. El residuo podrá ser cero o un natural mayor que cero.

Es conveniente que los alumnos hagan un análisis de los resultados parciales obtenidos en cada paso. El algoritmo lo permite, y además se puede comprobar si lo que se ha hecho es correcto.

Ejemplo: dividir 139 entre 6.

```
 13'9 | 6
 12   | 2
  1
```

¿Qué representa el 2? ¿y el 1?. ¿Por qué se tomó el 2 como cociente?. ¿Cómo se comprueba que no hay error en lo anterior?

Se establecerá que el 2 representa decenas, y que se tomó porque es el número que multiplicado por 6 produce el mayor múltiplo de 6 menor que 13. El residuo es una decena.

En efecto: $139 = (20 \times 6) + (10 + 9)$

Se continúa la operación:

```
 1 3 9 | 6
 1 2   | 2 3
   1 9
   1 8
     1
```

Se enfatiza que el cociente que se obtiene en cada paso es del mismo orden (unidades, decenas, centenas, etc.) del dividendo en dicho paso.

Así en el ejemplo anterior, 19 representa las unidades y 3 es del mismo orden.

Se observa igualmente que la división se da por terminada cuando el residuo es cero ó un número menor que el divisor.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
9 Aplicar las propiedades de la multiplicación de números naturales en el cálculo numérico y examinar si la división cumple estas mismas propiedades.	El alumno explicará el proceso que siguió en un ejercicio de cálculo mental e identificará las propiedades de la multiplicación aplicadas. Tomando como referencia las propiedades de la multiplicación, el alumno elaborará un cuadro comparativo para la división.
10 Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación y de la división con respecto a la adición y a la sustracción.	Dado un problema que plantee una situación multiplicativa y aditiva, el alumno explicará cómo aplicó la propiedad distributiva para efectuar la operación.

CONTENIDOS BASICOS

El conjunto de los números naturales es cerrado para la multiplicación y además esta operación tiene las siguientes propiedades:

Conmutativa: el orden en que se tomen los factores para efectuar la operación no cambia el producto o resultado.

Modulativa: existe un elemento neutro para la multiplicación. Este elemento neutro es el 1 que también se denomina módulo de la multiplicación. Como la operación es conmutativa, el módulo puede estar a la derecha o a la izquierda. Así: $4 \times 1 = 1 \times 4 = 4$.

Asociativa: cuando se van a multiplicar tres factores, la operación se realiza primero entre dos de ellos (la multiplicación es binaria) y luego entre este producto y el otro factor. El producto parcial se puede obtener de multiplicar los dos primeros factores o de multiplicar los dos últimos.

Ejemplo: Halle el producto de 3, 5, y 9.

$$\left.\begin{array}{r} 3 \times 5 = 15 \\ 15 \times 9 = 135 \end{array}\right\} \quad (3 \times 5) \times 9 = 135$$

$$\left.\begin{array}{r} 5 \times 9 = 45 \\ 3 \times 45 = 135 \end{array}\right\} \quad 3 \times (5 \times 9) = 135$$

De lo anterior se puede concluir que: $(3 \times 5) \times 9 = 3 \times (5 \times 9)$, que es la forma como se expresa la propiedad asociativa de la multiplicación.

La multiplicación es distributiva con respecto a la adición.

Si en una multiplicación uno de los dos factores es una suma indicada, para hallar el producto se distribuye el otro factor sobre cada uno de los sumandos de manera que resultan tantos productos parciales como sumandos tenía el factor que estaba expresado como una suma indicada.

Ejemplo: $4 \times (5 + 3) = (4 \times 5) + (4 \times 3)$. El factor 4 se distribuye sobre la suma $5 + 3$.

Una pregunta paralela sería: ¿se cumple la distributiva de la adición con respecto a la multiplicación?.

Ejemplo: $4 + (3 \times 5) \stackrel{?}{=} (4 + 3) \times (4 + 5)$. El sumando 4 se tendría que distribuir sobre el producto 3×5. Es fácil verificar que en este caso los resultados son diferentes.

¿Habrá algún caso en que sean iguales?. Si el primer sumando es 0, la igualdad $0 + (a \times b) = (0 + a) \times (0 + b)$ siempre se cumple.

En los números fraccionarios y reales se cumple en muchos casos que:

$$a + (b \times c) = (a + b) \times (a + c)$$

Pero eso no basta para que la adición sea distributiva con respecto a la multiplicación: para ello se requiere que la igualdad se cumpla siempre. No es suficiente que una igualdad se cumpla en uno o muchos casos para que se convierta en propiedad. Es necesario que se cumpla en todos los casos. Basta un solo caso en que no se cumpla para que ya no se cumpla la propiedad.

La multiplicación es distributiva con respecto a la sustracción.

Si en una multiplicación uno de los dos factores es una diferencia indicada, para hallar el producto se distribuye el otro factor sobre el minuendo y el sustraendo y luego se halla la diferencia.

Ejemplo: $6 \times (7-2) = (6 \times 7) - (6 \times 2)$
El factor 6 se distribuye sobre la diferencia $7-2$.

La división no tiene las mismas propiedades de la multiplicación.

En este momento no tiene sentido examinar con los alumnos la propiedad clausurativa en ninguna de las operaciones estudiadas. Esto se hará cuando se estudie una misma operación en dos conjuntos distintos, de tal manera que se aprecie como en un conjunto hay casos que no tienen respuesta pero que en el otro si la tienen.

La división:

No es conmutativa
No es asociativa.
Es modulativa a derecha (como la sustracción).
Es distributiva a derecha con respecto a la adición y a la sustracción.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Los alumnos pueden trabajar en grupos de 5 ó 6 miembros y consultar sus notas sobre las propiedades de la adición, con el fin de verificar si la multiplicación tiene estas mismas propiedades. El trabajo final de cada grupo consistirá en un cuadro a dos columnas donde se comparen las propiedades de las dos operaciones.

Adición	Multiplicación
Conmutativa $3 + 5 = 5 + 3$	Conmutativa $3 \times 5 = 5 \times 3$
Modulativa $8 + 0 = 0 + 8 = 8$ El Módulo es 0	Modulativa $8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$ El Módulo es 1
Asociativa $(2+3)+4 = 2+(3+4)$	Asociativa $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

Lo más probable es que en los ejercicios de cálculo mental los alumnos ya aplicaron esta propiedad, y que este objetivo se haya logrado en una clase anterior.

En un ejercicio como 43×12 el profesor puede pedir a un alumno que explique el procedimiento que siguió para hallar mentalmente el resultado. Entre las explicaciones, es posible que surja una como:

$$43 \times (10 + 2) = (43 \times 10) + (43 \times 2) = 430 + 86 = 516$$

En el procedimiento usual esta propiedad se aplica repetidamente. ¿Los alumnos son conscientes de ello?

El profesor puede pedir que expliquen cómo se aplica esta propiedad cuando se realiza una multiplicación empleando el algoritmo.

Ejemplo:

```
  236
  x45
 ----
 1180  <----- primer producto parcial
 944   <----- segundo producto parcial
 -----
 10620
```

Lo anterior es equivalente a:

$$236 \times (5 + 40) = (236 \times 5) + (236 \times 40) =$$
$$1180 + 9440 = 10620$$

Primer producto parcial — Segundo producto parcial

Los alumnos explicarán en qué consiste la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

El profesor preguntará si la adición es distributiva con respecto a la multiplicación.

Cuál es el valor de verdad de:

$$3 + (5 \times 4) = (3 + 5) \times (3 + 4) \text{ y de}$$

$$3 \times (5 + 4) = (3 \times 5) + (3 \times 4)?$$

Para averiguar si la división cumple con las mismas propiedades de la multiplicación se puede empezar pidiéndole a un alumno que escriba en el tablero las propiedades de la multiplicación. Si alguien pregunta si hay una propiedad distributiva de la división con respecto a la adición y a la sustracción, entonces se escribe en el tablero la de la multiplicación con respecto a la adición y a la sustracción y al final se averigua cuál es la respuesta de la inquietud anterior.

Con ejemplos los alumnos obtienen sus conclusiones que finalmente pueden consignar, así:

— No es conmutativa.

Ejemplo: $16 \div 8$ no es lo mismo que $8 \div 16$

— Tampoco es asociativa.

Ejemplo: $(16 \div 4) \div 2 = 4 \div 2 = 2$ pero

$$16 \div (4 \div 2) = 16 \div 2 = 8$$

Se puede ensayar con otros ejemplos para reafirmar la no asociatividad de la operación.

— Es modulativa a derecha.

Ejemplo: $7 \div 1 = 7$ pero $1 \div 7$ no es un natural.

— No se puede hablar de una propiedad distributiva de la división con respecto a la adición y a la sustracción en sentido amplio como pasa con la multiplicación. Se ve cómo la no conmutatividad de la operación sólo permite la distributividad a la derecha.

Ejemplo: $(1200 + 80 + 4) \div 2 =$

$$(1200 \div 2) + (80 \div 2) + (4 \div 2)$$

Esta propiedad es especialmente importante porque es la que se aplica cuando efectuamos divisiones.

En efecto: $1200 + 80 + 4 = 1284$

El profesor puede orientar a los alumnos para que vean cómo en la aplicación del algoritmo se utiliza esta propiedad:

12'84 | 2
6 ⟶ centenas o sea $1200 \div 2$

Se continúa: 12'8'4 | 2
64 decenas o sea $80 \div 2$

Y finalmente: 12'8'4 | 2
642 unidades o sea $4 \div 2$

Lo anterior se puede resumir así:

$$1284 \div 2 = (1200 \div 2) + (80 \div 2) + (4 \div 2) =$$

$$600 + 40 + 2 = 642$$

Esta propiedad también se aplica en el cálculo mental.

Otro ejemplo: $(48 - 12) \div 6 = (48 \div 6) - (12 \div 6) =$

$$8 - 2 = 6$$

OBJETIVO ESPECIFICO

11 Resolver y formular problemas que requieran de una o varias de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división entre números naturales.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno resolverá y formulará problemas cuya solución requiera el empleo de una o varias operaciones con números naturales.

CONTENIDOS BASICOS

Un problema es una situación por resolver. Para resolver un problema se tienen unos datos o información que se debe utilizar para buscar la solución.

La importancia de resolver problemas radica en que de nada servirían los conocimientos básicos y las habilidades que posee el alumno si no puede aplicarlos a la solución de sus problemas.

La habilidad para formular problemas es tan importante como la habilidad para resolverlos.

Con frecuencia en el trabajo educativo, se ha desarrollado más la segunda que la primera. Sin embargo, cada día se ve más la necesidad de estimular la habilidad requerida para la formulación de problemas de cada uno de los temas estudiados.

Es conveniente orientar al alumno para que al formular los problemas vea cuáles son los datos que necesita y dónde están los aciertos y desaciertos de su razonamiento.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para lograr este objetivo se pueden dedicar varias sesiones de clase (por lo menos tres).

Es conveniente trabajar en grupo ya que el tema se presta para que los alumnos discutan y se pongan de acuerdo.

Se puede comenzar por problemas sencillos e ir aumentando el grado de dificultad. El profesor puede seleccionar los problemas y los alumnos le pueden colaborar.

Se debe hacer énfasis en que el alumno entienda el enunciado del problema, en que identifique la información por los datos que conoce y vea cuál es la mejor manera de emplearlos para dar solución al problema.

Cuando hayan resuelto un número suficiente de problemas, los alumnos formularán problemas con base en sus juegos, en las compras que hacen, en las actividades del mercado, etc. Cada alumno puede escribir en su cuaderno 2 ó más problemas cuya solución requiera de una o varias operaciones entre números naturales, luego los analizarán en pequeños grupos haciendo las correcciones cuando sea necesario.

Se puede aprovechar esta actividad para que los alumnos elaboren un presupuesto familiar, para lo cual es necesario tener en cuenta lo que gana mensualmente la familia y los gastos que necesita hacer para atender a sus necesidades tales como vivienda, alimentación, salud, educación, vestido, recreación, etc.

Como modelo de elaboración de un presupuesto, el alumno puede suponer el caso de una familia formada por cinco personas; de las cuales dos trabajan con unos salarios de $10000 y $12000.

Se puede sugerir una presentación de los datos como la siguiente:

PRESUPUESTO FAMILIAR		
MES: ______________ AÑO: __________		
	Ingresos recibidos	Gastos realizados
Salario del padre	12000	
Salario de la madre	10000	
Alimentación		9000
Educación		2000
Salud		2000
Vestuario		3000
Recreación		1000
Arriendo		5000
TOTALES	22000	22000

Cálculo de la alimentación:
30 días $ 300 diarios 30 x 300 = 9000

OBJETIVOS ESPECIFICOS

12 Reconocer la potenciación como una operación entre números naturales y aplicar algunas de sus propiedades.

13 Efectuar algunas operaciones entre potencias.

14 Resolver y formular problemas que requieran de la potenciación y de sus propiedades.

INDICADORES DE EVALUACION

El alumno explicará en qué consiste la potenciación y aplicará la propiedad distributiva en la resolución de ejercicios orales y escritos.

Dadas algunas operaciones indicadas entre potencias el alumno dará el resultado mediante un natural o mediante otra potencia indicada.

El alumno resolverá y formulará problemas en los cuales se emplee la potenciación.

CONTENIDOS BASICOS

La potenciación es otra operación entre números naturales que transforma una pareja de números en otro número natural llamado potencia.

De la misma manera como la multiplicación por 2 u otro natural mayor que 2, se considera como una adición repetida, la potenciación por 2 o más se puede considerar como una multiplicación repetida.

Ejemplo: $(3, 2) \longrightarrow 3 \nearrow 2 = 3^2 = 3 \times 3 = 9$

3 es la base; 2 es el exponente; 9 es la potencia.

3^2 es la potencia indicada.

El conjunto de los números naturales es cerrado para la potenciación.

Esta operación:

— No es conmutativa: $3^2 = 9$ pero $2^3 = 8$

— No es asociativa: $(3^2)^3 = 9^3 = 729$ pero $(3^2)^3 = 3^8 = 19683$

— Es modulativa a derecha: $3^1 = 3$ pero $1^3 = 1$.

- No es distributiva con respecto a la adición ni a la sustracción.

  $(2 + 3)^2 = 5^2 \cong 25$ pero

  $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

- Es distributiva por la derecha respecto a la multiplicación y a la división.

  $(2 \times 3)^2 = 2^2 \times 3^2$ pero $2^{2 \times 3} \neq 2^2 \times 2^3$

  $(6 \div 3)^2 = 6^2 \div 3^2$ pero $2^{6 \div 3} \neq 2^6 \div 2^3$

Al realizar operaciones entre potencias se presentan diferentes casos:

- Potencias de distinta base y distinto exponente.
- Potencias de la misma base y distinto exponente.
- Potencias de distinta base e igual exponente.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

A partir de los conocimientos que los alumnos construyeron en 5o. grado acerca de la potenciación y de sus dos operaciones inversas mediante la resolución de ejercicios, se espera que afiancen el concepto de operación y el carácter esencialmente activo de ella.

Mediante la operación potenciación, una pareja de números se transforma en un solo número llamado potencia.

La denominación de la potencia está dada por el exponente. Así decimos que 9 es la segunda potencia de 3 porque $3^2 = 9$, o que 64 es la sexta potencia de 2 o la segunda potencia de 8 porque $2^6 = 64$ y $8^2 = 64$.

El otro número que no es el exponente, se llama base.

La base indica **de** quien es potencia el resultado.

9 es potencia **de** 3, 64 de 2, de 4 y de 8, etc.

En 5o. grado no se vió si la potenciación cumplía las propiedades de la multiplicación, por eso en este grado se propone hacer esta comparación para que sean los mismos alumnos, posiblemente en grupos de trabajo, quienes lleguen a las conclusiones, brevemente expresadas en los contenidos básicos. Es importante insistir en la aplicación de la distributiva por la derecha, con respecto a la multiplicación y a la división ya que esta propiedad permite obtener fácilmente el resultado de multiplicar (o dividir) potencias que tienen distinta base e igual exponente.

En cuanto a las operaciones entre potencias el procedimiento más general para hallar el resultado de una operación consiste en calcular cada potencia indicada y efectuar luego la operación propuesta. Este procedimiento se utiliza comúnmente cuando las potencias que intervienen en las operaciones tienen distinta base y distinto exponente.

Cuando las potencias que intervienen en una operación tienen algún parecido ya sea porque tiene la misma base o el mismo exponente, los mismos alumnos llegan a encontrar procedimientos que facilitan el cálculo de la potencia resultado.

En cuanto a la resolución y formulación de problemas, éstos pueden tratarse en el momento en que el profesor lo considere más oportuno.

Pueden resolver algunos ejercicios como los siguientes:

- ¿Cuantos cuadros tiene el tablero de ajedrez?
- Sabiendo que una gruesa es una docena de docenas. ¿Cuántos paquetes de cigarrillos hay en una gruesa de cigarrillos?
- Decir si las igualdades siguientes son verdaderas o falsas. En cada caso justificar la respuesta.

  a) $(3 + 2)^2 = 3^2 + 2^2$

  b) $(8 \times 5)^3 = 8^3 \times 5^3$

  c) $(4 - 3)^3 \neq 4^3 - 3^3$

  d) $(3 \times 9)^5 = (27)^5$

  e) $3^2 + 5^2 = (3 + 5)^2$

  f) $3^4 + 3^8 = 3^{4+8}$

  g) $5^4 - 2^4 = (5 - 2)^4$

  h) $6^7 - 6^2 = (6)^{7-2}$

- Hallar el resultado de $8^3 \div 8^3$

  Pueden resolverlo así: $8^3 \div 8^3 = (\frac{8}{8})^3$

¿por qué?

$\frac{8}{8} = 1$ $\qquad$ $1^3 = 1$

o así: $8^3 \div 8^3 = 8^{3-3} = 8^0$ ¿por qué?

o también así: $8^3 \div 8^3 = 512 \div 512 = 1$

¿por qué?

De los resultados anteriores y con muchos otros ejercicios se puede concluir, a este nivel, que todo número natural diferente de cero elevado a un exponente cero es igual a 1.

Sí $a \neq 0$, $a^0 = 1$

OBJETIVO ESPECIFICO

15 Reconocer la radicación y la logaritmación como operaciones inversas de la potenciación.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno mostrará mediante ejemplos que la radicación y la logaritmación son las operaciones inversas de la potenciación.

CONTENIDOS BASICOS

La potenciación es otra operación entre números naturales que transforma una pareja de números llamados base y exponente en otro número llamado potencia.

Ejemplo:

exponente

$5^3 = \square \longleftarrow$ potencia

base, $5^3 = 125$

Mediante la potenciación hemos hallado el resultado de 5^3, que es 125; es decir hemos hallado la potencia conociendo la base y el exponente.

La potenciación tiene dos operaciones inversas: la radicación y la logaritmación.

- Si se desconoce la base y se conocen la potencia y el exponente, dicha base se halla mediante la radicación. Para indicar esta operación se utiliza el signo llamado radical. $\sqrt{\ }$

  Bajo el radical se coloca la potencia que en esta operación se llama **cantidad subradical**. En la parte superior izquierda del radical se coloca el exponente que en esta operación se llama **índice**.

  El resultado, que corresponde a la base en la potenciación, en esta operación se llama **raíz**.

  Cuando el índice es 2, se dice que se está hallando la raíz cuadrada o la raíz segunda.

  Cuando el índice es 3, se dice que se está hallando la raíz cúbica o la raíz tercera.

  Si el índice es 4, 5, etc., se dice que se está hallando la raíz cuarta, la raíz quinta, etc., respectivamente.

Así en $\square^3 = 125$

Hay que buscar cuál es el número que elevado al cubo da como resultado 125, lo que indicamos así:

$$\sqrt[3]{125} = \square$$

y decimos que se está hallando la raíz cúbica de 125.

índice

radical $\sqrt[3]{125} = 3 \longleftarrow$ raíz cúbica

cantidad subradical

La raíz cúbica de 125 es 3.

- Si se desconoce el exponente y se conocen la base y la potencia, dicho exponente se halla mediante la logaritmación.

  Para indicar esta operación se utiliza la expresión Log, enseguida más abajo y en un tipo de letra más pequeño se escribe la base y al mismo nivel que se escribió log, se escribe la potencia. El resultado que corresponde al exponente en la potenciación, en esta operación se llama **logaritmo**.

  Así en $5^{\square} = 125$, hay que buscar cuál es el exponente al cual tenemos que elevar a 5 para obtener 125, lo que indicamos así:

$$\mathrm{Log}_5\ 125 = \square$$

Y decimos que se está hallando el logaritmo en base 5 de 125, que es 3.

$$\mathrm{Log}_5\ 125 = 3$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es posible que algún alumno pregunte por qué la potenciación tiene dos operaciones inversas, mientras que la adición y la multiplicación sólo tiene una: a ellos se les puede dar una explicación como la siguiente:

Como la adición es una operación conmutativa se tiene que $5 + 4 = 4 + 5$

Por esta propiedad se tiene que si se desconoce uno de los sumandos: $5 + \square = 9$ (lo que también puede expresarse como $\square + 5 = 9$), para hallarlo se recurre a la sustracción, que es la operación inversa de la adición. En los dos casos se obtiene $\square = 9 - 5$, o sea que $\square = 4$.

Lo mismo sucede con la multiplicación; por ser una operación conmutativa, se tiene que $4 \times 5 = 5 \times 4$. Al desconocer uno de los factores, esto es $\square \times 5 = 20$, (lo que también puede expresarse como $5 \times \square = 20$), para hallarlo se recurre a la división, que es la operación inversa de la multiplicación. En los dos casos se obtiene

$\square = 20 \div 5$ o sea $\square = 4$.

Esto mismo no sucede con la potenciación, pues si se cambia el orden se obtienen resultados diferentes.

$$2^3 = 8 \qquad 3^2 = 9 \qquad 2^3 \neq 3^2$$

La potenciación es una operación que no es conmutativa. Por lo tanto si se desconoce un término en la potenciación, hay que mirar qué término es el que falta, porque si se desconoce la base, como en $\square^2 = 9$ para hallarla hay que recurrir a la radicación, que es una de las operaciones inversas de la potenciación, así: $\square = \sqrt[2]{9}$.

Si se desconoce el exponente como en $3^{\square} = 9$ para hallarlo hay que recurrir a la logaritmación que es la otra operación inversa de la potenciación, así: $\square = \log_3 9 = 2$.

En resumen, se tiene, que debido a que la potenciación no es conmutativa, tiene dos operaciones inversas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS		INDICADORES DE EVALUACION
16	Obtener la raíz cuadrada de números que son cuadrados perfectos y la raíz cúbica de números que son cubos perfectos.	Dados algunos números que sean cuadrados perfectos el alumno hallará la raíz cuadrada de cada uno y dados algunos que sean cubos perfectos le hallará la raíz cúbica a cada uno.
17	Reconocer algunas propiedades de la radicación.	El alumno aplicará la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación y la división en la resolución de ejercicios orales y escritos.
18	Hallar un procedimiento para verificar si un número tiene raíz exacta y si la tiene obtenerla.	El alumno hallará la raíz cuadrada de algunos números.
19	Resolver y formular problemas que requieran de la radicación.	El alumno formulará un problema que se resuelva con la radicación y lo resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

La raíz cuadrada perfecta o exacta de un número natural a, es otro número natural b, que elevado al cuadrado produce el natural a.

$$\sqrt{a} = b \text{ si } b^2 = a$$

Así: $\sqrt{16} = 4$ pues $4^2 = 16$

La raíz cúbica exacta o perfecta de un número natural a es otro número natural b, que elevado al cubo produce el natural a.

$$\sqrt[3]{a} = b \text{ si } b^3 = a$$

Así: $\sqrt[3]{64} = 4$ pues $4^3 = 64$

La radicación es una operación distributiva con respecto a la multiplicación y a la división. Así:

$$\sqrt[p]{m.n} = \sqrt[p]{m} \,.\, \sqrt[p]{n}$$

$$\sqrt[p]{\frac{m}{n}} = \frac{\sqrt[p]{m}}{\sqrt[p]{n}}$$

Ejemplos: $\sqrt{4.16} = \sqrt{4} \,.\, \sqrt{16} = 2 \,.\, 4 = 8$

$\sqrt{64} = 8$

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4} = 2$$

La radicación no es distributiva con respecto a la adición ni a la sustracción.

$$\sqrt{4 + 16} \neq \sqrt{4} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25 - 16} \neq \sqrt{25} - \sqrt{16}$$

Las propiedades mencionadas anteriormente facilitan el cálculo de la raíz de un producto y de un cociente; evitan cometer errores para calcular la raíz de una suma o de una diferencia.

Otra propiedad importante para facilitar el cálculo de la raíz de una potencia indicada, cuando el índice es un divisor del exponente se puede expresar así:

$$\sqrt[p]{m^p} = m; \qquad \sqrt[p]{m^{pq}} = m^q$$

Es conveniente orientar a los alumnos para que descubran algunas propiedades de esta operación, así como los resultados de algunas operaciones entre potencias.

A veces es más importante que cuando encuentran alguna propiedad la expresen con sus propias palabras antes de llegar a expresiones matemáticas, lo importante es que la entiendan.

Por ejemplo para la propiedad que $\sqrt[p]{m^p} = m$ pueden expresarla diciendo que cuando a un número se le va a elevar a un exponente cualquiera y luego se le va a sacar una raíz que es igual al exponente, no hay necesidad de efectuar estas operaciones, pues el resultado es el mismo número.

Es importante insistir en la aplicación de la distributiva con respecto a la multiplicación y a la división pues mediante esta propiedad se obtiene fácilmente el resultado de multiplicar o dividir radicales que tienen igual el índice y diferente la cantidad subradical.

Pueden resolver algunos ejercicios como los siguientes:

De cada una de las siguientes proposiciones decir si es falsa o verdadera y por qué?

a) $\sqrt{25 + 16} \neq \sqrt{25} + \sqrt{16}$

b) $\sqrt{5^2} = 5$

c) $\sqrt[3]{3^9} = 3^6$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}} \neq \sqrt[3]{\dfrac{64}{8}}$

e) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{b^3}$

f) $\sqrt[3]{27 \times 81} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{81}$

g) $\sqrt{4 \times 64} \neq \sqrt{4} . \sqrt{64}$

De la práctica de efectuar operaciones con radicales y de la aplicación de las propiedades de esta operación, es posible que los alumnos hallen un procedimiento para verificar si un número tiene raíz exacta y si la tiene cómo hallarla. Sugerimos el siguiente método.

Hallar $\sqrt[4]{81}$

Descomponemos en factores primos la cantidad subradical.

$$\begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad 81 = 3^4$$

Como aplicación de la propiedad, $\sqrt[p]{m^p} = m$

se tiene que $\sqrt[4]{3^4} = 3$

Así que $\sqrt[4]{81} = 3$

Hallar $\sqrt{256}$

$$\begin{array}{r|l} 256 & 2 \\ 128 & 2 \\ 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad 256 = 2^8$$

Como vamos a sacar raíz cuadrada expresamos a 2^8 como $(2^4)^2$ ¿en virtud de qué propiedad de la potenciación?

Así se tiene $\sqrt[2]{(2^4)^2} = 2^4$ en virtud de la propiedad

$$\sqrt[p]{m^p} = m$$

Por tanto $\sqrt{256} = 2^4 = 16$

Hallar $\sqrt{5832}$

$$5832 = 2^3 . 3^6$$

$$\begin{array}{r|l} 5832 & 2 \\ 2916 & 2 \\ 1458 & 2 \\ 729 & 3 \\ 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \sqrt[3]{2^3 . 3^6} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3^6}$$

Mediante la propiedad distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación,

$$\sqrt[3]{2^3}\ \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{2^3}\ \sqrt[3]{(3^2)^3} = 2 . 3^2 = 2 . 9 = 18$$

¿mediante qué propiedades se llegó al resultado final?

Para la formulación y solución de problemas conviene que los alumnos primero resuelvan algunos ejemplos propuestos por el profesor y luego ellos formulen sus propios problemas y los resuelvan.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
20 Obtener los logaritmos de algunos números que sean potencias exactas.	Dados algunos números que sean potencias exactas de una base dada, el alumno hallará el logaritmo de cada uno de ellos en esa base.
21 Estimar los logaritmos en base diez de algunos números que no sean potencias de diez.	Dado un número que no sea potencia de diez, el alumno dirá entre qué números está el logaritmo en base diez de dicho número.
22 Reconocer algunas propiedades que cumple la logaritmación y aplicarlas. **(Opcional).**	El alumno aplicará en cálculos sencillos algunas de las propiedades de la logaritmación.

CONTENIDOS BASICOS

La logaritmación es una de las operaciones inversas de la potenciación que tiene por objeto hallar el exponente al cual hay que elevar la base para obtener la potencia.

Así de la igualdad $3^2 = 9$ se dice que el exponente al cual hay que elevar a 3 para obtener 9 es 2; luego el logaritmo en base 3 de 9 es 2, lo que se simboliza.

$$\text{Log}_3\ 9 = 2$$

Cuando la base de un logaritmo es 10, se suele omitir el 10 así: $\text{Log}_{10}\ 100 = 2$.

Se escribe $\text{Log}\ 100 = 2$

La logaritmación no es distributiva con respecto a la multiplicación ni a la división, ni tampoco lo es con respecto a la adición y a la sustracción.

La logaritmación cumple propiedades como las siguientes:

1) $\text{Log}_m A \cdot B = \text{Log}_m A + \text{Log}_m B$ (logaritmo de un producto).

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

2) $\text{Log}_m \dfrac{A}{B} = \text{Log}_m A - \text{Log}_m B$ (logaritmo de un cociente).

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el logaritmo del denominador.

3) $\text{Log}_m m = 1$

4) $\text{Log}_m A^n = n \log_m A$ (logaritmo de una potencia)

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base (de la potencia).

5) $\text{Log}_m 1 = 0$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se puede comenzar hallando el exponente desconocido en un ejercicio de potenciación para que los alumnos vean la logaritmación como una operación muy sencilla y no se asusten con la palabra "logaritmo".

Pueden ser ejercicios como estos:

Cuál es el número que va en el cuadrito?

$8^{\square} = 512$ $\qquad$ $6^{\square} = 36$

$3^{\square} = 81$

Posteriormente si pueden calcular el logaritmo con ejercicios como:

$\text{Log}_3\ 27 = \square$ $\qquad$ $\text{Log}_9\ 729 = \square$

$\text{Log}_4\ 64 = \square$ $\qquad$ $\text{Log}_5\ 625 = \square$

También pueden formar igualdades a partir de otra igualdad dada, empleando la potenciación y la logaritmación.

Ejemplos: De la igualdad $5^3 = 125$ se deduce la igualdad $\text{Log}_5\ 125 = 3$

De la igualdad $\text{Log}_6\ 1296 = 4$ se deduce la igualdad $6^4 = 1296$

Para estimar los logaritmos en base diez de algunos números que no son potencias de diez, pueden hacer un razonamiento como el siguiente:

$\text{Log } 1 = 0$

El logaritmo en base diez de un número entre 1 y 10, está entre 0 y 1.

$\text{Log } 10 = 1$

El logaritmo en base diez de un número entre 10 y 100, está comprendido en 1 y 2

$\text{Log } 100 = 2$

El logaritmo en base diez de un número entre 100 y 1000, está comprendido entre 2 y 3

$\text{Log } 1000 = 3$

$\text{Log } 10000 = 4$, etc. . .

Así por ejemplo el logaritmo en base diez de 95 está entre 1 y 2, se puede decir que es 2 aproximadamente.

$$\text{Log } 95 \approx 2$$

Si el docente observa que los alumnos pueden lograr el objetivo 22, se recomienda orientarlos para que descubran las propiedades, con base en los conocimientos que tienen acerca de la potenciación, y que las expresen en su propio lenguaje. No es necesario llegar a las expresiones matemáticas que resumen estas propiedades.

Ejemplo: Explicar, con base en los conocimientos que posee sobre la potenciación, el por qué de las propiedades de la logaritmación.

$$5^2 \times 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$$

$$\text{Log}_5 \ (5^2 \times 5^4) = \log_5 5^2 + \log_5 5^4 = 2 + 4 = 6$$

De cada una de las siguientes proposiciones decir si es falsa o verdadera.

$\text{Log}_5 625 = \log_5 5 + \log_5 125$

$\text{Log}_3 \dfrac{729}{81} = \dfrac{\text{Log}_3 729}{\text{Log}_3 81}$

— $\text{Log}_5 5 = 0$

— $\text{Log}_6 1 = 1$

— $\text{Log}_3 9^{10} = 10 \log_3 9$

— $\text{Log}_8 512^4 = (\text{Log}_8 512)^4$

— $\text{Log}_{12} \dfrac{144}{12} = \text{Log}_{12} 144 - \log_{12} 12$

Calcular $\text{Log}_5 (125 \times 25) =$

$\text{Log}_9 \dfrac{6561}{81} =$

$\text{Log}_{11} 11 =$

$\text{Log}_7 49^{10} =$

OBJETIVO ESPECIFICO

23 Reconocer relaciones binarias que aparecen en el lenguaje usual y en el lenguaje matemático.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno [illegible]

CONTENIDOS BASICOS

No es posible definir lo que es una relación en términos de conceptos más fundamentales, es posible encontrar algunos sinónimos que permiten dar mayor claridad sobre este concepto.

Los sinónimos más usuales de relación son: referencia, respecto, nexo, lazo, vínculo, conexión.

Existen relaciones familiares, relaciones sentimentales, relaciones de trabajo, relaciones de orden, etc.

Estas relaciones aparecen en el lenguaje usual y en el lenguaje matemático es expresiones como las siguientes:

Juan es el padre de Pablo
Antonio es amigo de María
Luis es jefe de Diego
Ana es mayor que Luz
2 es divisor de 4, etc.

Estas relaciones se denominan binarias porque se dan o se establecen entre dos elementos.

En el ejemplo anterior; la relación "es padre de" se da entre Juan y Pablo; la relación "es amigo de" se encuentra entre Antonio y María; la relación "es jefe de" se establece entre Luis y Diego; la relación "es mayor que" se establece entre Ana y Luz y la relación "es divisor de" se establece entre 2 y 4.

Existen también las llamadas relaciones unarias, más conocidas como predicados. Estas relaciones aparecen en expresiones como las siguientes:

Pepe es un caballero
11 es primo
3 es impar

Este y otros tipos de relaciones (ternarias, cuaternarias, etc.) no son objeto de estudio en este grado.

Usualmente el esquema de lectura de una relación binaria es el siguiente:

" ... es (el, la, un, una) ________ de (que) ... "

En los dos puestos donde están los puntos (...) están los elementos que se relacionan y en la (____) el nombre de la relación.

Ejemplo: $\underset{\dots}{2}$ es (un) divisor de $\underset{\dots}{4}$

Algunas relaciones se pueden representar mediante símbolos relacionales propios de las matemáticas, tales como:

$<$: . . . es (estrictamente) menor que . . .

$\geqslant$: . . . es mayor o igual que . . .

$\subseteq$: . . . es subconjunto de (o es igual a) . . .

$\parallel$: . . . es paralela a . . .

Es importante no confundir la relación con el símbolo que la representa. Así la relación que se establece entre dos símbolos que representan a un mismo objeto, es la relación de igualdad; el símbolo con que se representa es el siguiente: =

Una misma relación puede representarse de varias formas diferentes:

- Con una palabra abstracta como divisibilidad, igualdad, etc.
- Con una o varias palabras del esquema de lectura.
- Con un símbolo matemático

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente los alumnos identifican cuando, en el lenguaje usual, se está expresando una relación. En las frases relacionales conviene que identifiquen los elementos que se están relacionando, el esquema de lectura de la relación y el nombre de la relación.

En las frases donde aparezca una relación matemática conviene además, que las escriban utilizando los símbolos convenidos para representarlas; sólo se hará referencia a aquellos símbolos que algunos ya conocen o utilizan con mucha frecuencia.

Ejemplo: Tres es mayor que uno: $3 > 1$

También puede darse la simbolización de una frase relacional para que el alumno la exprese según el esquema de lectura.

Ejemplo: $n \geqslant o$; el número n es mayor o igual a cero.

$A \subset B$; A está contenido (estrictamente) en B.

A es subconjunto (propio) de B.

Para reforzar la diferencia entre un concepto y la simbolización del mismo, el profesor puede recordarles la diferencia que existe entre un número y el numeral (o símbolo) que lo representa.

Se pueden hacer algunos ejercicios en donde, dadas unas proposiciones, el alumno diga si se refieren al número o al numeral.

Ejemplo: dos es par; se refiere al número.

el dos, en base diez, tiene una cifra; se refiere al numeral.

Otros ejercicios que sirven para establecer la diferencia que hay entre un objeto (denotado) y el símbolo (denotante) que se utiliza para representarlo, pueden ser como los siguientes:

- Bogotá es la capital de Colombia. En este caso la frase se está refiriendo a la ciudad.
- Bogotá se escribe con seis letras. En este caso la frase se está refiriendo a la palabra (símbolo) con la cual represento la ciudad.

De la misma forma se vuelve a hacer notar la diferencia entre una relación y el símbolo que se utiliza para representarla.

OBJETIVO ESPECIFICO

24 Analizar las relaciones "... es mayor que ..." y "... es menor que ..." en el conjunto de los números naturales.

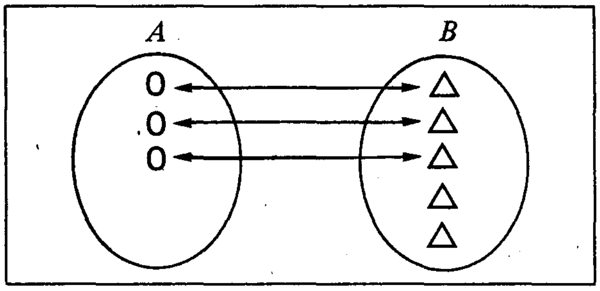
INDICADOR DE EVALUACION

Dados dos números naturales los alumnos establecerán las relaciones "... es mayor que ..." ó "... es menor que ...".

CONTENIDOS BASICOS

Un número natural n es menor que otro número natural m si n es cardinal de una colección menos numerosa que la colección de la que es cardinal m.

Ejemplo:



Observamos que B es más numeroso que A, es decir en B hay más elementos que en A. También es lo mismo decir que A es menos numeroso que B, es decir que en A hay menos elementos que en B. Como el cardinal de A es 3 y el cardinal de B es 5 tenemos que las relaciones entre los números son:

5 es mayor que 3   3 es menor que 5

Dados dos números naturales diferentes siempre podemos decir cuál es menor y cuál es mayor, es decir podemos establecer las relaciones " ... es mayor que ..." y " ... es menor que ... entre ellos dos:

Ejemplos: Dados el 3 y el 5 podemos decir:

"5 **es mayor que** 3" y

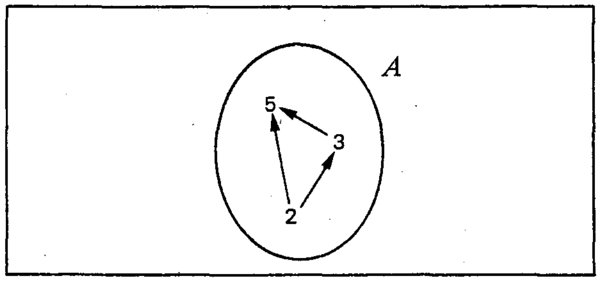
"3 **es menor que** 5"

En el esquema de lectura siempre se lee primero la imagen: en la relación " ... es mayor que ... " se lee primero el mayor, en el ejemplo, 5; en la relación " ... es menor que ... " se lee primero el menor, en el ejemplo, 3.

Para representar la relación en un diagrama sagital (o diagrama de flechas), la flecha que une los elementos relacionados siempre debe apuntar a la imagen.

En el caso de la relación " ... es mayor que ... " siempre debe apuntar al mayor.

Ejemplo:



En este diagrama está representada la relación " ... es mayor que ... " en el conjunto A = { 2, 3, 5 }

Las parejas que pertenecen a esta relación son:

(2, 3) : 3 es mayor que 2

(3, 5) : 5 es mayor que 3

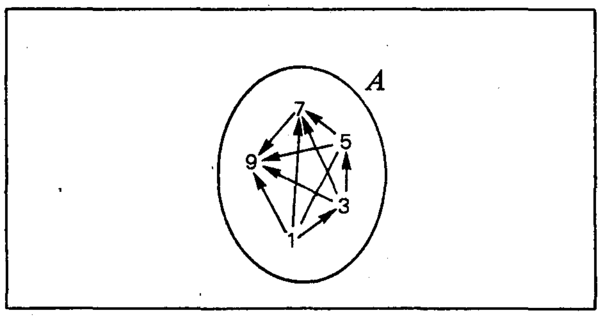
(2, 5) : 5 es mayor que 2

Los elementos de las parejas van en orden contrario al del esquema de lectura.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El profesor podrá proponer a los alumnos algunos ejercicios como los siguientes:

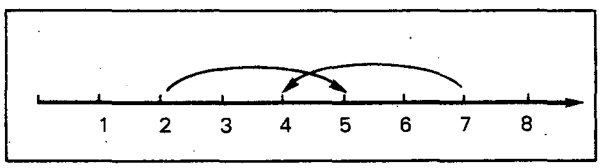
- Representar en un diagrama sagital la relación " ... es mayor que ... " en el conjunto A = { 1, 3, 5, 7, 9 } y hallar el conjunto de parejas que pertenecen a la relación.



R = { (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9), (3, 5), (3,7), (3,9), (5, 7), (5,9), (7,9) }

A continuación hará un ejercicio similar pero con la relación " ... es menor que ... " en la recta numérica.

Ejemplo: 5 es mayor que 2 , 4 es menor que 7



Observar cómo dados dos números naturales el menor está a la izquierda del mayor en la recta numérica o lo que es lo mismo el mayor está a la derecha del menor.

En el diagrama sagital de estas dos relaciones los alumnos pueden recordar algunas propiedades, que desde cuarto grado, observaron en dichos diagramas:

- No existe un par de flechas de ida y regreso, es decir los caminos son de una sola vía. Esta es la propiedad antisimétrica.
- Siempre que se pueda transitar por dos flechas seguidas, hay una flecha directa. Esta es la propiedad transitiva.

Cada vez que se presente la ocasión, conviene que el profesor insista en la diferencia entre las propiedades de las relaciones y las de las operaciones pues en más de una ocasión hemos observado falta de claridad en esto.

OBJETIVO ESPECIFICO

25 Analizar las relaciones " ... es múltiplo de ... " y " ... es divisor de ... " en los números naturales.

INDICADOR DE EVALUACION

Dado un conjunto finito de naturales el alumno establecerá en él las relaciones "... es múltiplo de..." y "...es divisor de"...".

CONTENIDOS BASICOS

Un número **a** es múltiplo de otro **b**, si se puede expresar como el producto de **b** por un número natural **n**. Es decir **a = b x n**.

Se dice que **b** es un divisor de **a**, si al dividir **a** por **b** el cociente es un número natural **n** y el residuo es cero. O sea **a ÷ b = n**; **n** también es un divisor de **a**.

El conjunto de los múltiplos de un número se obtiene al multiplicar dicho número por los números naturales, excluído el cero. Como el conjunto de los números naturales es infinito, la lista de los múltiplos de un número es interminable.

El conjunto de los divisores de un número está formado por todos sus factores y tiene un número finito de elementos.

El conjunto de los múltiplos de b se simboliza por M b y el de los divisores por D b.

Ejemplos: M 6 = { 6, 12, 18, 24, 30, ... }

D 6 = { 1, 2, 3, 6 }

Las relaciones " ... es múltiplo de ... " y " ... es divisor de ... " pueden estudiarse simultáneamente puesto que una de ellas es la inversa de la otra. Para ello se tendrá en cuenta:

a) Las **proposiciones** que resultan cuando en el esquema de lectura de la relación se reemplazan los puntos suspensivos por números tales que la proposición que resulte sea verdadera.

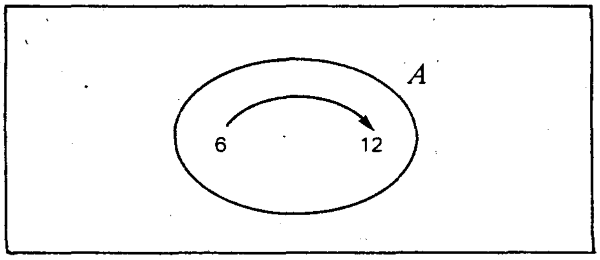
Ejemplo: " 12 es múltiplo de 6 " (1)

Si se intercambian los argumentos, es necesario cambiar la relación para obtener otra proposición verdadera, así:

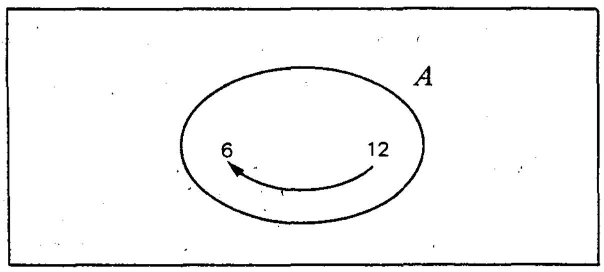
" 6 es divisor de 12 " (2)

b) Las **parejas** de la relación; en el esquema de lectura se lee primero la imagen, segunda componente de la pareja ordenada. Así de la proposición (1) se obtiene la pareja (6, 12), de la proposición (2) se obtiene la pareja (12, 6).

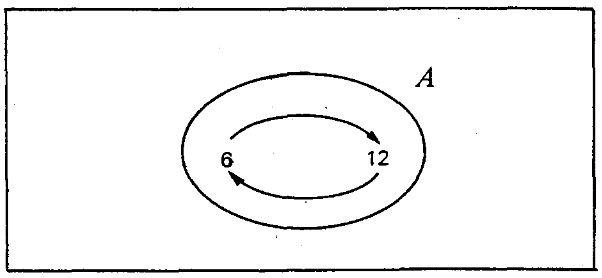
c) El **diagrama sagital.** Si en el conjunto A = {12, 6} se considera la relación " ... es múltiplo de ... " la flecha indicará al múltiplo, así:



Si se considera la relación " ... es divisor de ... ", la flecha señalará al divisor, así:



Un solo diagrama para las dos relaciones, sería.



SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En la Básica Primaria se estudiaron estas dos relaciones. Desde el segundo grado se empezó por identificar múltiplos estrictos y divisores estrictos de algunos números.

Se consideran múltiplos estrictos de un número dado a todos los múltiplos mayores que él. Divisores estrictos de un número dado son todos sus divisores diferentes del mismo número.

De estas dos relaciones se construyeron los diagramas sagitales correspondientes y se reconocieron, empíricamente, a partir de los diagramas las propiedades antisimétrica y transitiva.

Para esta actividad el profesor podrá dividir el tablero en dos columnas y asignarle una a la relación " ... es múltiplo de ..." y la otra a la relación " ... es divisor de ...". Los alumnos harán lo mismo en una hoja de su cuaderno.

Los alumnos darán ejemplos de parejas de números tales que la segunda componente sea un múltiplo de la primera y construirán la proposición correspondiente.

Ejemplos: (5, 30) " 30 es múltiplo de 5"

El profesor formulará preguntas similares para la relación " ... es divisor de ..." y otras que lleven a los alumnos a elaborar un cuadro semejante a:

" . . . es múltiplo de . . ."	**". . . es divisor de . . ."**
30 es múltiplo de 5	5 es divisor de 30
5 x 6 = 30	30 ÷ 5 = 6
	5 es factor de 30
$5 \rightarrow 30$	$5 \leftarrow 30$
(5, 30)	(30, 5)

La relación ". . . es múltiplo de . . ." es la inversa de la relación ". . . es divisor de . . ."

Si a es múltiplo de b entonces b es divisor o factor de a.

(b, a)

$b \rightleftarrows a$

(a, b)

Otras relaciones como: " ... es potencia exacta de ..." y sus dos inversas también se pueden estudiar.

En cada una de las relaciones se analiza si tienen o no las propiedades antisimétrica y transitiva. Conviene dar ejemplos de relaciones que no tengan las propiedades anteriores pues esta comparación ayuda a construir mejor los conceptos.

OBJETIVO ESPECIFICO

26 Reconocer el esquema de lectura de las operaciones binarias.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno explicará oralmente dos esquemas de lectura de las operaciones binarias.

CONTENIDOS BASICOS

Usualmente las operaciones binarias se expresan con alguno de los esquemas siguientes:

"la, el ______________ de ... y ..."

En los dos puestos donde están los puntos (...) se colocan los signos que representan los elementos con los cuales se va a efectuar la operación; y en la raya (________) se coloca el nombre del resultado de la operación.

Ejemplos: " la suma de 2 y 3 "

" el producto de 5 y 9 "

" la unión de A y B "

El esquema se podría abreviar así: " ...____________... "

En este caso también se colocan los símbolos que representan los elementos con los cuales se va a efectuar la operación en los dos puestos donde están los puntos (...), y en la raya una expresión que indica cuál es la operación que se va a efectuar.

Ejemplos: " 2 más 3 "

" 5 por 9 "

" A unión B "

Estas expresiones también se suelen representar así:

" 2 + 3 "	" 2 sumado con 3 "
" 5 x 9 "	" 5 multiplicado por 9 "
" A ∪ B "	" A unido con B "

Todas las expresiones anteriores, tanto las del esquema largo como las del esquema abreviado están representando el resultado que se obtiene de efectuar una operación entre dos elementos de un conjunto. A la operación la representamos sobre la raya y a los elementos los representamos sobre los puntos (...).

Ejemplo: La suma de 2 y 3; 2 más 3

2 sumado con 3; 2 + 3

Son todas expresiones que representan al cinco (5), que es el resultado que se obtiene al sumar el dos (2) con el tres (3).

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para reconocer el orden de lectura de las operaciones binarias podrán hacer un ejercicio similar al que se le propone para reconocer el esquema de lectura de las relaciones binarias. Esto es, recoger un número suficiente de expresiones que aparecen en el lenguaje matemático conocido por los alumnos y que están representando una operación binaria.

Compara las diferentes expresiones observando qué tienen en común y en qué se diferencian unas de otras, para finalmente, con la ayuda del profesor, reconocer el esquema de lectura.

OBJETIVO ESPECIFICO

27 Distinguir entre el resultado de la operación y la operación misma.

INDICADOR DE EVALUACION

Dadas tres operaciones el alumno hará la distinción entre operación y el resultado de la misma.

CONTENIDOS BASICOS

Hay ciertas palabras del lenguaje que se utilizan en forma ambigua, es decir, una misma palabra se utiliza para denotar objetos diferentes.

Ejemplo: La palabra "suma" se utiliza para denotar el resultado de una adición y también se utiliza como sinónimo de la operación misma de adición, lo cual nos puede hacer pensar que el resultado que se produce al efectuar una operación y la operación que se efectúa son lo mismo.

Cuando tenemos una expresión como " 2 + 4 " estamos representando el resultado de efectuar una operación, el signo " + " nos indica la operación que hay que efectuar para obtener este resultado, en este caso **adicionar** el 2 con el 4 para obtener el 6. La operación es la **adición** y el resultado es la **suma** (en este caso, el 6).

Si la operación es la **multiplicación** al resultado se le llama **producto,** etc,

Podemos resumir en un cuadro, así:

OPERACION	RESULTADO
Adición	Suma
Sustracción	Diferencia
Multiplicación	Producto
División	Cociente

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El profesor propondrá algunos ejercicios como los siguientes:

Llenar el espacio en blanco para que las siguientes proposiciones abiertas se conviertan en proposiciones cerradas verdaderas.

$3 + 2 = \square$ $\quad 3 \square 2 = 6$ $\quad 7 - 1 = \square$

$7 \square 1 = 6$ $\quad 2 \times 2 = \square$ $\quad 2 \square 2 = 1$

Por medio de ejercicios como éstos el profesor podrá hacer ver a los alumnos la diferencia que hay entre el resultado de una operación y la operación misma.

También se podrán hacer ejercicios en donde, dada una proposición acerca de una operación o de un resultado, el alumno dirá si la proposición se refiere a la operación o al resultado.

Ejemplos:

- La suma de un número par con un número impar da un número par. En este caso se refiere al resultado.
- La multiplicación se puede hacer en forma abreviada. En este caso se refiere a la operación.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
28 Reconocer la diferencia entre operación binaria y relación binaria.	Dadas algunas expresiones, el alumno dirá cuales son relaciones y cuales son operaciones.

CONTENIDOS BASICOS

Las relaciones son el reflejo de la teoría que vamos construyendo acerca de los objetos de un conjunto.

Las operaciones son el reflejo de la práctica real que hacemos sobre los objetos de un conjunto para transformarlos o para obtener nuevos objetos.

Ejemplo: Si tomo dos objetos del conjunto de naturales, como el 2 y el 4 puedo observar qué relaciones hay entre ellos y expresarlas mediante unas frases.

4 es mayor que 2

2 es menor que 4

4 es múltiplo de 2

2 es divisor de 4

Estas frases me dicen algo acerca de estos objetos: expresan las teorías que hemos desarrollado acerca de ellos.

Pero si efectúo una operación con esos mismos objetos, el 2 y el 4 obtengo otro objeto: si sumo el 2 con el 4 obtengo el 6.

Si multiplico el 2 por el 4 obtengo el 8. Si divido el 4 por el 2 obtengo el 2. Si resto 2 del 4 también obtengo el 2.

Por lo tanto las expresiones $2 + 4$, 2×4, $4 \div 2$, $4 - 2$, no son frases acerca de esos objetos, sino símbolos para representar un objeto que obtuvimos al efectuar la operación y que expresan el resultado de las prácticas que hemos hecho con ellos.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se les podrá proponer a los alumnos un ejercicio como el siguiente:

Llenar el espacio en blanco de los ejercicios impares con el símbolo de una relación, y el de los ejercicios pares con el de una operación.

1) 3 ________ 6

2) 3 ________ 6

3) A ________ B

4) A ________ B

5) 18 ________ 9

6) 18 ________ 9

Una forma de resolverlos es:

1) $3 \; \underline{\quad < \quad} \; 6$

2) $3 \; \underline{\quad + \quad} \; 6$

3) $A \; \underline{\quad \subset \quad} \; B$

4) $A \; \underline{\quad \cup \quad} \; B$

5) $18 \; \underline{\quad \rfloor \quad} \; 9$ (18 es múltiplo de 9)

6) $18 \; \underline{\quad \div \quad} \; 9$

Después de que los alumnos hayan resuelto el ejercicio, con la ayuda del profesor observarán que las expresiones que resultaron en los casos impares, donde colocaron el símbolo de una relación, son proposiciones acerca de los objetos respectivos, y que las expresiones que resultaron en los casos pares, donde colocaron el símbolo de una operación representan los objetos que se obtienen al efectuar la operación indicada.

El profesor preguntará qué es $3 + 6$, $A \cup B$, ó $18 \div 9$; y luego preguntará qué es $3 < 6$, $A \subset B$, ó $18 \rfloor 9$. Luego preguntará si es verdad que $3 + 6$, $A \cup B$ ó $18 \div 9$, para que los alumnos distingan las expresiones simbólicas que representan frases o proposiciones, de las que representan objetos.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
29 Hallar los factores primos de un número.	Dados cuatro números el alumno, hará la descomposición en factores primos de cada uno de ellos.

CONTENIDOS BASICOS

Descomponer un número en sus factores primos es transformarlo en un producto indicado de factores primos.

Ejemplo: $10 = 2 \times 5$ Los factores primos de 10 son 2 y 5

Para descomponer un número en sus factores primos se divide el número dado por el menor de sus divisores primos; el cociente se divide también por el menor de sus divisores primos y así sucesivamente con los demás cocientes, hasta hallar un cociente primo, que se dividirá por sí mismo.

Ejemplo: Descomponer en factores primos a 204.

$$\begin{array}{r|l} 204 & 2 \\ 102 & 2 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad 204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$$

o también

$$204 = 2^2 \times 3 \times 17$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Aplicando los criterios de divisibilidad hallarán los factores primos de algunos números.

Cuando los alumnos están descomponiendo, en algunos casos pueden creer que porque un número como 391 no es divisible por los números primos pequeños como 2, 3, 5, 7, 11, etc., este número es primo. En estos casos deben verificar si el número es primo o no, de la siguiente manera:

Se divide dicho número por todos los números primos menores que él y si se llega, a una división con residuo diferente de cero en la que el cociente sea igual o menor que el divisor, el número dado es primo. Si alguna de las divisiones da como residuo el cero, el número no es primo.

Ejemplo: 391 es un número primo?

Aplicando los criterios de divisibilidad, vemos que no es divisible por 2, 3, 5, 7, ni 11. Veamos si es divisible por los siguientes números primos.

$$\begin{array}{r|l} 391 & 13 \\ \hline 01 & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 391 & 17 \\ \hline 51 & 23 \\ 0 & \end{array}$$

Como esta última división tiene residuo 0, sus factores primos son: 17 y 23. Luego 391 no es primo.

Averigüemos si 191 es primo.

191 no es divisible por 2, 3, 5, 7, ni por 11. Ensayemos para 13 y 17.

$$\begin{array}{r|l} 191 & 13 \\ \hline 61 & 14 \\ 09 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 191 & 17 \\ \hline 21 & 11 \\ 4 & \end{array}$$

En esta última división, el residuo es diferente de 0 y el cociente 11 es menor que el divisor 17. Por lo tanto 191 es primo.

OBJETIVO ESPECIFICO

30 Hallar el máximo común divisor de dos números.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados dos números, el alumno hallará el máximo común divisor de ellos.

CONTENIDOS BASICOS

El mayor de los divisores comunes de dos números se denomina el máximo común divisor de dichos números.

El máximo común divisor de dos números se puede hallar de varias maneras.

a) Se halla el conjunto de los divisores comunes a los dos números (como en el objetivo anterior) y se escoge el mayor de éstos.

b) Se descomponen los números en sus factores primos

Se escogen los factores comunes elevados al menor exponente y se multiplican.

El resultado de esta multiplicación es el máximo común divisor de los dos números.

Cuando el máximo común divisor entre dos números es 1, se dice que los dos números son primos entre sí.

Inicialmente los alumnos podrán hallar el máximo común divisor de dos números identificando el mayor de los divisores comunes.

Ejemplo: Hallar el máximo común divisor (M.C.D.) de 30 y 18.

Se buscan los divisores de 30 y 18, esto puede hacerse utilizando los criterios de divisibilidad:

30 es divisible por 2 puesto que termina en 0, y por tanto es par.

30 es divisible por 3 puesto que la suma de los valores de sus cifras es 3.

30 es divisible por 5 puesto que su última cifra es 0.

30 es divisible por 2 y por 3.

30 es divisible por 10, puesto que es divisible por 2 y por 5.

30 es divisible por 15 puesto que es divisible por 3 y por 5.

Además todo número es divisible por sí mismo y por 1.

Encontrar los números por los cuales es divisible un número equivale a hallar los divisores de dicho número.

$$D\,30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

En forma similar se pueden buscar los divisores de 18.

$$D\,18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Se buscan los divisores comunes:

$$D\,30 \cap D\,18 = \{1, 2, 3, 6\}$$

El mayor de los divisores comunes es 6, entonces:

$$\text{M.C.D.}\,(30, 18) = 6$$

Antes de hallar el M.C.D. utilizando el otro método, el profesor recordará otra forma de hallar los divisores de un número. Esto es, descomponiéndolo en sus factores primos (para lo cual también se utilizan criterios de divisibilidad).

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Además de los factores primos, en este caso, 2, 3, y 5, son divisores de 30 los productos entre estos factores:

$$2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$3 \times 5 = 15$$

$$2 \times 3 \times 5 = 30$$

De esta forma podemos completar la lista de los divisores de 30, así: incluyendo el 1.

$$D\,30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \quad (1)$$

De la misma forma:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

En este caso los factores primos son: 2 y 3, y los productos son:

$$2 \times 3 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$2 \times 3 \times 3 = 18$$

$$D18 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \quad (2)$$

Ahora hallarán el M. C. D. de 18 y 30. Observando (1) y (2) podemos decir que los divisores comunes de 30 y 18 son $\{1, 2, 3, 6\}$ o sea que:

$$D\,30 \cap D\,18 = \{1, 2, 3, 6\}$$

El mayor de los divisores comunes es 6, entonces:

$$\text{M. C. D.}\,(30, 18) = 6$$

Ahora hallarán el M. C. D. de 18 y 30, utilizando el otro método.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 30 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \times 3^2 \qquad\qquad 30 = 2 \times 3 \times 5$$

Factores comunes elevados al menor exponente:

$$2 \times 3 = 6$$

El profesor orientará para que basados en el ejercicio anterior (hallar todos los divisores de un número a partir de sus factores primos) encuentren una justificación al escoger los factores comunes elevados al menor exponente. Se espera que observen que los factores que no son primos se pueden obtener como producto de los factores primos.

Harán algunos ejemplos de dos números que tengan como M. C. D. 1 para que reconozcan que son primos entre sí.

OBJETIVO ESPECIFICO

31 Hallar el mínimo común múltiplo de dos números.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados dos números el alumno, hallará el mínimo común múltiplo de ellos.

CONTENIDOS BASICOS

El mínimo común múltiplo de dos números, es el menor de los múltiplos comunes de los dos números.

Para hallar el mínimo común múltiplo (M. C. M.) de dos números, se halla el conjunto de los múltiplos de cada uno, luego se halla el conjunto de los múltiplos comunes o sea la intersección de los dos conjuntos y se selecciona el menor de los múltiplos comunes, que corresponde al M. C. M.

Ejemplo: Hallar el M. C. M. de 8 y 12.

$$M\,8 = \{8, 16, 24, 32, 40, 48, \ldots\}$$

$$M12 = \{12, 24, 36, 48, \ldots\}$$

$$M\,8 \cap M\,12 = \{24, 48, \ldots\}$$

El menor de estos múltiplos comunes es 24, o sea que:

$$M.\,C.\,M.\,(8, 12) = 24$$

Otra forma de hallar el M. C. M. de dos números es mediante los siguientes pasos:

— Descomponer en factores primos cada uno de los números.

— Seleccionar los factores comunes con su mayor exponente y los no comunes tomados una sola vez.

— Efectuar el producto de los factores seleccionados.

Ejemplo: Hallar el M. C. M. de 8 y 12.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 8 = 2^3 \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad 12 = 2^2 \times 3$$

$$M.\,C.\,M.\; 2^3 \times 3 = 24$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Harán varios ejercicios por los dos métodos para que los alumnos después elijan cual siguen utilizando.

Tomarán dos números que sean primos entre sí, y hallarán el M. C. M. para que concluyan que cuando dos números son primos entre sí, el M. C. M. de los 2 números es el producto de ellos.

Sería conveniente que los alumnos busquen alguna justificación al hecho de que para hallar el M. C. M., por descomposición en factores primos, se hallen los factores comunes elevados al mayor exponente y los no comunes tomados solo una vez.

Podrán analizarlo en un caso como el siguiente: hallar el M. C. M. de 8 y 12.

$$8 = 2^3 \qquad\qquad 12 = 2^2 \times 3$$

Si se tomara el producto de los dos números, en este caso:

$$8 \times 12 = 2^3 \times 2^2 \times 3 = 96$$

resulta un múltiplo de los dos números pero no es el menor, puesto que ésto sólo ocurre cuando los dos números son primos entre sí, y en este caso no lo son.

Observarán que 2 es factor de los dos números, de uno es factor tres veces (2^3) y de otro es factor dos veces (2^2), es decir que 2^3 ya sería múltiplo de 2^2, por tanto se escoge 2^3 y no 2^2.

Para el M. C. M. no sería suficiente $2^3 = 8$ ya que no es múltiplo de 12, por eso se toman factores no comunes (en este caso 3) y se tendría:

$$2^3 \times 3 = 24$$

que sí es múltiplo de 12 y 8 y además sería el menor.

Pueden aprovechar para hallar el M. C. M. de tres números por cualquiera de los métodos, o, por simple inspección si ya han adquirido esa habilidad.

Es conveniente que el profesor proponga a los alumnos, problemas cuya solución requiera hallar el M. C. D. y/o el M. C. M. de varios números. Los alumnos también formularán sus problemas y los resolverán.

Unidad III

PROPOSICIONES, CONDICIONES Y CONJUNTOS

Introducción

Con los temas y ejercicios incluídos en esta unidad se pretende contribuir a desarrollar en los alumnos sus capacidades de razonamiento verbal y de pensamiento formal.

"Para razonar con efectividad se requiere utilizar cuidadosa y acertadamente el lenguaje y en particular comprender no solamente aquello que expresa una aseveración, sino también lo que ésta implica y cómo la misma se relaciona con otras aseveraciones". (Proyecto de Inteligencia, Razonamiento Verbal, Manual del Profesor, Unidad I).

Con base en el lenguaje usual y en el lenguaje matemático conocido por los alumnos se les lleva a adquirir cierta capacidad para analizar, evaluar y establecer relaciones entre proposiciones. Estas últimas constituyen los elementos del **sistema lógico**, objeto de estudio de la presente unidad.

En las proposiciones se distingue el término y el predicado; en este último se explicita la condición o condiciones que cumple el término de la proposición.

Las frases simples que forman las proposiciones fundamentales no son suficientes ni siquiera para expresar una mínima parte del lenguaje usual y del lenguaje matemático. Nos damos cuenta que cuando expresamos nuestras ideas por medio de frases compuestas, intervienen palabras de enlace como "no", "y", "o", que constituyen las operaciones del sistema. En la presente unidad se analizan también las frases compuestas.

Es igualmente importante precisar el referencial y los conjuntos cuyos elementos cumplen determinadas condiciones con el fin de decidir sobre el valor de verdad de las proposiciones referidas a dichos conjuntos. En las proposiciones abiertas, el término desconocido toma su valor del referencial que se fija. Este tipo de proposiciones se cierran por cuantificación o por sustitución, siendo este último el que más se utiliza en esta unidad. Para resolver ecuaciones de primer grado se utilizan los procedimientos de la aritmética ya conocidos por los alumnos.

Objetivos generales

- Hallar los requisitos necesarios para establecer la verdad o falsedad de frases cuantificadas.
- Analizar proposiciones simples y compuestas y hallar el valor de verdad de proposiciones.
- Distinguir proposiciones abiertas y proposiciones cerradas.
- Hallar conjuntos a partir de una condición o de la combinación de condiciones y viceversa.
- Establecer algunas relaciones entre conjunto y realizar algunas operaciones entre ellos.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
32 Establecer los requisitos necesarios para decidir si una proposición cuantificada es verdadera o falsa.	Dadas varias frases cuantificadas el alumno explicará en qué casos ellas serían verdaderas y en qué casos falsas.
33 Identificar proposiciones compuestas y algunas conectivas lógicas.	En un párrafo de una lectura el alumno identificará las proposiciones compuestas y las conectivas lógicas con las cuáles se formaron.

CONTENIDOS BASICOS

"Los cuantificadores son importantes porque sin ellos las aseveraciones son frecuentemente ambiguas. Sin embargo, al usarlo se debe tener cuidado en seleccionar los cuantificadores apropiados. Los cuantificadores **Todos** y **ninguno** implican más conocimiento y dan más información que los cuantificadores **Algunos** y **No todos.** Aseveraciones que comienzan con **Algunos** o **No todos** son mucho menos riesgosas que las aseveraciones que comienzan con **Todos** o **Ninguno**. Más, aún, los requisitos necesarios para demostrar que una aseveración es verdadera o falsa varian grandemente de acuerdo a cómo esa aseveración esté cuantificada...

Generalmente es mucho más difícil demostrar que una aseveración universal es verdadera que demostrar que una aseveración universal es falsa. Por otro lado, es mucho más fácil demostrar la verdad de una aseveración particular verdadera que demostrar la falsedad de una aseveración particular falsa. (Proyecto de Inteligencia, Razonamiento Verbal, Manual del Profesor, Unidad I, Lección 3).

Recordemos que no todas las frases del lenguaje son proposiciones. En el lenguaje corriente se pueden distinguir dos tipos de proposiciones: simples y compuestas.

Las proposiciones simples son como éstas:

Dos es par

María tiene dos hermanos

Para simbolizar una proposición simple se acostumbra utilizar una letra minúscula, generalmente p, q, r, s,... o la inicial de una palabra de la proposición.

Las proposiciones compuestas se forman a partir de proposiciones simples que se "conectan" mediante partículas de enlace. Estas partículas se denominan usualmente **conectivas lógicas**. Ellas constituyen las operaciones entre proposiciones.

Las proposiciones compuestas son como éstas:

Pablo está en cine	y	Juan está estudiando
p		q
El lápiz es rojo	o	El lápiz es azul
r		s
Si Tomás tiene 7 años	entonces	Victor tiene 9 años
t		v

y, o, si... entonces..., etc., son partículas de enlace o sea conectivas lógicas. Consideradas como operaciones, ellas transforman dos proposiciones simples en una proposición compuesta.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En la Básica Primaria los alumnos trabajaron con frases cuantificadas del lenguaje usual, por eso se propone empezar esta unidad retomando ese tipo de expresiones para hacer un análisis más cuidadoso de ellas en cuanto a las condiciones necesarias para establecer su valor de verdad.

Veamos los siguientes ejemplos:

1. Todos los arquitectos son buenos dibujantes.

Para determinar si esta frase es verdadera, sin que quede ninguna duda, sería necesario averiguar si **cada uno** de los arquitectos es un buen dibujante. Aunque podamos imaginar que esta tarea puede hacerse, es practicamente imposible. Luego determinar si la frase es verdadera resulta difícil.

Para determinar si la frase es falsa (suponiendo que lo sea) bastaría encontrar un solo arquitecto que no sea buen dibujante. Esta tarea resulta relativamente fácil comparada con la anterior.

2. Algunos buzos son buenos pescadores .

Determinar si esta frase es verdadera (suponiendo que lo sea) resulta relativamente fácil pues bastaría encontrar por lo menos un buzo que sea buen pescador. Mientras que para demostrar que tal frase es falsa (suponiendo que lo sea) sería necesario constatar de que no hay ningún buzo en el mundo que sea al mismo tiempo un buen pescador. Esta tarea resulta tan difícil como aquella de demostrar que la frase de la forma: todos los A son B, como la del primer ejemplo, es verdadera.

Con frases como:

3. No todos los alumnos del colegio son colombianos.
4. Ningún profesor del colegio es soltero.

Se puede suscitar una discusión que conlleve a encontrar conclusiones similares a las obtenidas para las frases 1 y 2.

Conviene proponer frases en las cuales los alumnos utilicen los conocimientos aritméticos que construyeron en la Básica Primaria:

— Todos los números impares son múltiplos de 3.

— Ningún divisor de 20 es múltiplo de 6.

— Algunos números naturales son primos.

— No todos los números naturales son cuadrados perfectos.

Al finalizar puede llegarse a un cuadro que resuma las conclusiones de la discusión:

	VERDADERA	FALSA
"Todos los A son B" Todos los jueces son justos. "Ninguna A es B" Ningún abogado es buen matemático.	Difícil	Fácil
"Algunas A son B" Algunos periodistas son veraces. "No todas las A son B" No todos los boxeadores son costeños.	Fácil	Difícil

Para el estudio de las frases del lenguaje que son proposiciones cerradas, el profesor puede iniciar recordando que las proposiciones de este tipo son aquellas de las que ya se puede afirmar si son verdaderas o falsas.

Una lectura apropiada para que el alumno identifique las proposiciones compuestas y las conectivas lógicas con las cuales se forman, puede constituir un material interesante para el logro de estos objetivos.

OBJETIVO ESPECIFICO

34 Hallar la negación de una proposición simple y comparar el valor de verdad de una proposición con el de su negación.

INDICADOR DE EVALUACION

Dadas cinco proposiciones simples, el alumno hallará su negación y dirá cuál es el valor de verdad de la proposición que resulte al negar una proposición dada.

CONTENIDOS BASICOS

La negación de una proposición simple se puede obtener de varias maneras:

Tomemos la proposición p: "El oro es un metal", si la negamos obtenemos la proposición q: "El oro **no** es un metal". La palabra "no" sirve para negar.

También se puede negar con la expresión "es falso que". La negación de la proposición p : "El oro es un metal", puede ser la proposición q : "Es falso que el oro es un metal".

La proposición q que se obtiene al negar la proposición p también se puede simbolizar así:

$\sim p$ que se lee "no p"

Al negar una proposición verdadera se obtiene una proposición falsa, el negar una proposición falsa se obtiene una proposición verdadera. Esto se puede resumir en un cuadro así:

p	~ p
V	F
F	V

La negación es una operación unaria que cambia el valor de verdad de una proposición.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El profesor puede orientar al alumno para que halle diferentes formas de negar una proposición.

Es posible que se presente alguna dificultad debida a la tendencia que tienen los alumnos de confundir la negación con la proposición contraria.

Así en las proposiciones:

- La leche es blanca
- La leche es negra
- La leche no es blanca

Las dos primeras proposiciones son en cierto sentido contrarias, si consideramos que lo contrario de blanco es negro, mientras que la última sí es la negación de la primera pues ella cambia el valor de verdad de dicha proposición.

Los alumnos pueden hallar el valor de verdad de algunas proposiciones simples y enseguida el de su negación. A partir de estos ejercicios construye la tabla de verdad.

Ricardo es un buen Ingeniero de petróleo	Ricardo no es un buen Ingeniero de petróleo
V	F
F	V

OBJETIVOS ESPECIFICOS

35 Reconocer cuándo una proposición compuesta es una conjunción.

36 Hallar el valor de verdad de una conjunción a partir del valor de verdad de las proposiciones simples.

INDICADORES DE EVALUACION

Dadas varias proposiciones compuestas, el alumno dirá cuáles son conjunciones.

Dadas cinco conjunciones, el alumno hallará su valor de verdad, a partir del valor de verdad de las proposiciones simples.

CONTENIDOS BASICOS

Cuando dos proposiciones se "conectan" con la partícula "y", la proposición compuesta que se obtiene se llama conjunción.

La "y" se simboliza así: " $\wedge$ ", de tal forma, si se obtiene la conjunción de dos proposiciones: p, q, la podemos simbolizar de la siguiente manera:

$$p \wedge q$$

Una conjunción $p \wedge q$ es verdadera solamente cuando p y q son verdaderas, en los demás casos es falsa.

Esto se puede resumir en un cuadro, así:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS

El profesor orientará a los alumnos para que distingan como conjunción a la proposición compuesta que resulta de conectar dos proposiciones simples con la partícula "y"; les indicará la forma de simbolizarla.

Con material concreto como dos tarjetas de diferente color, donde por una cara está escrito "verdadero" y por la otra "falso", los alumnos podrán analizar los posibles valores de verdad que pueden tener dos proposiciones.

Si lanzan al aire las tarjetas los casos posibles son:

TARJETA AZUL	TARJETA ROJA
V	V
F	V
V	F
F	F

Si la tarjeta azul representa una proposición p y la tarjeta roja representa una proposición q, concluirán que los valores posibles son:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Después analizarán el valor de $p \wedge q$ para cada uno de los casos anteriores y obtendrán la tabla de valores de verdad para la conjunción de dos proposiciones.

Ejemplo: La proposición

Enrique es un médico brillante y ama la docencia.

Se puede descomponer en dos proposiciones simples y a partir del valor de verdad de éstas obtener el de la compuesta:

Enrique es un médico brillante	Enrique ama la docencia	Enrique es un médico brillante y ama la docencia
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Es conveniente analizar proposiciones en las cuales la "y" no represente la operación que se viene estudiando. Un ejemplo de tales proposiciones puede ser:

Cecilia y William son amigos. Se trata de una proposición simple, mientras que la proposición, Cecilia y William son inteligentes es una proposición compuesta, las dos proposiciones simples son:

Cecilia es inteligente y William es inteligente

OBJETIVOS ESPECIFICOS

37 Reconocer cuándo una proposición compuesta es una disyunción (inclusiva y exclusiva).

38 Hallar el valor de verdad de una disyunción a partir del valor de verdad de las proposiciones simples.

INDICADORES DE EVALUACION

Dado un fragmento de una lectura apropiada, el alumno señalará proposiciones compuestas disyuntivas en sentido inclusivo y en sentido exclusivo.

Dadas varias proposiciones compuestas disyuntivas el alumno explicará cuándo estas proposiciones son verdaderas.

CONTENIDOS BASICOS

Otra de las operaciones entre proposiciones es la disyunción. Cuando dos proposiciones se "conectan" con la partícula "o", la proposición compuesta que se obtiene se llama también disyunción.

La "o" puede ser inclusiva o exclusiva; existe además una tercera "o", la incompatibilidad, pero en lógica se utiliza más la "o" inclusiva. En este último sentido, la disyunción de dos proposiciones es falsa únicamente cuando las dos proposiciones simples son falsas, en los demás casos es verdadera.

La disyunción inclusiva se simboliza así: " v " y si llamamos p y q las dos proposiciones simples, la tabla de los valores de verdad de la operación es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disyunción exclusiva entre dos proposiciones, la más utilizada en el lenguaje usual, es verdadera cuando solo una de las dos proposiciones es verdadera, en los otros dos casos es falsa. Esta operación se simboliza así: "w" y su tabla es la siguiente:

p	q	p w q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El profesor puede pedir a los alumnos ejemplos de proposiciones compuestas "conectadas" por medio de la " o ". Si entre ellas se escoge una como:

Juana estaba profundamente dormida o el timbre no funcionó. En primer lugar se analiza el sentido de la proposición dentro de un contexto, que en este caso podría estar relacionado con el hecho de que alguién llegó a la casa de Juana y ésta, estando en la casa no abrió la puerta. ¿Por qué?

Pudo suceder:

a) Juana dormía profundamente y no escuchó el timbre;

b) Juana estaba en vela y el timbre no funcionó;

c) Juana dormía y además el timbre no funcionó. En estos tres casos la proposición compuesta es verdadera y Juana puede excusarse. Pero si Juana no dormía y el timbre funcionó, la proposición compuesta es falsa y la actitud de Juana requiere de una explicación.

Otro ejemplo, Ricardo dice:

O bien compro una moto, o me voy de vacaciones a Cartagena. Las dos proposiciones simples son:

Ricardo compra una moto. Ricardo se va de vacaciones a Cartagena. Es claro que la intención de Ricardo es hacer una de las dos cosas: comprar la moto o irse de vacaciones a Cartagena.

Esta disyunción que en el lenguaje usual generalmente se expresa por " O bien ... o ... " es la disyunción exclusiva cuya tabla de valores de verdad para el ejemplo dado podría elaborarse así:

Ricardo compra una moto	Ricardo se va de vacaciones a Cartagena	O bien Ricardo compra una moto o se va de vacaciones a C/gena.
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Los ejemplos que den los alumnos referidos a una situación concreta permiten diferenciar estas dos operaciones lógicas: la disyunción inclusiva y la disyunción exclusiva.

Nota para el profesor: La tercera "o" es la operación denominada incompatibilidad que se simboliza por "|" y cuya tabla de valores de verdad es la siguiente:

p	q	p | q
V	V	F
V	F	V
V	F	V
F	F	V

Esta es la O que se utiliza en instrucciones del tipo: "O la una o la otra o ninguna de las dos".

OBJETIVOS ESPECIFICOS

39 Identificar términos y predicados de una proposición.

40 Reconocer cuándo un término es constante y cuándo es variable.

41 Identificar proposiciones abiertas y proposiciones cerradas.

INDICADORES DE EVALUACION

Dadas 5 proposiciones el alumno identificará en ellas el término y el predicado.

Dadas 5 proposiciones el alumno dirá si el término es constante o variable.

Dadas varias proposiciones el alumno dirá cuáles son abiertas y cuáles son cerradas.

CONTENIDOS BASICOS

Un término es una o varias palabras o expresiones (signos) que se utilizan para designar un objeto: la luna, 3, Bogotá, son términos.

Un predicado es una expresión que se utiliza para decir "algo" acerca de un objeto. Por ejemplo: es redonda, es impar, es muy grande.

En una proposición simple se pueden distinguir el término y el predicado.

Ejemplo: en la proposición p: "dos es par"; "dos" es el término, "es par" es el predicado.

Un término puede ser constante o variable.

Es constante cuando designa un objeto ya determinado: la luna, 3, Bogotá.

Es variable cuando designa un objeto que todavía no está determinado: ella, x, una ciudad.

Si el término de una proposición es constante ya podemos determinar si es verdadera o falsa, y decimos que la proposición es cerrada: la luna es un satélite natural; 2 es par; Bogotá es nuestra capital.

Si el término de una proposición es variable todavía no podemos determinar si es verdadera o falsa y decimos que la proposición es abierta:

ella estaba llena anoche; x es par; una cierta ciudad tiene más de un millón de habitantes.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden proponer ejercicios en donde dada una proposición el alumno dice cual es el término y cual es el prédicado.

Los ejercicios pueden ser planteados por los alumnos. (un grupo los plantea y otro los analiza y viceversa).

Una vez se haya identificado el término de una proposición, los alumnos analizan si dicho término es constante o es variable y de acuerdo con ésto clasifican las proposiciónes en abiertas y cerradas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
42 Convertir proposiciones abiertas en proposiciones cerradas por sustitución de términos constantes en lugar de términos variables.	Dada una proposición abierta, el alumno la convertirá, sustituyendo la variable por una constante, en una proposición cerrada.
43 Identificar el valor de verdad de una proposición cerrada por sustitución.	Dada una proposición cerrada, por sustitución el alumno dirá cuál es su valor de verdad.

CONTENIDOS BASICOS

Si se sustituye el término variable de una proposición abierta por un término constante, dicha proposición se convierte en una proposición cerrada, que puede ser verdadera o falsa.

Si en la proposición abierta " x es par " sustituimos "3" en vez de "x", resulta " 3 es par ", que es una proposición cerrada (pero falsa).

Si sustituimos "2" en vez de "x", resulta "2 es par", que es una proposición cerrada (pero verdadera).

Una vez se sustituya la variable de una proposición abierta, por una constante, se puede identificar el valor de verdad de la proposición que resulta.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Algunos ejemplos de proposiciones abiertas son las ecuaciones de primer grado:

$x + 2 = 5 \qquad a - 3 = 7$

El alumno puede obtener proposiciones cerradas que pueden ser verdaderas o falsas, según la constante que se sustituya en vez de la x, o la a, etc.

El profesor orienta a los alumnos para que concluyan que encontrar la constante que convierte a estas proposiciones abiertas (ecuaciones) en proposiciones cerradas verdaderas, equivalen a encontrar una solución de la ecuación.

Ejemplo: $x + 2 = 5$

Cuando se reemplaza "x" por "3", se obtiene $3 + 2 = 5$, que es una proposición verdadera; esto equivale a decir que una solución de la ecuación:

$x + 2 = 5$ es 3

Si se reemplaza "x" por "2", se obtiene $2 + 2 = 5$, que es una proposición falsa; luego 2 no es una solución de la ecuación $x + 2 = 5$.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
44 Reconocer que un conjunto dado puede considerarse en algunas actividades como un conjunto referencial y en otras como subconjunto de otro conjunto referencial más amplio.	Dado un conjunto el alumno propondrá una situación en la cual éste sea el conjunto referencial y propondrá otra en la cual dicho conjunto pase a ser subconjunto de otro referencial más amplio.
45 Hallar conjuntos a partir de una condición o de la combinación de condiciones.	Dada una condición o una combinación de condiciones el alumno hallará el conjunto cuyos elementos la cumplan y viceversa.
46 Hallar la condición o combinación de condiciones que cumplen los elementos de un conjunto.	
47 Hallar subconjuntos de un conjunto dado.	Dado un conjunto el alumno hallará subconjuntos de él.

CONTENIDOS BASICOS

El análisis de proposiciones cuantificadas se enriquece cuando se usan diagramas sencillos para representar los conjuntos de objetos a los que se refieren dichas proposiciones. Resultan así más explícitas las relaciones, si las hay, entre dichos conjuntos.

Ejemplo tomado del Proyecto de Inteligencia:

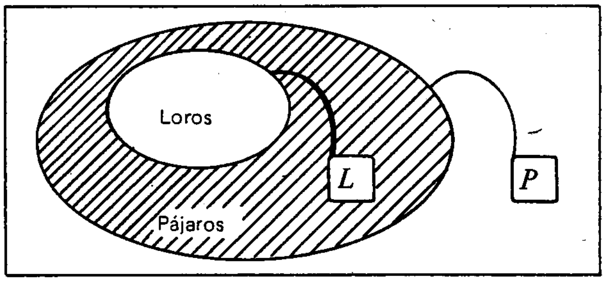
A: Todos los loros son pájaros.

B: Ningún gato es perro.

C: Algunos perros son animales cariñosos.

Cada una de estas aseveraciones se refiere a dos clases y especifica una relación entre ellas.

La representación de las clases relacionadas en la proposición A puede ser:



El diagrama a su vez permite formular y responder preguntas como:

¿Dónde están representados los pájaros que no son loros?.

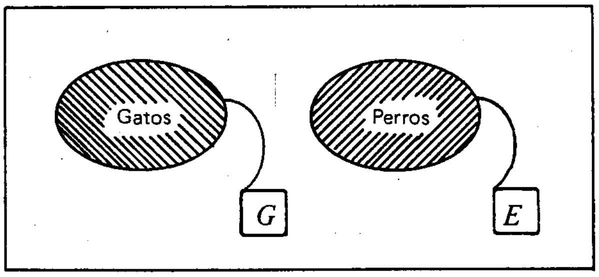
¿Dónde están representados los animales que no son pájaros?.

Esta última pregunta permite considerar un conjunto referencial más amplio (el de los animales) del cual el referencial inicial (conjunto de los pájaros) es ahora un subconjunto.

La relación representada en el diagrama es de **inclusión** porque cada uno de los elementos del conjunto de los loros pertenece al conjunto de los pájaros. Esto se simboliza P ⊂ L. El símbolo ⊂ es el de la relación de inclusión en sentido estricto.

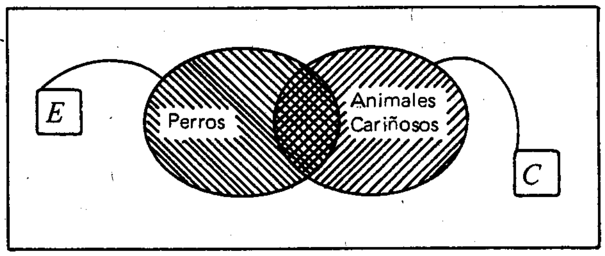
Cuando se considera la relación de inclusión en sentido amplio, el símbolo utilizado es ⊂. Este símbolo se utiliza para expresar que un conjunto es subconjunto de sí mismo o es subconjunto de otro más amplio.

La segunda proposición (B) permite hacer un diagrama como:



En este caso las dos clases se excluyen mutuamente.

La tercera proposición (C) permite un diagrama como:



En este caso las dos clases tienen elementos comunes.

Los dos últimos diagramas permiten reafirmar que entre esos conjuntos no se da la relación de inclusión.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

La sugerencia que consideramos fundamental para el tratamiento de estos temas consiste en tratarlos de manera integrada evitando que queden como rueda suelta y como mera información para el estudiante. Con toda seguridad el profesor puede lograr este propósito en una forma más efectiva que la propuesta aquí, debido al enriquecimiento que proporciona el contacto directo con los alumnos.

Se puede fijar como referencial el de los números naturales menores o iguales a 20 y denominarlo conjunto M. A los alumnos se les pide que elaboren proposiciones referidas a los elementos de este conjunto, en las cuales aparezcan las expresiones de cuantificación estudiadas al comienzo de la unidad. Nuevamente se puede discutir sobre el valor de verdad de dichas proposiciones con base en el referencial dado y determinar los conjuntos numéricos cuyos elementos cumplen la condición expresada en el predicado de dichas proposiciones.

Ejemplo:

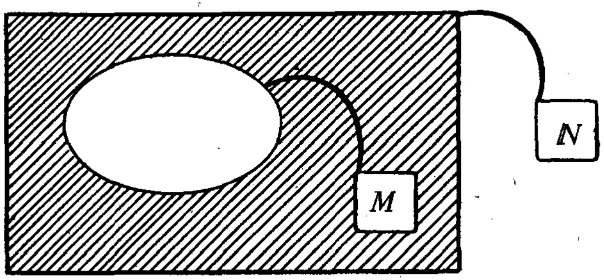
M = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 }

1. Todos los elementos de M son menores que 21 (V)
2. Algunos elementos de M son primos (V)
3. No todos los elementos de M son multiplos de 4 (V)
4. Ningún Elemento de M es múltiplo de 7 (F)

La primera proposición podría explotarse en varios sentidos. En primer lugar es verdadera porque **cada uno** de los elementos de M es menor que 21. Se puede comentar cómo en este caso, por tratarse de un referencial de pocos elementos, fue fácil establecer el valor de verdad de la proposición.

En segundo lugar si tomamos la condición expresada en la desigualdad (proposición abierta): $\boxed{X} < 21$, se puede constatar que al reemplazar el cuadrito por cualquie elemento M se obtiene una proposición cerrada verdadera porque "para todo elemento de $\boxed{M}$ $X < 21$", es verdadera.

¿cómo se puede representar el conjunto M?



¿Quiénes viven en la parte rayada del diagrama?

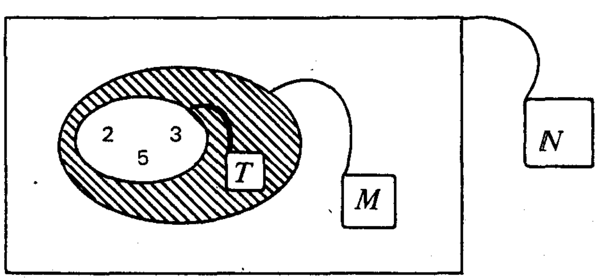
¿Qué podemos decir de M con respecto al conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales?

¿Si del conjunto $\mathbb{N}$ quitamos los elementos del conjunto M, cuál conjunto nos queda? ¿Cómo podemos simbolizarlo? ¿Qué nombre recibe este conjunto?

Con relación a la segunda proposición se podrían formular preguntas como: ¿Cuáles son los subconjuntos de M que permiten afirmar que la proposición es verdadera?

Se observa que estos conjuntos numéricos pueden tener desde uno hasta ocho elementos y que cada uno de ellos es un subconjunto del conjunto M. Si a estos subconjuntos se les da un nombre, se puede recordar la simbolización correspondiente, por ejemplo $T \subset M$.

El diagrama que representa uno de los posibles casos es:



En él están explícitamente simbolizados los elementos de uno de los posibles conjuntos, T, que permiten afirmar que la segunda proposición es verdadera. Después de explotar todas las proposiciones cuantificadas escogidas para tal efecto se pueden dar condiciones combinadas como "$\boxed{X} > 4$ y $\boxed{X} < 10$" para que los alumnos digan cuál es el subconjunto de M cuyos elementos cumplen ambas condiciones.

El conjunto de los números mayores que 4 y menores que 10 es:

$$\{5, 6, 7, 8, 9\}$$

A este conjunto se le denomina conjunto de las soluciones.

Cada uno de dichos números produce una proposición cerrada verdadera al reemplazar en ambas condiciones el cuadradito por ellos. Así: "$5 > 4$ y $5 < 10$" es una de tales proposiciones, mientras que "$2 > 4$ y $2 < 10$", "$11 > 4$ y $11 < 10$" son dos proposiciones falsas porque 2 y 11 no son soluciones para ambas proposiciones.

Teniendo en cuenta el mismo conjunto referencial se puede proponer un ejercicio como el siguiente:

	Características	Conjuntos
1	ser par	$\{1, 3, 5, 7\}$
2	ser múltiplo de 5	$\{6, 12, 18\}$
3	ser mayor que 4 y múltiplo de 6	$\{5, 10, 15, 20\}$
4	ser impar o ser menor que 10	$\{5, 15\}$

El trabajo del alumno consiste en escoger los conjuntos cuyos elementos cumplen la característica dada. Al lado del conjunto escriben el número respectivo encerrado en el círculo.

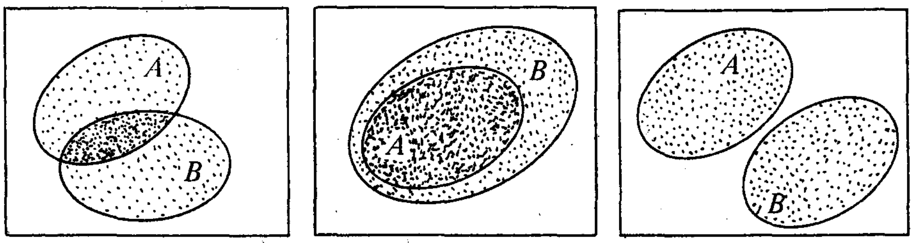
Ejemplo:	$\{6, 12, 18\}$	1 3
	$\{5, 15\}$	2 4

Otro tipo de ejercicios consiste en hallar la condición que cumplen los elementos de un conjunto dado. Ejemplo: si uno de los conjuntos es $\{2, 4, 6, 8\}$ se puede decir que la condición es " ser par y estar comprendido entre 2 y 8 ".

En la Básica Primaria los alumnos utilizaron el símbolo $\subset$ para representar la relación de inclusión en sentido estricto. En este grado se puede considerar la utilización de esta relación en sentido amplio: "...es un subconjunto de... (o es igual a...)". En este caso el símbolo para representar la relación es $\subseteq$. En este sentido todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Es conveniente que los alumnos lleguen a una respuesta a la pregunta ¿cuándo se dice que un conjunto es subconjunto de otro? Así pueden utilizar la expresión "todos" o "cada uno" para explicar un concepto que ya han construido. De la misma manera se les pregunta cuándo un conjunto B no es subconjunto de otro conjunto A. Esta pregunta los lleva a aplicar la negación de una proposición cuantificada universalmente. Basta con que un solo elemento del conjunto B no pertenezca al conjunto A para afirmar que aquel no es un subconjunto de este. Este se simboliza: $B \not\subset A$.

En este caso los diagramas podrían ser de este tipo:



OBJETIVOS ESPECIFICOS

48 Reconocer el complemento de un conjunto.

49 Efectuar algunas operaciones entre conjuntos numéricos.

INDICADORES DE EVALUACION

Dado un referencial numérico y en él algunos conjuntos, el alumno hallará el complemento de uno de ellos con respecto a dicho referencial y hallará el conjunto unión y el conjunto intersección de dos de de los conjuntos numéricos dados.

CONTENIDOS BASICOS

Las operaciones binarias entre conjuntos numéricos que se van a estudiar son: la diferencia, la unión y la intersección.

El conjunto diferencia entre dos conjuntos A y B está formado por los elementos que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B. Esta operación se simboliza " — ". Así el conjunto diferencia entre A y B se nota A − B y se lee: "Conjunto A menos conjunto B" o "diferencia entre los conjuntos A y B".

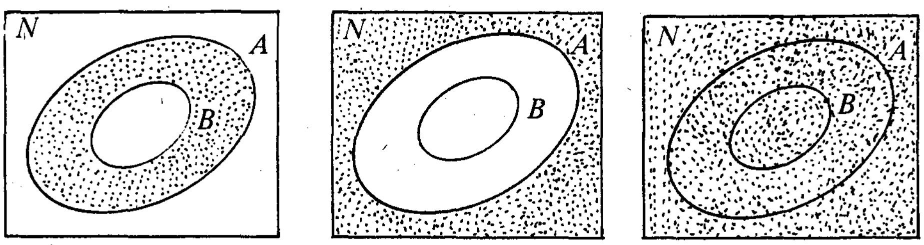
El conjunto diferencia entre un referencial dado y un conjunto A se llama complemento de A y se denota A'.

Ejemplo: Consideremos como referencial el conjunto de los números naturales y los conjuntos A = { múltiplos de 3 }; B = { múltiplos de 6 }. El conjunto diferencia entre A y B es:

A − B = { múltiplos de 3 que no son múltiplos de **6** }

A' = { números naturales que no son múltiplos de **3** }

B' = { números naturales que no son múltiplos de **6** }



A − B *A'* *B'*

La unión de dos conjuntos A y B está formada por los elementos que pertenecen al conjunto A o que pertenecen al conjunto B o a ambos conjuntos. La operación se simboliza mediante el signo ∪. Así la unión entre A y B se nota A ∪ B y se lee "A unido con B".

Si consideramos los conjuntos A y B del ejemplo anterior, se tiene que la unión (o la reunión) de ellos está formada por los múltiplos de 3 o por los múltiplos de 6 o por aquellos que son múltiplos de 3 y de 6. En este caso, que resultó un ejemplo especial, A ∪ B = A por ser B un subconjunto de A.

La intersección de dos conjuntos A y B está formada por los elementos que pertenecen al conjunto A y también pertenecen al conjunto B. La operación se simboliza mediante el signo ∩. Así la intersección de los conjuntos A y B se nota A ∩ B y se lee "A intersección B",

Para los conjuntos A y B que se vienen tomando como ejemplo se tiene que el conjunto intersección está formado por aquellos elementos que son múltiplos de 3 y también son múltiplos de 6. En este caso resultó ser el de los múltiplos de 6: A ∩ B = **B.**

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Estos temas por ser lo suficientemente conocidos por el profesor pueden ser enriquecidos y ampliados no solamente para el logro de los objetivos pertinentes, sino para afianzar algunas relaciones entre los conjuntos numéricos que se tomen para tal efecto. En este grado no hemos propuesto la determinación de conjuntos utilizando la simbolización de la forma $\{ x \mid x \text{ es } ... \}$ porque algunos docentes consideran que es una simbolización difícil para los alumnos. Sin embargo, usted puede ensayar y utilizarla, según el nivel de sus estudiantes.

En la Básica Primaria los alumnos han realizado uniones e intersecciones de conjuntos, sin llegar a repetir las definiciones que traen los libros de matemáticas, sino describiendo con su propio lenguaje cómo se forma el conjunto reunión y cual es la propiedad de los elementos de este conjunto. Respecto a ésto, cuando ellos describen el conjunto reunión utilizan la " y " diciendo, por ejemplo: "en el salón principal están los alumnos de 5o. y los de 6o."; "en la caja están las fichas rojas y las triangulares". Sin embargo, cuando se les pregunta por la condición que cumplen los elementos, entonces sí utilizan la O. Es así como pueden llegar a decir para estar en el salón principal es necesario ser alumno de 5o. o de 6o." "para que una ficha esté en la caja debe ser o roja o triangular o un triángulo rojo". A partir de expresiones como esta última el profesor y los alumnos pueden llegar a la definición que proponen los matemáticos. Es conveniente verbalizarla primero, luego escribirla en el lenguaje natural pero ya a nivel matemático y si el profesor lo considera apropiado y ya ha utilizado la "taquigrafía" propia de las matemáticas para determinar conjuntos, entonces proponer la simbolización:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$$

En cuanto a la intersección se ha observado en los alumnos de primaria que cuando un objeto posee dos propiedades ellos utilizan indistintamente las expresiones " y ", "que también" o sencillamente no utilizan ninguna expresión para conectar las propiedades comunes. Si consideramos por ejemplo los conjuntos:

M = { números pares menores que 25 }

M = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24 }

S = { divisores de 60 } =
{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 }

Es posible que los alumnos digan que en la intersección de los conjuntos M y S estarán "los números pares **que también** son divisores de 60"; "los que son pares y divisores de 60"; "los números pares divisores de 60".

$$M \cap S = \{ 2, 4, 6, 10, 12, 20 \}$$

Unidad IV

LOS NUMEROS FRACCIONARIOS POSITIVOS Y SU EXPRESION DECIMAL

Introducción

PROPOSITO GENERAL

Desde el Tercer Grado de Educación Básica Primaria los alumnos vienen manejando los números fraccionarios positivos como **operadores** o transformadores achicadores o agrandadores aplicados a magnitudes. También los han manejado como **medidores,** como **razones,** como **cocientes** indicados y como **partidores,** no de objetos materiales, sino de unidades de distintas magnitudes o de cantidades específicas de esas magnitudes.

Es posible que algunos de los alumnos de sexto grado hayan conceptualizado aisladamente los sistemas concretos mencionados anteriormente y tengan dificultades al utilizar un mismo sistema simbólico para expresar los conceptos construidos desde diferentes enfoques. La idea general para el estudio de los fraccionarios en la Básica Secundaria es la de tratar de tejer un sistema conceptual único, el de los números racionales con sus operaciones y relaciones usuales, a partir de los distintos sistemas conceptuales parciales que se han visto en la Básica Primaria, y de tratar de manejar con comprensión y seguridad los sistemas simbólicos usuales: el de las facciones, el de las expresiones decimales y el de las expresiones porcentuales.

El logro parcial de esta meta en sexto grado depende en gran parte del conocimiento que tenga el docente de los programas de Matemáticas para la Básica Primaria, y de su habilidad para selecionar las actividades que le permitan a los alumnos aproximarse desde sus diferentes experiencias al sistema conceptual más abstracto al que se quiere llegar en sexto grado: el de los números fraccionarios positivos con sus operaciones usuales y con las relaciones de orden aditivo.

En este grado se seleccionan como sistemas concretos las semirrectas numéricas; se traza una semirrecta, se le marca el origen y el segmento unidad, y luego se le aplican a esa unidad de longitud los operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x en donde a y b son naturales distintos de cero.

En el sistema simbólico de las fracciones para los números fraccionarios distinguiremos aquellas fracciones cuyo denominador es una potencia de diez. Esta distinción en el sistema simbólico permite seleccionar un subsistema del sistema conceptual de los fraccionarios: el que está formado por los números decimales finitos con sus operaciones y relaciones. No todos los fraccionarios positivos pueden expresarse con fracciones cuyo denominador sea una potencia de diez. En el sistema simbólico de las expresiones decimales, no todos los fraccionarios positivos pueden pues expresarse con decimales finitos, y por eso llamamos a los fraccionarios que sí pueden expresarse así "Números decimales finitos". También se empiezan a estudiar en sexto grado algunas expresiones decimales que no representan un número decimal finito.

SIMBOLIZACION DE LOS OPERADORES

Hay varios sistemas simbólicos para referirse a los operadores o transformadores. Estos últimos están al nivel conceptual y son construcciones mentales activas y que achican o agrandan las magnitudes a las que se les aplican. (En un caso excepcional, el del operador idéntico. o neutro, las dejan como estaban). No debe pues confundirse el operador con sus símbolos. Los símbolos para operadores pueden ser verbales, o gestuales (abriendo o cerrando las manos), o escritos. En los programas se usan abreviaturas para "dos veces", "tres veces", "a veces", "la mitad de", "la tercera parte de", "un b-avo de", que son: 2x, 3x, . . ., ax, $\frac{1}{2}$x, $\frac{1}{3}$x, . . ., $\frac{1}{b}$x.

En ningún caso debe leerse "dos equis" o "a equis". Puede utilizarse "el doble de", "el triple de", o "dos por", "tres por", etc. Como símbolos pueden utilizarse también:

$$2\bullet, 3\bullet, \ldots, a\bullet, \tfrac{1}{2}\bullet, \tfrac{1}{3}\bullet, \ldots, \tfrac{1}{b}\bullet$$

$$2\bullet(\ ), 3\bullet(\ ), \ldots, a\bullet(\ ), \tfrac{1}{2}\bullet(\ ), \tfrac{1}{3}\bullet(\ ), \ldots, \tfrac{1}{b}\bullet(\ )$$

$$2\times(\ ), 3\times(\ ), \ldots, a\times(\ ), \tfrac{1}{2}\times(\ ), \tfrac{1}{3}\times(\ ), \ldots, \tfrac{1}{b}\times(\ )$$

$$2(\ ), 3(\ ), \ldots, a(\ ), \tfrac{1}{2}(\ ), \tfrac{1}{3}(\ ), \ldots, \tfrac{1}{b}(\ )$$

Lo importante es enfatizar con los símbolos mismos el carácter activo de los operadores e indicar que se aplican a magnitudes (y a números). Los paréntesis señalan una boca o lugar vacío que espera una magnitud (o un número) para transformarlo.

SIMBOLIZACION DE LOS FRACCIONARIOS

Los números fraccionarios o números reales son el resultado del olvido activo de los operadores o transformadores que achican o agrandan las magnitudes, una vez que se completan con el operador idéntico o neutro, con el operador anulador, y más tarde con los opuestos aditivos de esos operadores.

Cuando se olvida ese carácter activo, cuando se representan como puntos en una recta numérica, cuando la familiaridad con ellos nos lleve a que se vuelvan "concretos" para nosotros, los llamamos números fraccionarios o racionales. Para ellos hay varios sistemas simbólicos como el verbal (la mitad, un medio) el de las expresiones fraccionales o simplemente "fracciones" ($\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{50}{100}$) el de las expresiones decimales o simplemente "decimales (0.5, • 5, 0.50) el de las expresiones porcentuales o simplemente "porcentajes" (50 %), además de muchos otros como el binario, el hexadecimal, etc.

Es importante no confundir los números fraccionarios o racionales con sus expresiones, y caer en la cuenta de que hay un solo número que corresponde a cada expresión en un contexto dado, pero que hay muchas expresiones diferentes que corresponden a un mismo número.

Objetivos generales

- Reconocer el conjunto de los números fraccionarios positivos y en él el de los decimales finitos.
- Repasar los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división con fracciones.
- Repasar los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división con decimales finitos.
- Resolver y formular problemas que requieran de las operaciones con fraccionarios expresados con fracciones y con decimales.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADORES DE EVALUACION
50 Reconocer en la semirecta numérica el efecto de algunos operadores de las formas: $a\times$; $\frac{1}{b}\times$.	El alumno representará en la semirecta numérica el efecto de algunos operadores de la forma $a\times$ cuando se aplican a cualquier número natural. El alumno representará en la semirecta numérica el efecto de algunos operadores de la forma $\frac{1}{b}\times$ al aplicarlos a cualquier número natural.

51 Reconocer que el resultado de aplicar un operador de la forma a x a un número natural siempre es un número natural, y que el resultado de aplicar un operador de la forma $\frac{1}{b}$ x a un número natural sólo en algunos casos es un número natural.

El alumno explicará cuál es el resultado de aplicar operadores de las formas a x y $\frac{1}{b}$ x a un número natural.

CONTENIDOS BASICOS

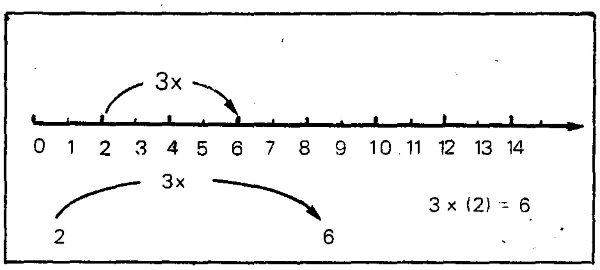
El efecto de operadores de la forma a x, a = 2, 3, 4, 5, ... cuando se aplican a una magnitud, es duplicar, triplicar, cuadruplicar, etc., la magnitud a la cual se aplican. Estos operadores se pueden simbolizar también como a x ( ), a ( ), a • ( ), etc.

El efecto de operadores de la forma $\frac{1}{b}$ x, b = 2, 3, 4, 5, ... cuando se aplican a una magnitud es disminuirla, a la mitad, a la tercera parte, a la cuarta parte, etc. Estos operadores se pueden simbolizar también como $\frac{1}{b}$x ( ), $\frac{1}{b}$ ( ), $\frac{1}{b}$• ( ), etc.

En la semirrecta numérica podemos analizar el efecto que producen estos operadores cuando son aplicados a cualquier número natural mayor que cero.

- Si se aplica un operador de la forma a x, como 2 x, 3 x, 4 x, etc., el resultado aparece a la derecha del número al cual se aplicó y el efecto es duplicar, triplicar, cuadruplicar, etc., el número de unidades de longitud que hay entre cero y el número.

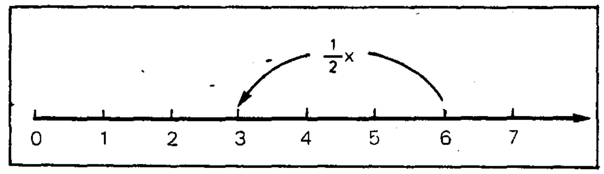
Ejemplo: si se va a aplicar el operador 3 x al 2, resulta:



- Si se aplica un operador de la forma $\frac{1}{b}$ x, como $\frac{1}{2}$x, $\frac{1}{3}$x, $\frac{1}{4}$x, etc., el resultado aparece a la izquierda del número al cual se aplica y el efecto es disminuir a la mitad, a la tercera parte, a la cuarta parte, etc., el número de unidades de longitud que hay entre cero y ese número:

Si el operador de la forma $\frac{1}{b}$x se le aplica a un número múltiplo de b, el resultado estaría representado en uno de los puntos ya señalados en la semirrecta, o sea, es un número natural.

Ejemplo: si se aplica el operador $\frac{1}{2}$x a 6. El resultado es 3.

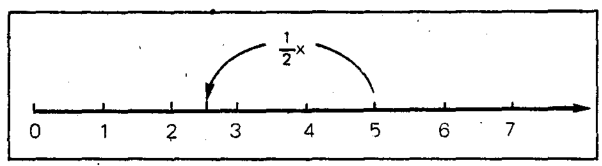


Entre cero y seis hay 6 unidades de longitud, al aplicarle el operador $\frac{1}{2}$ x se disminuyen a la mitad, o sea 3 unidades.

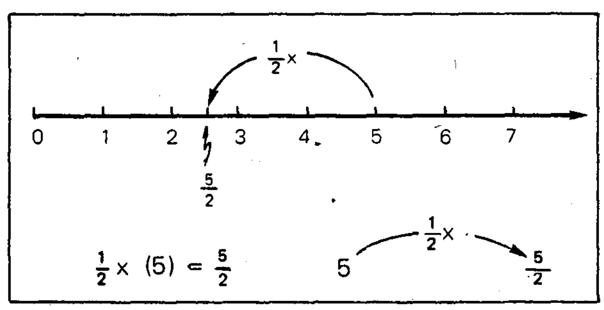
$6 \xrightarrow{\frac{1}{2}x} 3 \qquad \frac{1}{2}x\ (6) = \frac{6}{2} = 3$

Si se aplica un operador de la forma $\frac{1}{b}$ x, a un número que no es múltiplo de b, el resultado estaría en un punto intermedio en donde no está representado ningún número natural. Habría que hacer unas marcas adicionales a la semirrecta para representar dichos resultados. Es decir que el resultado de aplicar un operador de la forma $\frac{1}{b}$x a un número que no es múltiplo de b, no es un número natural.

Ejemplo: si se aplica a 5, el operador $\frac{1}{2}$ x, el resultado no es un número natural.



Hay 5 unidades de longitud para disminuir a la mitad. El resultado estaría entre el 2 y el 3, exactamente en la mitad. O sea se toman 2 unidades de longitud y media unidad más.



- Si se aplica un operador de la forma ax ó $\frac{1}{b}$x al cero, se obtiene siempre cero.

Inicialmente podrán hacer ejercicios de aplicación de estos operadores a una magnitud y analizar el efecto que producen, como el siguiente:

> Aplicar cada uno de los siguientes operadores a una superficie de 48 m² de área: $3\times$, $\frac{1}{2}\times$, $\frac{1}{4}\times$, $\frac{1}{5}\times$.

$$3\times\ (48\ m^2) = 3\times 48\ m^2 = 144\ m^2$$

$$\frac{1}{2}\times\ (48\ m^2) = \frac{1\times 48}{2}\ m^2 = \frac{48}{2}\ m^2 = 24\ m^2$$

$$\frac{1}{4}\times\ (48\ m^2) = \frac{1\times 48}{4}\ m^2 = \frac{48}{4}\ m^2 = 12\ m^2$$

$$\frac{1}{5}\times\ (48\ m^2) = \frac{1\times 48}{5}\ m^2 = \frac{48}{5}\ m^2 = 9.6\ m^2$$

En estos casos también se puede escribir $3\ (48\ m^2)$, $\frac{1}{2}(48\ m^2)$, $\frac{1}{4}(48\ m^2)$, $\frac{1}{5}(48\ m^2)$.

Después se les pedirá que representen en una semirrecta el efecto de algunos de estos operadores cuando se aplican a un número natural, analizando cuáles lo aumentan, cuáles lo disminuyen y cuáles lo dejan como está.

Ejemplo: al número 8, aplicar cada uno de los siguientes operadores:

$$3\times,\ \frac{1}{4}\times.$$

Se pueden proponer algunos ejercicios como los siguientes:

> Llenar los espacios en blanco, ya sea colocando el operador que se aplicó, el resultado, o el número al cual se aplicó el operador:

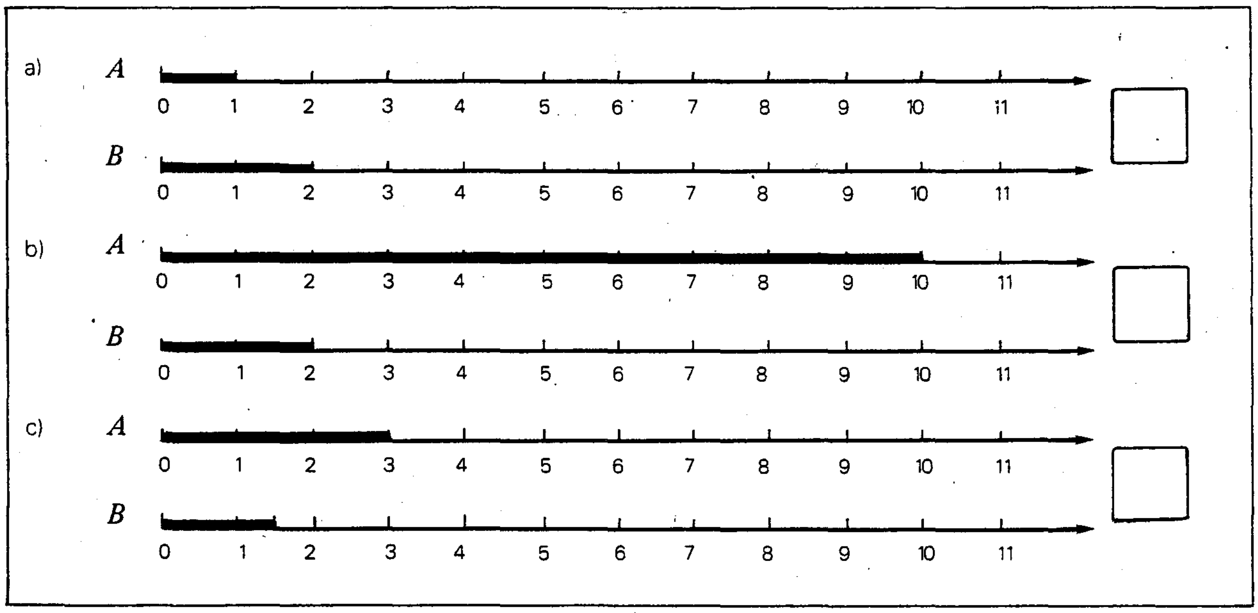
$$3 \xrightarrow{\frac{1}{2}\times} \square$$

$$4 \xrightarrow{\square} 2$$

$$\square \xrightarrow{\frac{1}{3}\times} 3$$

$$\square \xrightarrow{\frac{1}{4}\times} 2$$

> Escribir en cada caso el operador que se aplicó al número representado en la semirrecta A, para obtener el número representado en la semirrecta B.



OBJETIVO ESPECIFICO

52 Reconocer en la semirecta numérica el efecto que producen algunos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno representará en la semirecta numérica el efecto de algunos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ cuando son aplicados al uno.

El efecto de operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x ($a \neq 0$, $b \neq 0$) cuando se aplican a una magnitud es equivalente al efecto que se produce al aplicar sucesivamente dos operadores: uno de la forma a x y otro de la forma $\frac{1}{b}$x en cualquier orden.

El resultado de la aplicación de un operador de la forma $\frac{a}{b}$x es aumentar o disminuir o dejar como está la magnitud a la cual se aplica.

En la semirrecta numérica se puede analizar el resultado que se obtiene y el efecto que producen dichos operadores cuando son aplicados al uno. El resultado puede estar a la derecha o a la izquierda del uno, o caer en el mismo uno; y el efecto es aumentar o dejar como está el número de unidades de longitud que hay entre cero y uno.

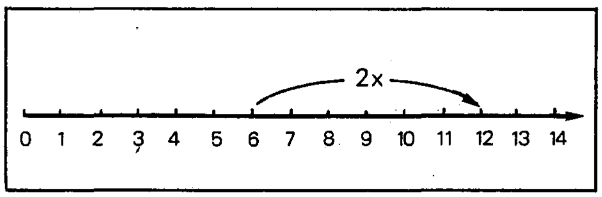
El resultado de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}$x a un número natural en unos casos da un número natural y en otros no da un número natural.

Ejemplo: aplicar el operador $\frac{2}{3}$x a 6.

El resultado de aplicar este operador es equivalente a aplicar sucesivamente los operadores 2 x y $\frac{1}{3}$x en cualquier orden, así:

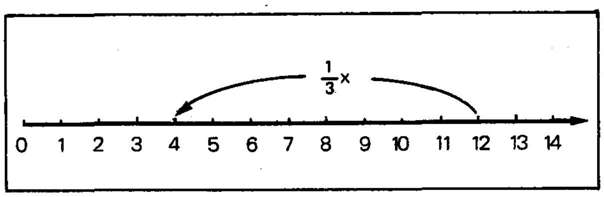
Primero aplicamos el operador 2 x.

$$2 \times (6) = 12$$



Enseguida aplicamos el operador $\frac{1}{3}$x.

$$\tfrac{1}{3}\times (12) = \tfrac{12}{3} = 4$$



El resultado es 4, que es un número natural.

$$6 \xrightarrow{2\times} 12 \xrightarrow{\frac{1}{3}\times} 4$$

$$\tfrac{1}{3}\times [\,2\times (6)\,] = \tfrac{1}{3}\times (12) = \tfrac{12}{3} = 4$$

$$6 \xrightarrow{\frac{2}{3}\times} 4$$

En el otro órden se tendría:

$$6 \xrightarrow{\frac{1}{3}\times} 2 \xrightarrow{2\times} 4$$

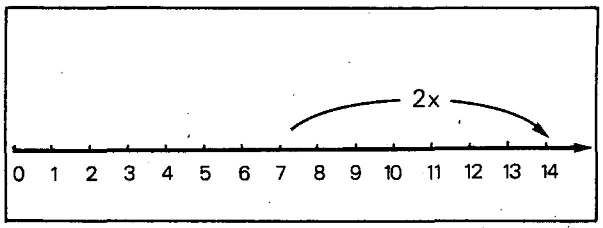
$$2\times [\,\tfrac{1}{3}\times (6)\,] = 2\times (2) = 4$$

$$6 \xrightarrow{\frac{2}{3}\times} 4$$

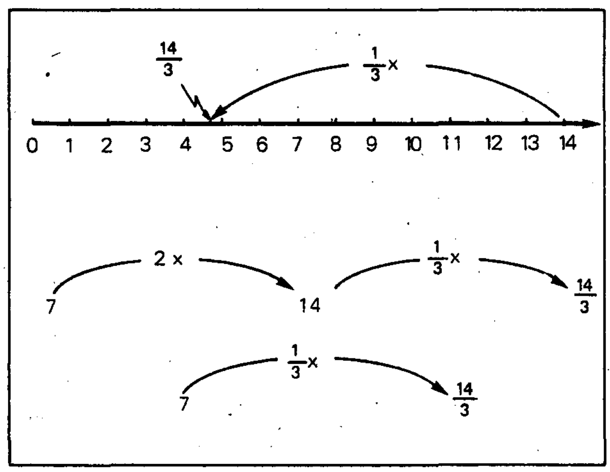
Si a 7 le aplicamos el mismo operador el resultado ya no es un número natural.

Veamos: Primero apliquemos el operador 2 x.

$$2\times (7) = 14$$



Luego el operador $\frac{1}{3}$x. En este caso hay que hacer una marca adicional entre 4 y 5; porque el resultado no es un número natural.



SUGERENCIAS METODOLOGICAS

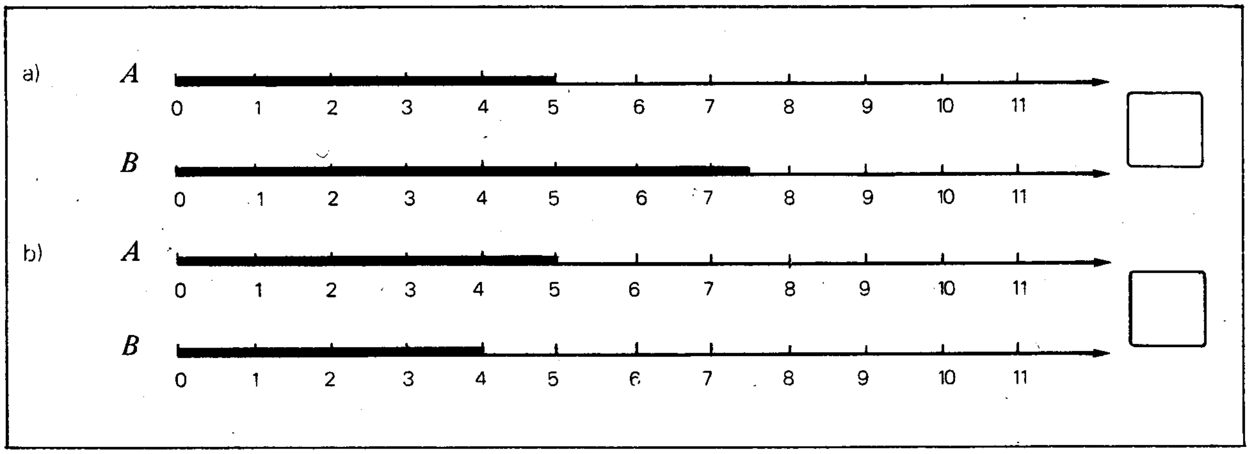
Se pueden proponer algunos ejercicios como los siguientes:

Llenar los espacios en blanco.

$$6 \xrightarrow{\frac{2}{5}\times} \square \qquad 12 \xrightarrow{\square} 18$$

$$10 \xrightarrow{\square} \frac{20}{3} \qquad 2 \xrightarrow{\frac{4}{3}\times} \square$$

Escribir el operador que se aplicó al número representado en la semirrecta A para obtener el número representado en la semirrecta B.



OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
53 Identificar los números fraccionarios positivos como los resultados de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno.	El alumno denominará fraccionarios positivos a los resultados de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno.
54 Reconocer que el resultado de aplicar un operador de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno, es un número fraccionario positivo que representamos por la fracción $\frac{a}{b}$.	El alumno llamará fraccionario positivo $\frac{a}{b}$ al resultado de aplicar el operador $\frac{a}{b}\times$ al uno.
55 Reconocer que el mismo número fraccionario puede estar representado por distintas fracciones de la forma $\frac{a}{b}$.	Dado un número fraccionario, el alumno hallará cinco fracciones distintas que lo representen.

CONTENIDOS BASICOS

Al conjunto que se obtiene de los resultados de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno, se le llama "números fraccionarios positivos".

Si aplicamos un operador de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno, se obtiene el número fraccionario positivo, representado por la fracción $\frac{a}{b}$, en donde a es el numerador y b es el denominador. El numerador indica las veces que se tuvo que aumentar el uno y el denominador las veces que tuvo que disminuirse.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Aplicarán diferentes operadores de la forma $\frac{a}{b}$x al uno y obtendrán el conjunto de números fraccionarios como los resultados de dichos operadores.

Ejemplos: $\frac{1}{2} \times (1) = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{5} \times (1) = \frac{3}{5}$

$\frac{7}{3} \times (1) = \frac{7}{3}$ $\quad \frac{6}{3} \times (1) = \frac{6}{3}$ $\quad \frac{6}{10} \times (1) = \frac{6}{10}$

Observarán que algunos operadores producen el mismo resultado o sea el mismo número fraccionario. Este fraccionario puede ser representado de muchas maneras.

Ejemplo: el fraccionario $\frac{2}{5}$ se obtiene de aplicar al uno, entre otros, los siguientes operadores:

$\frac{2}{5}\times, \quad \frac{4}{10}\times, \quad \frac{6}{15}\times, \quad \frac{8}{20}\times$

Las fracciones $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}$ son representaciones para el mismo número fraccionario. De estas fracciones se dice que "son iguales" porque representan el mismo número fraccionario, no porque sean "iguales" como fracciones, pues si las miramos como dibujitos, no tienen los mismos numeradores y denominadores, o sea que no serán "iguales".

Para reconocer las fracciones que representan el mismo número fraccionario se utiliza la simplificación y la complificación de fracciones.

Podrán hacer algunos ejercicios como los siguientes:

- Hallar 5 fracciones iguales a la fracción: $\frac{3}{5}$.
- Hallar 5 fracciones que no se puedan simplificar, y que sean iguales a las cinco fracciones siguientes:

  $\frac{3}{6}, \frac{14}{18}, \frac{55}{100}, \frac{63}{126}, \frac{3}{16}$
- Simplificar la fracción $\frac{136}{240}$.

OBJETIVO ESPECIFICO

56 Analizar en la semirrecta numérica las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que..." entre números fraccionarios.

INDICADORES DE EVALUACION

Dados dos números fraccionarios el alumno dirá cuál de ellos es el mayor.

Dados varios números fraccionarios el alumno los ordenará descendentemente.

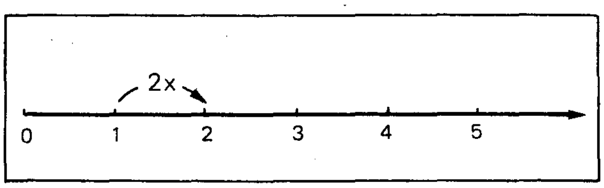
CONTENIDOS BASICOS

Sobre la semirrecta numérica, en donde se representaron los números naturales, podemos representar algunos números fraccionarios.

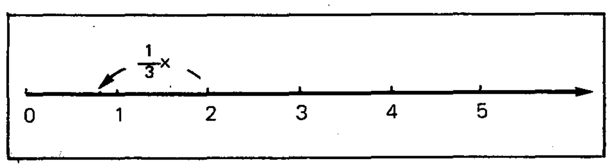
Como los número fraccionarios positivos son el resultado de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}$x al uno (con $a \neq 0$ y $b \neq 0$), para representarlos en la semirrecta numérica se hará aplicando operadores de la forma $\frac{a}{b}$x uno y marcando el resultado.

Ejemplo: representar $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}$.

Al aplicar el operador $\frac{2}{3}$x al uno, se duplica la unidad de longitud y luego se reduce a la tercera parte o viceversa.



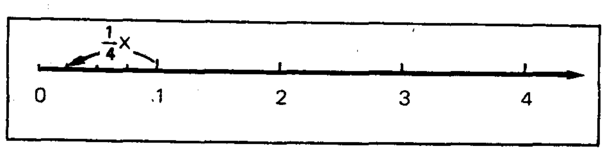
Ahora estas dos unidades de longitud se reducen a la tercera parte, dividiendo en tres partes iguales esta longitud y marcando una de estas divisiones, así:



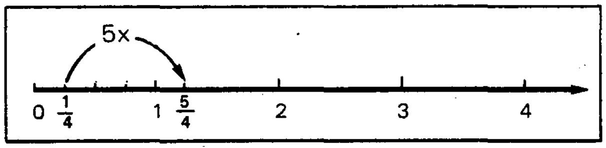
El efecto de $\frac{2}{3}$x sobre 1, es disminuirlo, ya que quedó a la izquierda de 1.

Al aplicar el operador $\frac{5}{4}$ x al uno se disminuye a la cuarta parte la unidad de longitud y luego se quintuplica este resultado, o, viceversa.

Para disminuir a la cuarta parte la longitud del primer segmento, se divide en 4 partes iguales y se marca una.



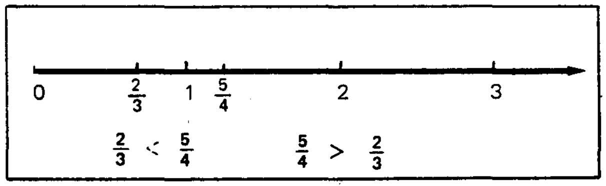
Luego esta longitud se quintuplica y se marca el resultado.



Todo número representado a la izquierda de otro, es menor que ese otro.

Todo número representado a la derecha de otro, es mayor que ese otro.

Ejemplo:



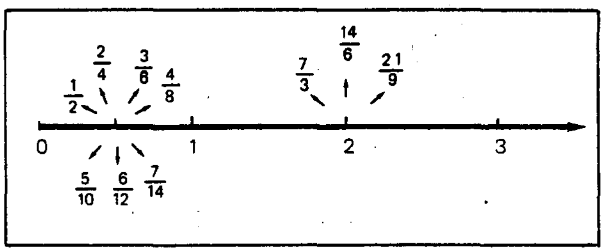
El efecto de este operador es aumentar ya que el resultado está representado a la derecha del uno.

Al representar varios números fraccionarios en la semirecta numérica se pueden analizar entre ellos las relaciones "... es mayor que ..." y "... es menor que ..." así:

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Harán la representación gráfica de varios números fraccionarios aplicando operadores de la forma $\frac{a}{b}$x al uno (con $a \neq 0$ y $b \neq 0$). Se puede hacer la aplicación de los operadores de las dos maneras para que el alumno luego elija la que más se le facilite (aplicando primero el operador a x y luego el operador $\frac{1}{b}$x o aplicando primero el operador $\frac{1}{b}$x y luego a x).

Observarán que unos resultados caerán antes del uno, otros en el uno y otros después del uno, es decir unos operadores aumentan, otros dejan como está y otros disminuyen respectivamente. Observarán también que en un mismo punto de la semirrecta pueden estar anotadas varias fracciones.



Se podrán proponer algunos ejercicios como los siguientes:

- Colocar adecuadamente el símbolo >, <, o, = entre las siguientes fracciones:

$\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}$ $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$; $\frac{5}{4}$ $\frac{1}{3}$; $\frac{4}{7}$ $\frac{2}{3}$; 2 $\frac{1}{2}$

- Ordenar descendentemente las siguientes fracciones:

$\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{6}{3}$

OBJETIVO ESPECIFICO

57 Analizar sobre la recta numérica el efecto de aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x al uno y relacionar esta aplicación de operadores con la multiplicación de números fraccionarios.

INDICADOR DE EVALUACION

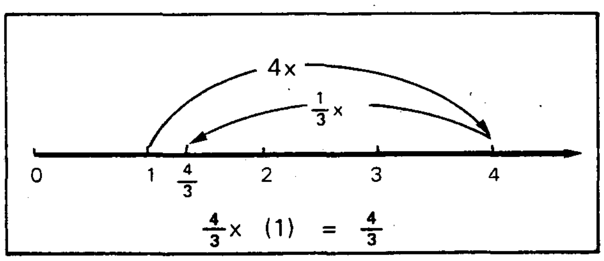
Dados dos operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x, el alumno analizará en la recta numérica el resultado de aplicarlos sucesivamente al uno y relacionará este resultado con la multiplicación de los dos números fraccionarios correspondientes.

CONTENIDOS BASICOS

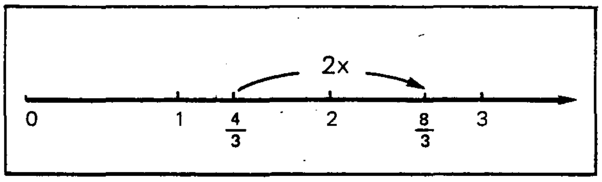
El efecto de aplicar sucesivamente al uno dos operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x es aumentar, disminuir o dejar como está. Estos operadores se pueden aplicar en cualquier orden y el resultado siempre es el mismo.

Ejemplo: Aplicar sucesivamente los operadores $\frac{4}{3}$ x y $\frac{2}{3}$ x.

Apliquemos primero el operador $\frac{4}{3}$ x y después el operador $\frac{2}{3}$ x.



A este resultado ($\frac{4}{3}$) apliquemos ahora el operador $\frac{2}{3}$ x.

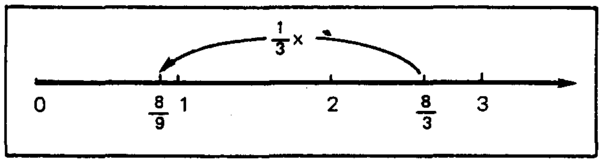


Al aplicar el operador 2 x a $\frac{4}{3}$ se obtiene:

$2 \times (\frac{4}{3}) = \frac{8}{3}$

y al aplicar el operador $\frac{1}{3}$ x a $\frac{8}{3}$ se obtiene:

$\frac{1}{3} (\frac{8}{3}) = \frac{8}{9}$.



Pueden aplicar los operadores en el otro orden: primero $\frac{2}{3}$ x y luego $\frac{4}{3}$ x. Los alumnos observarán que el fraccionario $\frac{8}{9}$ es el resultado de aplicar el operador $\frac{8}{9}$x al uno es decir que el efecto de aplicar sucesivamente al uno los operadores $\frac{4}{3}$x y $\frac{2}{3}$x es equivalente con el efecto de aplicar al uno el operador $\frac{8}{9}$x.

$$\frac{2}{3}\times \left[\frac{4}{3}\times (1) \right] = \frac{2}{3}\times (\frac{4}{3}) = \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9}\times (1) = \frac{8}{9}$$

El efecto de aplicar sucesivamente al uno, los operadores $\frac{a}{b}$ x, y $\frac{c}{d}$ x es equivalente con el de aplicar el operador $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}$x al uno, en donde el signo $\otimes$ se lee "de":

$$\frac{a}{b}\times \left[\frac{c}{d}\times (1) \right] = \left[\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} \right] \times (1)$$

El resultado de aplicar el operador $\frac{a}{b}$ x $\frac{c}{d}$ x al uno es el número fraccionario que escribimos:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$$

Los alumnos descubrirán pronto que la fracción $\frac{a \times c}{b \times d}$ representa el mismo resultado que $\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d}$x (1). No debe darse esta regla de multiplicar numeradores y denominadores hasta que el alumno no comprenda lo que está haciendo al aplicar sucesivamente los dos operadodores; ojalá descubra por sí mismo el truco para escribir rápidamente el resultado. Una vez que todos los hayan descubierto, podrá omitirse el círculo alrededor del signo x .

De la práctica de aplicar sucesivamente estos operadores se puede pasar a multiplicar números fraccionarios ya que $\frac{a \times c}{b \times d}$ es la fracción que representa al número fraccionario que obtenemos al aplicar sucesivamente $\frac{c}{d}$x y luego $\frac{a}{b}$x al uno.

Ejemplo: La aplicación sucesiva al uno de los operadores $\frac{3}{5}$x y $\frac{1}{4}$x da como resultado el número fraccionario $\frac{3}{20}$ que es el resultado que se obtiene si se hubiera aplicado el operador $\frac{3}{20}$ x al uno.

$$\frac{3}{5}\times \left[\frac{1}{4}\times (1) \right] = \left[\frac{3}{5} \otimes \frac{1}{4} \right] \times (1);$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20}$$

Para multiplicar dos o más fraccionarios se escriben las fracciones respectivas, se multiplican entre sí los numeradores y entre sí los denominadores, resulta una fracción que a veces puede simplificarse.

Ejemplo: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 1 \times 3}{3 \times 4 \times 5} = \frac{6}{60}$

Se simplifica el resultado $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Pueden iniciar haciendo algunos ejercicios de aplicación sucesiva de operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x a magnitudes, como:

Hallar $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de una longitud de 40 m.

Hallar $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$ de una superficie que tiene 50 m^2 de área.

Hallar la mitad de la tercera parte de $ 900.

El profesor hará notar el uso del "de" para indicar la aplicación sucesiva de operadores.

Después pueden aplicar sucesivamente operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x al uno y sacar algunas conclusiones como:

- El resultado de aplicar sucesivamente los operadores $\frac{a}{b}$x y $\frac{c}{d}$x al uno, es otro operador de la misma forma, que resulta de multiplicar los dos anteriores.

Notamos: $\frac{a}{b} \times \left[\frac{c}{d} \times (1) \right] = \left[\frac{a}{b} \otimes \frac{c}{d} \right] \times (1)$

encerrado con un círculo el signo x para hacer notar que se lee "de": $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{4}$ se lee "la mitad **de** la cuarta parte".

Pueden aplicar sucesivamente tres o más operadores al uno para que analicen el resultado.

También pueden hacer varios ejercicios de aplicación sucesiva de operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x al uno en la recta numérica, como los siguientes:

- Aplicar sucesivamente al uno los operadores $\frac{3}{5}$x, $\frac{2}{3}$x.
- Hallar el operador cuyo efecto es equivalente al efecto de aplicar sucesivamente los operadores $\frac{2}{5}$x y $\frac{3}{2}$x.
- Hallar dos operadores cuyo efecto de aplicarlos sucesivamente al uno, sea equivalente al efecto de aplicar el operador $\frac{6}{15}$ x al uno.

En cada caso analizarán el efecto que se produce al aplicar sucesivamente los dos operadores al uno. Utilizarán ⊗ para leer "los dos quintos **de** los tres medios". Después de varios ejercicios, ellos mismos podrán concluir que para hallar la fracción que representa al operador cuyo efecto es equivalente al efecto de aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $\frac{a}{b}$x, se multiplican las fracciones que representan a los dos operadores. Entonces se podrá abandonar el círculo alrededor de la x.

Harán varios ejercicios de multiplicación de fracciones como los siguientes:

Multiplicar: $\frac{2}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$ $\quad \frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$ $\quad \frac{4}{2} \times \frac{2}{5}$

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
58 Resolver y formular problemas que requieran de la multiplicación de números fraccionarios.	El alumno formulará un problema que requiera de la multiplicación de fraccionarios y lo resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

De la práctica de aplicar sucesivamente operadores de la forma $\frac{a}{b}$ x, resulta la multiplicación de números fraccionarios. Se pueden resolver algunos problemas para practicar el algoritmo de esta operación.

Ejemplo: En un pueblo hay 5000 habitantes. Los $\frac{3}{5}$ del número de habitantes son mujeres. Si los $\frac{2}{3}$ del número de mujeres son estudiantes. ¿Qué parte de los habitantes del pueblo son mujeres que estudian? ¿Cuántas mujeres estudian?

Pueden resolverlo de varias maneras. Una puede ser la siguiente: Hallando primero el operador que produce el mismo resultado que se obtiene al aplicar sucesivamente los operadores $\frac{3}{5}$x y $\frac{2}{3}$x.

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Dicho operador es $\frac{2}{5}$x. Aplicando luego este operador a la magnitud que en este caso es 5000.

$$\frac{2}{5}\times \ (5000) = \frac{10000}{5} = 2000$$

$\frac{2}{5}$ de los habitantes del pueblo son mujeres que estudian: 2000 mujeres estudian.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Los alumnos pueden formular otros problemas en los que haya que aplicar sucesivamente dos o más operadores a una misma magnitud y así tengan la oportunidad de aplicar la multiplicación de números fraccionarios.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
59 Identificar el inverso multiplicativo de un número fraccionario.	Dados cinco números fraccionarios el alumno hallará el inverso multiplicativo de cada uno de ellos.

CONTENIDOS BASICOS

El resultado de aplicar al uno un operador de la forma $\frac{a}{b}$ x (con $a \neq 0$, $b \neq 0$) es un número fraccionario.

Si queremos anular el efecto de dicho operador, aplicamos el operador de la forma $\frac{b}{a}$x, al resultado de haber aplicado el operador anterior.

$$\frac{a}{b}\times \left[\frac{b}{a}\times (1)\right] = \left(\frac{a}{b} \otimes \frac{b}{a}\right) \times (1);$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{a \times b}{b \times a} = 1$$

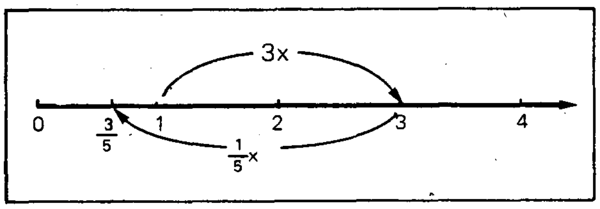
$\frac{b}{a}$x es el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$x.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

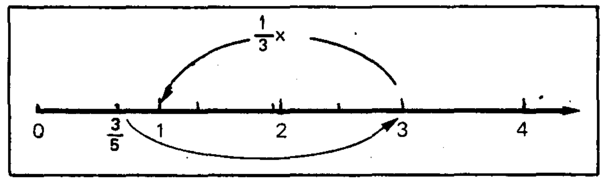
Inicialmente hallarán el inverso multiplicativo, aplicando operadores en la semirrecta numérica.

Ejemplo: Hallar el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}x$.

El efecto del operador $\frac{3}{5}x$ al aplicarlo al uno es triplicar y luego disminuir a la quinta parte. (o viceversa).



Para anular el efecto de dicho operador se tendrá que aplicar un operador que aumente cinco veces (5x) y luego disminuya a la tercera parte ($\frac{1}{3}x$). Este operador es $\frac{5}{3}x$; se obtiene nuevamente el 1.



$$\frac{5}{3}x\ [\ \frac{3}{5}x\ (1)\ ] = (\ \frac{5}{3} \times \frac{3}{5}\ )\ x\ (1)$$

$\frac{5}{3}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$

$$\frac{5}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{15} = 1$$

El producto de un número fraccionario por su inverso multiplicativo siempre es 1. El profesor insistirá en que ésto es lo natural: si el fraccionario que primero se aplicó al uno lo amplió, su inverso vuelve a reducir ese resultado otra vez al uno, y si el primero redujo al uno, su inverso vuelve a aumentar ese resultado hasta caer otra vez en el uno. El inverso de un ampliador es pues un reductor (o el de un reductor es un ampliador) que compensa exactamente la transformación hecha por el primero.

OBJETIVO ESPECIFICO

60 Efectuar la división entre dos números fraccionarios.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados dos números fraccionarios el alumno efectuará la división.

CONTENIDOS BASICOS

Para dividir los fraccionarios, se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

Ejemplo: $\frac{3}{5} \div \frac{2}{9} = \frac{3}{5} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{10}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En el grado anterior los alumnos buscaron un procedimiento para efectuar la división de fraccionarios partiendo de que "dividir es equivalente a encontrar un factor desconocido".

Ejemplo: $\frac{3}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{\square}{\square}$

Esto es equivalente a $\frac{1}{2} \times \frac{\square}{\square} = \frac{3}{10}$

$1 \times \square = 3$, $2 \times \square = 10$. Los números que reemplazan los cuadros son 3 y 5 respectivamente. Así el fraccionario es $\frac{3}{5}$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

Se puede concluir que: $\frac{3}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$

Posteriormente y a partir de este procedimiento encontrarán uno más abreviado que consiste en multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor:

$$\frac{3}{10} \div \frac{1}{2} = \frac{3}{10} \times \frac{2}{1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Es conveniente efectuar varias divisiones por el primer método y a partir de éste ojalá los mismos alumnos descubran el método abreviado. Pero no debe enseñarse el método abreviado hasta que los alumnos sepan qué es lo que abrevia.

OBJETIVO ESPECIFICO

61 Analizar sobre la semirrecta numérica el efecto de adicionar dos números fraccionarios y practicar el algoritmo de esta operación.

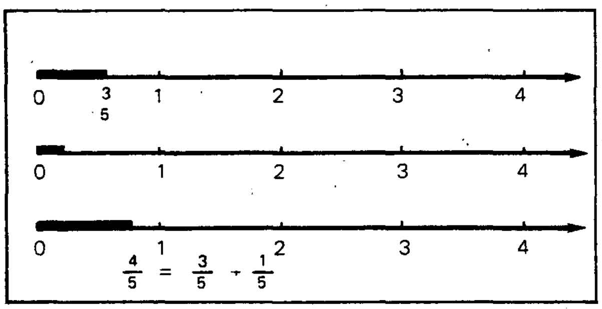
INDICADOR DE EVALUACION

Dados tres números fraccionarios el alumno efectuará la adición entre ellos.

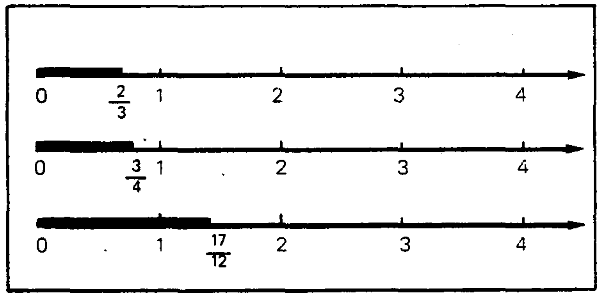
CONTENIDOS BASICOS

Para adicionar dos números fraccionarios en la semirrecta numérica, se presenta cada uno de ellos en una semirecta (así se determinan dos segmentos, en los que el extremo izquierdo es el cero y el extremo derecho es cada uno de los fraccionarios) luego en otra semirrecta se coloca uno a continuación del otro. De esta manera se obtiene un nuevo segmento, cuyo extremo izquierdo es el cero y el extremo derecho es el fraccionario que resulta de adicionar los dos fraccionarios dados.

Ejemplo: Adicionar en la semirrecta numérica los fraccionarios $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{5}$



Adicionar en la semirrecta numérica los fraccionarios $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.



$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12}$$

Para efectuar la adición de fraccionarios pueden emplear alguno de los algoritmos conocidos.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente adicionarán el efecto de dos operadores cuando son aplicados a una magnitud.

Ejemplo: $\frac{1}{2}$ (metro) + $\frac{1}{4}$ (metro)

$\frac{3}{5}$ (litro) + $\frac{1}{3}$ (litro)

Posteriormente adicionarán dos o más fraccionarios en la semirrecta numérica, primero con fracciones que tengan el mismo denominador y luego con fracciones de distinto denominador. Al mismo tiempo van practicando cualquiera de los algoritmos para la adición de fraccionarios.

Finalmente harán algunos ejercicios como los siguientes:

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{8} + 2$ b) $8 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

En cada caso podrán estimar el resultado antes de efectuar la operación, tratando de predecir si es mayor que 1, o si está entre 1 y 2, o entre 2 y 3, etc.

OBJETIVO ESPECIFICO

62. Analizar sobre la semirrecta numérica el efecto de la sustracción de dos números fraccionarios y practicar el algoritmo de esta operación.

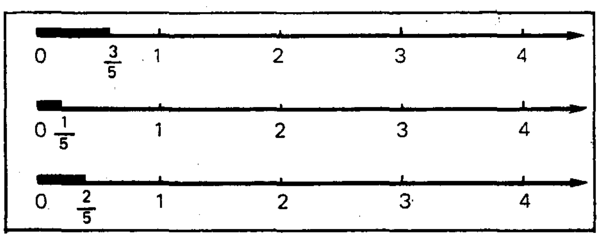
INDICADOR DE EVALUACION

Dados dos números fraccionarios el alumno efectuará la sustracción entre ellos.

CONTENIDOS BASICOS

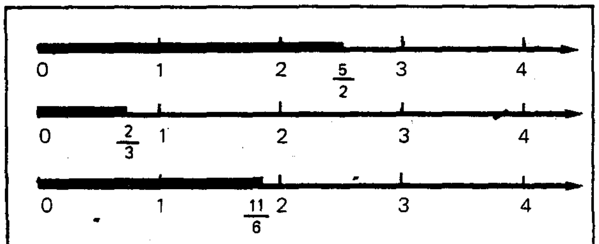
Para efectuar la sustracción de dos números fraccionarios en la semirrecta numérica se representa cada uno de ellos en una semirrecta determinando dos segmentos, luego en otra semirrecta se coloca uno encima del otro de tal manera que los extremos derechos coincidan. Así se obtiene otro segmento cuyo extremo izquierdo es el cero y cuyo extremo derecho es el fraccionario que resulta de efectuar la sustracción de los dos fraccionarios.

Ejemplo: Efectuar la sustracción de $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{5}$.



$$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

- En la semirrecta numérica resta $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{2}$.



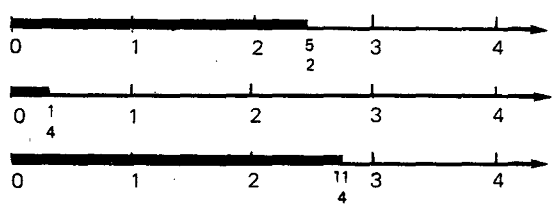
$$\frac{5}{2} - \frac{2}{3} = \frac{15 - 4}{6} = \frac{11}{6}$$

Hay varios algoritmos (ya conocidos) para efectuar la sustracción de dos números fraccionarios.

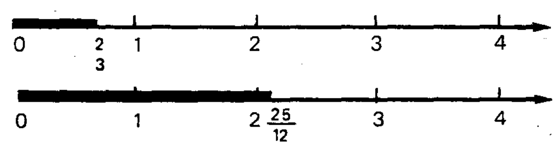
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente efectuar la sustracción entre dos fraccionarios en la semirrecta numérica, posteriormente hacer ejercicios de adición y sustracción combinadas tanto en la semirrecta numérica como practicando el algoritmo.

Ejemplo: Efectuar en la semirrecta: $\frac{5}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$.



$$\frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{10 + 1}{4} = \frac{11}{4}$$



$$\frac{11}{4} - \frac{2}{3} = \frac{33 - 8}{12} = \frac{25}{12}$$

OBJETIVO ESPECIFICO

63 Resolver y formular problemas que requieran el uso de operaciones con fraccionarios.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno formulará dos problemas que requieran del uso de operaciones con fraccionarios para resolverlos.

CONTENIDOS BASICOS

Pueden resolver algunos problemas como los siguientes:

- Carlos pintó $\frac{2}{7}$ del área de una pared durante la mañana. Al medio día pintó $\frac{3}{5}$ más del área de la misma pared y por la tarde $\frac{1}{10}$ más del área. ¿Qué tanto del área de la pared le hace falta por pintar?

- De un terreno de 400 m^2 de área se vendieron $\frac{2}{5}$ de área a $ 10000 cada m^2. ¿Cuánto dinero se recibió por esta venta?

- La cuarta parte de la duración de un día la emplea Juanito para ir al Colegio; la sexta parte para hacer las tareas, la doceava parte para divertirse y el resto de la duración del día para dormir. ¿Qué parte de la duración del día emplea Juanito para dormir?

- Roberto tiene $ 5000 para gastarlos de la siguiente manera: con $\frac{2}{5}$ del dinero compra libros, con $\frac{1}{4}$ del dinero compra zapatos y con el resto compra dos camisas. ¿A cómo compró cada camisa?

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se partirá de situaciones reales, teniendo el cuidado de que los alumnos inicialmente resuelvan cada problema como lo harían en su vida práctica, y posteriormente observen que se pueden utilizar los números fraccionarios para encontrar la solución.

Se puede aprovechar para que los alumnos recuerden el efecto de cada operador, el resultado que produce, su representación en la semirrecta numérica, etc.

Cuando hayan resuelto un número suficiente de ejercicios, se les pedirá que formulen algunos problemas tomados de sus actividades diarias; el profesor los orientará para que ellos mismos se den cuenta de los datos que hacen falta o que sobran.

OBJETIVO ESPECIFICO

64 Reconocer como fraccionarios propios los que están entre cero y uno y los demás como impropios y expresar éstos últimos con notación mixta.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados varios fraccionarios el alumno dirá de cada uno si es propio o impropio y expresará los impropios con notación mixta.

CONTENIDOS BASICOS

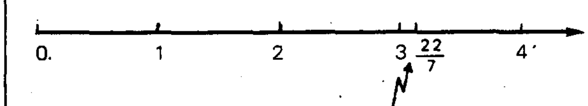
Al aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}$x al uno, en la semirrecta numérica el resultado está antes del uno, en el uno o después del uno. Esto quiere decir que cualquier número fraccionario es menor que uno, igual a uno o mayor que uno.

Los fraccionarios positivos menores que uno (o sea los que están entre 0 y 1) se llaman "fraccionarios propios" y las fracciones que los representan tienen el numerador estrictamente menor que el denominador.

Los fraccionarios iguales que uno o mayores que uno se llaman "fraccionarios impropios" y las fracciones que los representan tienen el numerador mayor o igual que el denominador.

Un número fraccionario estrictamente mayor que uno es igual a la suma de un número natural y un fraccionario propio. Para hallar dichos sumandos se descompone la fracción como la suma de dos fraccionarios del mismo denominador; en una de ellas el numerador será múltiplo del denominador (así se obtiene el natural) y la otra será una fracción propia.

Ejemplo: Al representar en la semirrecta numérica, el fraccionario $\frac{22}{7}$ se obtiene 3 y un poquito. ¿Cuánto es ese poquito?



$\frac{22}{7} = \frac{21}{7} + \frac{1}{7} = 3 + \frac{1}{7}$ Tres y un poquito

$\frac{22}{7}$ se puede expresar como la suma del entero 3 y el fraccionario propio $\frac{1}{7}$.

3 + $\frac{1}{7}$ se puede abreviar omitiendo el signo + entre ellos: $3\frac{1}{7}$ que es la llamada notación mixta.

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3\frac{1}{7}$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden proponer algunos ejercicios como los siguientes:

- Representar en la semirrecta numérica los siguientes fraccionarios y decir cuáles son propios y cuáles son impropios.

  $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{3}$

- Establecer la relación adecuada (> , < , =) entre cada uno de los siguientes fraccionarios y el uno:

  $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{9}{3}$

Se puede utilizar la semirrecta numérica para identificar un número fraccionario estrictamente mayor que uno, como la suma de un natural y un fraccionario propio.

Pueden hacer algunos ejercicios como los siguientes:

- Expresar en notación mixta: $3 + \frac{1}{2}$, $8 + \frac{5}{7}$, $1 + \frac{2}{7}$.

- Expresar como una suma y como una fracción impropia cada uno de los siguientes fraccionarios en notación mixta:

  $2\frac{1}{2}$ $3\frac{1}{8}$ $12\frac{7}{8}$

- Utilizar la notación mixta para expresar las siguientes fracciones impropias.

  $\frac{21}{5}$, $\frac{32}{3}$, $\frac{41}{7}$, $\frac{47}{9}$

- Efectuar las siguientes operaciones entre fraccionarios:

  $\frac{22}{3} + \frac{11}{4} + \frac{2}{5}$ $5\frac{1}{3} \times 2\frac{3}{5}$

  $2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{5} + 8\frac{3}{4}$ $8\frac{1}{4} - 6\frac{2}{7}$

OBJETIVO ESPECIFICO

65 Reconocer como fracciones decimales las fracciones con denominador diez y representarlas mediante una expresión decimal.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados varias fracciones el alumno identificará aquellas que tengan denominador diez o potencia de diez como fracciones decimales y las representará mediante una expresión decimal.

CONTENIDOS BASICOS

Las fracciones como: $\frac{3}{10}$, $\frac{20}{100}$, $\frac{35}{1000}$, $\frac{78}{10000}$, que tienen denominador diez o potencia de diez, se suelen llamar "fracciones decimales".

Estas fracciones se pueden representar mediante una expresión decimal en donde se separa la parte entera mediante un punto (hasta hace poco se usaba una coma más que un punto). Este punto se llama "punto decimal"

Para la representación se siguen los mismos pasos del sistema de numeración en base diez, en el sentido de que la posición ocupada por un dígito señala un valor diez veces menor que el valor señalado por la posición que está inmediatamente a la izquierda.

Ejemplo: $123.456 = (1 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1) + (4 \times \frac{1}{10}) + (5 \times \frac{1}{100}) + (6 \times \frac{1}{1000})$.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para representar una fracción decimal impropia mediante una expresión decimal se puede transformar la fracción en la suma de un natural y una fracción propia. Si la fracción es propia el natural es cero y la fracción será la misma. El número natural que resulta de la descomposición se acostumbra llamarlo "parte entera" del fraccionario.

Ejemplo: $\frac{25}{10} = \frac{20}{10} + \frac{5}{10} = 2 + \frac{5}{10} = 2 + (5 \times \frac{1}{10}) =$ 2 más 5 décimas.

Siguiendo los pasos de la numeración decimal se tiene $\frac{25}{10} = 2.5$, y en esta expresión.

2 es la parte entera y 5 es la parte decimal.

$\frac{7}{100} = 0 + (0 \times \frac{1}{10}) + (7 \times \frac{1}{100}) = 0.07$

que se lee "siete centésimas".

0 es la parte entera y 07 la parte decimal.

$\frac{1257}{10} = \frac{1250}{10} + \frac{7}{10} = 125 + \frac{7}{10} = (1 \times 100) + (2 \times 10) + (5 \times 1) + (7 \times \frac{1}{10}) = 125.7$

Se puede aprovechar esta actividad para que los alumnos reconozcan fracciones decimales equivalentes.

Ejemplo: $\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$ $\quad 0.3 = 0.30 = 0.300$

OBJETIVO ESPECIFICO

66 Aproximar mediante expresiones decimales otro tipo de fracciones.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno expresará mediante un decimal algunas fracciones.

CONTENIDOS BASICOS

Las fracciones cuyo denominador es 10 o una potencia de 10 (fracciones decimales) se pueden representar también mediante una expresión decimal. En 4o. y 5o. grado los alumnos conocían estas expresiones decimales como "los números decimales". Pero además de las fracciones decimales, cualquier otra fracción se puede representar también mediante una expresión decimal; basta efectuar la división del numerador entre el denominador. En algunos casos el residuo de estas divisiones es cero y las representaciones "terminan" después de un número finito de cifras. Estos decimales se llaman decimales exactos.

Ejemplo: $\frac{1}{2} = 0.5$ $\qquad \frac{3}{4} = 0.75$

Pero en otros casos al efectuar las divisiones el residuo nunca es cero y las expresiones decimales nunca terminan.

Ejemplo: $\frac{1}{3}$ = 0.333 . . . = $0.\overline{3}$

$\frac{8}{7}$ = 1.142857142857 . . . = $1.\overline{142857}$

$\frac{11}{15}$ = 0.7333 . . . = $0.7\overline{3}$

En estas divisiones se observa que después de un cierto momento se repiten algunas cifras del cociente, lo cual indicamos con una barra sobre el conjunto de números que se repiten indefinidamente y forman el período. A estas expresiones decimales, las llamamos "decimales periódicas".

De esta manera todo número fraccionario se puede expresar como un decimal exacto o como un decimal periódico.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es conveniente que los alumnos efectúen las divisiones y saquen las conclusiones respectivas. Al efectuar la división para obtener un decimal periódico, posiblemente los alumnos se cansen de seguir colocando la misma o las mismas cifras en el cociente y opten por colocar los puntos suspensivos. Sin embargo, no hay precisión sobre lo que esos puntos suspensivos al final significan. Para que desaparezca toda ambigüedad se coloca una raya o barra sobre el conjunto de números que se repite o período.

Así, si se obtienen los decimales: 25.121212 . . . y 2.3121212 . . . ¿Qué significan los puntos suspensivos en cada uno de ellos? Para precisarlo utilicemos la barra. En $25.\overline{12}$ el período es 12. En $2.3\overline{12}$ el período es 12, no 312.

OBJETIVO ESPECIFICO

67 Analizar las relaciones "...es mayor que..." y "...es menor que ..." entre números decimales.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados dos decimales, el alumno dirá cuál es el mayor y cuál es el menor.

CONTENIDOS BASICOS

Para comparar dos decimales y decir cuál de ellos es mayor o cuál es menor, se puede comparar una a una la cifra de las centenas, la cifra de las decenas, la cifra de las unidades, la cifra de las décimas, etc. de los dos decimales, comenzando por la primera cifra de la izquierda donde las cifras son diferentes.

Ejemplo: 32.45 > 32.43 (5 es mayor que 3)

0.256 < 0.257 (6 es menor que 7)

0.705 < 0.75 (0 es menor que 5)

245.32 < 245.52 (3 es menor que 5)

1.375 > 1.365 (7 es mayor que 6)

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden hacer algunos ejercicios como los siguientes:

Si un artículo cuesta en un almacén $127.75 y en otro cuesta $127.85. ¿En qué almacén es más caro el artículo?

Ordenar ascendentemente: 0.385, 0.358, 0.853, 0.835, 0.583.

- Busque un decimal comprendido entre 0.825 y 0.827.

- ¿Cuáles de los siguientes decimales están entre 0.752 y 0.705?

0.750, 0.725, 0715, 0.775, 0.757

OBJETIVO ESPECIFICO

68 Practicar el algoritmo de la adición, el de la sustracción, el de la multiplicación y el de la división de números decimales.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno efectuará una adición, una sustracción, una multiplicación y una división de números decimales.

CONTENIDOS BASICOS

Desde el Cuarto Grado de Educación Básica Primaria los alumnos han venido trabajando con números decimales. En este grado se hará un repaso de los algoritmos o procedimientos más conocidos para resolver cada una de estas operaciones.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden plantear algunos problemas cuya solución requiera del uso de la adición y la sustracción de decimales para que al resolverlos los alumnos practiquen el algoritmo de cada una de estas operaciones.

Ejemplo: Hallar el perímetro de un terreno triangular cuyos lados miden: 30.835 m, 27.35 m, y 31.22 m.

Es conveniente que hagan algunos ejercicios de cálculo mental, estimando aproximadamente la magnitud del resultado de una adición o de una sustracción de decimales, sin hacer el cálculo escrito.

Ejemplo: Calcular aproximadamente el resultado de:

$$3.684 + 12.2 + 32.53 + 21.32$$

Pueden tomar como referencia la parte entera del decimal:

$$3 + 12 + 32 + 21 = 68$$

Esta aproximación es suficiente. Si queremos una mejor, sumamos mentalmente las décimas y obtenemos: $6 + 2 + 5 + 3 = 16$ décimas como aproximación, por estas décimas se pueden aumentar dos unidades, que al sumarlas con las 68 anteriores nos da 70 unidades. Luego el resultado de la adición estará entre 69 y 70.

Se puede partir de varias situaciones de la vida diaria donde el alumno reconozca que para resolverlas es necesario efectuar multiplicaciones o divisiones entre decimales.

Ejemplo: Una puerta tiene forma rectangular. ¿Cuál será el área si mide 20.35 dm de largo y 12.37 dm de ancho?

Se compró un rollo de cinta cuya longitud es de 75.36m a $7.25 cada metro. ¿Cuánto se pagó por el rollo de cinta?

Por 25.85 libras de queso se pagó $2594.05 ¿Cuánto se pagó por cada libra de queso?

El área de un terreno rectangular es de 96.32 m^2 si el ancho del terreno es de 8.75 m. ¿Cuál es el largo del terreno?

Cuando hagan multiplicaciones se puede aprovechar para que los alumnos comprueben que se cumple la propiedad conmutativa.

También se pueden repasar multiplicaciones y divisiones abreviadas por 10, 100, 1000, etc., cuando uno de los factores o el dividendo es un número decimal, corriendo solo el punto decimal, ésto se puede hacer mediante conversiones de unidades de longitud, área, volumen, capacidad y peso en el sistema métrico decimal. Para estas conversiones hay que tener en cuenta el operador o factor de conversión que se va a utilizar.

Ejemplo: Convertir 32.475 m a dm.

En este caso el factor de conversión es: 10 x y al ampliarlo se corre el punto decimal un lugar a la derecha:

$$10 \times (32.475 \text{ m}) = 324.75 \text{ dm.}$$

Convertir 435.85 m^2 a Dm^2

En este caso el factor de conversión es $\frac{1}{100}$ x.

$$\frac{1}{100} \times (435.85 \text{ m}^2) = 4.3585 \text{ Dm}^2.$$

$$435.85 \text{ m}^2 = 4.3585 \text{ Dm}^2.$$

OBJETIVO ESPECIFICO

69 Resolver y formular problemas cuya solución requiere el empleo de las operaciones con decimales.

INDICADOR DE EVALUACION

El alumno formulará por lo menos dos problemas de su vida práctica cuya solución requiera el empleo de los decimales y los resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

Se pueden formular algunos problemas como los siguientes:

Se compran 3 docenas de camisas por $45018 y se quieren vender ganando a todas las camisas $1062.0. ¿Cuál es el valor de compra y cuál es el valor de venta de cada camisa?

- Se desea enbaldosar un patio que tiene 2636.55 dm^2 de área. Si se van a utilizar baldosas de forma rectangular cuyos lados miden: 21.7 cm y 24.3 cm. ¿Cuántas baldosas se necesitarán?

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es conveniente trabajar en grupo ya que el tema es apropiado para que los alumnos discutan. Se debe hacer énfasis en que el alumno entienda el enunciado del problema, en que identifique la información que posee y vea cuál es la mejor manera de emplearla para solucionar el problema. Posteriormente formularán algunos problemas, con base en sus juegos, en las compras, en las actividades del trabajo diario, etc. Entre todos revisarán los problemas realizados y harán las correcciones necesarias. Se puede aprovechar para que los alumnos elaboren un presupuesto familiar, para lo cual hay que tener en cuenta lo que gana mensualmente la familia y los gastos que se hacen como: vivienda, vestido, alimentación, salud, educación, recreación, etc. Se puede sugerir una presentación del presupuesto en un cuadro como éste.

	Ingresos Recibidos	**Gastos Realizados**
Salarios		
Otros Ingresos		
Arriendo		
Alimentación		
Vestido		
Educación		
Salud		
Recreación		

Para esta actividad es conveniente dedicar más de una sesión de clase.

Unidad V

ESTADISTICA

Introducción

Son objeto de estudio en esta unidad la recolección de datos estadísticos, su organización en tablas de frecuencias, la expresión de frecuencias en forma porcentual, fraccionaria, y decimal y su representación por medio de diagramas de líneas, de barras y circulares. Se hace algún análisis de los datos recogidos y tabulados mostrando lo que puede deducirse de ellos y cómo pueden compararse entre sí.

Objetivos generales

- Organizar datos en tablas de frecuencias y representarlos mediante diagramas.
- Discriminar entre diferentes tipos de frecuencias y sus expresiones numéricas.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

	OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
70	Ordenar un sistema de datos en una tabla de frecuencias absolutas.	Dado un conjunto de datos el alumno los ordenará en una tabla de frecuencias.
71	Realizar el diagrama de líneas que representa las frecuencias absolutas de un sistema de datos.	Dada la tabla de frecuencias de un sistema de datos el alumno realizará el diagrama de líneas correspondientes.
72	Determinar las frecuencias relativas y expresarlas en forma fraccionaria y porcentual.	Dada una tabla de frecuencias el alumno determinará la frecuencia relativa de cada casilla y la expresará en forma fraccionaria y porcentual.

CONTENIDOS BASICOS

Cuando se clasifican unos datos teniendo en cuenta cuántos de ellos verifican una condición o poseen una cualidad determinada y se ordenan en dos columnas, de tal manera que en una de ellas se indican las condiciones o criterios de clasificación y en la otra el número correspondiente al conteo de los casos que verifican la condición, se obtiene una tabla de frecuencias.

El número correspondiente al conteo de los casos que verifican la condición se llama **frecuencia absoluta. La frecuencia relativa**, es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de los datos, objeto de estudio. Esta frecuencia relativa puede expresarse en forma fraccionaria, o en forma porcentual. La forma fraccionaria a su vez se puede representar de dos maneras, como una fracción o quebrado o mediante la expresión decimal de ésta.

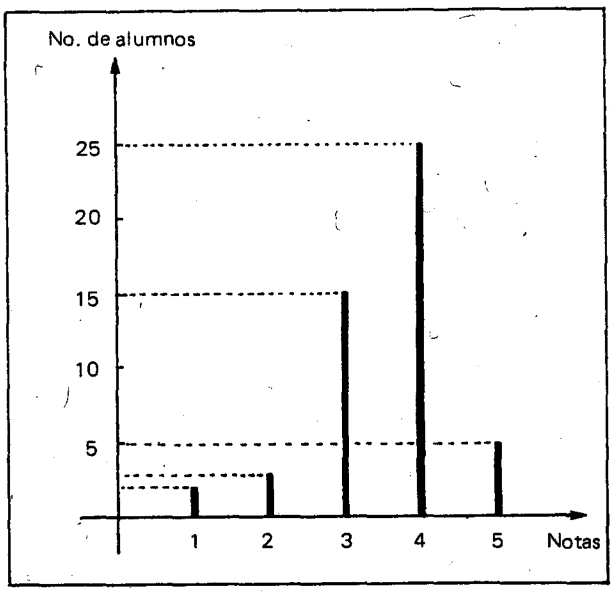
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para el logro de estos objetivos el profesor podrá utilizar ejemplos similares al siguiente: se tendrán en cuenta los resultados obtenidos en una previa de matemáticas para contar cuántos alumnos obtuvieron cada una de las siguientes notas: 1, 2, 3, 4, 5.

Al realizar el conteo se obtiene la siguiente tabla de frecuencias.

Nota	No. de alumnos
5	5
4	25
3	15
2	3
1	2
	Total 50

Estos datos se pueden representar en un sistema de coordenadas, por medio de un diagrama de líneas así:



En la tabla se puede observar, por ejemplo, que 25 alumnos obtuvieron una nota igual a 4. La frecuencia absoluta de este dato es 25.

La frecuencia relativa del mismo dato es $\frac{25}{50}$ o sea $\frac{1}{2}$, que es su expresión como fracción. En forma decimal esta frecuencia es 0.5 y en forma porcentual 50%.

Las mismas reflexiones que se hicieron para la nota 4, pueden hacerse para cualquier otro dato. Así, la frecuencia absoluta para la nota 2 es 3, mientras que la relativa es $\frac{3}{50}$ o lo que es lo mismo $\frac{6}{100}$ = 0.06 ó 6%.

Para ampliar el ejercicio se puede tomar la tabla anterior y agregarle otra columna con el fin de que los alumnos la completen calculando las frecuencias relativas y expresándolas como fracción, como decimal y en forma porcentual.

La tabla quedaría así:

Nota	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa		
		Fracción	Decimal	Porcentual
5	5	$\frac{1}{10}$	0.1	10 %
4	25	$\frac{1}{2}$	0.5	50 %
3	15	$\frac{3}{10}$	0.3	30 %
2	3	$\frac{3}{50}$	0.06	6 %
1	2	$\frac{1}{25}$	0.04	4 %
Total	50			

Ejercicios de este tipo permiten el trabajo con los fraccionarios y con los decimales. Así: para obtener la fracción $\frac{1}{10}$ es necesario partir de $\frac{5}{50}$ y simplificar.

Para obtener la expresión decimal tendrán, en algunos casos, que complificar la fracción de tal manera que la denominación de la nueva fracción facilite la escritura de la expresión decimal.

Ejemplo: La fracción $\frac{1}{25}$ se puede complificar así

$$\frac{1 \times 4}{25 \times 4} = \frac{4}{100} = 0.04$$

En el quinto grado se vió que los operadores fraccionarios como $\frac{4}{100}$ se expresan utilizando la notación porporcentual 4%.

Lo anterior se puede sintetizar en un cuadro como:

- Frecuencia
  - Absoluta 25
  - Relativa
    - Fraccionaria
      - como Fracción .... $\frac{1}{2}$
      - como Decimal 0.5
    - Porcentual .... 50 %

En el sistema de coordenadas cartesianas utilizado se puede observar que las frecuencias absolutas se encuentran sobre el eje vertical o eje **Y** y sobre el eje **X** se encuentran los datos que representan las condiciones o criterios de clasificación.

Otro tipo de ejercicios podría ser, dada la representación en el sistema de coordenadas cartesianas, encontrar las frecuencias absolutas y las relativas y construir la tabla de frecuencias.

Tanto la tabla de frecuencias como el diagrama permiten encontrar fácilmente cualquier información relacionada con los datos en estudio. Es fácil dar respuesta a preguntas como: ¿cuántos alumnos obtuvieron 3?. ¿Cuál fue la nota que más se repitió en el curso?. La segunda pregunta podrá aprovecharse para recordar que el dato que más se repite se llama moda (ésto se estudió en el grado anterior).

Otros ejemplos que podrían trabajarse son:

Distribución de los alumno según la edad.

Distribución de los alumnos según la inicial del apellido.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	**INDICADORES DE EVALUACION**
73 Realizar el diagrama de barras y el diagrama circular de un sistema de datos.	Dada una tabla de frecuencias el alumno elaborará el diagrama de barras o el diagrama circular correspondiente.
74 Distinguir entre frecuencias absolutas o puntuales y frecuencias acumuladas.	Dadas varias tablas de frecuencias, el alumno identificará si son acumuladas o absolutas y explicará la diferencia.
75 Calcular frecuencias acumuladas a partir de frecuencias absolutas o puntuales.	Dada una tabla de frecuencias absolutas o puntuales, el alumno elaborará la tabla de frecuencias acumuladas.
76 Elaborar el diagrama de barras correspondiente a una tabla de frecuencias acumuladas.	Dada una tabla de frecuencias acumuladas, el alumno elaborará el diagrama de barras correspondientes.

CONTENIDOS BASICOS

Cuando se tiene un sistema de datos, éstos se pueden ordenar o distribuir en una tabla según las categorías o valores que se fijen como criterios y se obtiene así la tabla de frecuencias. Dichas frecuencias se llaman ordinarias o puntuales para distinguirlas de las frecuencias acumuladas.

Las frecuencias absolutas o puntuales son los números absolutos o relativos correspondientes al conteo de los casos que verifican la condición; en otras palabras, las frecuencias que se le asignan a cada punto.

Las frecuencias acumuladas son las que reunen todas las frecuencias puntuales de un punto dado para atrás o de un punto dado para adelante, en caso de que esos puntos estén ordenados en una escala.

Ejemplo: La distribución de las notas entre un grupo de 40 estudiantes produce la siguiente tabla de frecuencias absolutas. (Ver hoja siguiente).

TABLA	
Notas	Frecuencia Absoluta No. de Alum.
1	1
2	4
3	5
4	20
5	10
	40

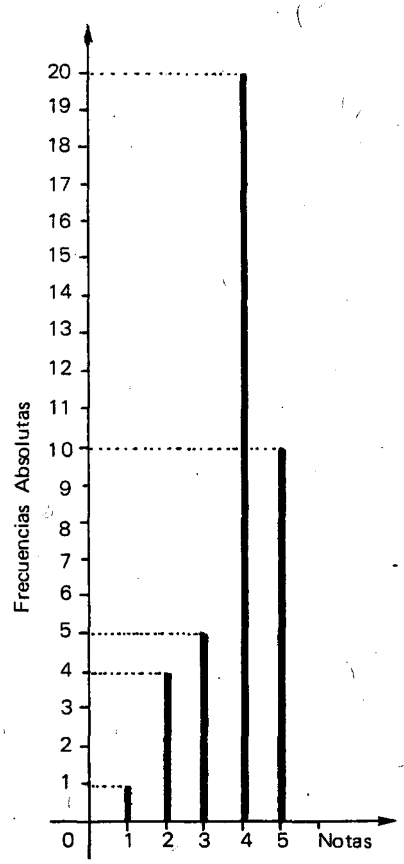


Diagrama de líneas

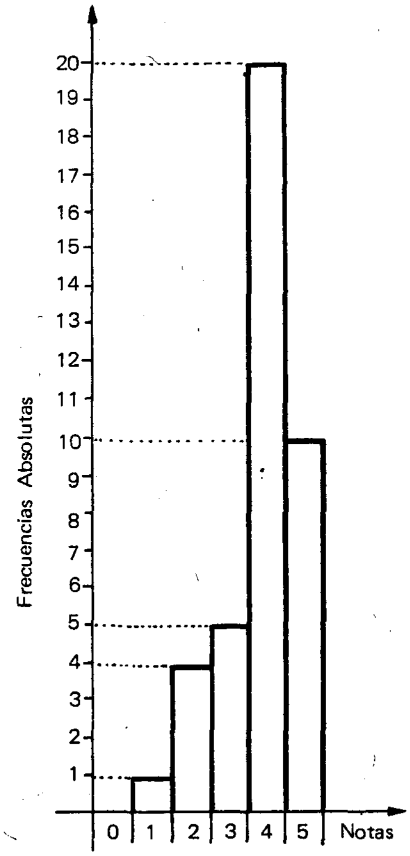


Diagrama de barras

Para obtener las frecuencias acumuladas, se pueden hacer preguntas como: ¿cuántos estudiantes sacaron 2 o menos de 2?. La respuesta es 4 + 1 = 5.

Nuevamente se vuelve a preguntar: ¿cuántos estudiantes sacaron 3 o menos de 3?. Para obtener la respuesta se adiciona la frecuencia puntual correspondiente a la nota más alta (la del 3, en este caso) con la frecuencia acumulada de la nota anterior (la del 2), así se obtiene 5 + 5 = 5 + (4 + 1) = 10.

Se continúa hasta obtener respuesta a la pregunta: ¿cuántos obtuvieron una nota de 5 o menos de 5?. La respuesta es 10 + 30 = 40, que es el total de los alumnos.

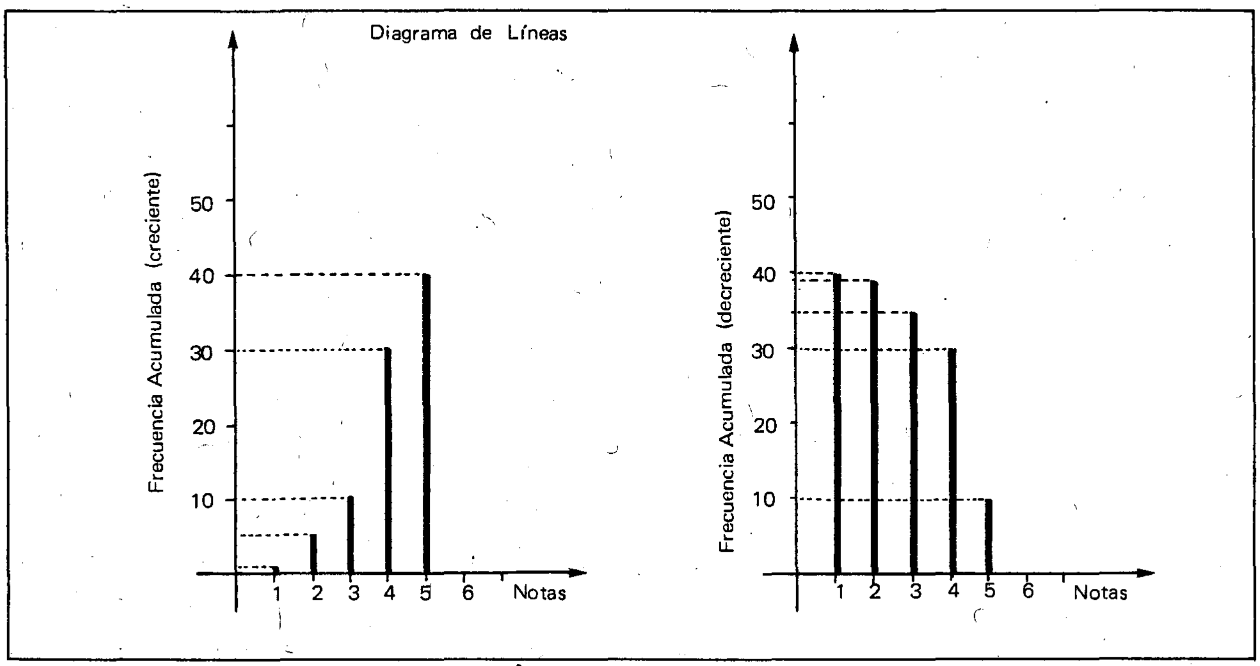
Obsérvese que las frecuencias acumuladas anteriores van sumando o acumulando las frecuencias puntuales de las notas que están por **debajo** de la nota dada, incluída ella misma.

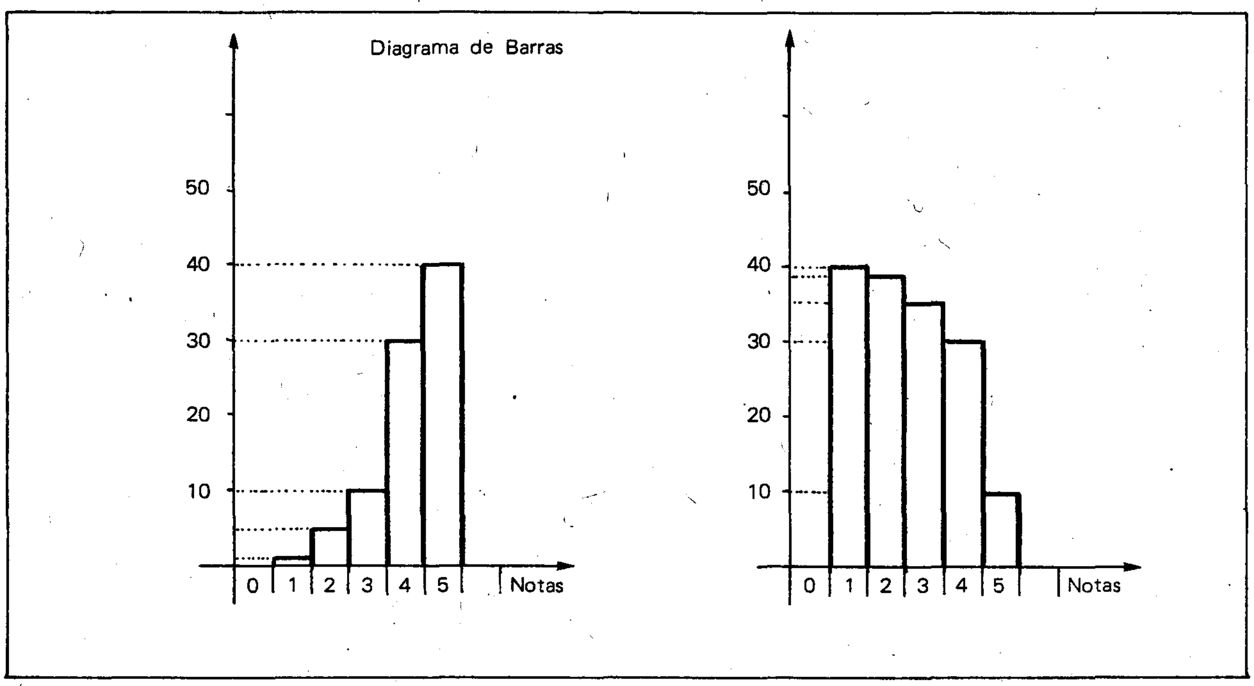
También pueden hallarse las frecuencias acumuladas que reúnan las frecuencias puntuales que estén por **encima** de una nota dada, incluída esa misma nota.

En este caso las preguntas podrían ser como: ¿cuántos sacaron 4 o más?. La respuesta es 20 + 10 = 30. ¿Cuántos sacaron 3 o más? 5 + 30 = 35. ¿Cuántos sacaron 2 o más?, etc.

Notas	1	2	3	4	5	**Total**
Alumnos (Frecuencias Absolutas)	1	4	5	20	10	40
Frecuencias Acumuladas	1 o menos	2 o menos	3 o menos	4 o menos	5 o menos	
	1	5	10	30	40	
	1 o más	2 o más	3 o más	4 o más	2 o más	
	40	39	35	30	10	

La representación gráfica es como sigue:





SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En la actividad anterior se estudiaron los conceptos de frecuencia absoluta y frecuencia relativa, a partir de un sistema de datos. La frecuencia relativa se expresó en forma fraccionaria, decimal y porcentual. Es conveniente que haya claridad en estos conceptos antes del estudio de la frecuencia acumulada, pues también hay frecuencias acumuladas absolutas y relativas, y estas últimas se pueden expresar en las mismas tres formas.

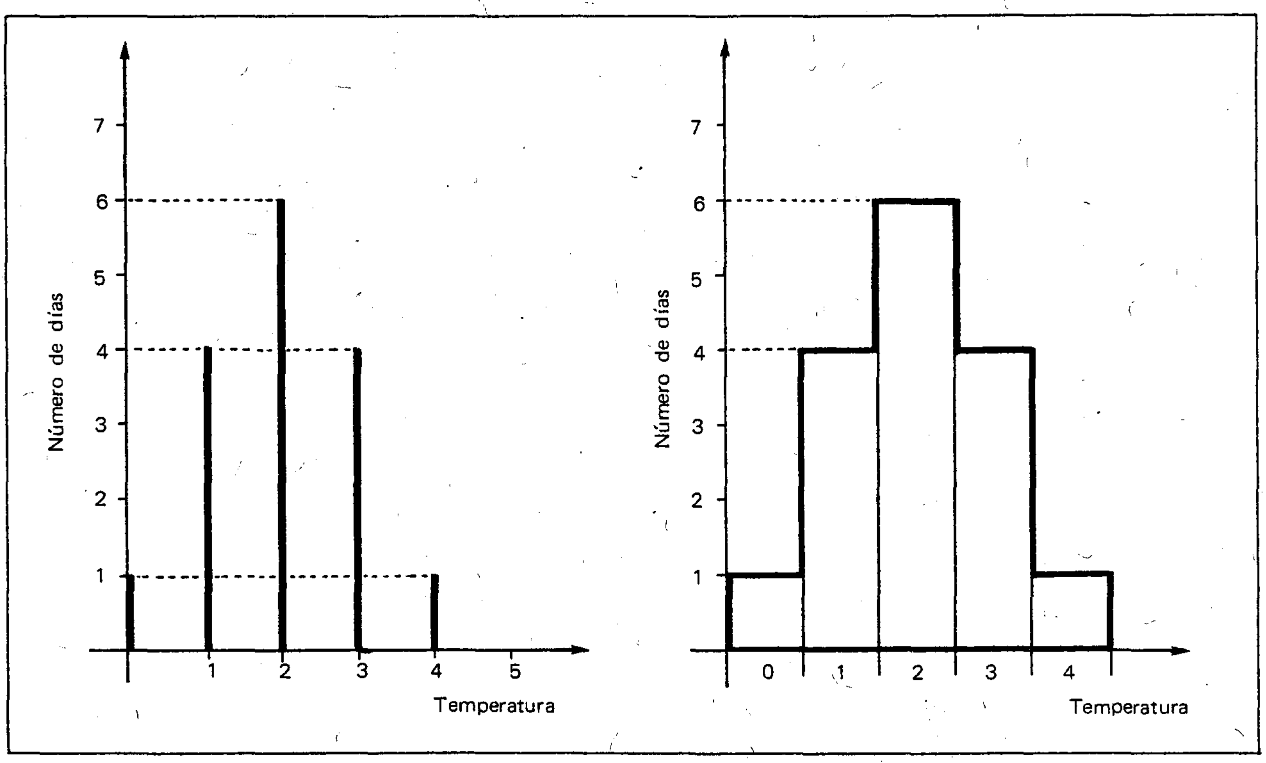
Para construir una tabla de frecuencias se pueden tomar como datos la temperatura de una ciudad. Durante 16 días se midió la temperatura de una ciudad en las horas de la mañana. Los resultados obtenidos están consignados en la siguiente tabla:

Temperatura	Número de días
0° C	1
1° C	4
2° C	6
3° C	4
4° C	1

La frecuencia relativa y los diagramas de líneas y de barras para el ejemplo son los siguientes:

Temperatura	Frecuencia Absoluta No. de días	Frecuencia relativa expresada en:		
		Fracción	Decimal	Porcentaje
0° C	1	$\frac{1}{16}$	0.0625	6.25 %
1° C	4	$\frac{1}{4}$	0.25	25 %
2° C	6	$\frac{3}{8}$	0.375	37.5 %
3° C	4	$\frac{1}{4}$	0.25	25 %
4° C	1	$\frac{1}{16}$	0.0625	6.25 %
	16			

Luego se elabora el diagrama de líneas y el de barras.

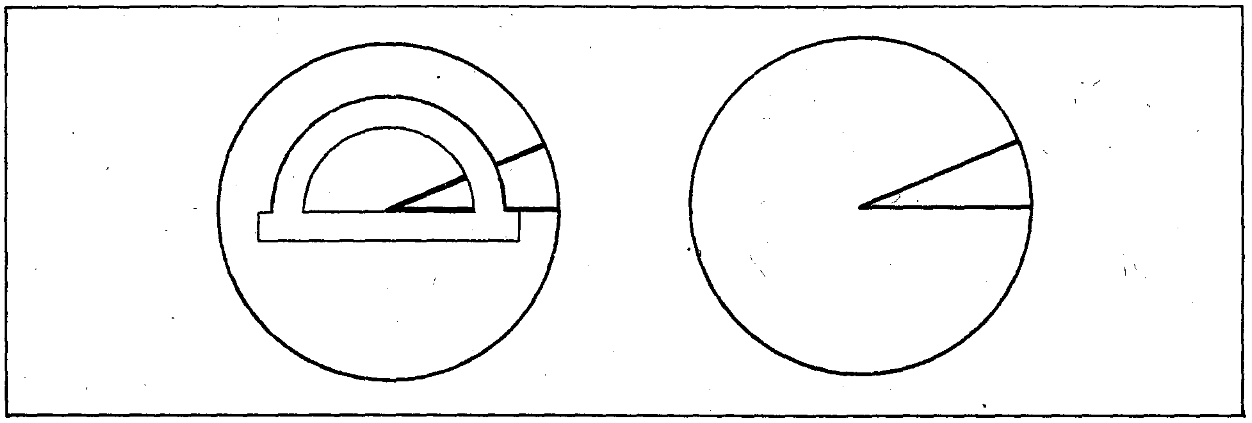


Para realizar el diagrama circular podemos tomar las frecuencias relativas, que están expresadas en forma porcentual, y pensar cuál sería la amplitud del ángulo que le corresponde a cada una de ellas. Los 360° al rededor del centro del círculo representan el 100%, entonces los porcentajes se deberán distribuir en proporción directa a esta amplitud (360°).

Veamos: ¿cuál es la amplitud del ángulo para representar en un diagrama circular una frecuencia de 6.25% ?.

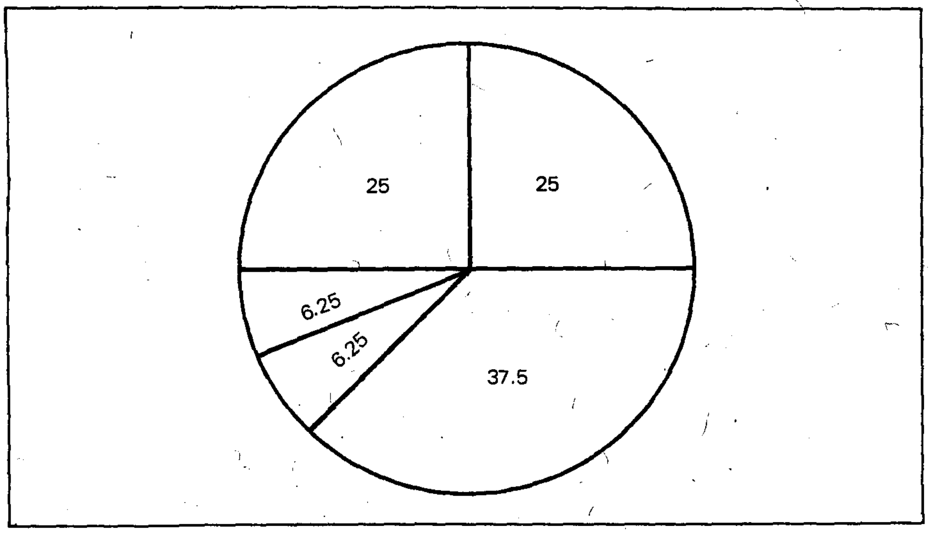
Llamemos n el valor que se busca:

$$\frac{6.25}{100} = \frac{n}{360} \qquad n = \frac{6.25 \times 360}{100} = 22.5$$



Para representar el 25% se puede plantear la proporción correspondiente o pensar simplemente en la cuarta parte de la amplitud del ángulo central, ya que 25% es un cuarto del total (100%). En este caso $n = 90°$.

Finalmente se llegará a una figura semejante a:



Ahora se podrá elaborar la tabla de frecuencia acumulada. La frecuencia acumulada puede ser creciente o decreciente.

Elaboremos primero la tabla de frecuencias acumuladas absolutas.

Temperatura	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Acumulada creciente	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Acumulada decreciente
0° C	1	1	1	16
1° C	4	5	4	15
2° C	6	11	6	11
3° C	4	15	4	5
4° C	1	16	1	1

Diagrama de líneas:

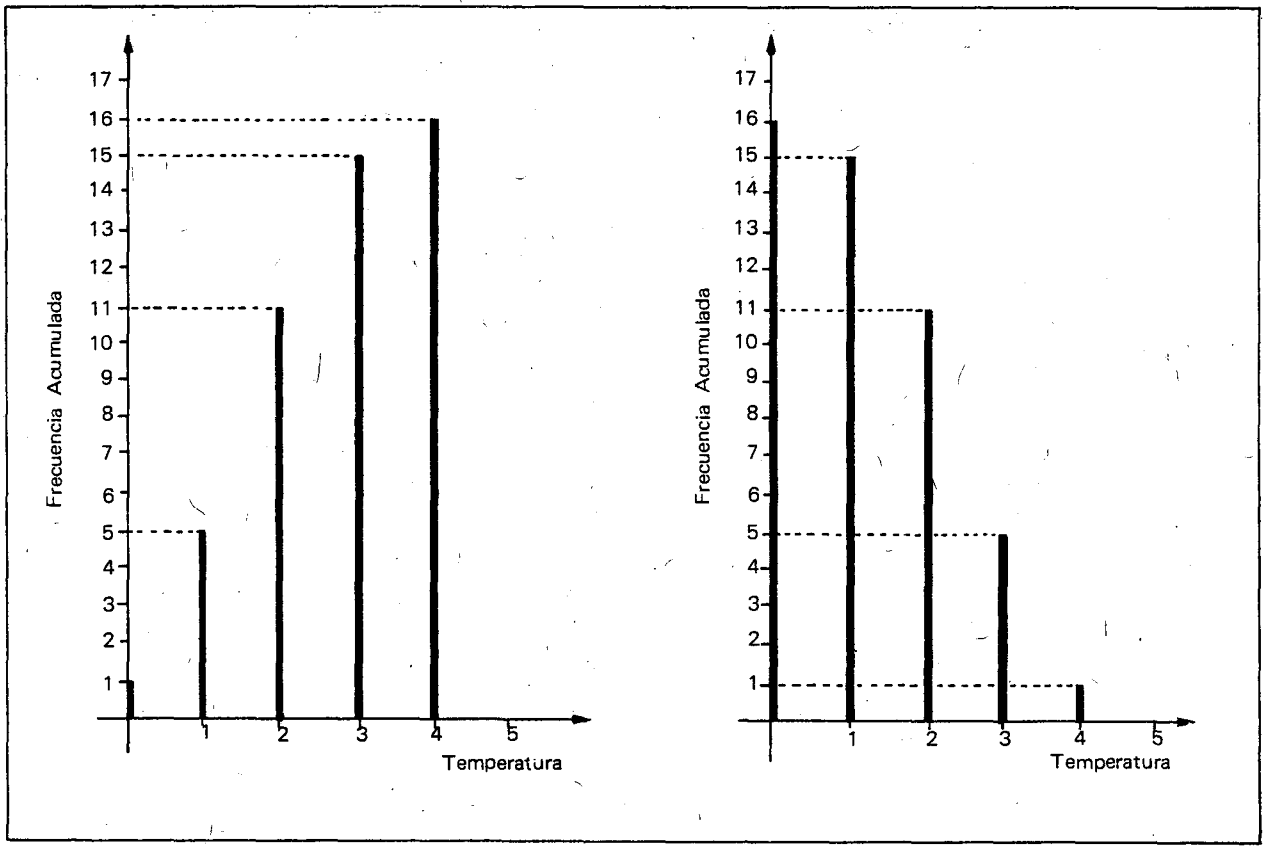
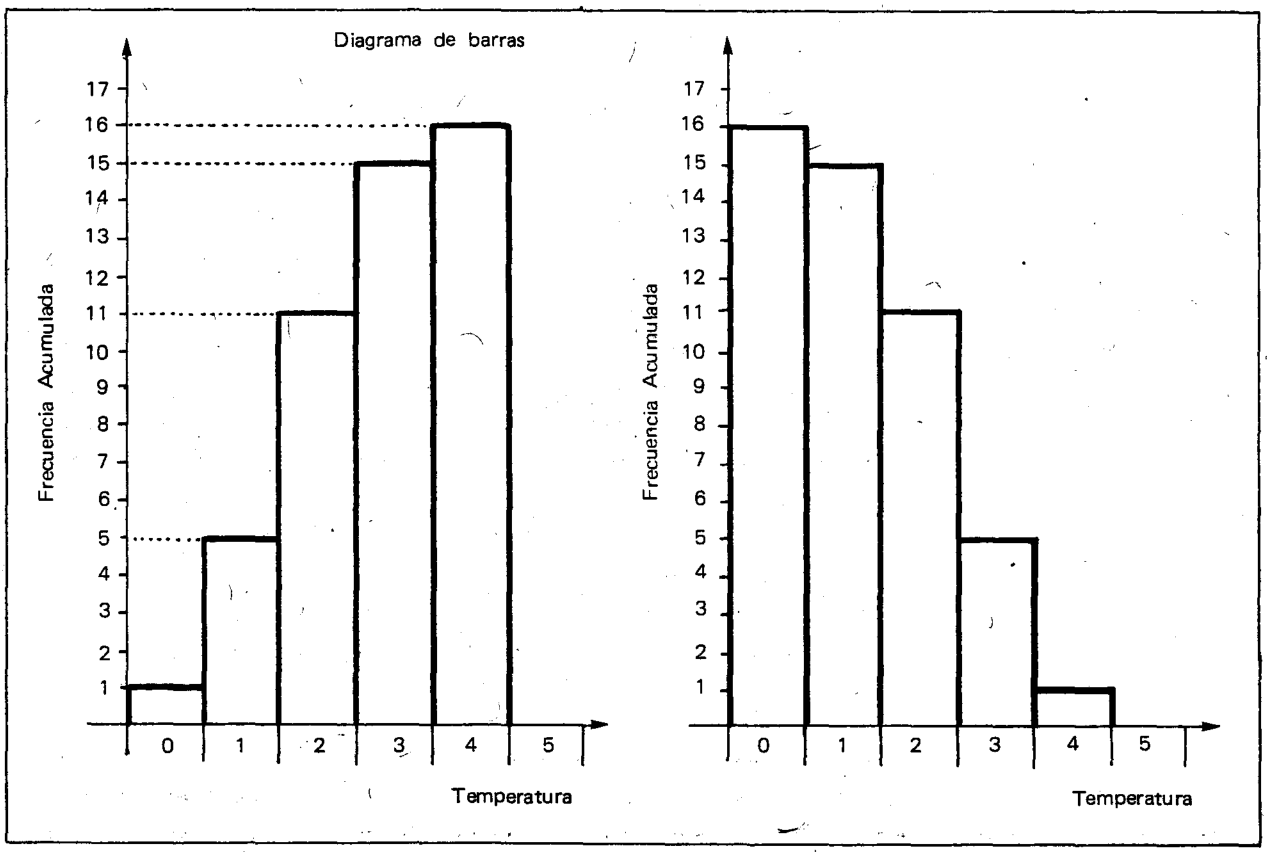


Diagrama de barras:



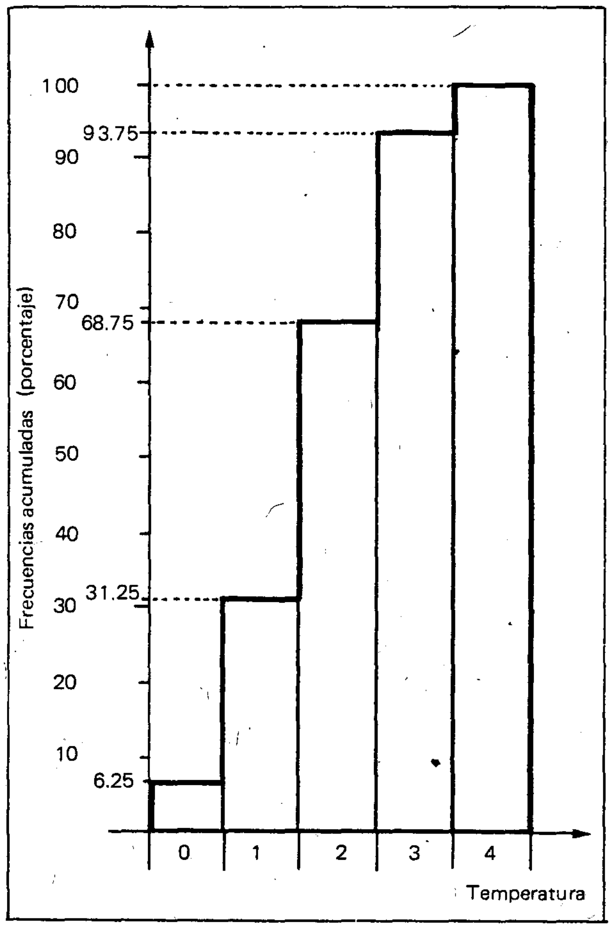
Las frecuencias acumuladas también se pueden expresar en forma fraccionaria, decimal y porcentual.

El alumno podrá elaborar una tabla en la cual las frecuencias se expresen en las tres formas mencionadas anteriormente.

En la siguiente tabla solamente se presentan las frecuencias en forma porcentual.

Temperatura	0° C	1° C	2° C	3° C	4° C	Total
Frecuencia absoluta	1	4	6	4	1	16
Forma porcentual	6.25%	25%	37.50%	25%	6.25%	100%
Frecuencia acumulada creciente	1	5	11	15	16	
Forma porcentual	6.25%	31.25%	68.75%	93.75%	100%	
Frecuencia acumulada decreciente	16	15	11	5	1	
Forma porcentual	100%	93.75%	68.75%	31.25%	6.25%	

Tanto el diagrama de líneas como el de barras de las frecuencias acumuladas pueden elaborarse tomando como datos dichas frecuencias, expresadas en forma porcentual. Los porcentajes se indican sobre el eje vertical. Presentamos un diagrama, como ejemplo, los otros los dejamos como ejercicio.



Sería interesante que los alumnos llegaran a establecer la correspondencia que hay entre las frecuencias expresadas en forma porcentual y las calculadas mediante la adición de las frecuencias absolutas u ordinarias. Esto se puede lograr comparando los diagramas respectivos.

Obsérvese que en los diagramas de barras de las frecuencias acumuladas, la altura de la barra para las temperaturas 4° o menos, es 16 en un caso, y 100 en el otro.

Se pueden hacer otros ejercicios con datos propuestos por los alumnos.

Unidad VI

GEOMETRIA Y MEDICION

Introducción

"La geometría es una exploración del espacio. La mejor manera de explorar este espacio consiste en desplazarse dentro de él y observar lo que sucede a los objetos de este espacio cuando se efectúa un cambio. Por **cambio** entendemos absolutamente cualquier tipo de transformación" *

En esta unidad se estudian movimientos rígidos como traslaciones, y reflexiones, la congruencia de polígonos mediante la aplicación de movimientos rígidos, algunas propiedades de los triángulos, especialmente de los triángulos rectángulos y se realizan algunas mediciones de longitud y de amplitud de ángulos. Las de longitud se hacen con unidades del sistema métrico decimal y de otros sistemas.

Las actividades que se proponen son de geometría activa y dinámica, donde las rotaciones, las traslaciones, las reflexiones, etc. no son algo estático que el alumno ve dibujado, sino que él "descubre" cuando actúa sobre los objetos; cuando corre, cuando juega, cuando realiza las construcciones que su imaginación le inspira.

Es conveniente que el profesor tenga en cuenta que los contenidos básicos no son para exigírselos de memoria a los alumnos ni para evaluarlos por la precisión con que los reciten sino que son para que él se ubique, y en alguna forma tenga claros algunos conceptos para que así pueda orientar a los alumnos en sus actividades exploratorias.

La parte de medición de longitudes puede ir al comienzo o al final de la unidad, como el profesor lo crea más conveniente.

Objetivos generales

- Reconocer movimientos rígidos en el plano
- Reconocer ángulos y medir su amplitud
- Reconocer polígonos congruentes
- Caracterizar el triángulo rectángulo
- Reconocer y emplear unidades de longitud y de amplitud de ángulos.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
77 Reconocer algunas unidades de longitud en diferentes sistemas.	Los alumnos reconocerán algunas unidades de longitud tanto del sistema métrico decimal como de otros sistemas.

* DIENES, Z. P. y E. W. GOLDING. **La geometría a través de las transformaciones.** Topología, Geometría proyectiva y afín. Pág. 47.

78 Resolver y formular problemas que requieran convertir unidades de longitud en el sistema métrico decimal y de otros sistemas al métrico decimal.	El alumno formulará un problema que requiera conversiones de unidades de longitud y lo resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

Los sistemas de medida están íntimamente relacionados con los sistemas de numeración.

El sistema métrico decimal tiene muchas ventajas sobre los otros sistemas, ya que las unidades, múltiplos y submúltiplos pueden relacionarse entre sí multiplicando o dividiendo por 10 o una potencia de 10.

Hay algunas unidades de longitud que no pertenecen al sistema métrico decimal, y que son muy usadas en algunas partes. Entre éstas tenemos:

EQUIVALENCIAS EXACTAS			APROXIMACIONES UTILES			
La yarda	=	0.9144 m	90 cm	10 yardas	=	9 m
El pie	=	0.3048 m	30 cm	10 pies	=	3 m
La milla	=	1 609.344 m	1600 m	2 millas	=	3 km
La milla náutica	=	1852 m	1800 m	5 millas	=	9 km
La pulgada	=	2.54 cm	2.5 cm	4 pulg.	=	10 cm
La vara	=		80 cm	5 varas	=	4 m

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

De acuerdo a las necesidades de la región e intereses de los alumnos, el profesor puede elegir las unidades de longitud de otros sistemas que ellos conozcan y utilicen, hacer las respectivas conversiones al sistema métrico decimal, y resolver algunos problemas de aplicación.

Se puede dar alguna información sobre lo que es el sistema métrico decimal; su historia y sobre otros sistemas de medición.

Pueden hacer algunas mediciones como el largo del salón, el ancho del patio, la altura de un alumno, etc. utilizando m, dm, cm. y expresándolas en diferentes unidades y también hacer algunas estimaciones sobre la medida de algunas longitudes.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
79 Efectuar deslizamientos en un plano.	Dados algunos objetos, el alumno los deslizará sobre la tapa del pupitre.
80 Identificar cuándo un deslizamiento en un plano es una traslación.	Dados algunos deslizamientos en un plano, el alumno dirá cuáles de éstos son traslaciones.

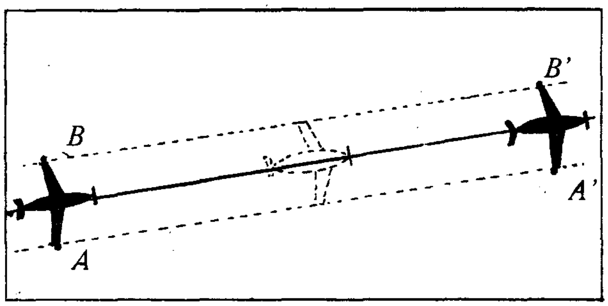
CONTENIDOS BASICOS

Cuando se mueve una figura de una posición a otra, en el mismo plano, se dice que se ha hecho un deslizamiento de la figura. Dicho deslizamiento puede ser una traslación o una rotación o una combinación de ellas.

Trasladar una figura en su propio plano consiste en empujarla simplemente desde una posición a otra sin dejarla girar al mismo tiempo.

En una traslación todos los puntos de la figura se mueven en la misma dirección y cada punto de la figura describe una línea recta. Todas las líneas rectas que resultan de las trayectorias de los puntos que se mueven en la misma dirección, son rectas paralelas.

Ejemplo: Si un avión se traslada a lo largo de una línea recta, cada uno de los puntos se desliza en la misma dirección de la recta.



Las rectas AA' y BB' son paralelas porque tienen la misma dirección; cada una corresponde a la trayectoria de un punto en una traslación.

Recordemos que la recta que pasa por los puntos A y A' se simboliza así: $\overleftrightarrow{AA'}$, se utiliza $\longleftrightarrow$ para indicar que la recta se extiende indefinidamente en los dos sentidos.

Para simbolizar que la recta AA' es paralela a la recta BB' se hace de la siguiente manera:

$$\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente se pueden deslizar algunos objetos sobre el escritorio, o sobre el piso, como cuadernos, borradores, etc., luego trasladar esos mismos objetos en una dirección dada. Al hacer las traslaciones de los objetos los alumnos podrán ir marcando las trayectorias de varios puntos para que concluyan que son líneas rectas con la misma dirección o sea rectas paralelas.

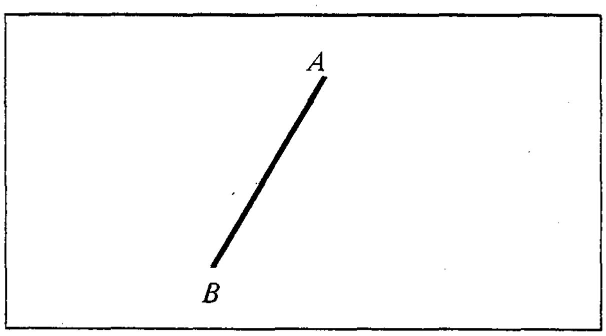
También se les podrá pedir que busquen otros ejemplos de traslaciones como un tren en un tramo recto, etc., y que se trasladen ellos mismos en alguna dirección dentro del salón de clase.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
81 Efectuar traslaciones de segmentos de recta y de polígonos.	El alumno trasladará tres segmentos de recta en un plano, aplicándoles una traslación dada y tres polígonos en un plano aplicándoles una traslación dada.

CONTENIDOS BASICOS

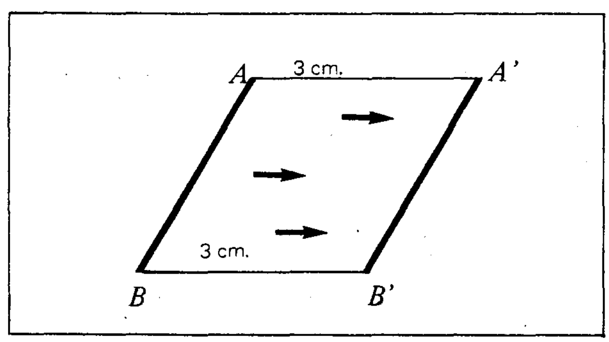
Para trasladar un segmento de recta o un polígono en un plano es necesario conocer en qué dirección se les va a trasladar, en qué sentido y qué tanto se les quiere trasladar.

Ejemplo 1: Dado el segmento cuyos extremos son los puntos A y B trasladarlo 3 cm. a la derecha en dirección horizontal.



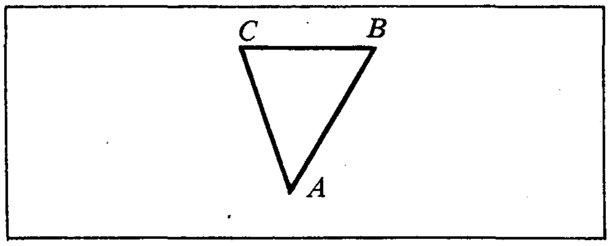
Hay que tener claros tres datos:
¿Cuál es la dirección de la traslación?
¿En qué sentido va a ser?
¿Qué tantos cm va a tener?

Para hacer la traslación se trazan las paralelas que, pasan por los extremos del segmento en la dirección indicada y luego se traslada el segmento marcando sobre las paralelas la distancia dada en el sentido que se pide.



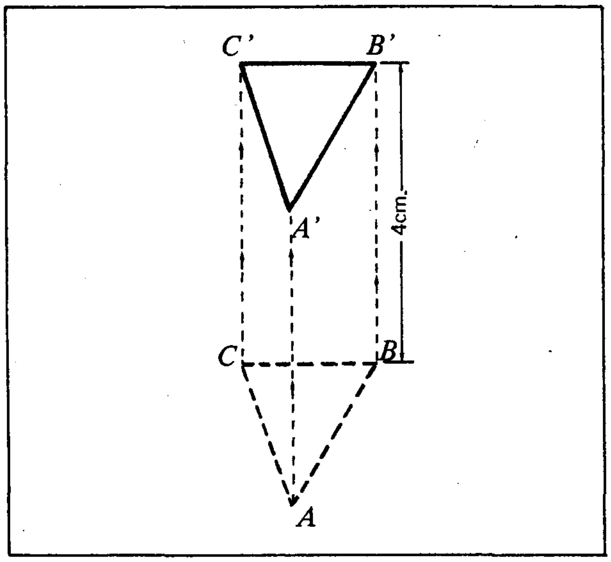
El segmento $\overline{A'B'}$ es la imagen del segmento $\overline{AB}$ mediante la traslación dada, o el resultado de haber trasladado el segmento $\overline{AB}$ aplicándole esa traslación.

Ejemplo 2: Trasladar el polígono ABC 4 cm hacia arriba en dirección vertical.



De nuevo precisamos los tres datos:
¿Cuál es la dirección de la traslación?
¿En qué sentido va a ser?
¿Qué tantos cm. va a recorrer?

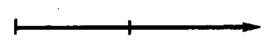
Se puede trasladar cada uno de los vértices verticalmente en el sentido y con la magnitud indicados, y luego trazar el polígono resultante.



El triángulo A'B'C' es la imagen del triángulo ABC mediante la traslación.

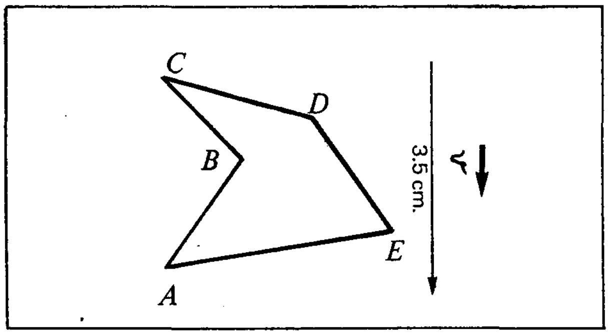
El triángulo A'B'C' es el resultado de haber trasladado el triángulo ABC aplicándole esa traslación.

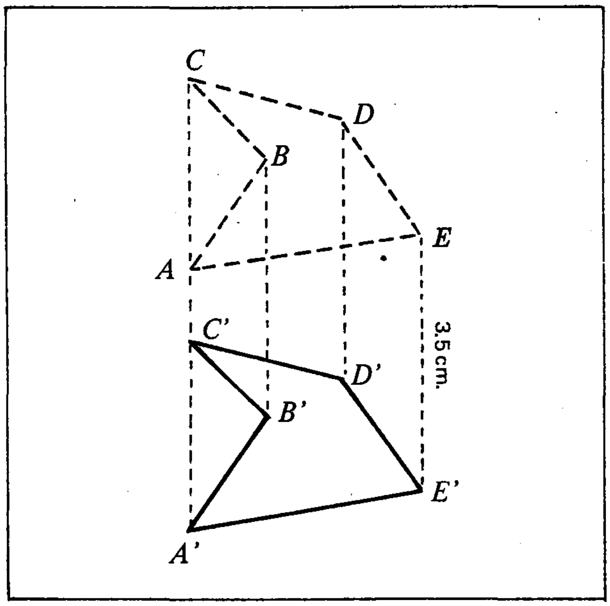
Una flecha como la siguiente, que llamamos **t** puede indicar una traslación.



Esta flecha indica que la traslación se efectúa en la dirección horizontal, 2 cm hacia la derecha.

Ejemplo: Dado el polígono ABCDE hallar su imagen mediante la traslación determinada por la flecha V. Esta flecha indica que el polígono se va a trasladar verticalmente hacia abajo 3.5 cm.





La imagen del polígono ABCDE mediante la traslación V es el polígono A' B' C' D' E' Esto se puede simbolizar así:

V (ABCDE) = A'B'C'D'E'

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para indicar la dirección y el sentido se pueden emplear las siguientes expresiones.

- El borde lateral del tablero (o la ventana, la puerta, . . .) está en dirección vertical.

  En esa dirección se distinguen dos sentidos: hacia arriba y hacia abajo.

- El borde inferior del tablero (o la ventana, . . .) está en dirección horizontal.

- En esa dirección se distinguen dos sentidos: hacia la derecha y hacia la izquierda.

- En una cruz pintada en una hoja de cuaderno, los alumnos pueden distinguir dos direcciones y en cada una de las direcciones, dos sentidos diferentes.

Sentidos

Dirección longitudinal: | Hacia adelante | Hacia atrás

Dirección transversal: | Hacia la derecha | hacia la izq.

Si la hoja está sobre una mesa, ambas direcciones son horizontales, pero se usa la longitudinal para representar la vertical y la transversal para representar la horizontal.

Se hace girar la hoja sobre la mesa hasta que la barra longitudinal de la cruz quede orientada en dirección Norte - Sur. Si los alumnos miran hacia el Norte, se pueden precisar más las direcciones y los sentidos:

Sentidos

Dirección Norte-Sur:

Al Norte o hacia arriba:

Al Sur o hacia abajo:

Dirección Este-Oeste:
(Oriente-Occidente)

A la derecha o al Oriente:

A la izquierda o al Occidente:

Dirección Nordeste-Suroeste:
(Nororiente-Suroccidente)

Al Nordeste o Nororiente:

Al Suroeste o Suroccidente:

Dirección Noroeste-Sureste:
(Noroccidente-Suroriente)

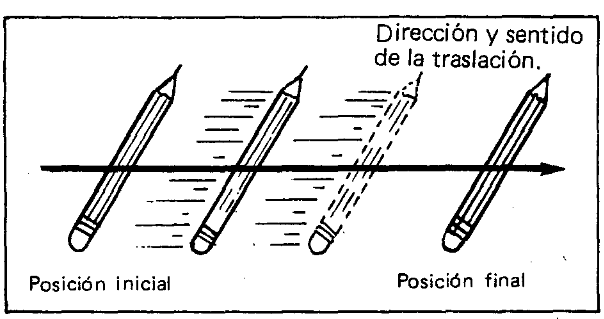
Al Noroeste o Noroccidente:

Al Sureste o Suroriente.

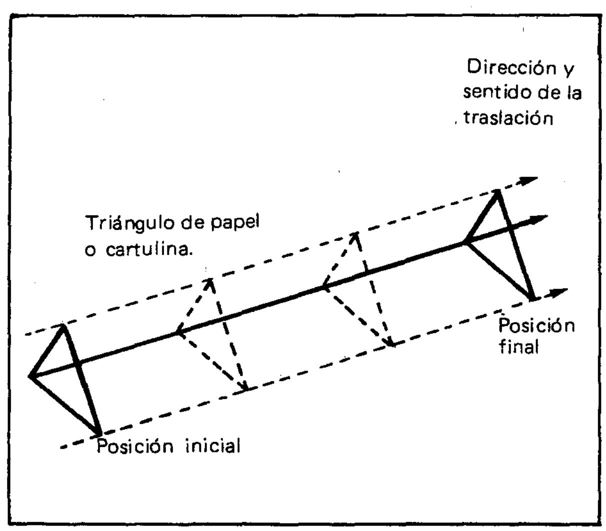
Para indicar la magnitud del deslizamiento se puede emplear cualquier unidad de medida de longitud.

El profesor y los alumnos pueden utilizar palos o lápices para visualizar las traslaciones de segmentos en la dirección, el sentido y la distancia que las determinan.

Al mover el lápiz o palo a lo largo de una recta, se mantendrá la dirección inicial en la que estaba, sin hacerlo girar durante el trayecto.



Para trasladar polígonos pueden recortarse éstos en papel o cartulina, y trasladarlos en la dirección y sentido indicados sin dejarlos girar durante el trayecto.



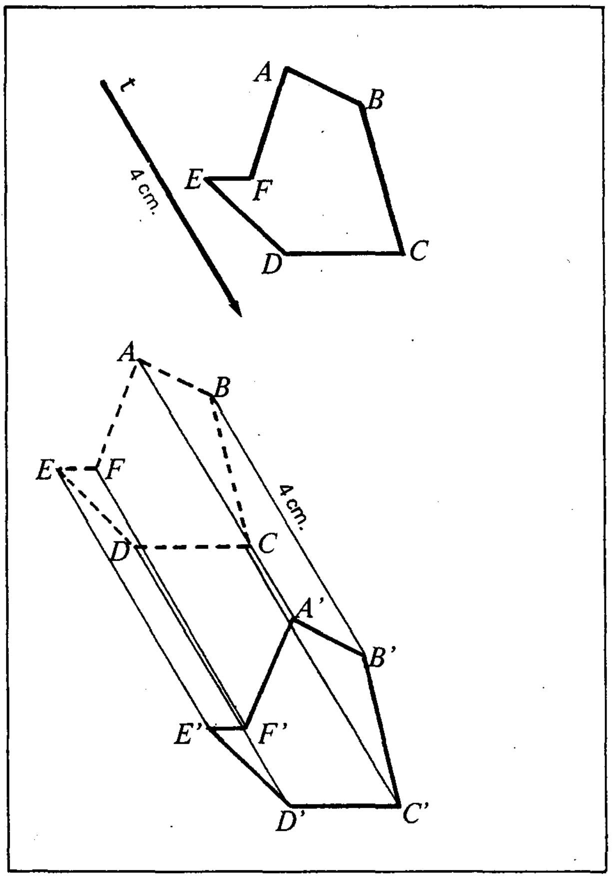
El profesor y los alumnos pueden efectuar y representar un buen número de traslaciones tanto de segmentos como de polígonos para ejercitar la habilidad de hacer mediciones y la de manejar la regla o la escuadra para trazar rectas.

Algunos ejercicios pueden ser como los siguientes:

Ejemplo 1: Dado el polígono ABCDEF. Trasladarlo 4 cm. en el sentido Sureste (traslación determinada por la flecha **t**).

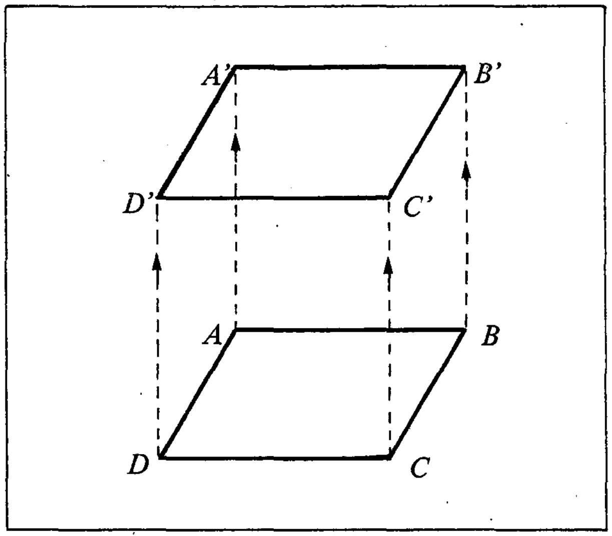
Se trazan paralelas a la flecha que determina la traslación, que pasen por los vértices del polígono.

Se marca la distancia en que se deben trasladar los vértices y se completa con segmentos el polígono resultante. T (ABCDEF) = A'B'C'D'E'F'



Ejemplo 2: El paralelogramo ABCD tiene como imagen el paralelogramo A'B'C'D' mediante una traslación. Hallar la dirección, el sentido y la magnitud de la traslación.

Se hallan los vértices del paralelogramo ABCD y los del paralelogramo A'B'C'D'. (Los alumnos más avanzados notarán que basta hallar un vértice del primero y el correspondiente de su imagen). Luego se unen los vértices con rectas que pasen por los vértices correspondientes. Se observa la dirección de estas rectas. Se decide en qué sentido fue la traslación y se marcan puntas de flechas que señalen la imagen.



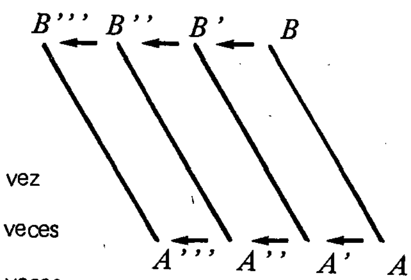
Para hallar la magnitud de la traslación basta contar el número de unidades de longitud que hay entre un punto y su imagen. En esta traslación la magnitud es de 3 cm. Así la traslación aplicada es de 3 cm en dirección vertical hacia arriba.

Ejemplo 3: Dado el segmento cuyos puntos extremos son A y B y dada la traslación cuyo sentido es hacia la izquierda, dirección horizontal y la magnitud de la traslación es un centímetro. Hallar los efectos de aplicarle la traslación:

a) una vez

b) dos veces

c) tres veces



$\overline{A'B'}$ es el resultado de aplicarle una vez la traslación a $\overline{AB}$.

$\overline{A''B''}$ es el resultado de aplicarle dos veces la traslación a $\overline{AB}$.

$\overline{A'''B'''}$ es el resultado de aplicarle tres veces la traslación a $\overline{AB}$.

d) Cuál es la traslación que aplicada a $\overline{AB}$ da como resultado $\overline{A''B''}$?

e) Cuál es la traslación que aplicada a $\overline{AB}$ da como resultado $\overline{A'''B'''}$?

f) Cuál es la traslación que aplicada a $\overline{A'B'}$ da como resultado $\overline{A'''B'''}$?

El profesor hará notar que la traslación del literal d) es la misma traslación que la del literal f), aunque se aplican a segmentos diferentes y producen imágenes diferentes.

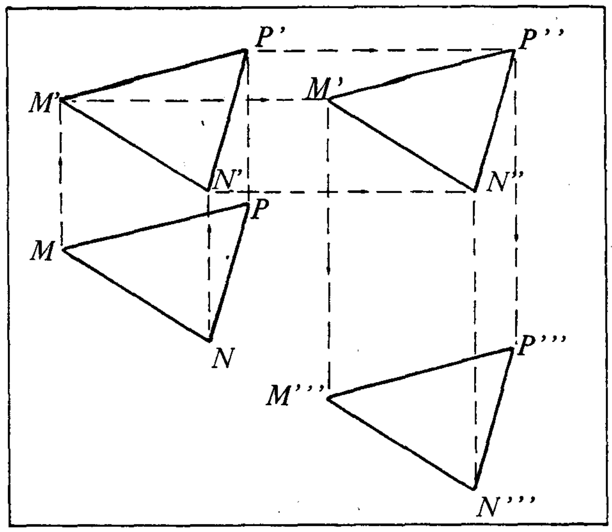
Ejemplo 4: Dado el triángulo MNP. (Δ MNP)

a) Trasladarlo verticalmente hacia arriba, 2 cm y obtener el Δ M'N'P'.

b) Trasladar el Δ M'N'P' horizontalmente hacia la derecha, 3.5 cm. y obtener el Δ M''N''P''.

c) Trasladar el Δ M''N''P'' verticalmente hacia abajo 4 cm.

Pueden luego hacer traslaciones indicadas mediante una flecha. Dicha flecha indica la dirección, el sentido y la magnitud de la traslación.



OBJETIVO ESPECIFICO

82 Identificar cuándo un deslizamiento en un plano es una rotación.

INDICADOR DE EVALUACION

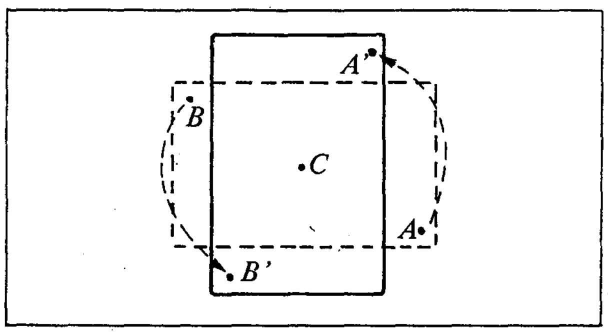
Dados algunos deslizamientos en un plano, el alumno dirá cuáles de éstos son rotaciones.

CONTENIDOS BASICOS

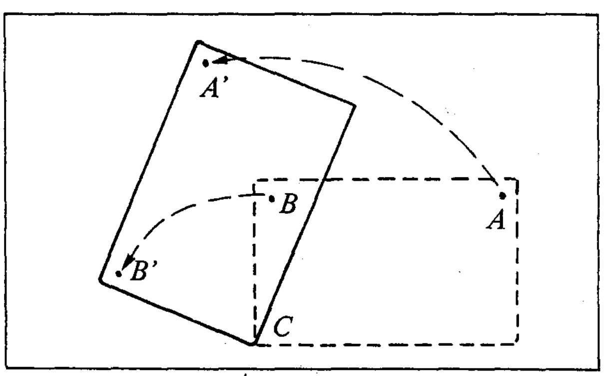
Rotar una figura en su propio plano consiste en girarla alrededor de un punto fijo. Dicho punto fijo puede ser cualquier punto de la figura y se llama "centro de rotación". También puede considerarse que el giro es alrededor de un eje perpendicular al plano de la rotación que corta el plano en el centro de rotación.

En una rotación todos los puntos de la figura recorren un arco de círculo más o menos largo, excepto el centro de rotación, pues éste permanece fijo. Los puntos que se mueven recorren caminos de longitud diferente, pero en cierto sentido "giran lo mismo": hacen un giro de la misma amplitud.

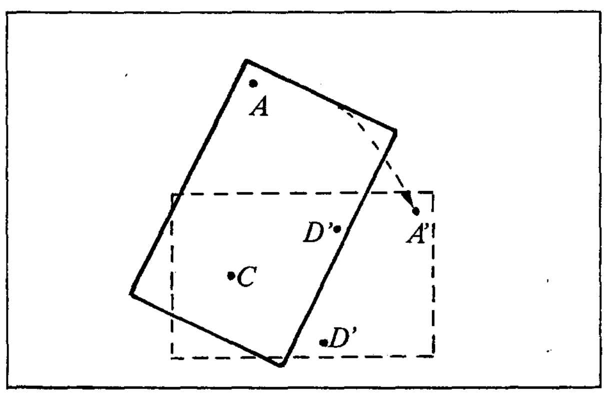
Ejemplo: Rotar una hoja de papel en la tapa del pupitre alrededor de un punto fijo.



En este caso el centro de rotación está ubicado en el centro de la hoja y se ha girado en dirección contraria a las agujas del reloj.



En este caso el centro de rotación es el punto C que está ubicado en una esquina y la hoja de papel se ha rotado en la dirección contraria de las agujas del reloj.



La hoja se ha girado en la dirección de las agujas del reloj y el centro de rotación es el punto C.

En cada uno de los casos se observa que todos los puntos han girado de la misma forma (en el sentido de efectuar un giro de la misma amplitud), aunque los que están más lejos del centro de rotación recorren un trayecto circular más largo.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente los estudiantes pueden rotar algunos objetos sobre el escritorio, como un libro, un cuaderno, hojas de papel, etc. Podrán escoger como centro de rotación cualquier punto. Los alumnos deben señalar cuidadosamente dónde está colocado el punto fijo; para ésto pueden utilizar un chinche, un alfiler, la punta de un lápiz o al menos el dedo.

Al hacer las rotaciones los alumnos podrán ir marcando la trayectoria de varios puntos para que concluyan que todos los puntos distintos del centro giran de la misma manera (hacen un giro de la misma amplitud), aunque recorren arcos de círculo de longitudes diferentes.

Pueden buscar algunos ejemplos de rotaciones como un columpio, una rueda volante, etc. Observar qué pasa con cada una de las partes del cuerpo cuando gira. En cada caso deben indicar cuál fue el centro o eje de rotación y decir aproximadamente cuál fue la amplitud del giro (media vuelta, etc.).

OBJETIVOS ESPECIFICOS

83 Efectuar rotaciones de segmentos de recta y de polígonos.

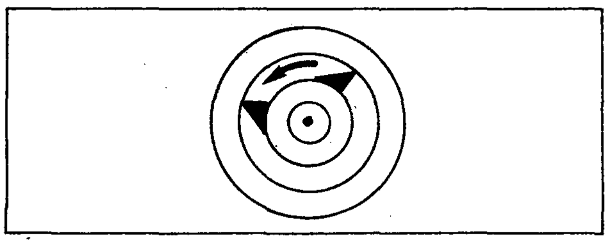
INDICADORES DE EVALUACION

El alumno rotará tres segmentos de recta en un plano, aplicándoles una rotación dada y tres polígonos en un plano aplicándoles una rotación dada.

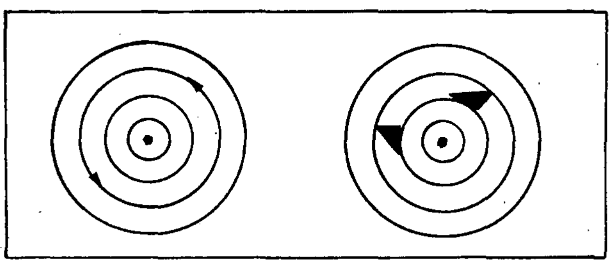
CONTENIDOS BASICOS

Para rotar un segmento de recta o un polígono en un plano se necesita conocer el centro o eje de rotación y el ángulo de giro. Es importante que ese ángulo tenga una orientación. La orientación se suele indicar comparándola con la de las agujas del reloj: en el sentido de las agujas del reloj, o en sentido contrario a ellas.

Para efectuar rotaciones cuyo eje o centro de rotación está fuera de la figura que se rota, los alumnos pueden realizar una actividad previa, que consiste en observar el movimiento de una moneda o de una figura cortada en cartulina, cuando se ha colocado sobre un disco que está girando.



Notarán que hay dos rotaciones:

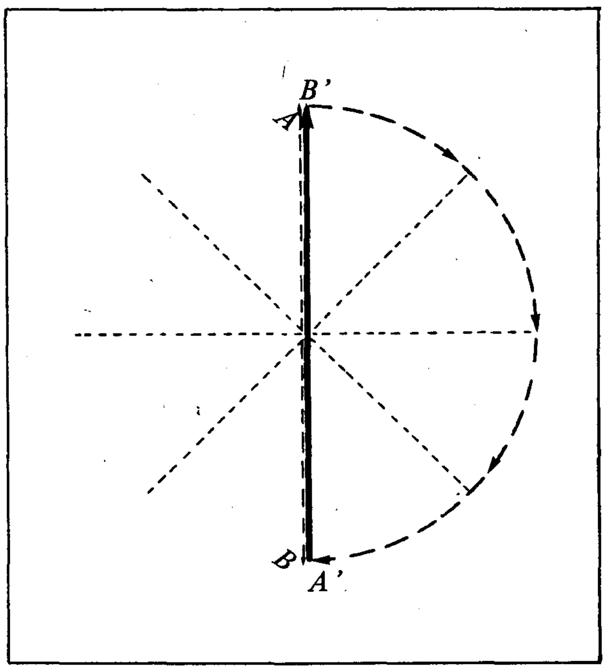


Una, la del disco alrededor de su centro. En este caso el centro o eje de rotación está dentro de la superficie que se rota.

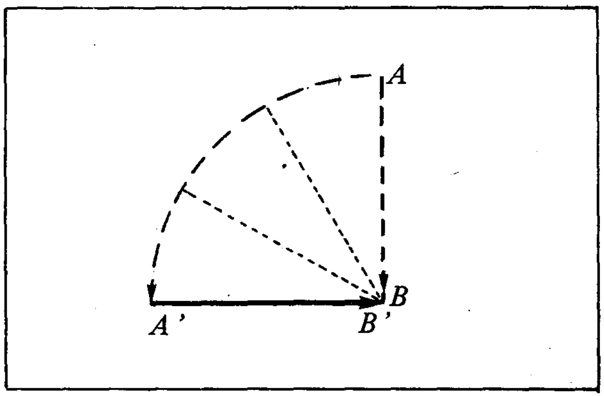
La otra rotación es la de la figura que se colocó sobre el disco, al mismo tiempo que éste está girando. En este caso el centro o eje de rotación está fuera de la superficie que se rota.

Ejemplo 1: Dado el segmento cuyos puntos extremos son A y B orientado de A hacia B, que notamos $\overline{AB}$, rotarlo:

a) Media vuelta alrededor del punto medio en el sentido de las agujas del reloj.



b) Un cuarto de vuelta alrededor del extremo inferior (B), en el sentido contrario de las agujas del reloj.



Como el centro de rotación es el punto medio, este se puede hallar midiendo la longitud del segmento y marcando la mitad.

Como el segmento va a rotar media vuelta alrededor de este punto medio, se tiene que el extremo A pasa al punto B y viceversa.

El segmento $\overrightarrow{A'B'}$ es la imagen del segmento $\overrightarrow{AB}$ mediante la rotación dada, o el resultado de haber rotado el segmento $\overrightarrow{AB}$ aplicándole esa rotación.

Nótese que $\overrightarrow{A'B'}$ tiene la misma longitud y conserva la misma dirección, pero cambió de sentido.

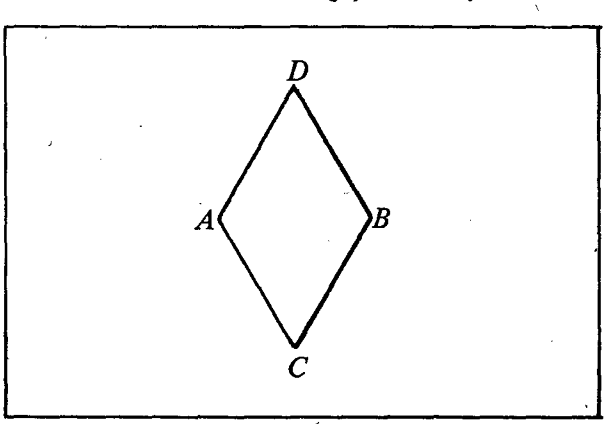
El segmento $\overrightarrow{AB}$ se va ahora a rotar teniendo como punto fijo el extremo B, un cuarto de vuelta en sentido contrario a las agujas del reloj.

El segmento $\overrightarrow{A'B'}$ es la imagen del segmento $\overrightarrow{AB}$ mediante la rotación dada.

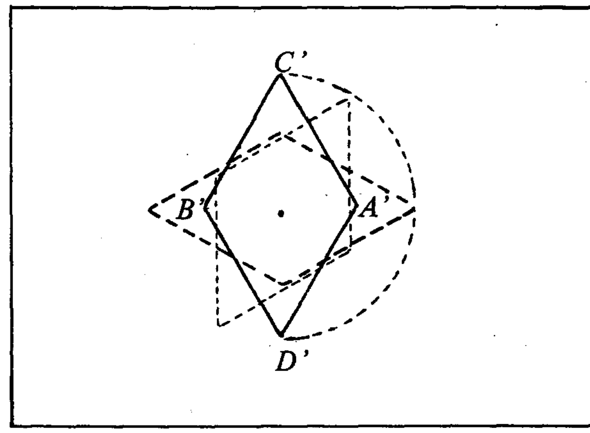
Nótese que B' sigue siendo el mismo punto B, y que el segmento $\overrightarrow{A'B'}$ conserva la misma longitud.

Ejemplo 2: Dado el polígono con vértices A, B, C y D, efectuar las siguientes rotaciones:

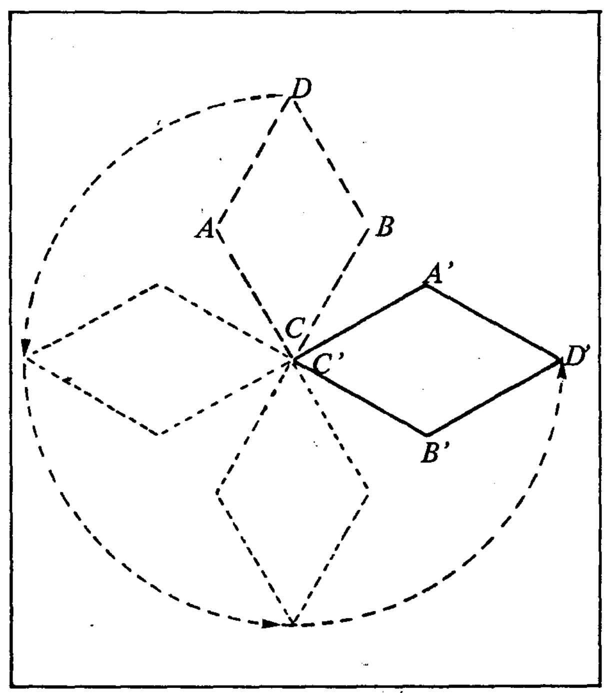
a) Media vuelta alrededor del centro en el sentido de las agujas del reloj.



b) Tres cuartos de vuelta alrededor del vértice C, en sentido contrario a las agujas del reloj.



El polígono A'D'B'C' es la imagen del polígono ADBC mediante la rotación dada. Nótese que la superficie delimitada por la figura rotada sigue siendo la misma, y el orden A'D'B'C' . . . es el mismo de antes. Pero los vértices se han intercambiado con sus opuestos.



El polígono A'D'B'C' es el resultado de aplicarle la rotación dada al polígono ADBC.

Nótese que la superficie delimitada por la figura rotada ya es distinta, aunque tiene la misma área y la misma forma.

El punto C es el mismo C', pero los demás puntos de la imagen son diferentes de los iniciales. El orden A'D' B'C'A' . . . se conserva inalterado.

Los estudiantes pueden utilizar lápices o palos para visualizar las rotaciones de segmentos, y recortar algunos polígonos en cartulina para visualizar las rotaciones de polígonos.

Pueden utilizar diferentes centros o ejes de rotación y diferentes ángulos de giro.

Para indicar la amplitud del ángulo de giro y su orientación pueden emplear expresiones como las siguientes:

Para la amplitud	**Para la orientación**
Un cuarto de vuelta	En sentido de las agujas reloj.
Media vuelta	
Una vuelta	En sentido contrario a ellas.
Tres cuartos de vuelta	
Un tercio de vuelta	

En la rotación de polígonos procurarán rotar triángulos equiláteros, cuadrados, rectángulos, triángulos isoscéles, rombos, pentágonos, hexágonos y toda clase de polígonos irregulares.

Inicialmente efectuarán algunas rotaciones dadas. Ejemplos:

- Dado el segmento AB rotarlo un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj, alrededor del extremo B.
- Dado el polígono MNPQ rotarlo en sentido contrario a las agujas del reloj:

  a) Un cuarto de vuelta alrededor del centro

  b) Media vuelta alrededor del centro

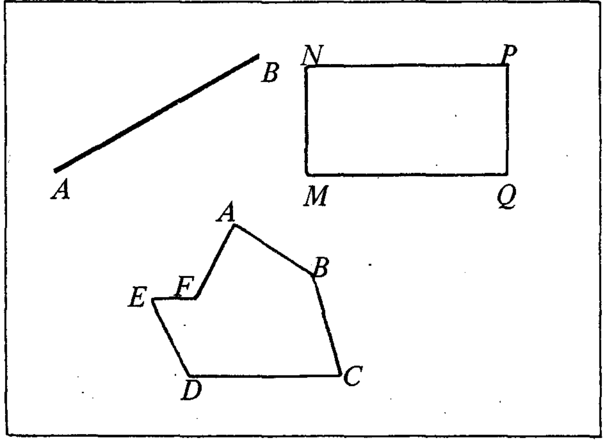
  c) Una vuelta alrededor del vértice M.
- Dado el polígono ABCDEF rotarlo en el sentido de las agujas del reloj:

  a) Media vuelta alrededor del vértice E.

  b) Una vuelta alrededor del vértice C.

En cada caso pueden dibujar el polígono dado y también recortarlo en cartulina. Colocarán el polígono de cartulina sobre el polígono dibujado, fijarán el centro de rotación con un chinche o un alfiler y cuando hayan hecho la rotación pedida dibujarán el polígono imagen trazando la frontera del polígono de cartón.

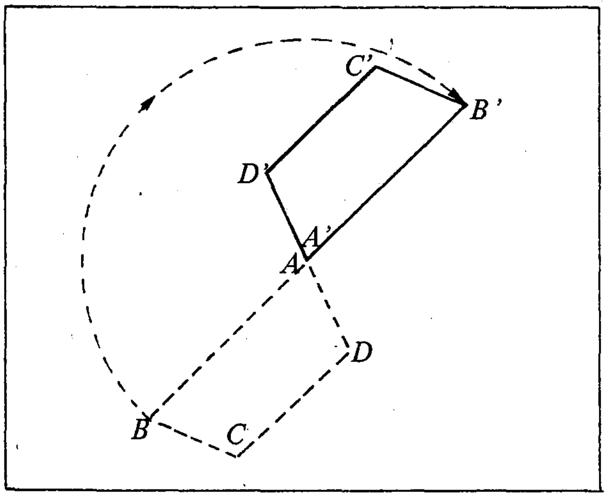
Mientras los alumnos hacen rotaciones se les puede pedir que observen cuidadosamente si, en algún momento, el polígono de cartón cubre exactamente el polígono dibujado. Si ésto ocurre, que señalen qué ángulo se giró y cuál fue el centro de la rotación. También que observen cuántas veces el polígono de cartón cubrirá exactamente el polígono dibujado al dar una vuelta completa. De este trabajo sacarán algunas conclusiones como las siguientes:



- La única manera de que un polígono irregular vuelva a su posición inicial es rotándolo una vuelta completa alrededor de cualquier punto.
- Un rectángulo o un rombo tendrán que girar media vuelta alrededor del centro para encontrar una posición análoga, osea que el polígono de cartón cubrirá exactamente dos veces el polígono dibujado al dar una vuelta completa.
- Un cuadrado tendrá que girar un cuarto de vuelta alrededor del centro para encontrar una posición análoga. Al dar una vuelta completa encontrará cuatro posiciones análogas.

También podrán resolver otros ejercicios como los siguientes:

- Dada la siguiente representación de una rotación.

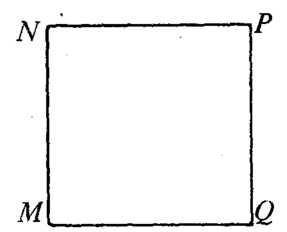


¿Cuánto se rotó?

¿En qué sentido?

¿Cuál fue el centro de rotación?

- Dado el cuadrado MNPQ



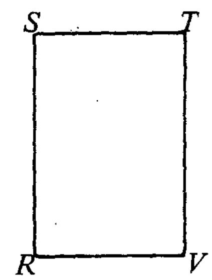
a) Rotarlo alrededor del punto M media vuelta en el sentido de las agujas del reloj y obtener el cuadrado M'N'P'Q'.

b) Rotar el cuadrado M'N'P'Q' alrededor del punto P' un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj y obtener el cuadrado M"N"P" Q".

c) Rotar el cuadrado M"N"P"Q" un cuarto de vuelta en el sentido de las agujas del reloj alrededor del punto M".

d) Verificar si estas tres rotaciones sucesivas son equivalentes a una traslación.

- Dado el rectángulo RSTV:



a) Trasladarlo horizontalmente hacia la derecha 5 unidades de longitud y obtener el rectángulo R'S'T'V'.

b) Rotar el rectángulo R'S'T'V' alrededor del centro, un cuarto de vuelta en el sentido de las manecillas del reloj y obtener el rectángulo R" S"T"V".

c) ¿Qué se puede hacer para que el rectángulo R" S"T"V" vuelva a la posición inicial? (donde estaba el rectángulo RSTV). Ensayar primero una rotación y después una traslación, y luego, primero una traslación y después una rotación, o una rotación, luego una traslación y luego otra rotación. Hay muchas soluciones!.

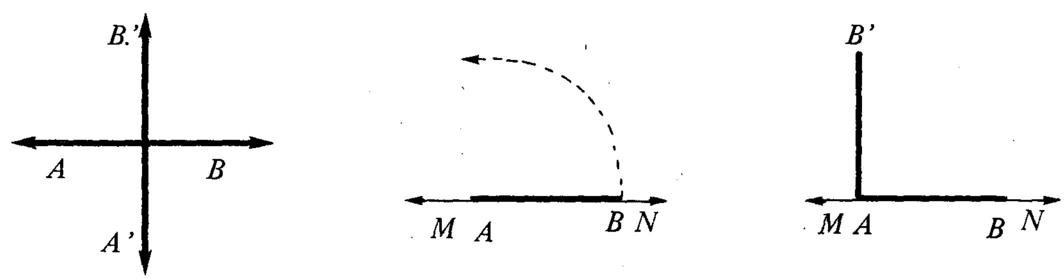
OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
84 Ordenar rotaciones alrededor de un mismo punto, según su amplitud y reconocer cuándo dos rotaciones tienen la misma amplitud.	Dadas varias rotaciones alrededor de un mismo punto el alumno las ordenará según su amplitud y verificará si tienen la misma amplitud o no.
85 Determinar una equivalencia entre la medición de una rotación en fracciones de vuelta y en grados.	El alumno concluirá que una rotación de una vuelta equivale a una rotación de 360°.

CONTENIDOS BASICOS

Una recta que resulte de rotar $\frac{1}{4}$ de vuelta a la recta $\overleftrightarrow{AB}$ alrededor de uno cualquiera de sus puntos, es una recta perpendicular a AB.

Ejemplo: $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{A'B'}$.

Esto se simboliza así: $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{A'B'}$



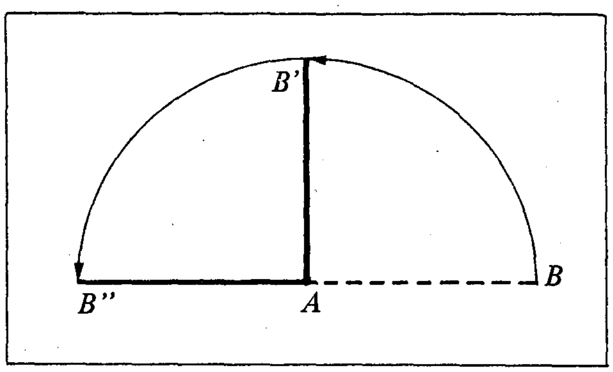
Si se traza un segmento $\overline{AB}$ sobre una recta $\overleftrightarrow{MN}$, y se hace girar $\frac{1}{4}$ de vuelta el segmento sobre uno de sus extremos, por ejemplo A, se dice que el segmento imagen $\overline{AB'}$ es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{MN}$. Esto se simboliza así:

$$\overline{AB'} \perp \overleftrightarrow{MN}$$

Considerando solo el segmento original $\overline{AB}$ y el segmento rotado $\frac{1}{4}$ de vuelta $\overline{AB'}$, también decimos que $\overline{AB'}$ es perpendicular a $\overline{AB}$: $\overline{AB'} \perp \overline{AB}$

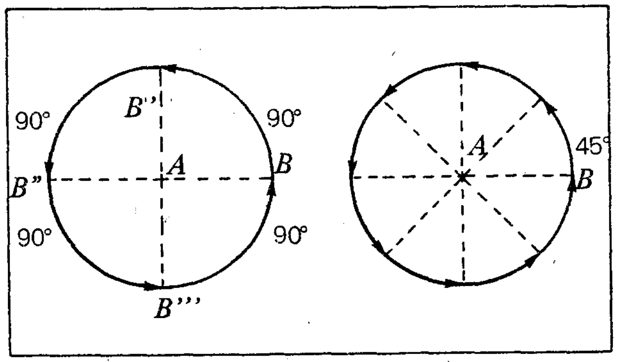
Cuando se hacen varias rotaciones de un segmento sobre un mismo eje, se observa que unas tienen mayor amplitud que otras; es decir, en unas el giro es más amplio que en otras. Intuitivamente se verifica que algunas rotaciones tienen mayor o menor amplitud que otras; también que puede haber rotaciones de la misma amplitud, aunque el segmento inicial haya sido diferente. Para determinar la amplitud de una rotación se toma como referencia la vuelta, es decir un giro alrededor de un punto en el que se sale de una posición y se llega a la misma posición después de una vuelta completa. Llegaremos a una medición de la amplitud de un giro en fracciones de vuelta.

También puede observarse que dos rotaciones de un segmento sobre uno de sus extremos tienen la misma amplitud si el otro extremo recorre arcos de círculos de la misma longitud.



$\overline{AB}$ se rotó un cuarto de vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj y se obtuvo el segmento $\overline{AB'}$. El segmento resultante $\overline{AB'}$ también se rotó un cuarto de vuelta en el mismo sentido, y se obtuvo el segmento $\overline{AB''}$.

El extremo B del segmento recorrió en cada rotación un arco de círculo de la misma longitud. Pero el punto medio recorre arcos más cortos. No debe confundirse pues la longitud del arco recorrido con la amplitud del giro.



Si una rotación de una vuelta se efectúa en cuatro rotaciones de la misma amplitud, decimos que en cada una de estas rotaciones el segmento ha girado 90 grados (90°).

Si una rotación de una vuelta se efectúa en 8 rotaciones de la misma amplitud, decimos que en cada una de estas rotaciones el segmento ha girado 45°.

Si una rotación de una vuelta se efectúa en 20 rotaciones de la misma amplitud, decimos que en cada una de estas rotaciones el segmento ha girado 18°.

Si la rotación se efectúa en 360 rotaciones de la misma amplitud, cada una de estas rotaciones ha girado un grado, (1°).

Cuando se gira una vuelta completa, se ha girado 360°.

$$\frac{1}{360} \times \text{(una vuelta)} = 1°$$

De esta manera se puede medir la amplitud de giro de cualquier rotación tomando como unidad el grado.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

La adquisición de estos conceptos se logra mediante los aspectos dinámicos. Los alumnos harán muchas rotaciones alrededor del mismo eje, tanto de segmentos como de polígonos, a partir de distintas posiciones iniciales, para observar que unas tienen mayor amplitud que otras y que al ordenarlas algunas rotaciones resultan de la misma amplitud. Para ordenar las rotaciones podrán también observar la longitud del arco que recorre un mismo punto en las diferentes rotaciones.

Cuando las rotaciones parten de distintas posiciones iniciales los alumnos podrán marcar con colores las flechas que indican cada rotación e intuitivamente ver que tienen la misma amplitud, o que una es mayor que la otra, etc.

Ejemplo: Los siguientes dibujos representan dos rotaciones hechas al segmento $\overline{AB}$.