REPUBLICA DE COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL
Dirección General de Capacitación
y Perfeccionamiento Docente
Currículo y Medios Educativos

MATEMATICAS

MARCO GENERAL

PROPUESTA
PROGRAMA CURRICULAR

Séptimo Grado de Educación Básica

Bogotá D.E. 1989

Edición a cargo de la Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo, y Medios Educativos del Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, 1989.

Producción:
División de Diseño y Programación Curricular de Educación Formal.

Revisión de estilo:
Angela María Correa Vélez

Coordinación Editorial:
Luz Lillyam Cardona
Hernando Garnica Ochoa

Por nuestra vinculación y compromiso con el sistema educativo seguramente hemos cuestionado y denunciado algunos de sus problemas principales.

En lo referente al currículo, la situación actual demuestra que, aunque se han realizado algunos esfuerzos por corregir las fallas de los planes y programas correspondientes a los Decretos 1710 de 1963 y 080 de 1974, sobre todo en la concepción educativa y su práctica, quedan problemas como: falta de continuidad entre grados y niveles, predominio de contenidos, poca atención a los intereses de los alumnos y a los asuntos de la vida diaria, escasa participación en los procesos de construcción de conocimiento, memorización ineficaz y aprendizaje verbal, rigidez de programas y falta de adecuación al medio.

Este diagnóstico ha comprometido al gobierno nacional en una política que perfeccione la calidad de la educación de modo que pueda responder con justicia a las necesidades, características, valores y aspiraciones de la sociedad.

Para hacer efectiva esta política se llevó a cabo la re-estructuración del sistema educativo (Decreto 088/76) con estrategias como la Renovación Curricular y se promulgaron decretos como el 1419/78 que explica los fines del sistema educativo y señala pautas para el diseño curricular y su administración y el 1002 de 1984 que establece el Plan de Estudios para Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional.

El diseño del nuevo currículo comprende los Fundamentos Generales, el Plan de Estudios, los Marcos Generales, los Programas Curriculares y materiales de apoyo.

Los Fundamentos Generales son una reflexión que, por su naturaleza, integra aspectos filosóficos, epistemológicos, sociológicos, psicológicos y pedagógicos, que permiten proponer en la educación la idea de hombre que se pretende hacer real. En ellos se concibe el conocimiento como proceso y conjunto de experiencias que dura toda la vida, transferible a otras situaciones y presente en diferentes contextos. Los conocimientos y verdades se consideran como proyectos que deben revisarse y corregirse permanentemente. El alumno es el centro del proceso y el maestro es su orientador y animador.

Así la educación llega a ser un proceso para posibilitar la autodeterminación personal y social y la escuela, el espacio necesario para el diálogo y el desarrollo de la conciencia crítica.

Los Marcos Generales son el sustento teórico de las áreas del Plan de Estudios e informan sobre el enfoque, la estructura y la metodología de cada área.

El eje organizativo del currículo es el alumno situado en la sociedad y la historia. Se busca educarlo para la vida con una formación integral, que incluya, además de lo cognoscitivo, lo socioafectivo y lo psicomotor; se proponen destrezas y habilidades necesarias para desplegar sus potencialidades y se lo orienta en los aspectos de socialización, participación y transformación de la realidad dentro de una perspectiva democrática.

Los contenidos y la metodología se refieren a conceptos básicos, principios generales y actividades que permitan enriquecer y sistematizar las experiencias y el propio aprendizaje del alumno. Tienen como punto de partida el mundo del educando y buscan desarrollar las áreas de manera integrada e interdisciplinaria, para respetar la percepción globalizante del niño y el mejor avance posible hacia los niveles de madurez.

La evaluación busca detectar fallas y aciertos para incluir los correctivos necesarios que garanticen el progreso del alumno.

Los nuevos programas de Educación Básica Secundaria son continuación de los de Básica Primaria. Surgieron como propuestas que se han debatido con los técnicos de los Centros Experimentales Piloto, por áreas específicas, y han sido estudiados y evaluados por profesores de distintas regiones del país. Siguiendo el proceso de revisión y ajuste, se espera mejorarlos en ediciones posteriores.

Por lo que se refiere a los Programas de Matemáticas, se busca superar algunas de las dificultades que durante muchos años han impedido una buena educación en esta área.

La propuesta requiere del docente un trabajo continuado de reflexión sobre la construcción del conocimiento por parte de los alumnos y sobre la búsqueda y construcción permanentes de una metodología apropiada que permita partir de su realidad, y apoyarse en sus vivencias para construir y organizar los conceptos y emplear símbolos inventados por ellos o aceptados culturalmente.

Después de comprobar que el procedimiento pedagógico usual de pasar de los sistemas simbólicos a los conceptuales lleva, en muchos casos, a la manipulación mecánica de símbolos y a la repetición de definiciones de memoria, consideramos conveniente partir de la investigación de los sistemas matemáticos (y aún pre-matemáticos) que ya se han vuelto concretos y que ya manejan de alguna forma los alumnos, para que de la actividad sobre ellos surjan los sistemas conceptuales que se desea que ellos construyan. Cuando ya se manejan los conceptos en forma de modelos mentales, actividades motrices, gestos y lenguaje ordinario, se procede a introducir los sistemas simbólicos como abreviaturas de dicho lenguaje, a inventar nuevos sistemas simbólicos y a traducir éstos a los sistemas usuales de los libros de matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, cualquier sistema matemático comprende:

- Sistemas simbólicos que aparecen a primera vista, con símbolos verbales del lenguaje ordinario y con símbolos formales u otros sistemas de representación gráfica.
- Sistemas conceptuales, que son los más importantes, y
- Sistemas concretos, que no necesariamente son objetos materiales, sino sistemas matemáticos (y aún pre-matemáticos) que ya maneja el alumno, y que por la familiaridad con ellos han pasado de ser abstractos a ser concretos para ellos.

Cada uno de estos sistemas incluye:

- Un conjunto de componentes, elementos u objetos con los que se juega.
- Un conjunto de transformaciones, operaciones o acciones sobre ellos, y
- Un conjunto de relaciones entre los mismos.

Con este sencillo análisis de cada sistema matemático que quiere trabajar con sus alumnos, el docente puede planear las actividades que conduzcan a la construcción del sistema conceptual por parte del alumno y su eficiente manejo simbólico.

Campo Elías Burgos
Jefe División de Diseño Programación
Curricular de Educación Formal.

CONTENIDO

MARCO GENERAL

PROGRAMADORES - AUTORES:
Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Virginia Cifuentes de Buriticá
Teresa León Pereira
Orlando Múnera Patiño
Carmen Lucila Osorno Reyes

ASESOR:
Universidad Nacional de Colombia
Carlos Eduardo Vasco Uribe

Introducción

Este documento contiene el Marco General del Programa de Matemáticas para la Educación Básica. En él se presenta un enfoque global de los contenidos acorde con el desarrollo de las Matemáticas y se sugiere un enfoque metodológico que se adecúe al elegido para los contenidos, a las características de los estudiantes colombianos y a las diversas transformaciones por las que pasa el conocimiento humano de los 6 a los 18 años.

Enfoque

A. JUSTIFICACION

La historia de las Matemáticas no puede aislarse de la historia de la humanidad puesto que el desarrollo de la una ha avanzado paralelamente con el desarrollo de la otra.

Es innegable el impulso que las Matemáticas le han dado al progreso de la humanidad, tanto en el aspecto científico como en el tecnológico.

Las aplicaciones que actualmente tienen las Matemáticas no se circunscriben a las de las Ciencias Naturales.

Todos en nuestra práctica cotidiana necesitamos, a menudo, efectuar cálculos y estimar rápidamente algunos resultados. Esta utilidad de las Matemáticas es tan antigua como lo es la historia del hombre. Es, por tanto, indispensable insistir en la operatoria y el cálculo mental, sin volver a las rutinas tediosas de antaño que provocaban en la mayoría de los alumnos una aversión permanente hacia las Matemáticas; se insiste más bien en la comprensión de los conceptos y de los procesos, y en la formulación y solución de problemas, para apoyar y motivar el ejercicio de los algoritmos de cálculo. Se introducen también explícitamente experiencias y ejercicios de estimación aproximada de los resultados de cálculos y de mediciones, y se desarrollan habilidades tan importantes como las de encontrar los resultados exactos a través de procedimientos de rutina. Las calculadoras y las computadoras harán cada vez más importantes las primeras que las segundas.

Para la comprensión de conceptos y procesos matemáticos se requiere un mínimo de teoría de conjuntos, la que comienza con el manejo concreto de colecciones figurales y no figurales, necesarias para la comprensión del concepto de número natural, y continúa, gradualmente, con un mínimo de simbolismo formal, a lo largo de toda la Educación Básica, para proporcionar un lenguaje común al estudio de los diversos sistemas matemáticos y preparar el paso al estudio de la teoría axiomática de conjuntos, en la Educación Media Vocacional.

La mayoría de las profesiones y oficios, y aún el desempeño exitoso en muchas circunstancias de la vida ordinaria, exigen un adecuado manejo del espacio y de sus representaciones plásticas, gráficas o simplemente imaginativas.

Por una falsa reacción contra la geometría euclidiana y por faltas de alternativas, el estudio de la geometría en la Educación Básica se había hecho cada vez más limitado, hasta llegar a desaparecer en muchos planteles, con resultados muy negativos en las habilidades de manejo del espacio. En este programa la geometría aparece enfatizada en todos los grados, como una exploración sistemática del espacio. Esta exploración es primordialmente activa, dinámica y sólo secundariamente un estudio de figuras trazadas en el tablero, o en el papel, que ya han perdido su carácter dinámico.

Los computadores encarnan en sus circuítos la lógica simbólica de Boole. Esta lógica, que en la época de su creación, a mediados del siglo XIX, sólo interesó a unos pocos especialistas, ocupa hoy un sitio privilegiado en el diseño y en el manejo de las calculadoras y los computadores y, en general, en todas las áreas de la informática. Por lo tanto, aparecen desde el primer grado algunos objetivos relacionados con la lógica y el seguimiento de instrucciones lógicamente estructuradas, que preparen a los alumnos a una fácil transición a la programación de calculadoras y computadores, cuando puedan tener acceso a ellos.

Hay otro aspecto muy importante, es el relacionado con el rigor y la precisión en la formación intelectual, y la contribución de las Matemáticas a esa formación.

El lenguaje de las Matemáticas intenta ser, esencialmente, preciso y general, en contraste con la ambigüedad y la particularidad del lenguaje usual. Mientras que el primero está sujeto a reglas estrictas que limitan su significación para disminuir las interpretaciones subjetivas, el segundo permite toda una serie de interpretaciones mediante las cuales el sujeto puede manifestar sus sentimientos e intuiciones.

Es de la síntesis de estos dos lenguajes de donde surge el factor de formación intelectual que permite distinguir lo preciso de lo ambiguo y lo particular de lo general.

En el currículo de Educación Básica se incluye el estudio de todos estos aspectos de las Matemáticas con el fin de contribuir decididamente a la educación integral del individuo, y llevarlo a participar activamente de ese gran patrimonio de la humanidad, que son las Matemáticas.

B. ENFOQUE DE SISTEMAS

En la Matemática como en todas las ciencias, ha habido diversas tendencias o enfoques que de alguna manera buscan organizar los contenidos, correlacionarlos, jerarquizarlos, etc., que han constituído "escuelas matemáticas".

Actualmente hay una corriente muy notoria que se propone presentar la Matemática como una ciencia unificada, en la cual las diversas ramas tienen estructuras comunes, afines, que pueden expresarse en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

Este enfoque unificador de todas las ramas de la Matemática (o sea de las Matemáticas) puede articularse o establecerse, de manera coherente, alrededor de un concepto clave más amplio que el de conjunto, que es el concepto de **Sistema.**

El concepto de sistema tiene la ventaja de no ser exclusivo de la Matemática, ya que es empleado en una u otra forma en todas las ciencias. Cada ciencia se ocupa de sistemas especiales; por consiguiente, debe establecer reglas específicas para interpretarlos y manejarlos, y garantizar, además, una utilización adecuada del lenguaje de los sistemas y de la teoría general de sistemas.

El enfoque elegido para el actual programa oficial de Matemáticas correspondiente al nivel de Educación Básica, es el enfoque de sistemas; por eso conviene analizarlo detalladamente.

En círculos dedicados en Colombia a la docencia y a la investigación matemática, son ya bien conocidos estudios como: **Relatores y operadores; Lógica, conjuntos y estructuras; Relaciones, operaciones y sistemas; El concepto de sistema como clave del currículo de Matemática,** en los cuales el asesor del Ministerio de Educación Nacional, en la elaboración de los programas de Matemáticas para el nivel Básico, Carlos E. Vasco U., desarrolla el enfoque de sistemas, analiza los conceptos asociados a dicho enfoque (como los de conjunto, objeto, relación, operación, sistema y estructura), y los especifica al caso particular de los sistemas matemáticos.[1]

1. CONCEPTO DE SISTEMA

Para definir un sistema hay que establecer previamente el significado de las palabras que se van a emplear. Esas palabras son: conjunto, objeto, relación, operación. Quien intente definirlas, se convencerá de que no es posible hacerlo en términos de conceptos más fundamentales, pues lo único que es posible encontrar, para cada una de esas palabras, es una lista de sinónimos, con diversas connotaciones y de que, con base en esos sinónimos, todo el mundo parece entender qué quieren decir esas palabras, sin detenerse a pensar si existe una definición precisa para cada una.

Los sinónimos más usuales para esas palabras son:

Conjunto:	coleccion, clase, agrupación, agregado, montón, grupo (rebaño, jauría, bandada...).
Objeto:	cosa, elemento, individuo, entidad, ser (persona, animal, planta, mineral...).
Relación:	referencia, respecto, "ser hacia" (Aristóteles), nexo, lazo, vínculo, conexión.
Operación:	acción, transformación, modificación, intervención, conversión (Relaciones 1978).

A partir de estas cuatro palabras, o de sus sinónimos, es posible expresar el concepto clave del currículo de Matemática: el concepto de sistema.

Sistema es un conjunto de **objetos** con sus **relaciones y operaciones**

Con base en esta definición, pueden identificarse y analizarse sistemas en diversos campos de la actividad científica, económica, política, etc.

2. SISTEMAS ESPECIFICOS DE LA MATEMATICA

En particular, para describir un sistema determinado de la Matemática hay que especificar un conjunto de objetos, un conjunto de operaciones y un conjunto de relaciones. Un ejemplo puede ser un sistema estudiado en la Aritmética, en el cual:

— el conjunto de objetos es el formado por los números enteros.
— el conjunto de operaciones es el formado por la adición y por la multiplicación, y
— el conjunto de relaciones es el formado por las relaciones de orden: "...es menor o igual que...", "...es mayor o igual que...", "...es estrictamente menor que...", "...es estrictamente mayor que...".

[2] Si cada uno de estos conjuntos se simboliza por una letra mayúscula, se tiene:

— Conjunto de objetos: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

---

[1] (Ver bibliografía. Las obras se citarán con la primera palabra del título y el año de su publicación).

[2] (Conviene recordar que el conjunto de los número enteros se simboliza mediante una $\mathbb{Z}$ y sus elementos son: el cero, todos los enteros positivos: 1, 2, 3, ... y todos los enteros negativos: -1, -2, -3, ...).

– Conjunto de operaciones: $\Omega = \{+, \times\}$

– Conjunto de relaciones: $R = \{\leqslant, <, >, \geqslant\}$

Es posible, pues, representar este sistema de los números enteros así:

$$(\mathbb{Z}, \{+, \times\}, \{\leqslant, <, >, \geqslant\}).$$

Para nombrar más abreviadamente este sistema, se puede establecer la convención de emplear solamente las letras mayúsculas, que simbolizan los conjuntos de objetos, de operaciones y de relaciones, en ese orden:

$$(\mathbb{Z}, \Omega, R)$$

Por las propiedades que cumplen las operaciones y las relaciones definidas en este conjunto específico de los enteros, se suele o se acostumbra mencionar este sistema indicando la estructura que tiene. Como en este caso el sistema tiene estructura de anillo ordenado, se denomina anillo ordenado de los números enteros.

En forma similar pueden describirse otros sistemas de la Aritmética, de la Geometría, de la Teoría de Conjuntos, de la Lógica Matemática, etc. En general, cada sistema queda perfectamente determinado por tres conjuntos:

a. **Un conjunto de objetos,** simbolizado por una letra mayúscula latina, por ejemplo A. Este conjunto, llamado **conjunto subyacente,** no puede ser vacío.

b. **Un conjunto de operaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula griega, por ejemplo Ω (omega). Este conjunto puede ser vacío en el caso de sistemas puramente relacionales, como el llamado **conjunto parcialmente ordenado,** en el que se tiene: $A \neq \phi, \Omega = \phi, R = \{\leqslant\}$ y que se puede simbolizar así:

$$(A, \phi, \{\leqslant\}), \text{ o },$$
$$(A, \{\leqslant\}), \text{ o },$$
$$(A, \leqslant).$$

c. **Un conjunto de relaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula cursiva, por ejemplo R. En este conjunto, se suelen indicar únicamente las relaciones binarias entre elementos del conjunto A.

Además de estas relaciones en A, se dan otras relaciones en las que intervienen elementos de A, operaciones de Ω y relaciones de R.

Estas relaciones se suelen enunciar en el lenguaje propio del sistema, y constituyen su teoría.

Abreviadamente, cualquier sistema específico de la Matemática puede simbolizarse por medio de una terna o tripla ordenada de conjuntos:

$$\mathcal{S} = (A, \Omega, R)$$

A : el conjunto de objetos del sistema $\mathcal{S}$
Ω : el conjunto de operaciones del sistema $\mathcal{S}$
R : el conjunto de relaciones del sistema $\mathcal{S}$

3. VENTAJAS DEL ENFOQUE DE SISTEMAS

El enfoque de sistemas contenido en los estudios mencionados anteriormente, contribuye al logro de los objetivos del Programa de Matemáticas porque organiza y unifica los diversos contenidos y las diversas ramas de la Matemática, a través de unos conceptos y un lenguaje común; facilita la articulación de la Matemática con las demás áreas del Currículo, y permite desarrollar los contenidos atendiendo a las características de los alumnos del Ciclo Básico y de la realidad en que viven, sin caer en el énfasis desmedido en los conjuntos, que se hace en cierto tipo (ya no tan moderno) de la llamada "Matemática Moderna".

Son, pues, tres las ventajas del enfoque de sistemas: una en el interior de la Matemática, otra en el campo de la integración o articulación de la Matemática con otras ciencias y otra respecto a la metodología propuesta para desarrollar los contenidos.

Conviene analizar las implicaciones que tiene este enfoque en la articulación de la Matemática con las demás ciencias. Basta una rápida revisión de los contenidos tratados en Ciencias Naturales, en Ciencias Sociales, en Administración, etc., para concluir que todas estudian determinados sistemas, y que, por consiguiente, hay en este concepto una fuente de articulación e integración.

Ejemplos de esos sistemas, no estrictamente matemáticos, son: el sistema ecológico (uno de los conceptos de más actualidad), el sistema respiratorio, el sistema circulatorio, el sistema social, el sistema económico, el sistema solar, etc. Sistemas como el social o el circulatorio son muchísimo más complejos que los sistemas matemáticos.

Los sistemas matemáticos son muy simplificados. Los sistemas reales son siempre más complejos. Esta es la regla clave para la articulación de la Matemática con las demás ciencias. El dominio del concepto de Sistema en Matemática prepara para el dominio de ese concepto y sus aplicaciones en las Ciencias Naturales y Sociales, en el Lenguaje, y en la solución de problemas de la vida real. (Ver: Relaciones, 1978; Concepto, 1980).

Las otras dos ventajas de este enfoque se explicitarán posteriormente en la estructura conceptual del área.

Objetivos

A. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA

El estudiante debe:

- Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente.
- Adquirir independencia en la actividad intelectual.
- Adquirir profundidad y perseverancia en la búsqueda del conocimiento.
- Ampliar su capacidad para realizar generalizaciones.
- Desarrollar habilidades en los procedimientos operativos aritméticos y geométricos.
- Familiarizarse con conceptos básicos de la Matemática.
- Adquirir precisión en la expresión verbal y familiaridad con el lenguaje y expresiones simbólicas.
- Interpretar la realidad a través de modelos matemáticos.
- Utilizar la Matemática para interpretar y solucionar problemas de la vida cotidiana, de la tecnología y de la ciencia.
- Ejercitar la agilidad mental para encontrar soluciones a problemas de diferentes tipos.
- Reconocer y valorar algunas de las funciones de la Matemática en el desarrollo de la ciencia y en el mejoramiento de las condiciones de vida.

B. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA EN LA EDUCACION BASICA

- Construir el conjunto de los números naturales a partir de colecciones, de objetos concretos y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva, multiplicativa y potenciativa.
- Adquirir habilidad para el cálculo aritmético mental y para el cálculo escrito, con ayuda de la calculadora y sin ella.
- Construir el conjunto de los números fraccionarios a partir de operadores sobre magnitudes concretas y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números fraccionarios y de las operaciones entre ellos.
- Construir algunos subconjuntos de números reales a partir de situaciones geométricas e inicar el estudio del conjunto de los números reales y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números reales y de las operaciones entre ellos.
- Realizar cálculos numéricos utilizando las propiedades de las operaciones fundamentales estudiadas en el conjunto numérico respectivo.
- Adquirir habilidades y destrezas para formular, plantear y resolver problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos.
- Explorar el espacio en dos y tres dimensiones y construir modelos imaginativos y pictóricos del mismo y desarrollar algunos sistemas conceptuales y simbólicos que permitan manejar esos modelos.
- Calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras en el espacio.
- Identificar diferentes sistemas métricos y ejercitar las conversiones de unidades.
- Analizar sistemas de datos estadísticos, calcular frecuencia y promedio y representarlos gráficamente.
- Identificar y utilizar correctamente las conectivas del lenguaje ordinario: y; o; si, ... entonces; si, ... entonces... y si no, no.
- Reconocer y utilizar correctamente los cuantificadores del lenguaje ordinario: todos, cada uno, algún, alguno, algunos, ningún, ninguno, nadie, algunos no, hay, no hay.
- Determinar y representar conjuntos y subconjuntos.
- Realizar operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento y producto cartesiano; analizar algunas propiedades de estas operaciones y utilizar correctamente sus símbolos más usuales.
- Reconocer relaciones de pertenencia, contenencia, disyunción y equinumerosidad; analizar algunas propiedades de estas relaciones y utilizar correctamente sus símbolos más usuales.
- Generar todas las permutaciones y combinaciones de objetos tomados de conjuntos de pocos elementos, atendiendo a condiciones previamente determinadas.
- Reconocer, analizar y representar relaciones en sistemas específicos y en particular relaciones de orden y de equivalencia.
- Reconocer, analizar y representar operaciones en sistemas específicos y en particular operaciones conmutativas y asociativas.

Estructura

Es fácil comprender ahora la ventaja del enfoque de sistemas, como organizador de los contenidos de Matemática (ver Cuadros Nos. 1 y 2). Este enfoque suministra una organización o estructura de carácter general para el área y un esquema de presentación de cada sistema, los cuales proporcionan las bases necesarias para desarrollar los contenidos mínimos del programa, para abordar otros temas de las diversas ramas de la Matemática, y aún de otras ciencias.

La estructura del área de Matemática, debe señalar, como mínimo, algunos aspectos, tales como: organización de los contenidos, grandes temas, secuencia, grado de profundidad, interrelaciones y desarrollo del enfoque. Los cuadros 1, 2, 3 y 4 que aparecen en las páginas siguientes constituyen una aproximación a dicha estructura.

CONTENIDOS (lo.a 5o. GRADOS)

Los contenidos del área para la Educación Básica Primaria (1o. a 5o. grados) se han organizado, bajo los siguientes títulos: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos, conjuntos, relaciones y operaciones. (Ver cuadro No. 1).

Los contenidos para la Básica Secundaria (6o. a 9o. grados) tienen además de los títulos anteriores, otro denominado análisis real (Ver cuadro No. 2).

1. SISTEMAS NUMERICOS

Estos se estudian de manera gradual. En la Educación Básica Primaria, el de los números naturales, comenzando con los números de 0 — 100 en primer grado y ampliando en cada grado el conjunto numérico. En cada uno de estos conjuntos se van introduciendo progresivamente las operaciones comenzando con la adición y la sustracción en primer grado, hasta llegar a las primeras nociones de potenciación, radicación y logaritmación en quinto grado y además las relaciones de orden aditivo y de orden multiplicativo. También en la Primaria se inicia el estudio de los números fraccionarios y de los decimales. En la Educación Básica Secundaria se avanza en el estudio de los números enteros, los racionales, los reales y los complejos, vistos como sistemas numéricos con sus operaciones y las relaciones que hay entre sus elementos. Se hace mucho énfasis en la solución y formulación de problemas, como aplicación de los algoritmos de las operaciones y en ejercicios de cálculo mental. Con ésto se espera que, a medida que los niños vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar las semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que más adelante les permitan integrar conocimientos y hacer generalizaciones.

2. SISTEMAS GEOMETRICOS

Se incorpora toda la parte de Geometría activa a través de la exploración del espacio. De esta manera se estudian los sólidos, las figuras planas, las líneas, los ángulos, etc.; destacando relaciones como paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza, y transformaciones como rotaciones, traslaciones, reflexiones, reducciones y ampliaciones.

3. SISTEMAS METRICOS

Se estudia el sistema métrico decimal y otros sistemas no decimales. En dichos sistemas se expresa el resultado de medir longitudes, superficies, el volumen de un cuerpo, la capacidad de un recipiente, el peso y la masa de un objeto, la duración de un evento y la amplitud de un ángulo. Los patrones estandarizados se utilizan después de realizar mediciones con unidades arbitrarias y sentir así la necesidad de una unidad común de medida aplicable en todos los casos. En los diferentes sistemas se realizan conversiones con sus aplicaciones y se hacen comparaciones.

4. SISTEMAS DE DATOS

Se estudian algunos conceptos fundamentales de estadística que sirven para interpretar algunos modelos de la realidad. Se inicia con la recolección de datos, su organización en tablas de frecuencia y su representación en diagramas. Se hace algún análisis de los datos recogidos y tabulados mostrando lo que puede deducirse de ellos y cómo pueden compararse entre sí; para ello se estudian al final de la Básica Primaria algunas medidas de tendencia central y al final de la Básica Secundaria se completan estas medidas y se introducen las medidas de dispersión.

5. SISTEMAS LOGICOS

No se pretende hablar de lógica matemática abstracta, sino de ciertos aspectos del lenguaje en los que se notan regularidades que se pueden manejar matemáticamente. Por eso se parte de las expresiones que manejan los alumnos para ir introduciéndolos poco a poco en un lenguaje más riguroso, que tiene por objeto, entre otros, evitar las frecuentes ambigüedades del lenguaje usual, y más tarde, desarrollar las habilidades del pensamiento deductivo.

6. CONJUNTOS

Como ya se dijo en la justificación, se trata la teoría mínima necesaria para introducir algunos conceptos fundamentales de la Aritmética, de la combinatoria y de la probabilidad, y para preparar una posterior formulación unificada de las diversas áreas de las matemáticas.

7. RELACIONES Y OPERACIONES

Se analizan algunos fundamentos teóricos sobre estos conceptos. Dicho análisis se insinúa empíricamente desde la Básica Primaria hasta llegar a una conceptualización más general al finalizar la Básica Secundaria. Las operaciones se estudian como transformaciones sobre los elementos de un sistema, mientras que las relaciones corresponden a la teoría acerca de los mismos. Se estudian también las propiedades, tanto de las operaciones como de las relaciones y se presentan algunos aspectos teóricos sobre las funciones.

8. ANALISIS REAL

Se estudian las funciones reales, en donde se incorporan algunos temas de los que se habían venido tratando en los programas tradicionales bajo el nombre de "Algebra", y que en realidad son solo el manejo de ciertas expresiones para las funciones reales o sus valores. Se enfatiza en los aspectos de representación gráfica de estas funciones. Se empieza estudiando funciones tan sencillas como la función lineal, con lo cual se cubren temas como la proporcionalidad y todas sus aplicaciones; posteriormente se trabajan las funciones cuadráticas y demás funciones polinómicas. Paralelamente a las funciones se van estudiando las ecuaciones e inecuaciones y en 9o. grado se introducen las funciones lineales en dos y tres dimensiones.

En este programa se hace énfasis en el estudio de sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos y en Secundaria en el análisis real. En cuanto a los demás sistemas se hace un manejo racional y prudente necesario para adquirir familiaridad con las matemáticas no numéricas y para contribuir al desarrollo de la capacidad de análisis, y a largo plazo, del pensamiento formal.

En síntesis, los contenidos básicos vistos en los cuadros 1 y 2, permiten: identificar los sistemas de la Matemática en los cuales se ubican los contenidos propuestos para el programa; identificar los grandes temas que se proponen para cada grado; reconocer la secuencia que debe seguirse al desarrollar los contenidos; apreciar el grado de profundidad con que deben ser tratados los contenidos en cada grado e identificar las correlaciones que hay entre los temas de un mismo grado o entre temas de diferente grado. El hecho de tener una visión global del programa de cada grado favorece la enseñanza correlacionada y permite además, obtener información sobre lo que un alumno, que cursa un determinado grado, estudió en el grado anterior y lo que va a necesitar para el grado siguiente.

El cuadro No. 3, titulado **Sistema,** señala una forma común para la presentación de los diversos sistemas. Según lo explicado anteriormente, es importante identificar en cada caso los elementos u objetos, las relaciones y las operaciones.

En el ejemplo tomado de la aritmética, los elementos son números enteros, las operaciones son la adición y la multiplicación y las relaciones son: "...es estrictamente menor que...", "...es menor o igual que..." , etc. En el ejemplo tomado de la geometría, los elementos son líneas del plano, las operaciones son las rotaciones y las traslaciones, y las relaciones son: "...es perpendicular a...", "...es paralela a...". En forma similar se explican los ejemplos tomados de la Teoría de Conjuntos y de la Lógica. Los ejemplos podrían ser otros, pero el esquema de presentación es el mismo en todos los casos.

No se pretende que los niños conozcan e interpreten ese cuadro. Pero sí se espera que a medida que vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que, más adelante, les permitan integrar los conocimientos y hacer generalizaciones. Por ejemplo el "descubrir", en la primaria, que la adición y la multiplicación de números naturales son conmutativas y que la unión e intersección de conjuntos también lo son, debe llevar al estudiante de secundaria a elaborar un concepto más general de conmutatividad. Así se propicia el desarrollo mental del estudiante, se ahorra tiempo y se adquieren conocimientos más sólidos y duraderos. En esa forma, también, la mente del niño elabora progresivamente los conceptos y no tiene necesidad de repetir fórmulas y definiciones abstractas carentes de significado para él.

Además de los sistemas que se presentan en el cuadro No. 3 para la Aritmética, la Geometría, la Teoría de Conjuntos y la Lógica, podrían darse muchos otros sistemas de esas y otras ramas de las Matemáticas: por ejemplo, se puede hablar de muchos sistemas numéricos diferentes, no sólo cambiando el conjunto de los números enteros por los naturales, los fraccionarios, los reales o los complejos, sino distinguiendo varios sistemas diferentes sobre cada uno de esos conjuntos.

"Puede hablarse también de un sistema de numeración diferente de un sistema numérico: en el sistema de numeración los objetos son los símbolos, de los cuales hay primitivos (dígitos) y derivados, y la operación básica es la concatenación o yuxtaposición.

También puede enfocarse en este sentido el estudio de un sistema métrico, y comparar las presentaciones del sistema métrico decimal que dan los libros de Matemáticas, con los sistemas que aparecen en los libros de Física (IS, MKS, CGS, FPS). Se notará inmediatamente que ninguno de ellos es el presentado por los libros de Matemáticas; que las unidades de tiempo no son decimales; que la teoría de la dimensión se hace necesaria para entender el sistema; que la multiplicación de unidades produce múltiplos y submúltiplos, si es externa, pero que la multiplicación interna produce unidades de otra dimensión". (Concepto, 1980).

CUADRO No. 1

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA PRIMARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 SISTEMAS DE DATOS	5 SISTEMAS LOGICOS	6 CONJUNTOS	7 RELACIONES Y OPERACIONES
1o.	. Naturales de 0 a 100 con adición y sustracción y simbolización. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden aditivo ... es mayor que ... ... es menor que ... . Ordinales. . Operadores como -1, + 1, -2, etc.	. Relaciones espaciales. . Algunos sólidos geométricos regulares. . Figuras planas. Bordes rectos y bordes curvos. . Introducción a la simetría. . Líneas (abiertas y cerradas).	. Introducción a la medición de longitudes: patrones arbitrarios, el dm. y el m. . Medición de tiempo.	. Iniciación a gráficas de barras.		. Clasificaciones. . Noción de conjunto; elemento. . Conjuntos equinumerosos. Cardinal. . Noción de unión de conjuntos disyuntos. . Representación gráfica. . Arreglos sencillos.	. Iniciación a la representación de relaciones. . Diversas maneras de efectuar operaciones.
2o.	. Naturales de 0 a 1000 con adición, sustracción y multiplicación. División (iniciación). . Números pares y números impares. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo ... es múltiplo de ... ... es divisor de ...	. Rectas paralelas y perpendiculares. . Rotaciones y giros. Angulos. . Formas geométricas regulares: cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares. . Noción de perímetro.	. Longitud: m., dm., cm. . Area. Unidades arbitrarias, dm^2 . Unidades de duración: horas, minutos.	. Gráficas de barras.	. Significado de la "y" y de la "o" en una instrucción. . Expresiones "todos", "algunos", "ninguno".	. Pertenencia. . Noción de subconjunto. . Unión de conjuntos disyuntos y no disyuntos. . Cardinal de la unión. . Parejas con y sin orden.	. Propiedades: conmutativa, asociativa, modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (introducción).
3o.	. Nuestros sistema de numeración. . Numeración romana. . Naturales mayores que 1000 con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos generalizados para adición, sustracción y multiplicación con aplicaciones. . Números primos. . Operadores naturales. . Introducción a los operadores fraccionarios.	. Superficies (fronteras de sólidos). Superficies planas. . Líneas (fronteras de superficies). . Puntos (fronteras de líneas) . Caracterización de: triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo.	. Longitud, m., múltiplos y submúltiplos. Yarda y vara. . Superficie. Area. Patrones standarizados: m^2, cm^2, y mm^2. . Volumen. Patrones arbitrarios. . Capacidad: patrones arbitrarios. Litro.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos.	. Diversos significados de la "y" y de la "o" en el lenguaje ordinario. . Diversas maneras de cuantificar expresiones en el lenguaje ordinario.	. Simbolización de las relaciones de pertenencia y contenencia. . Unión e intersección. . Algunos arreglos con y sin orden.	. Relaciones de orden. . Diagrama de flechas. . Propiedades antisimétrica y transitiva. . Propiedades: conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.
4o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación y división. M. C. D. y M. C. M. . Fraccionarios con adición, sustracción y multiplicación. . Decimales con adición y sustracción. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo.	. Modelos de sólidos. . Cuadriláteros: trapecios. . Perímetro (generalizado). . Radios, diámetros. . Areas: trapecio, cuadrado, rectángulo, triángulo. . Cuadrícula.	. Area. Algunos múltiplos y submúltiplos del m^2. Medidas agrarias. . Volumen: m^3, dm^3, cm^3. Peso: gramo, kilogramo.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos. . Iniciación al análisis de datos. . Frecuencias, moda.	. Proposiciones: Significado verdad o falsedad. . Negación de proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario.	. Relaciones de contenencia. . Igualdad de conjuntos. . Conjunto referencial. . Complemento de un conjunto. Simbolización y representación. . Algunos tipos de arreglos.	. Relación inversa. Diagramas de flechas. Propiedades antisimétrica y transitiva.
5o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación. . Fraccionarios con adición, sustracción, multiplicación y división. . Decimales con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos con aplicaciones. . Razones y proporciones. . Proporcionalidad directa e inversa.	. Construcciones con regla y compás. . Polígonos regulares. . Construcción de algunos sólidos. . Area de círculo. . Area y volumen de algunos sólidos.	. Conversiones con unidades de longitud, área, capacidad y peso. . Otras unidades de peso. . Unidades de duración. . Conversiones.	. Noción de promedio en un conjunto pequeño de datos.	. Proposiciones Conjuntivas, disyuntivas y condicionales.	. Extensión y comprensión. . Conjuntos: infinito (N), unitario, vacío. . Unión e intersección. . Otros tipos de arreglos.	. Recopilación de las operaciones conmutativas, asociativas, modulativas estudiadas. . Igualdades.

CUADRO No. 2

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA SECUNDARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 ANALISIS REAL	5 SISTEMAS DE DATOS	6 SISTEMAS LOGICOS	7 CONJUNTOS	8 RELACIONES Y OPERACIONES
6o.	. Sistemas de numeración: Historia Bases (sin operaciones): 2, 5, 10, 12. . $(\mathbb{N}, +, -, \times, \div, \leq, \geq)$. Potenciación, radicación y logaritmación. . $(\mathbb{Q}^+, +, -, \times, \div, \leq, \geq)$. Expresiones fraccionarias y decimales.	. Traslaciones. Paralelismo . Rotación. Angulos. . Perpendicularidad. . Triángulos y cuadriláteros. . Distancias. . Teorema de Pitágoras.	. Unidades de longitud (sistema métrico decimal y otros sistemas). . Repaso de unidades de área. . Unidades de amplitud de ángulos (vueltas y grados).	. Representación en la recta numérica $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}^+)$ (no "recta real"). . Relaciones: $\leq$, $<$, $\geq$, $>$	. Frecuencias absolutas. . Frecuencias relativas (porcentuales, fraccionarias). . Diagramas de barra y circular. . Frecuencias ordinarias o puntuales. . Frecuencias acumuladas.	. Conectivas. . Constantes y variables. . Términos y predicados. . Proposiciones abiertas y cerradas. Sustitución.	. Conjuntos finitos e infinitos. . Conjunto referencial. . Subconjunto. . Complemento de un conjunto. - Operaciones entre conjuntos numéricos.	. Relaciones binarias. . Propiedad antisimétrica y transitiva de algunas relaciones. . Operacionés unarias y binarias. . Diferencia entre operación y relación.
7o.	. $(\mathbb{Z}, +, -, \times, \div, \leq, \geq, \lfloor\ , \rfloor)$. $(\mathbb{Q}, +, -, \times, \div, \leq, \geq)$. Valor absoluto . Algoritmos con aplicaciones: porcentajes, descuentos, interés, cambio de moneda. . Algunos reales: π $\sqrt{2}$.	. Movimientos rígidos: Rotaciones Reflexiones Traslaciones . Congruencias y semejanzas. . Homotecias . Polígonos . Círculo . Perímetro	. Otros sistemas de unidades de amplitud de ángulos. . Unidades de duración. Conversiones ("Complejos").	. Funciones crecientes y decrecientes. Correlación. . Funciones lineales. Razones Proporciones . Representación gráfica de funciones lineales y de gráfica lineal. Ejes, cortes, intercepto. . Ecuaciones lineales. Solución de ecuaciones lineales.	. Medidas de tendencia central: moda, media y mediana.	. Afirmaciones y negaciones verdaderas y falsas. . Proposiciones abiertas y cerradas. Cuantificación. . Expresiones con variables y paréntesis. . Igualdades.	. Conjunto de partes. Cardinal del conjunto de partes. . Subconjuntos del conjunto de partes. Combinaciones.	. Operaciones binarias. Propiedades: operación clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertiva. . Distributividad. . Linealidad de operadores.
8o.	. $(\mathbb{R}, +, -, \times, \div, \leq, \geq)$. Potenciación de: $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$.	. Simetrías activas . Grupo de simetrías Rotaciones, traslaciones y reflexiones (grupo de movimientos rígidos). . Homotecias (grupo). . Area del círculo	. Unidades de área en varios sistemas. . Conversiones.	. Función Lineal. Pendiente. . Función cuadrática. Gráficas. . Interpolación. . Función Cúbica. Gráficas: . Raíces cuadrada y cúbica. . Función inversa. Gráfica de la función inversa. . Restricciones de dominio y de recorrido. . Ecuaciones cuadráticas . Funciones exponenciales de base 2, 3, 4, ... 10. . Funciones logarítmicas de base 2, 3, 4, ... 10.	. Medición . Muestreo. . Disposición y representación de datos. . Escala.	. Predicados de uno y dos puestos. . Negación de cuantificadores.	. Colecciones finitas de conjuntos. . Colecciones exhaustivas de conjuntos disyuntos dos a dos. . Subconjuntos del producto cartesiano. Permutaciones.	. Relaciones binarias. Representación gráfica de relaciones. Propiedades: relación totalmente definida, sobreyectiva, funcional, inyectiva, biyectiva. Relación reflexiva, antirreflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, antitransitiva. . Clasificaciones, particiones y equivalencias. . Seriaciones y órdenes. . Composición e inversión de relaciones.
9o.	. $(\mathbb{R}, +, \times)$ y $(\mathbb{C}, +, \times)$. $(\mathbb{R}^2, +)$ y $(\mathbb{R}^3, +)$ como espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.	. Proyecciones . Dibujo técnico (planos, cortes, escalas y perspectivas). . Cónicas . Volumen de sólidos.	. Unidades de volumen y capacidad en varios sistemas. . Unidades de peso y masa en varios sistemas (densidad y peso específico).	. Polinomios. Factorización, división. . Sistemas de ecuaciones. . Funciones de 2 y 3 variables. . Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Matrices y determinantes . Sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas. . Decimales infinitos. . Interés compuesto.	. Medidas de dispersión.	. Demostración: directa, indirecta, refutación, contraejemplos.	. Azar y necesidad: vocabulario de probabilidad. . Eventos, espacios muestrales. . Medidas normalizadas sobre conjuntos finitos.	. Funciones: Composición de funciones. Función idéntica. Inversión de funciones. Función de dos variables.

CUADRO No. 3

SISTEMA		
CONJUNTO DE OBJETOS $\mathcal{A}$	CONJUNTO DE OPERACIONES $\cap$	CONJUNTO DE RELACIONES $\mathcal{R}$

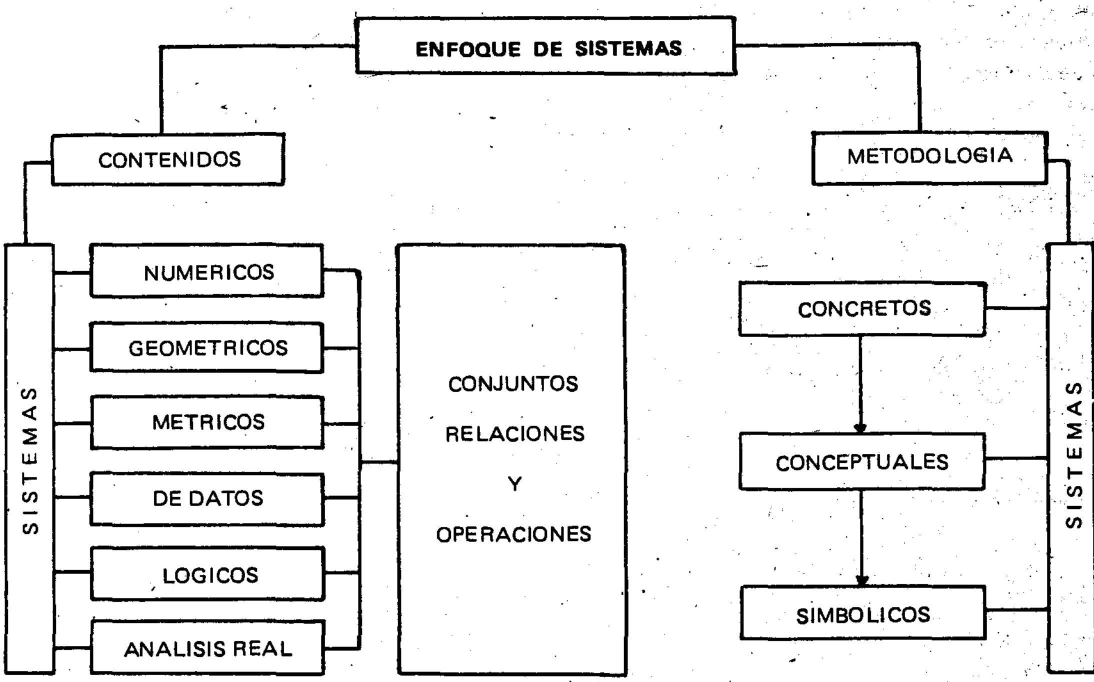
ARITMETICA		
Ejemplo: Un sistema de números enteros		$(Z \ \cap \ R)$
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	$\{+, \times\}$	$\{<, \leqslant, >, \geqslant\}$

GEOMETRIA		
Ejemplo: Un sistema de líneas en el plano		$(\mathcal{L}, T, P)$
$\{L, M, N, \ldots\}$	{rotaciones, traslaciones}	$\{/\!/, \perp\}$

TEORIA DE CONJUNTOS		
Ejemplo: Un sistema de conjuntos		$(P(U), \cap, C)$
$\{A, B, C, \ldots, \phi, U\}$	$\{U, \cap, '\}$	$\{\subset, \subseteq, \supset, \supseteq\}$

LOGICA		
Ejemplo: Un sistema de proposiciones		$(\mathcal{L}_o, K, R)$
$\{p, q, r, \ldots\}$	$\{\neg, \vee, \wedge\}$	$\{\equiv, \vdash\}$

CUADRO No. 4



Metodología

Vistas ya las ventajas del enfoque de sistemas, tanto en el interior de las Matemáticas, como en la articulación de las Ciencias, analicemos la metodología que se compagina mejor con este enfoque de sistemas elegido para los contenidos.

La metodología propuesta para el desarrollo del programa de Matemáticas está basado en la teoría sicológica de Jean Piaget, que se concreta en algunas técnicas de aprendizaje de las Matemáticas, como las de Zoltan P.Dienes, Hans Aebli, etc. Entre las varias que se podrían proponer, es quizá esta metodología la que resulta más acorde con los descubrimientos de la Sicología Evolutiva, con la Teoría de Sistemas, y con la realidad individual y social que vive el estudiante.

A. ASPECTO SICOLOGICO

La Sicología Evolutiva ha logrado establecer que los niños piensen en forma diferente a los adultos y que la evolución del pensamiento infantil al pensamiento adulto se logra a través de varios períodos sucesivos ordenados, identificados por características específicas y diferenciados por el grado de complejidad y de generalidad de las estructuras del pensamiento, propias de cada uno. Los períodos de la evolución del pensamiento son el Sensoriomotriz, el Preoperacional, el de las Operaciones Concretas y el de las Operaciones Formales.

Por consiguiente, un programa de Matemáticas centrado en el alumno debe atender a sus características, a sus posibilidades y a sus necesidades. Si atiende a sus características, se adecúa a su forma de pensar y a las capacidades que le ha permitido desarrollar el medio en que vive. Si atiende a sus posibilidades, establece metas cuyo logro supone un progreso siempre renovado hacia el nivel más desarrollado del pensamiento que sigue inmediatamente al nivel en que él se encuentra. Y si atiende a sus necesidades, constituye un estímulo constante que hace que el alumno se desarrolle día a día y adquiera las habilidades de razonamiento, cálculo y simbolización que le permitirán desempeñarse con éxito en su medio.

Un primer requisito para conseguir lo anterior es identificar los períodos y las etapas de desarrollo mental por los que atraviesan los estudiantes, en este caso, los estudiantes del Ciclo Básico. En Colombia puede decirse que los niños inician la Primaria aproximadamente a los 6 años y terminan la Secundaria hacia los 16. Según Piaget, entre estas edades el pensamiento, pasa por dos períodos: el de las operaciones concretas de 7 a 11 años, y el de las operaciones formales de 11 a 15 años.

En nuestro medio apenas se están realizando estudios exploratorios, que permiten conjeturar que el desarrollo de las operaciones concretas en los niños sí empieza hacia los siete años, aunque el período de adquisición de las operaciones formales puede prolongarse hasta los 17 ó 18 años en ciertos casos y ambientes el dominio de las operaciones formales no parece ser necesario, por lo cual este período no llega a estabilizarse ni siquiera en la edad adulta.[3]

Vale la pena insistir en que el maestro necesita conocer las características del pensamiento de sus alumnos, en cada una de estas edades, para poder realizar acertadamente su trabajo.

---

[3] Pre-escolar: Félix Bustos, Ministerio de Educación Nacional (MEN); Martha Arango, Centro Internacional de Educación (CINDE); Primaria: Araceli de Tezano, Universidad Externado de Colombia; Secundaria: Eloisa Vasco, CAFAM; Educación Especial: Miguel de Zubiría, Martha Lucia Pérez, Etti Stiwark, Mariela Tobón, Universidad Javeriana.

Dada la magnitud y la profundidad de la obra que Piaget y su escuela han realizado durante el medio siglo que llevan dedicado al estudio de la inteligencia, resulta muy difícil conocer completamente sus planteamientos y, más difícil aún, tratar de sintetizarlos o de explicarlos en pocas páginas. Sin embargo, dado que la metodología propuesta para desarrollar el programa oficial de Matemáticas está basada en gran parte en la Sicología Evolutiva Piagetiana, es preciso intentar un esbozo de varias de sus ideas. Por ejemplo, es importante mencionar algunas características del desarrollo intelectual en los períodos de operaciones concretas y de operaciones formales.

Una idea bastante general es que los niños pequeños son muy distintos de los adultos en aspectos tales como: métodos para conocer la realidad, ideas sobre el mundo y empleo del lenguaje. Un niño tiene una estructura mental diferente a la de un adulto y por eso muchas veces, aún cuando realicen las mismas acciones o repitan las mismas palabras, pueden pensar cosas muy diferentes. Por ejemplo, cuando un niño de menos de 7 años pasa un líquido del vaso a un plato, se fija solamente en los estados inicial y final del líquido y cree que hay más líquido en donde el nivel está más alto. Si el nivel más alto era el del vaso, dice que por pasarlo del vaso al plato se disminuyó el líquido. Un niño de 8 años, por ejemplo, ya sabe que por el solo hecho de pasarlo de un recipiente a otro no disminuye el líquido, pero no puede predecir acertadamente cosas que no se ciñan a lo que está viviendo. Un joven de 14 ó 15 años no tiene problema con el trasvase del agua y puede hacer conjeturas y formular hipótesis sobre cosas que no está viendo, y finalmente, los adultos pueden pensar que todo eso es tan fácil que no se justifica dedicarle tiempo.

Otro ejemplo: mientras un grupo de adultos puede realizar un diálogo o intercambiar diferentes opiniones, respetar puntos de vista diferentes, etc., los niños de pocos años realizan monólogos colectivos, donde cada uno habla y ninguno escucha. Para otros niños hablar entre sí puede constituir todo un descubrimiento porque les permite darse cuenta de que no todos piensan lo mismo.

De esta y otras consideraciones se puede concluir que el educador no puede suponer que lo que es válido para él, es también válido para el alumno. Y si aceptamos que los niños tienen una estructura mental diferente de la de los adultos, entonces el maestro debe estar atento a la forma como reaccionan los niños ante las distintas actividades y hechos de cada día. Algo muy importante que debe tener en cuenta el educador, es que los niños, especialmente los de menos edad, aprenden a partir de actividades concretas. El niño necesita actuar sobre las cosas para comprenderlas.

Mediante la actividad concreta y la manipulación de los objetos el niño va progresando en su desarrollo intelectual. Por eso en cada período se comporta de manera diferente. En los primeros años simplemente los manipula, los reúne o los separa, los hace girar, los golpea, etc. Unos años más tarde, no solo los manipula físicamente, sino que representa mentalmente operaciones que se puedan realizar con esos objetos y en un período posterior, puede representar mentalmente las actuaciones sobre los objetos, sin necesidad de mirarlos y puede expresar, mediante oraciones, su pensamiento, sus suposiciones y las consecuencias de las mismas.

Características como esas son las que se tienen en cuenta para decir que un niño está en uno u otro período de su desarrollo intelectual. Si solamente logra realizar ciertas manipulaciones coherentes, se ubica en el período preoperacional. Si además de las manipulaciones logra realizar representaciones mentales de acciones organizadas de modo que una acción puede combinarse con otra, y anularla o reforzarla, se ubica en el período de las operaciones concretas. Y cuando el joven además de todo lo anterior logra formular hipótesis sobre objetos que no están presentes, predecir conclusiones y trabajar con proposiciones en lugar de objetos concretos, se ubica en el período de las operaciones formales llamado también del pensamiento abstracto o hipotético - deductivo.

En términos generales, puede decirse que cuando el niño inicia la Educación Básica Primaria está pasando del período preoperacional al de las operaciones concretas y que en los primeros años de Educación Básica Secundaria debe empezar a tener comportamientos propios del período de las operaciones formales.

En cada uno de estos períodos el pensamiento se caracteriza por su habilidad para realizar ciertas acciones y por la propensión a hacer ciertas deducciones que a los adultos les parecen erróneas, aunque sean muy coherentes con la lógica predominante en ese período.

En el período de las operaciones concretas el pensamiento:

1) Adquiere propiedades como la reversibilidad, la transitividad, la asociatividad.
2) Realiza composiciones.
3) Reconoce transformaciones.
4) Puede realizar operaciones aritméticas (como la adición y la multiplicación).
5) Realiza mediciones (de longitud, de duración, de área, de masa, de peso, etc.).
6) Establece correspondencias, clasificaciones y seriaciones.

Resumiendo las características del pensamiento operatorio concreto, podemos decir que se caracteriza porque :

1) No se detiene en los estados inicial y final de las cosas o de los objetos, sino que tiene en cuenta las transformaciones e incluso las imagina.
2) Es reversible; ésto es, razona de modo que mentalmente puede imaginar una acción y anularla con la acción contraria para regresar al estado inicial.
3) Posee, en gran parte, las nociones de conservación.
4) No siempre requiere que las acciones que el niño realiza sobre los objetos o situaciones, se ejecuten "realmente", sino que pueden realizarse de manera imaginaria o mental. Por ejemplo, son operaciones concretas las que realizan los jugadores de ajedrez cuando frente al tablero piensan o se imaginan las posibles jugadas y sus consecuencias, tanto si tocan las fichas como si no tocan ninguna.

"El niño de 7 a 11 años actúa como si su principal tarea fuera organizar y ordenar lo que está inmediatamente presente: la extrapolación limitada de este organizar y ordenar hacia lo "que no está allí", es algo que hará cuando sea necesario, pero que es visto como una actividad restringida de casos especiales". (Sicología, 1978; p. 223).

El período siguiente es el de las operaciones formales, llamado también del pensamiento hipotético - deductivo. "La propiedad general más importante del pensamiento formal, aquella de la cual Piaget deriva todas las restantes, concierne a la distinción entre lo real y lo posible. A diferencia del niño del período de las operaciones concretas, el adolescente, al comenzar la consideración de un problema, trata de prever todas las relaciones que podrían tener validez respecto de los datos y luego intenta determinar, mediante una combinación de la experimentación y el análisis lógico, cuál de estas relaciones posibles tiene validez real". (Sicología, 1978; p. 224).

En la transición de las operaciones concretas a las operaciones formales se registra un paso inicial e importante, que equivale a una reorientación fundamental respecto de los problemas cognoscitivos. El adolescente ya no está preocupado exclusivamente por organizar aquello que llega de modo directo a sus sentidos; gracias a esa reorientación, tiene la capacidad potencial de imaginar todo lo que podría estar allí y de asegurarse, en mayor medida, de que hallará todo lo que de hecho se encuentra allí.

Esa reorientación implica algunas características del pensamiento formal:

El pensamiento formal es fundamentalmente hipotético - deductivo. El adolescente se mueve dentro del ámbito de lo hipotético con mucha más audacia que el niño.

El pensamiento formal es, por sobre todo, pensamiento proposicional.

Las entidades importantes que manipula el adolescente en su razonamiento ya no son los datos de la realidad en bruto, sino afirmaciones o enunciados (proposiciones) que "contienen" esos datos. El adolescente también realiza operaciones de primer orden, (clasificaciones, seriaciones, correspondencia), pero también hace algo más, que es precisamente lo que hace a su pensamiento formal antes que concreto. Toma los resultados de esas operaciones concretas, los moldea en la forma de proposiciones, y luego sigue operando con ellos. Es decir, establece diversos tipos de vínculos lógicos entre ellos.

Las operaciones formales son, pues, operaciones realizadas sobre los resultados de operaciones (concretas) anteriores.

Estas ideas sobre los dos períodos finales del desarrollo, pueden complementarse con otras ideas de John H. Flavell, un estudioso de la teoría Piagetiana y que ha sido ampliamente consultado en lo referente al aspecto sicológico de este marco teórico: "El desarrollo intelectual es un proceso de organización y lo que se organiza son operaciones activas, intelectuales, su organización en sistemas con estructura definible es el sine qua non (indispensable) para la "buena" cognición, vale decir, la cognición de mayor madurez genética". (Sicología, 1978; p. 180).

"El desarrollo ontogénico de estructuras puede verse como un proceso de aproximaciones sucesivas a una especie de equilibrio, un estado final que nunca se alcanza por completo. El desarrollo mismo pues, constituye una totalidad con una meta o ideal que subordina los medios". (Sicología, 1978; p. 67).

B. TRABAJO CON SISTEMAS

Lo expuesto acerca del enfoque de sistemas y de la Sicología Evolutiva debe orientar el trabajo del maestro en el desarrollo del programa de Matemáticas.

Una de las funciones de la metodología es la de determinar la forma de presentar los contenidos a los estudiantes. Específicamente en el caso de las Matemáticas, los contenidos deben trabajarse teniendo en cuenta las características y la forma de aprender propias del niño en cada período del desarrollo. En el Ciclo Básico, el niño aprende a partir de la experimentación y de la manipulación de los objetos.

El niño no encuentra los objetos en forma estática y aislada. El niño se encuentra siempre con sistemas. Pero, como se dijo al tratar las ventajas del enfoque de sistemas, no se pretende que los niños durante la Educación Básica Primaria aprendan en abstracto qué es un sistema ni qué estructura tienen los que con mayor frecuencia se trabajan (como serían las estructuras de grupo y anillo). La razón es que en los grados lo.,2o.,3o.,4o., y aún 5o., no poseen los conocimientos necesarios para entender lo que es un grupo o anillo. Es el maestro quien debe saber, en cada caso, con cuál sistema están trabajando los estudiantes; así podrá orientarlos para que lleguen a conclusiones válidas dentro de la situación que están trabajando y para que cuando se encuentren ante otra situación nueva, no le apliquen irreflexivamente las mismas conclusiones, sino que la analicen para ver en qué se parece y en qué se diferencia de la situación ya conocida.

El maestro acompaña al estudiante para que vaya adquiriendo conceptos que en la secundaria le permitirán estudiar más rigurosamente los sistemas y sus estructuras.

Tenemos, por ejemplo, el caso de un sistema formado por subconjuntos de un conjunto referencial (tapas de gaseosa). El niño de 6 ó 7 años no tiene la noción abstracta de conjunto. Se encuentra con una colección de tapas que forman una figura o agrupación visual. "Esa primera noción de colección figural que desarrolla el niño, es la de un sistema de objetos con sus relaciones de cercanía especial, en el contexto de la posibilidad de reunirlos o separarlos manualmente. No hay, pues, colecciones de un solo elemento y mucho menos colecciones vacías.

La noción de colección no figural que se va desarrollando poco a poco, es también la de un sistema de objetos capaces de una descripción común. Todavía aparecen las relaciones de cercanía, pero empiezan a predominar las relaciones de semejanza, en el contexto de la posibilidad de manipular, comparar, superponer, agregar y retirar objetos". (Concepto 1980).

Sólo más tarde, hacia los doce o catorce años, se independiza el niño de las colecciones figurales y no figurales y maneja un sistema con inclusiones, uniones e intersecciones. Así llega al concepto abstracto de conjunto y al de los sistemas formados por ellos con sus operaciones y relaciones. Este progreso puede permitirle pensar en conjuntos vacios, en conjuntos de un solo elemento, y distinguir un elemento aislado del conjunto formado por ese único elemento. Pero esa es una adquisición tardía. Por eso, no hace falta darle al niño de primaria definiciones de sistema, ni de conjunto, ni de la estructura de semigrupo o de álgebra de Boole. Pero sí es conveniente que el maestro sepa que los subconjuntos de ese referencial de tapas, T., con la unión, forman un semigrupo $(\mathcal{P}(T), \cup)$ y con la unión, la intersección y el complemento forman un álgebra de Boole $[\mathcal{P}(T), \cup, \cap, ']$.

El enfoque de sistemas permite estudiar articuladamente las diversas ramas de las Matemáticas; "no consideramos que la lógica, los conjuntos, las relaciones, las operaciones y las estructuras sean cinco regiones de las Matemáticas que puedan ser enseñadas sucesivamente y como temas completos y consistentes entre sí.

Nos parece que ellos deben aparecer conjunta y unificadamente como un lenguaje que permite no sólo expresar más precisamente las situaciones de la vida real, sino también comprenderla más profundamente" (Lógica 1976; p. 100).

En particular, el profesor debe preparar su clase estudiando cuidadosamente el sistema que va a presentar a sus alumnos. No todo lo que sepa e investigue sobre ese sistema se deberá explicar a los alumnos y, especialmente, se evitará dar palabras y definiciones abstractas, explicitar estructuras formales, o enseñar demasiados símbolos. Para orientación del profesor y para estructurar la presentación del material, podrán servir las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los objetos con los que estamos trabajando?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos objetos?
- ¿Cómo se agrupan esos objetos en conjuntos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos conjuntos?
- ¿Qué operaciones efectuamos con y entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas operaciones?
- ¿Qué relaciones descubrimos entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas relaciones?
- ¿Qué sistema estamos estudiando?
- ¿Cómo lo representamos?
- ¿Qué estructura tiene este sistema?
- ¿Cómo explicitamos simbólicamente esa estructura?

Estas doce preguntas aclaran la situación de cualquier cálculo matemático, desde el cálculo aritmético con números naturales, o el cálculo lógico con proposiciones, el cálculo de clases con los conjuntos como objetos, hasta el cálculo por antonomasia o por excelencia: el cálculo diferencial e integral en el cual los objetos son las funciones reales, o también, el cálculo geométrico sobre puntos, rectas, ecuaciones, o vectores.

Estas preguntas son perfectamente generales para todo tipo de descripción matemática y hasta para cualquier tipo de descripción científica que quiera ser rigurosa.

En particular, para el estudio de la lógica, todas estas preguntas deben estar activas desde el comienzo. "Recuérdese que los objetos son las proposiciones y las operaciones son la negación y las diez conectivas binarias. Para el estudio de las conectivas, recomendamos la utilización de los juegos lógicos al estilo de Dienes - Golding, Papy, etc., por coincidir con el enfoque que busca familiarizar al estudiante con una situación real hasta llegar a su normal formalización o matematización". (Lógica, 1976; pp. 100 - 101).

Este paso de las situaciones reales y concretas a la matematización conceptual y a algún tipo de formalización, así sea una simple simbolización, no es exclusivo de la lógica. Se trae este ejemplo porque las situaciones del lenguaje ordinario, tanto el de tipo declarativo, formado por proposiciones, como el de tipo imperativo, formado por instrucciones, presentan suficientes regularidades para servir de sistemas concretos, de los cuales puede construirse un sistema conceptual, el cual a su vez puede ser simbolizado con palabras, con símbolos, con circuitos, etc. La última formalización simbólica, con definiciones, axiomas y teoremas, puede esperar a la Media Vocacional o a la Universidad; en la Educación Básica es suficiente una mínima simbolización, así sea solo verbal y a lo más con algunos símbolos que sirven de "taquigrafías" de las expresiones verbales, para que esta simbolización ayude a manejar los sistemas conceptuales, no para estorbar su construcción.

La recomendación fundamental es la de no empezar por los sistemas simbólicos para tratar de que el alumno construya los sistemas conceptuales, sino comenzar por los sistemas concretos que él maneja, así el profesor los considere muy elementales, empíricos y pre-matemáticos, para que a través de la familiaridad con las regularidades de esos sistemas concretos vaya construyendo el sistema conceptual respectivo; una vez iniciada la construcción de éste, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aún traducir de unos sistemas simbólicos a otros, puesto que ya comprenden lo que quieren decir. Pero si se fuerza al alumno a manejar un sistema simbólico sin haber construido el sistema conceptual a partir de los sistemas concretos, ese sistema simbólico puede bloquear la construcción del sistema conceptual. La concepción de los sistemas matemáticos que motiva la recomendación anterior es la siguiente: cualquier sistema matemático que el profesor vaya a presentar a sus alumnos puede analizarse como un rayo de luz que pasa por un prisma: si se observa cuidadosamente, se encontrará que tiene un núcleo central, el que es verdaderamente importante, que es el respectivo sistema conceptual. Sobre él, a un nivel superficial, aparecen uno o varios sistemas simbólicos para representar ese único sistema conceptual. Y bajo el sistema conceptual, a un nivel profundo, casi diríamos; arcaico, aparecen uno o varios sistemas concretos, de cuyas regularidades es posible construir el mismo sistema consceptual.

Desafortunadamente, los libros solo pueden ofrecernos los sistemas simbólicos: no se puede imprimir otra cosa que palabras, símbolos y gráficas. Por eso es fácil creer que el verdadero sistema matemático es el sistema simbólico, y así trató de hacerlo creer la filosofía formalista de las matemáticas. Un buen matemático puede reconstruir el sistema conceptual a partir del sistema simbólico, pero los niños y jóvenes más bien pueden experimentarlo como un obstáculo para llegar al sistema conceptual. Ellos tienen una manera mucho más natural de construir el sistema conceptual: jugando con sistemas concretos que lleven a esa construcción. Tarea importante del profesor es la de identificar esos sistemas concretos, ojalá de entre los sistemas que sean familiares para el alumno en su cultura y en su edad específicas, para organizar actividades de juego, de ejercicio, de comparación, que hagan resaltar las regularidades que van a permitir la construcción conceptual respectiva.

Con las colecciones figurales y no figurales de dos o más objetos pueden organizarse una serie de juegos que lleven al sistema conceptual de los números naturales, resaltando las ordenaciones o seriaciones internas de cada colección y las clasificaciones en colecciones iguales de numerosas; la simbolización con palabras, palitos, cifras indo-arábigas o romanas vendrá después. Pero los mismos juegos de colecciones pueden servir para resaltar otras operaciones manuales como reunir y separar, y otras relaciones como las de inclusión y disyunción, para permitir una construcción de un primer sistema conceptual de tipo conjuntista, así no se simbolicen formalmente esas operaciones y relaciones.

Sistemas concretos como los de avanzar o retroceder por las calles de la ciudad, observar subidas o bajadas de temperatura en un termómetro, o jugar con consignaciones y retiros de una caja de ahorros, son la base para la construcción del sistema conceptual de los números enteros con las operaciones de adición y sustracción, y las relaciones de orden aditivo. Obsérvese que las calles mismas, o el termómetro, o el estado de cuenta, no es un buen modelo para el sistema conceptual: son los sistemas activos mencionados los que sirven de sistemas concretos para la construcción del sistema conceptual de los enteros como operadores activos, en los que la adición aparece como una mera composición o aplicación sucesiva de operadores. En la misma forma se aprovechan sistemas concretos conocidos por el alumno, como de las vueltas y fracciones de vuelta, el de los metros o pulgadas y fracciones de las mismas unidades, el de los litros o galones y fracciones de los mismos, para construir el sistema conceptual de los fraccionarios como operadores reductores o ampliadores sobre magnitudes. Los simbolismos vienen después: la mitad, 1/2, 0.5 o el 50% nos muestran cuatro símbolos posibles para el mismo concepto. Nótese que no hace falta "dividir un todo en partes" ni utilizar rectángulos o ponqués para dividirlos en partes de áreas iguales, entre otras cosas, porque este sistema concreto es el más difícil para los niños de 6 a 9 años. También podría utilizarse, si se está seguro de que los niños tienen suficiente familiaridad y dominio del mismo.

Lo ideal, en cuanto a metodología se refiere, es que el maestro organice las actividades de aprendizaje de modo que el estudiante se enfrente siempre con problemas apropiados para la etapa en que se encuentra, o sea aquellos que presentan situaciones propicias para el desarrollo de las estructuras de la etapa inmediatamente siguiente. La manipulación de objetos permite apreciar qué acciones son capaces de hacer los niños con ellos y, a partir de allí, diseñar actividades pedagógicas para llevarlos a imaginar acciones posibles sobre ellos y prever los efectos de éstas. Conviene organizar el trabajo escolar de modo que el estudiante pueda ir superando progresivamente las etapas del aprendizaje de las Matemáticas propuestas por Zoltan P. Dienes. Es muy acorde con la teoría de Piaget, permitir el juego libre y el juego estructurado durante un tiempo suficiente, para la familiarización con las operaciones y las relaciones y para la interiorización de las acciones concretas sobre los sistemas que inventa el niño.

En un grupo escolar puede suceder que el desempeño de los estudiantes refleje grados diferentes de su desarrollo cognoscitivo; que algunos reflejen una mezcla de estructuras (propias del período anterior al que se supone que les corresponde por su edad), organizadas pero inadecuadas; que otros presenten ya el uso vacilante y esporádico de estructuras nuevas que aún no se han organizado por completo; y que otros reflejen una mayor organización y estructuración del pensamiento. El maestro debe tratar de detectar esas diferencias, que, en la mayoría de los casos, pueden ser perfectamente explicables, ya que si bien los períodos y las etapas del desarrollo se suceden en un orden riguroso, no se presentan en todas las personas a la misma edad cronológica. En ese caso, no es preciso exigir a todos el mismo nivel de desempeño intelectual, sino tratar de que cada uno llegue al dominio de las estructuras del nivel en que se encuentra y presentarle situaciones en las que se pueda empezar a generar un avance al nivel siguiente. Ese avance solo comenzará cuando la maduración neuronal y el procesamiento más o menos consciente de la información ya adquirida, lo permitan.

Una actitud permanente de búsqueda, de observación, de análisis de las respuestas de los estudiantes, de las dificultades que encuentran, puede dar al maestro criterios y pautas para mejorar el programa, para adecuarlo al medio; en una palabra, para lograr que sea lo que debe ser: un instrumento que favorezca el desarrollo integral de los educandos y que los prepare en la vida para la vida.

BIBLIOGRAFIA

Bandet, J. R. Zarasana. ***Hacia el aprendizaje de las Matemáticas.*** Buenos Aires, Editorial Kapelusz, 1975.

Berman, Serge y René Bezard. ***Contando y Midiendo. Introducción a la Enseñanza de las Matemáticas. Números en la Escuela de Párvulos.*** México, Editorial Uthea, 1974.

Bustos, Félix. ***El aprendizaje. Alternativa Piagetiana.*** Cúcuta: Grupo Libertad Editores. 2a. edición, 1983.

Castelnuovo, Emma. ***Didáctica de la Matemática Moderna.*** México, Editorial Trillas, 1973.

Dienes, Zoltan P. ***Las seis etapas de aprendizaje en Matemática.*** 2a. edición. Barcelona, Teide, 1975.

Dienes, Zoltan P. y E. U. Golding. ***La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria.*** Barcelona, Editorial Teide, 1973.

Flavell, John H. ***La Sicología Evolutiva de Jean Piaget.*** 5a. edición, Buenos Aires, Paidós, 1975.

Furth, H. G. y Wachs, H. ***La Teoría de Piaget en la Práctica.*** Buenos Aires, Kapulusz, 1978.

Ginsburg, Helbert y Silvia Opper. ***Piaget y la Teoría del Desarrollo Intelectual.*** Madrid, Editorial Prentice, Hall Internacional, 1977.

Kline, Morris. ***El fracaso de la Matemática Moderna.*** Buenos Aires. Editorial Siglo XXI, 1976.

Mazure, Joseph. ***El aprendizaje de la Matemática Moderna.*** Barcelona, Editorial Planeta, 1981.

Mialaret, G. ***Las Matemáticas. Cómo se aprenden y cómo se enseñan.*** Madrid, Pablo del Río, editor, 1977.

Piaget, Jean. ***Sicología y Pedagogía.*** Barcelona, Ediciones Ariel, 1977.

Piaget, Jean y E. W. Beth. ***La Enseñanza de las Matemáticas.*** Madrid, Editorial Aguilar, 1963.

Piaget y otros. ***La Enseñanza de la Matemática Moderna.*** Madrid, Editorial Alianza, 1978.

Polya, G. ***Cómo Plantear y Resolver Problemas.*** México, Editorial Trillas, 1969.

Santalo, Luis A.. ***La Educación Matemática Hoy.*** Barcelona, Editorial Teide S.A., 1975.

Vasco, Carlos E. ***Relatores y Operadores.*** Memorias del IV Coloquio Colombiano de Matemática. Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, 1975.

—. ***Lógica, Conjuntos y Estructuras.*** UNESCO - CIAEM. La Educación Matemática en las Américas IV. Montevideo, 1976.

—. ***Relaciones, Operaciones y Sistemas.*** Conferencia mimeografiada para el programa de Maestría Universidad NOVA - CAFAM y para el Seminario sobre Jean Piaget en la Universidad Nacional. Bogotá, 1978.

—. ***El Concepto de Sistema como Clave del Currículo en Matemática.*** Notas de Matemática No. 10. Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, 1980.

(Estos y otros trabajos de Carlos E. Vasco han sido reunidos en el libro: ***Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas.*** Bogotá, División de Materiales Impresos y Audiovisuales, Ministerio de Educación Nacional, 1984).

PROGRAMA CURRICULAR

PROGRAMADORES AUTORES:

Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva

COLABORADOR:

Ministerio de Educación Nacional
Teresa León Pereira

ASESOR:

Universidad Nacional de Colombia
Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

Recomendaciones generales

El programa de Matemáticas para séptimo grado, es parte de toda una programación secuencial y progresiva del área para la Educación Básica y Media Vocacional. De ahí que la primera recomendación para su desarrollo es hacer un estudio del Marco General del Area, sea cual fuere el nivel de escolaridad en el cual se ejerza la labor docente.

En cuanto a los objetivos, la primera prioridad la tienen los objetivos de la Educación Básica (que también figuran en el Marco General) y en particular los de motivación para la Matemática y los de resolución de problemas de la realidad a través de modelos matemáticos de la misma. La segunda prioridad la tienen los objetivos generales de séptimo grado, y entre ellos los de manejo de los sistemas de los números enteros y racionales y los de sistemas geométricos. En cuanto a estos últimos, es conveniente tener en cuenta que la Geometría debe hacerse activa y dinámica antes de llegar a las representaciones estáticas.

Los objetivos específicos son ayudas para programar las clases y las evaluaciones, y para diagnosticar los tipos de errores que aparecen en los ejercicios y exámenes de los alumnos, y así poder ayudarles en las dificultades específicas que tengan.

Los contenidos básicos que figuran en el desarrollo del programa le permiten al profesor ubicarse dentro de una programación general, para que así pueda ampliar y profundizar dichos contenidos y orientar a los alumnos en sus actividades exploratorias. En ningún momento son para dictárselos, ni para exigírselos de memoria, ni para evaluarlos según la precisión con que los reciten. Estos contenidos básicos algunas veces sobrepasan el nivel de comprensión y profundidad con que deben ser tratados en el respectivo grado. Es el maestro quien puede adecuarlos según la realidad de sus alumnos.

Es conveniente que desde el comienzo del curso, el profesor haga énfasis en la correcta utilización de las expresiones de cuantificación del lenguaje usual.

Se supone que los alumnos ya traen un manejo inteligente de los fraccionarios como operadores de ampliación y reducción. Para este enfoque de los fraccionarios pueden consultarse los programas de 3o. a 5o. primaria. Es conveniente manejar los fraccionarios con este enfoque.

Cuando en las unidades se incluye una lectura complementaria, se entiende que se trata de material de referencia para el profesor. Para que los alumnos consulten algo al respecto es mejor remitirlos a los textos y a las enciclopedias escolares usuales.

Los indicadores de evaluación son una ayuda para formular problemas e ítemes para las evaluaciones. Cuando el logro del último objetivo de un bloque supone que los alumnos tuvieron que haber logrado los objetivos anteriores de ese mismo bloque, basta utilizar el último indicador de evaluación.

La evaluación global del curso debe hacerse con respecto a los objetivos generales.

Objetivos generales

1. Participar en la transformación positiva del ambiente de trabajo en Matemáticas.
2. Avanzar en el desarrollo del pensamiento reflexivo, analítico, crítico, inventivo y argumentativo, en cuanto constituye un aspecto del desarrollo integral de la persona.
3. Desarrollar habilidades para construir y/o apropiarse de estrategias que ayuden a for-

mular, analizar y resolver problemas, de modo que se logre una mejor comprensión de los conceptos y una organización cada vez más fundamentada y coherente del pensamiento.

4. Vivenciar y analizar las características y las exigencias de una evaluación, que contribuya a mejorar la educación y tenga efectos positivos más allá de la vida escolar.
5. Avanzar en la construcción activa de herramientas básicas para diferentes tipos de cálculo.
6. Reconocer el sistema de los números enteros.
7. Adquirir habilidad en las operaciones con números enteros.
8. Reconocer algunas relaciones entre números enteros.
9. Reconocer las propiedades de las operaciones binarias en **Z**
10. Resolver y formular problemas que requieran de las operaciones en **Z**
11. Repasar los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de decimales.
12. Resolver y formular problemas que requieran de las operaciones con decimales.
13. Reconocer algunas de las aplicaciones de los conceptos fundamentales de proporcionalidad.
14. Identificar algunas razones especiales.
15. Reconocer propiedades de los operadores multiplicativos.
16. Resolver y formular problemas que requieran de la aplicación de operadores multiplicativos.
17. Reconocer movimientos rígidos y homotecias en el plano.
18. Reconocer polígonos congruentes y polígonos semejantes.
19. Reconocer y emplear unidades de longitud, duración y amplitud de ángulos que no pertenecen al sistema métrico decimal.
20. Hallar las combinaciones de m elementos tomados de un conjunto de n elementos.
21. Construir los conceptos de media, mediana y moda como medidas de tendencia central.
22. Distinguir afirmaciones y negaciones; proposiciones cerradas y proposiciones abiertas y en estas últimas diferenciar ecuaciones, inecuaciones y otro tipo de condiciones.
23. Emplear expresiones de cuantificación.

Contenidos

SISTEMAS NUMERICOS

- $(\mathbf{Z}, +, -, \times, \div, \leq, \geq, \lfloor, \rfloor)$
- $(\mathbf{Q}, +, -, \times, \div, \leq, \geq)$
- Valor absoluto
- Algoritmos con aplicaciones: porcentajes, descuento, interés, cambio de moneda.
- Algunos reales:

SISTEMAS GEOMETRICOS

- Movimientos rígidos
  - Rotación
  - Reflexión
  - Traslación
- Congruencias
- Homotecias
- Semejanzas
- Perímetro

SISTEMAS METRICOS

- Otros sistemas de unidades de amplitud de ángulos.
- Unidades de duración. Conversiones ("Complejos").

ANALISIS REAL

- Funciones crecientes y decrecientes. Correlación.
- Funciones lineales.
- Razones. Proporciones.
- Representación gráfica de funciones lineales.
- Inclinación: pendiente.
- Ejes, cortes, interceptos.
- Ecuaciones lineales. Solución de ecuaciones lineales.

SISTEMAS DE DATOS

- Medidas de tendencia central: moda, media y mediana.

SISTEMAS LOGICOS

- Afirmaciones y negaciones verdaderas y falsas.
- Proposiciones abiertas y proposiciones cerradas.
- Cuantificación.
- Expresiones con variables y paréntesis.
- Igualdades.

CONJUNTOS

- Conjunto de partes. Cardinal del conjunto de partes.
- Subconjuntos del conjunto de partes.
- Combinaciones.

RELACIONES Y OPERACIONES

- Operaciones binarias.
- Propiedades: operación clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertiva.
- Distributividad.
- Linealidad de operadores.

Unidad I

LOS NUMEROS ENTEROS

Introducción

En la Educación Básica Primaria los alumnos trabajaron con operadores aditivos como $+a$ y $-a$ y operadores multiplicativos como $a\times$ y $\frac{1}{b}\times$.

Continuando con este proceso activo y dinámico que se trae desde la primaria se inicia el estudio de los números enteros, que surgen como resultado de aplicar operadores aditivos a cualquier número natural. (Basta aplicárselos al cero).

En el sistema de los números enteros se van a estudiar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división y las relaciones de orden aditivo y de orden multiplicativo. Se pretende también que los alumnos desarrollen una noción intuitiva del valor absoluto de un número entero y que en dos de los conjuntos numéricos hasta aquí estudiados ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$) recopilen las operaciones binarias vistas y las propiedades que cumple cada una de ellas.

Objetivos generales

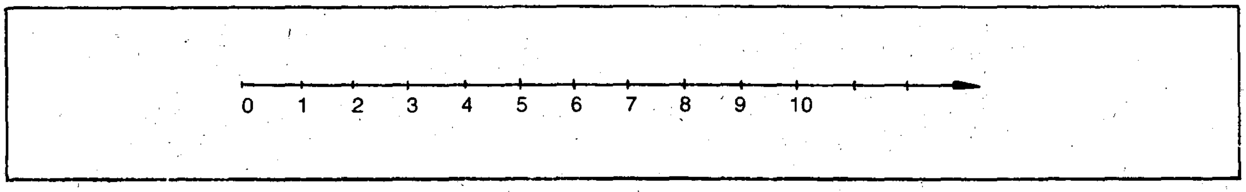
- Reconocer el sistema de los números enteros.
- Adquirir habilidad en las operaciones con números enteros.
- Reconocer algunas relaciones entre números enteros.
- Reconocer las propiedades de las operaciones binarias en los números enteros.
- Resolver y formular algunos problemas que requieran de las operaciones con números enteros.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
1. Representar en una semirecta los números naturales.	Dados algunos números naturales, el alumno los representará sobre una semi-recta.
2. Reconocer en la semirecta numérica el efecto que producen algunos operadores de la forma $+a$ y $-a$.	El alumno representará en la semi-recta numérica el efecto que producen algunos operadores de la forma $+a$ y $-a$.
	El alumno representará en la semi-recta numérica el efecto que producen algunos operadores de la forma $-a$ al aplicarlos a un número mayor que a.

CONTENIDOS BASICOS

Sobre una semi-recta podemos representar los números naturales así: marcamos un punto y trazamos un segmento hacia la derecha, escogemos un patrón de longitud, y marcamos el punto que señala su extremo derecho cuando el izquierdo señala el origen.

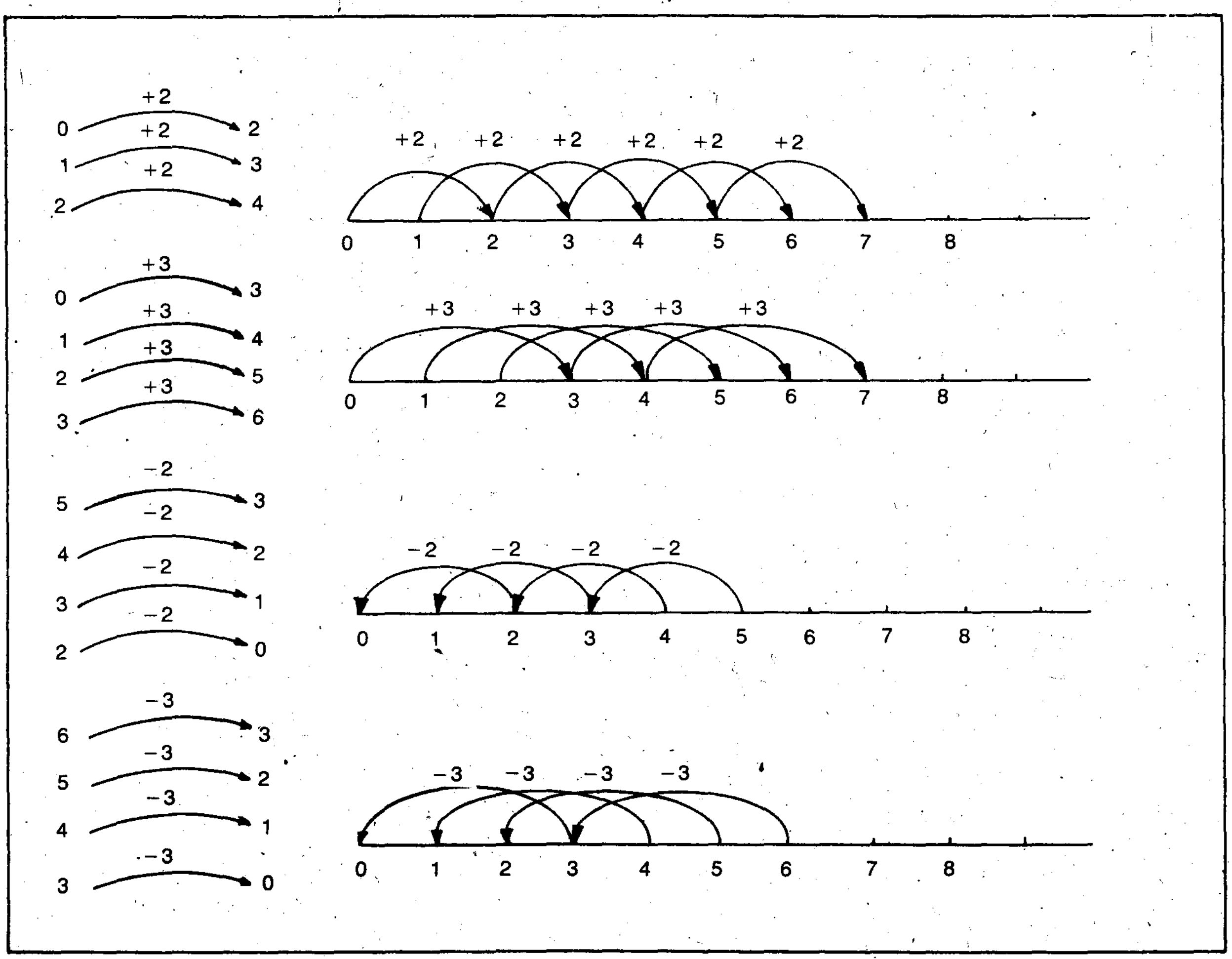


El 0 señala el origen de esta semi-recta, el 1 señala el extremo derecho del primer semento, etc.

Cada segmento equivale a una unidad; en cada punto se coloca un número natural que indica el número de segmentos unidad que le anteceden.

La acción que realizan algunos operadores se puede representar sobre la semi-recta por medio de una flecha.

Ejemplos:



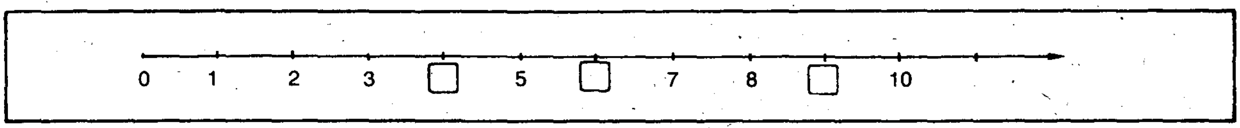
En la semi-recta numérica se puede observar que al aplicar un operador de la forma $+a$, es decir, como $+2$, $+3$, etc., el resultado aparece en la semi-recta a la derecha del número al que se le aplicó el operador así: si se aplicó el operador $+2$, dos lugares a la derecha; si se le aplicó el operador $+3$, tres lugares a la derecha, etc.

También se puede observar que al aplicar un operador de la forma $-a$, es decir, como -2, -3, etc., el resultado aparece en la semi-recta a la izquierda del número al que se le aplicó el operador así: si se aplicó el operador -2, dos lugares a la izquierda; si se aplicó el operador -3, tres lugares a la izquierda.

También observarán que si se aplica un operador de la forma $-a$ a un número menor que a, el resultado no está representado en la semi-recta.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente el profesor puede proponer algunos ejercicios como: en la siguiente semi-recta representar los números naturales así:

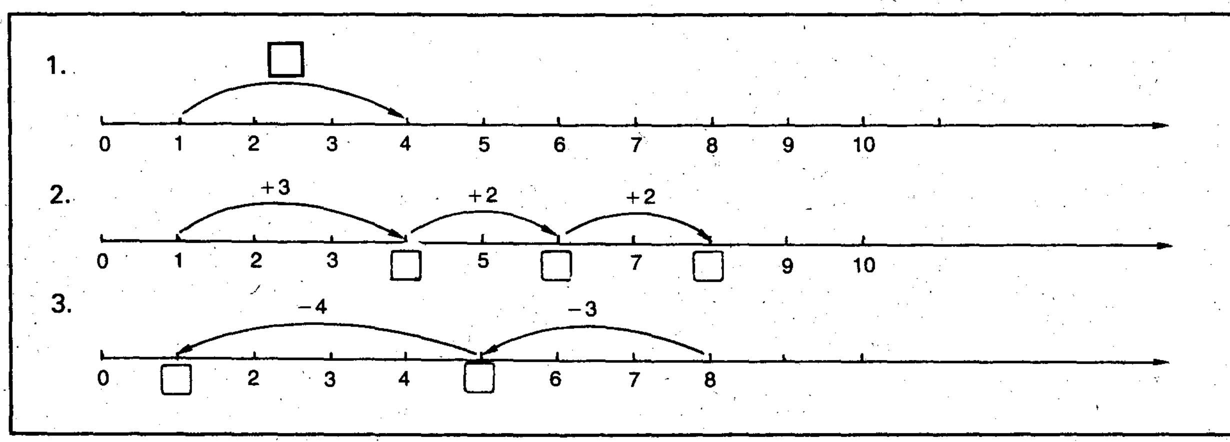


Llenar los espacios en blanco con el número correspondiente.

Después los alumnos pueden representar en una semi-recta algún conjunto de números naturales.

Representar en una semi-recta los números *1, 3, 5, 7, 9.*

A continuación les puede proponer algunos ejercicios como los siguientes: Llenar los espacios en blanco.



OBJETIVOS ESPECIFICOS

3 Identificar los números enteros positivos como los resultados de aplicar operadores de la forma $+a$ a cualquier número natural.

4 Reconocer que el resultado de aplicar un operador de la forma $+a$ al cero, es un entero positivo que llamamos $+a$.

INDICADORES DE EVALUACION

El alumno identificará los enteros positivos como los resultados de aplicar operadores de la forma $+a$ a cualquier número natural.

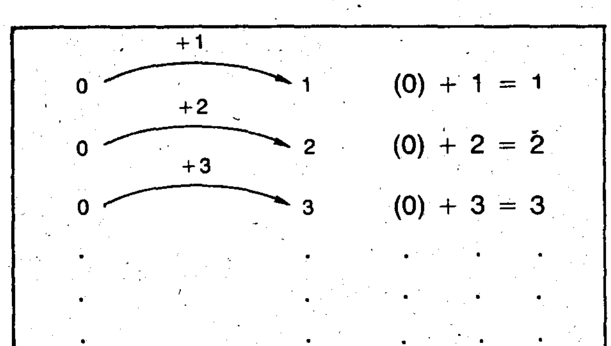
El alumno llamará entero positivo al resultado que producen los operadores de la forma $+a$ al aplicarlos al cero.

CONTENIDOS BASICOS

Los resultados de aplicar operadores de la forma $+a$ a cualquier número natural, son también números naturales. Al conjunto que se obtiene de los resultados de aplicar operadores de la forma $+a$ a cualquier número natural se le llama "enteros positivos".

Si aplicamos cualquier operador de la forma $+a$ al cero, obtenemos como resultado el número natural a.

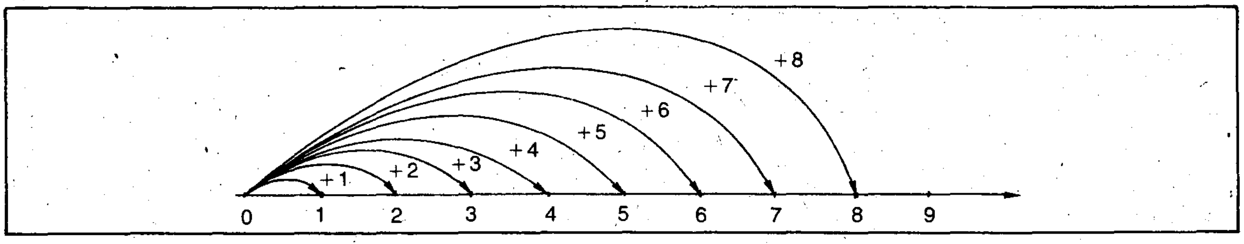
Ejemplos:



El número natural que se obtiene de aplicar un operador de la forma $+a$ al cero se le llama también entero positivo, y se nota $+a$.

Observando la semi-recta numérica se puede concluir que el resultado de aplicar cualquier operador de la forma $+a$ al cero es un número natural, y que está representado en la semi-recta numérica a la derecha del cero.

Por eso el número natural 5 al considerarlo como entero, o sea como resultado de aplicarle el operador $+5$ al cero, lo podemos simbolizar también "$+5$".



Así el conjunto de los números enteros positivos será:

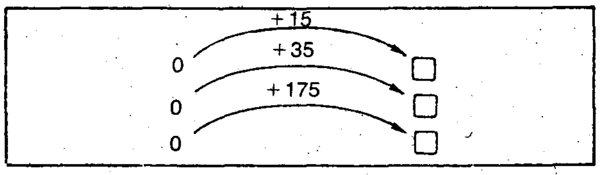
$\{+1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Al aplicar en la semi-recta operadores de la forma $+a$ a cualquier número natural se obtiene, como resultado el conjunto de los enteros positivos.

Usando la semi-recta numérica, el profesor puede hacer que los alumnos observen el resultado de aplicar al cero cualquier operador de la forma $+a$; también conviene explicar que por la limitación del espacio que pueden utilizar para dibujar la semi-recta, tienen que terminarla en algún punto; pero que siempre se puede añadir un segmento más hacia la derecha; es decir, representar el siguiente número natural.

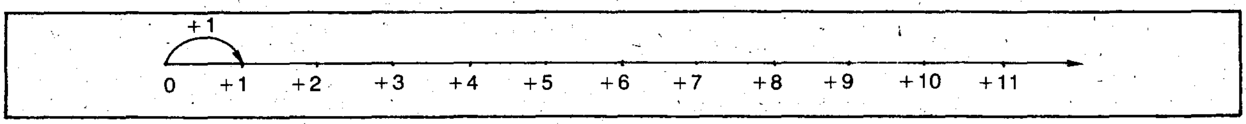
Les puede proponer algunos ejercicios como los siguientes:



Se espera que los alumnos concluyan que el resultado obtenido al aplicar un operador de la forma $+a$ al cero es el número natural a. Enseguida les dice que a este número también se le llama **entero positivo** y que otra forma de representarlo es antecediéndolo del signo " + " para representarlo con el mismo símbolo del operador que lo produce al aplicárselo al cero.

3	=	+3	
27	=	+27	
135	=	+135	
+293	=	293	etc.

y en la semi-recta:

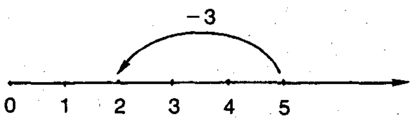


OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
5 Reconocer que el resultado que producen los operadores de la forma $-a$ al aplicarlos a un número natural estrictamente menor que a, no es un número natural.	El alumno explicará por qué el resultado de aplicar operadores de la forma $-a$ a un número natural estrictamente menor que a, no es un número natural.
6 Identificar los números enteros negativos como los resultados de aplicar operadores de la forma $-a$ a números naturales estrictamente menores que a.	El alumno denominará enteros negativos los resultados de aplicar operadores de la forma $-a$ a números naturales estrictamente menores que a.

CONTENIDOS BASICOS

Sobre la semi-recta numérica en la que representamos los números naturales, observamos que al aplicar un operador de la forma $-a$, a un número natural estrictamente mayor que a, el resultado siempre está a la izquierda del número al que se le aplica dicho operador.

Ejemplo:



$5 - 3 = 2$; $5 > 3$

El dos está tres lugares a la izquierda del cinco.

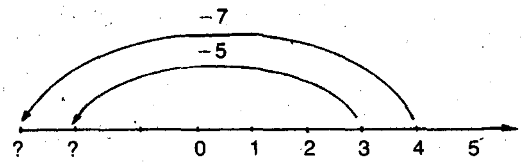
Al aplicar un operador de la forma $-a$ a un número natural estrictamente menor que a, el resultado estará representado a la izquierda de éste en la semi-recta numérica, donde no está representado ningún número natural.

Ejemplos:

$3 < 5$

$3 \xrightarrow{-5} ?$

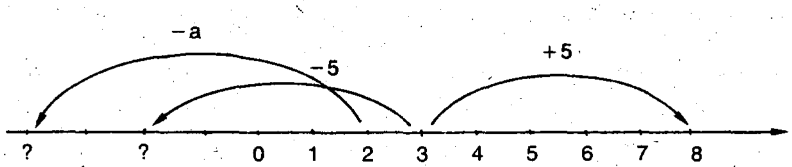
$4 \xrightarrow{-7} ?$



Consideremos la proposición abierta:

$$3 - 5 = x$$

Si para cerrarla tratamos de remplazar x por cualquier número natural, nunca nos resultará verdadera, puesto que el resultado de aplicar un operador de la forma $-a$ a un número natural estrictamente menor que a, no es un número natural.



Los resultados de aplicar operadores de la forma $-a$, a números naturales estrictamente menores que a, se llaman "enteros negativos".

Ejemplos:

Como	$3<5$	$3 \xrightarrow{-5} -2$
Como	$4<7$	$4 \xrightarrow{-7} -3$
Como	$2<3$	$2 \xrightarrow{-3} -1$

El conjunto de los números enteros negativos será:

$$\{ -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, \ldots \}$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El profesor puede proponer a los alumnos algunos ejercicios como los siguientes:

1) $4 \xrightarrow{-3} \square$

2) $3 \xrightarrow{-3} \square$

3) $2 \xrightarrow{-3} \square$

4) $4 \xrightarrow{-7} \square$

5) $0 \xrightarrow{-3} \square$

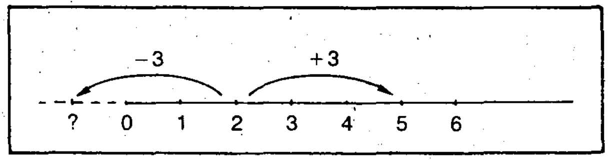
6) $3 \xrightarrow{-5} \square$

Es posible que los alumnos respondan que los ejercicios 3, 4, 5 y 6 no se pueden resolver puesto que el resultado no es un número natural.

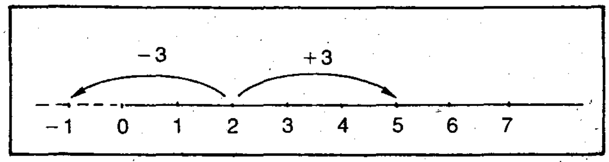
El profesor puede proponer a los alumnos que discutan y planteen una posible forma de resolver este problema. Una posibilidad sería extender la semi-recta hacia la izquierda para reconocer en ella cuál sería el efecto que producen dichos operadores, comparándolo con el efecto que producen los operadores de la forma $+a$, al ser aplicados a cualquier número natural.

Ejemplo: al aplicar el operador $+3$ a 2 el resultado está tres lugares a la derecha del dos; es el número entero positivo $+5$.

De la misma forma se observa que al aplicar el operador -3 a 2 el resultado está tres lugares a la izquierda del 2, o, un lugar a la izquierda del cero.



Discutirán cuál será el resultado y el profesor los orientará para que concluyan que en este caso el resultado es -1, ya que está un lugar a la izquierda del cero.



De este modo al aplicar diferentes operadores de la forma $-a$, a números naturales estrictamente menores que a, encontrarán que en la recta numérica el resultado siempre está uno, dos, tres, cuatro, cinco, etc., lugares a la izquierda del cero. Así obtendrán los números -1, -2, -3, -4, -5, -6, etc., que llamaremos números "enteros negativos".

OBJETIVO ESPECIFICO

7 Reconocer que el resultado de aplicar un operador de la forma $-a$ al cero, es un número entero negativo que llamamos $-a$.

INDICADORES DE EVALUACION

Los alumnos denominarán entero negativo $-a$ al resultado de aplicar un operador de la forma $-a$ al cero.

El alumno representará en la recta numérica los enteros negativos.

CONTENIDOS BASICOS

El resultado que producen los operadores de la forma $+a$ al aplicarlos al cero, es un número natural que llamamos **entero positivo**; en forma análoga, el resultado que producen los operadores de la forma $-a$ al aplicarlos al cero, es un número, que en este caso no es natural y que llamamos **entero negativo**. Lo representamos con el mismo símbolo $-a$, del operador que lo produce al aplicárselo al cero.

Ejemplos:

$0 \xrightarrow{-1} -1$

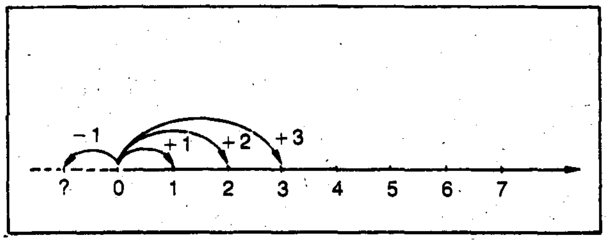
$0 \xrightarrow{-2} -2$

$0 \xrightarrow{-3} -3$

etc.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Utilizando la recta que se obtiene al extender la semi-recta a la izquierda del cero, los alumnos podrán identificar el número que resulta de aplicar un operador de la forma $-a$ al cero. Es conveniente que comparen estos resultados con los que se obtienen al aplicar operadores de la forma $+a$ al cero.



Observar que al aplicar el operador $+1$ al cero se obtiene el número entero positivo $+1$, que al aplicar el operador $+2$ se obtiene el número entero positivo $+2$; etc.

A continuación se puede preguntar ¿Qué número se obtendrá si aplicamos al cero el operador -1? Se espera que lleguen a concluir que el resultado, en este caso, es el número entero negativo -1, que está representado en la recta a la izquierda del cero. Después se plantean unos ejercicios como los siguientes:

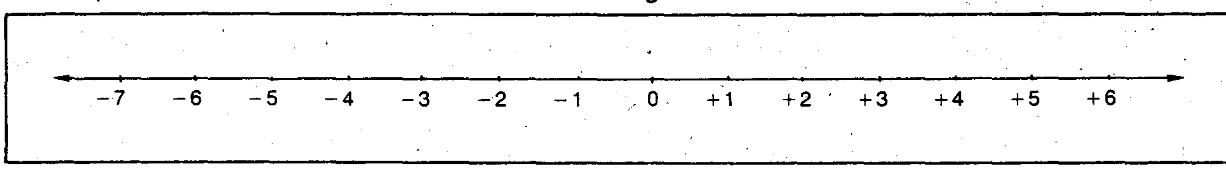
$$0 \xrightarrow{-2} \square$$

$$0 \xrightarrow{-3} \square \qquad \text{etc.}$$

Les pedirá que representen sobre una recta los siguientes números:

$-8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4.$

Se espera que hagan una gráfica como la siguiente:



Es importante enfatizar que el resultado que producen los operadores de la forma $+a$, está sobre la recta a la derecha del lugar donde está representado el número al que se aplicó dicho operador, y está hacia la izquierda si el operador es de la forma $-a$. Se proponen ejercicios como los siguientes utilizando la recta:

$$3 \xrightarrow{-5} \square$$

$$8 \xrightarrow{+2} \square$$

$$-2 \xrightarrow{-3} \square$$

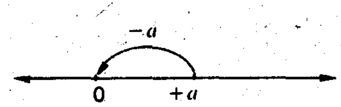
$$-7 \xrightarrow{+3} \square \qquad \text{etc.}$$

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
8 Reconocer el conjunto de los números enteros como el conjunto formado por los enteros positivos, los enteros negativos y el cero.	El alumno identificará como el conjunto de los números enteros al conjunto $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

CONTENIDOS BASICOS

Como resultado de aplicar operadores naturales al cero se obtienen dos conjuntos: el conjunto de los enteros positivos, que son el resultado de aplicar operadores de la forma $+a$ al cero y el conjunto de los enteros negativos que son el resultado de aplicar operadores de la forma $-a$ al cero. Si a estos conjuntos agregamos el cero natural como cero entero, obtenemos el conjunto de los números enteros.

El cero entero se puede obtener como el resultado de aplicar el operador $-a$ a a.



El conjunto de los números enteros se puede simbolizar así: $\mathbb{Z}$

El conjunto de los enteros positivos: $\mathbb{Z}^+$

El conjunto de los enteros negativos: $\mathbb{Z}^-$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots\}$$

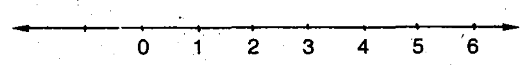
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Los alumnos pueden obtener el conjunto de los enteros así:

Inicialmente aplican operadores de la forma $+a$ al cero, y obtienen el siguiente conjunto.

$$\mathbb{Z}^+ = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

Lo representan en la recta numérica.

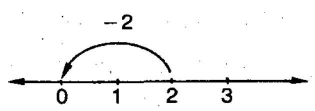


Luego aplican operadores de la forma $-a$ al cero; de los resultados obtienen el siguiente conjunto:

$$\mathbb{Z}^- = \{ -1, -2, -3, -4, -5, \dots \}$$

Finalmente obtienen el cero como resultado de aplicar el operador $-a$ a a.

Ejemplo: al aplicar el operador -2 a 2 se puede obtener el cero.

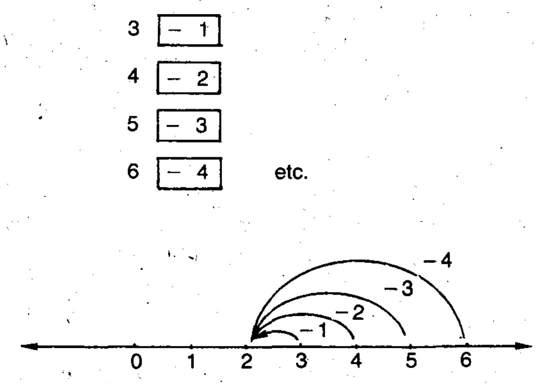


Al unir estos tres conjuntos obtienen el conjunto de los enteros.

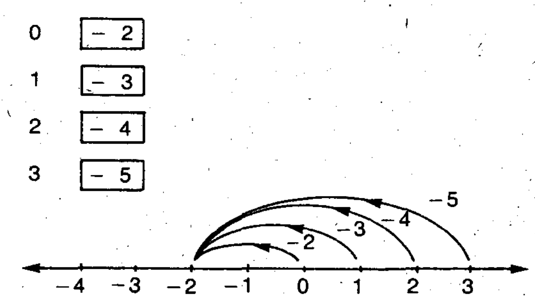
También se puede obtener el conjunto de los enteros como resultados de aplicar operadores de la forma $-a$, a números naturales.

Así podrán observar que un número entero se puede obtener de muchas maneras:

Ejemplos: El 2 se puede obtener de aplicarle al 3 el operador -1, o al 4 el operador -2, o al 5 el operador -3, o al 6 el operador -4, etc.



El entero -2 se puede obtener de aplicarle al 0 el operador -2, o de aplicarle a 1 el operador -3, o al 2 el operador -4 o al 3 el operador -5, etc.



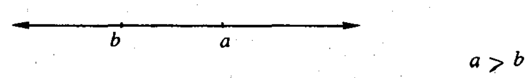
Los alumnos pueden buscar algunas de las distintas formas de obtener un número entero dado.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADORES DE EVALUACION
9. Analizar en la recta numérica las relaciones: "... es menor que ..." y "... es mayor que ..." entre números enteros.	Dados dos números enteros el alumno dirá cuál de ellos es el mayor. Dados varios números enteros, el alumno los ordenará ascendentemente.

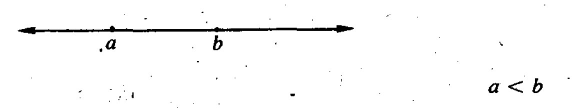
CONTENIDOS BASICOS

Las relaciones "... es menor que ..." y "... es mayor que ..." entre números enteros, se pueden analizar en una recta numérica de la siguiente manera:

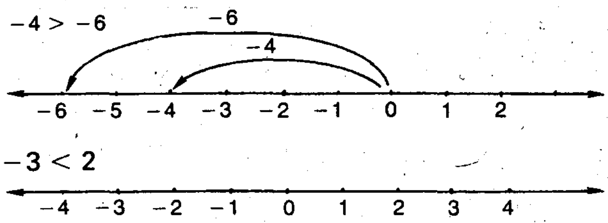
Si un número entero a está representado en la recta numérica a la derecha de un número entero b se dice que $a > b$.



Si un número entero a está representado en la recta numérica a la izquierda de un número entero b se dice que $a < b$.



Ejemplo:



-4 está representado a la derecha de -6

-3 está representada a la izquierda de -2

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se podrá proponer a los alumnos algunos ejercicios como los siguientes:

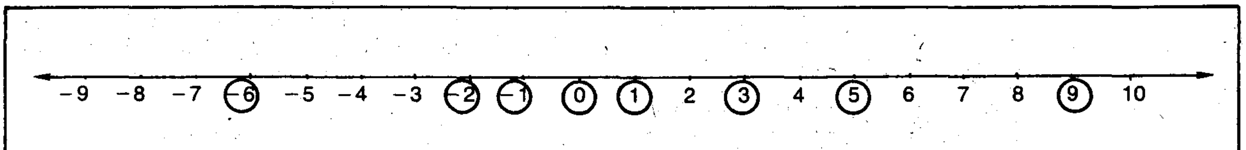
– Establecer la relación "... es mayor que..." o "... es menor que ..." entre las siguientes parejas de números enteros.

2	__________	5
4	__________	−8
−2	__________	−3
−4	__________	−1
−5	__________	2
−4	__________	0
−5	__________	5
6	__________	−6

– Ordenar descendentemente los siguientes números enteros:

5, −6, 3, 0, −2, −1, 1, 9

Para hacerlo lo pueden presentar en la recta numérica, así:



$9 > 5 > 3 > 1 > 0 > -1 > -2 > -6$

El orden ascendente sería:

$-6 < -2 < -1 < 0 < 1 < 3 < 5 < 9$

OBJETIVO ESPECIFICO

10 Analizar sobre la recta numérica el resultado de aplicar al cero sucesivamente dos operadores de la forma $+a$ o $-a$ y relacionar la adición de números enteros con esta aplicación sucesiva.

INDICADOR DE EVALUACION

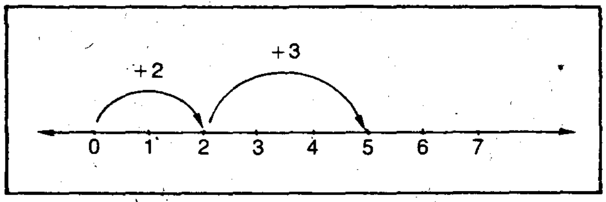
Dados dos operadores de la forma $+a$ o $-a$, el alumno analizará en la recta numérica el resultado de aplicarlos sucesivamente y relacionará la adición de números enteros con esta aplicación sucesiva.

CONTENIDOS BASICOS

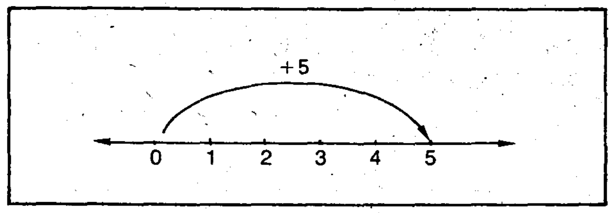
Sobre la recta numérica podemos analizar el resultado de aplicar al cero, sucesivamente, dos operadores de la forma $+a$ o $-a$, de la siguiente manera:

– Si los dos operadores son de la forma $+a$, el resultado está a la derecha del cero.

Ejemplo: el resultado de aplicar al cero sucesivamente el operador $+2$ y luego el operador $+3$ se obtiene de la siguiente manera:



Este resultado es el mismo que se obtiene al aplicar el operador $+5$ a cero.

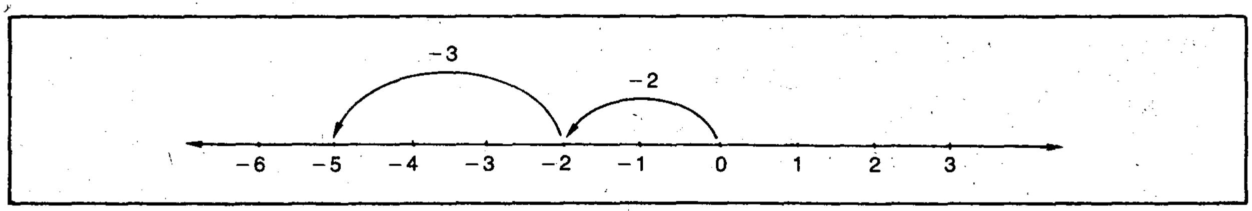


El entero $+5$ se obtiene sumando los enteros $+2$ y $+3$ asociados a los operadores respectivos.

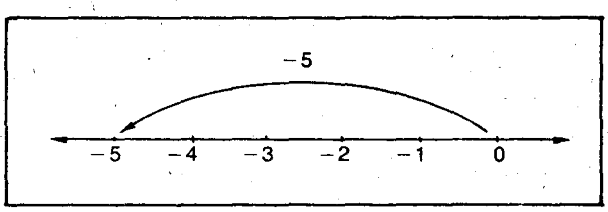
$(+2) + (+3) = 2 + 3 = 5$

–Si los dos operadores son de la forma $-a$ el resultado está a la izquierda del cero.

Ejemplo: el resultado de aplicar al cero sucesivamente el operador -2 y luego el operador -3 se obtiene de la siguiente manera:



Este resultado es el mismo que se obtiene al aplicar el operador -5 al cero.

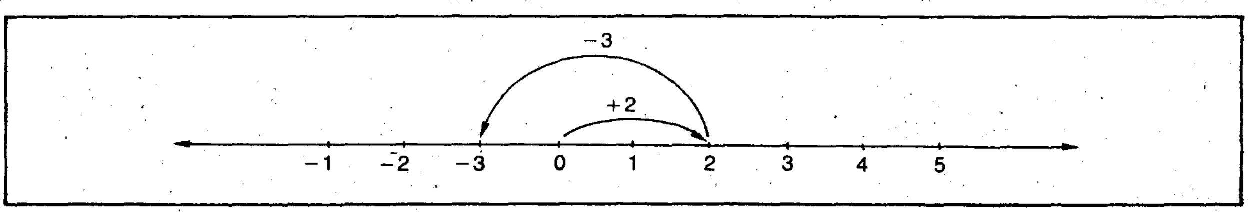


El entero -5 se obtiene sumando los enteros -2 y -3 asociados a los operadores respectivos.

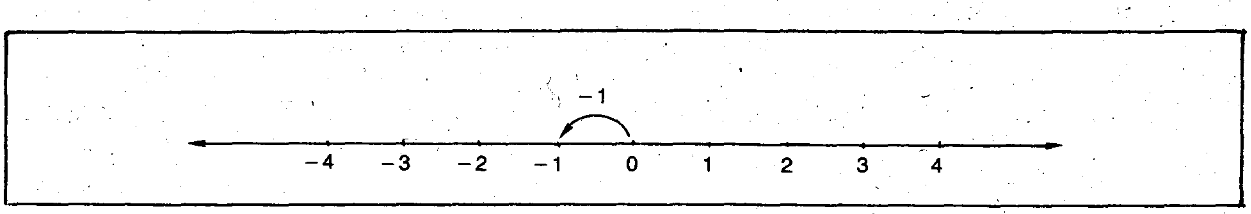
$(-2) + (-3) = -2 - 3 = -5$

– Si un operador es de la forma $+a$ y otro es de la forma $-a$, el resultado puede estar a la derecha o a la izquierda del cero.

Ejemplo: el resultado de aplicar el operador $+2$ y luego el operador -3 al cero está un lugar a la izquierda del cero, así:

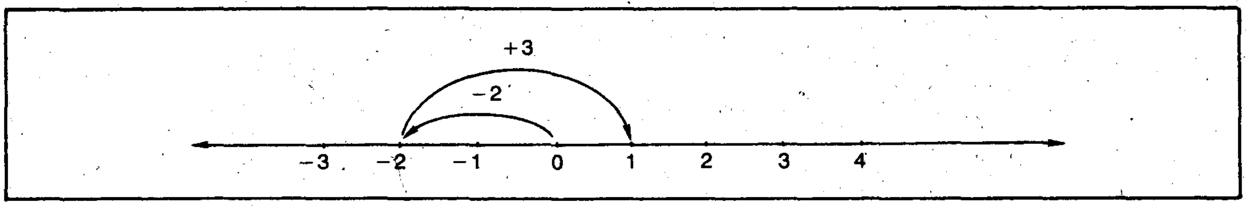


Este resultado es el mismo que se obtiene al aplicar el operador -1 al cero.

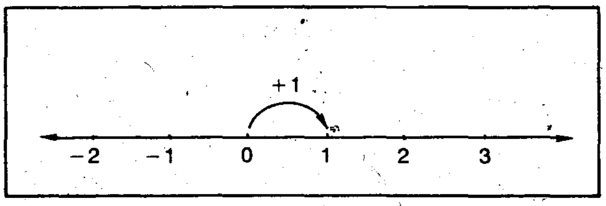


El entero -1 se obtiene sumando los enteros $+2$ y -3 asociados a los operadores respectivos: $(+2) + (-3) = 2 - 3 = -1$

– El resultado que se obtiene al aplicar el operador -2 y luego el operador $+3$ al cero está un lugar a la derecha del cero, así:



es el mismo que se obtiene al aplicar el operador $+1$ al cero.



El entero $+1$ se puede obtener adicionando los enteros -2 y $+3$: $(-2) + (+3) = -2 + 3 = +1$

En general, se puede decir que el efecto de aplicar sucesivamente los operadores $+a$ y $+b$ al cero es equivalente con el efecto de aplicar el operador $+a \oplus +b$ al cero.

El signo $\oplus$ representa la adición entre operadores.

$$[(0) + a] + b = (0) + [+a \oplus +b]$$

El resultado de aplicar el operador $[+a \oplus +b]$ al cero es el entero:

$$+a \oplus +b = (+a) + (+b) = a + b$$

De la práctica de aplicar sucesivamente estos operadores se puede pasar directamente a sumar números, ya que el operador $+a + b$ que se aplica al cero se halla sumando los dos enteros que lo representan.

Ejemplos: La aplicación sucesiva al cero de los operadores $+2$ y $+5$ da como resultado el entero $+7$, que es el resultado que se obtiene si se hubiera aplicado el operador $+7$ al cero.

$$[(0) + 2] + 5 = (0) + [+2 \oplus +5] = (0) + 7$$

$$+2 \oplus +5 = +7$$

$$2 + 5 = 7$$

La aplicación sucesiva de los operadores $+2$ y -5 al cero da como resultado el entero -3, que es el resultado que se obtiene si se aplica el operador -3 al cero.

$$[(0) + 2] - 5 = (0) + [+2 \oplus -5] = (0) - 3$$

$$+2 \oplus -5 = -3$$

$$2 + (-5) = -3$$

$$2 - 5 = -3$$

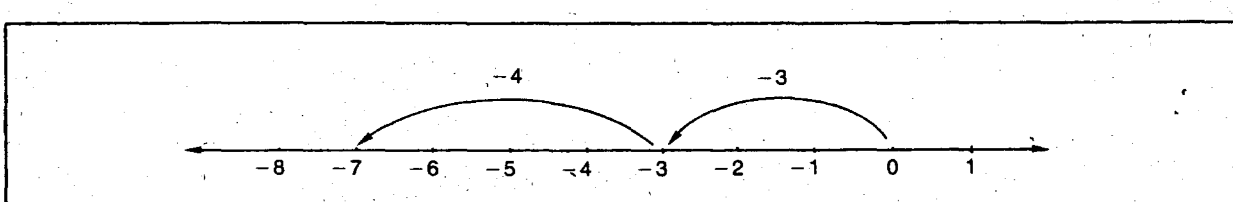
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En la recta numérica se aplican sucesivamente al cero dos operadores de las formas:

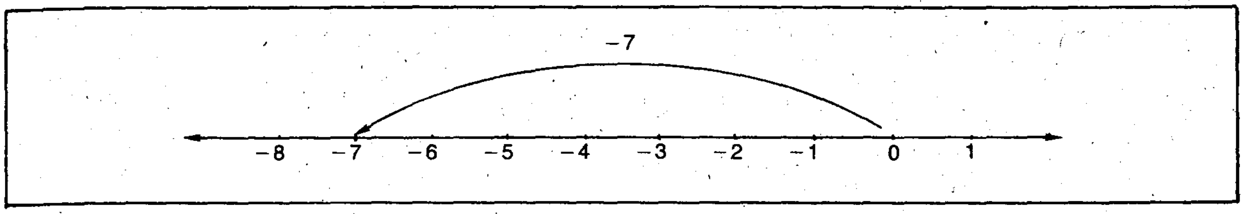
$+a$ y $+b$	como	$+3$ y $+4$
$+a$ y $-b$	como	$+3$ y -4
$-a$ y $+b$	como	-3 y $+4$
$-a$ y $-b$	como	-3 y -4

Cuando hayan hecho suficientes ejercicios se les puede pedir que hallen la respuesta sin tener que aplicar los dos operadores sucesivamente; entonces pasarán a la adición de enteros.

Ejemplo: el efecto de aplicar sucesivamente los operadores -3 y -4 al cero es:



Este efecto es equivalente a aplicar el operador -7 al cero.



$$[\,(0) -3\,] -4 = (0) -7$$

El entero -7 se puede hallar sumando los dos enteros que se obtienen al aplicar al cero los operadores -3 y -4. Estos dos enteros, como ya se había convenido, se representan con el mismo símbolo de los dos operadores mencionados, aunque a nivel conceptual sean distintos.

$$(-3) + (-4) = -3 -4 = -7$$

Cuando se esté haciendo un ejercicio como $+2 + +4$, los alumnos deben diferenciar cada signo.

$$(+2) + (+4)$$

suma de enteros

\+ de la representación del número entero positivo

Como $+2 = 2$, se puede simplificar

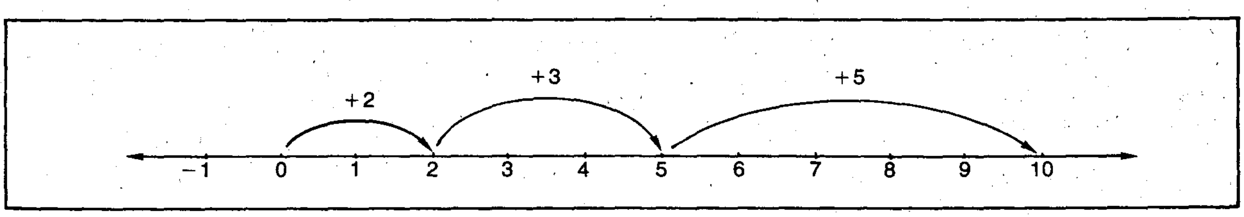
$$2 + 4 = 6$$

suma de enteros.

Después de hacer varios ejercicios de aplicación sucesiva de operadores de la forma $+a$ o $-a$ al cero, los alumnos podrán sacar algunas conclusiones como: el resultado de aplicar sucesivamente al cero dos operadores de la forma $+a$ es equivalente al resultado de aplicar otro operador también de la forma $+a$, en donde el nuevo "a" es la suma de los dos anteriores.

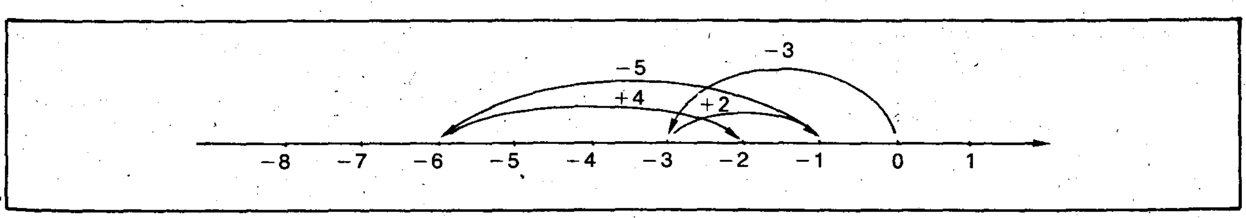
Puede hacer algunos ejercicios de aplicación sucesiva de tres o más operadores de la forma $+a$ o $-a$ al cero, para que analicen el resultado.

Ejemplos: Aplicar sucesivamente los operadores $+2$, $+3$ y $+5$ al cero.



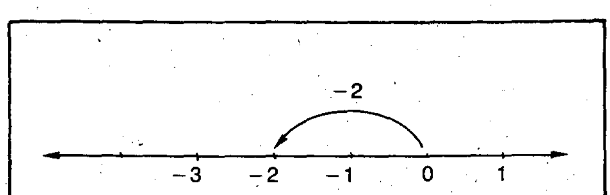
$$\Big[\,[\,(0) + 2\,] +3\,\Big] +5 = (0) + 10$$

Aplicar sucesivamente los operadores -3, $+2$, -5 y $+4$ al cero.



$$\Big[\Big[[\,(0)\,] -3\,\Big] +2\,\Big] -5\,\Big] +4 = (0) -2$$

El resultado es -2



También pueden sacar algunas conclusiones de estos resultados.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
11 Practicar un algoritmo de la adición de enteros.	Dados varios enteros, el alumno efectuará la adición entre ellos.

CONTENIDOS BASICOS

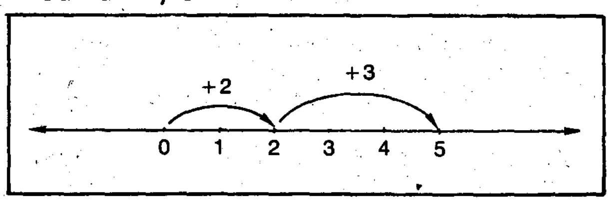
De la aplicación sucesiva de operadores naturales de la forma $+a$ o $-a$ al cero se puede formular un algoritmo para la adición de enteros, de la siguiente manera:

- Dos o más enteros positivos, se suman como se suman naturales; desde luego el resultado será otro número entero positivo.
- Dos o más enteros negativos se suma como si fueran naturales y el resultado será otro número entero negativo.
- Para sumar un entero positivo con un entero negativo se hace la resta entre ellos como si fueran naturales y el resultado tendrá el signo del entero que quede más alejado del cero.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

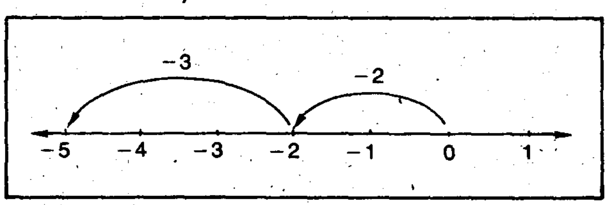
Harán diversos ejercicios de adición de números enteros, ayudándose inicialmente de la recta numérica.

– Sumar 2 y 3



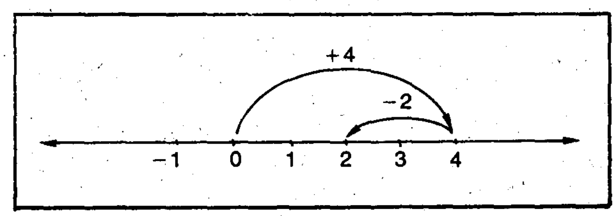
$+2 \oplus +3 = 2 + 3 = 5$

– Sumar -2 y -3



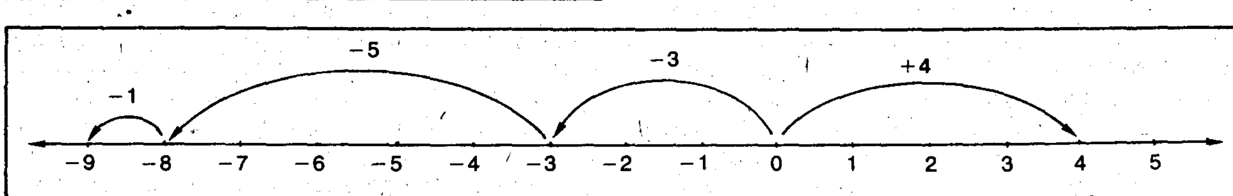
$-2 \oplus -3 = (-2) + (-3) = -2 -3 = -5$

– Sumar 4 y -2



$+4 \oplus -2 = 4 + (-2) = 4 - 2 = 2$

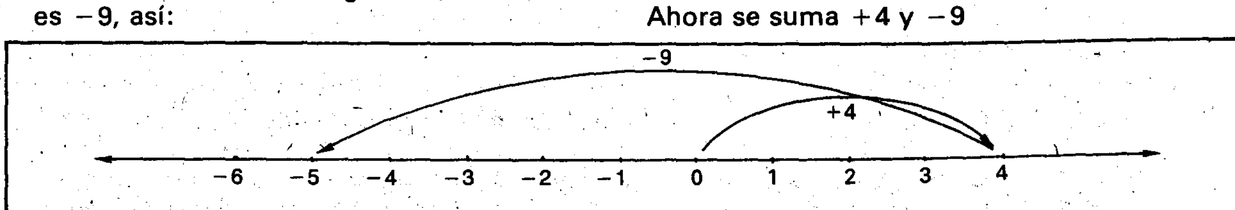
– Sumar -3, 4, -5 y -1



Se suman los enteros positivos; el resultado es $+4$.
Se suman los enteros negativos; el resultado es -9, así:

$-3 \oplus -5 \oplus -1 = (-3) + (-5) + (-1)$
$= -3 -5 -1 = -9$

Ahora se suma $+4$ y -9



$+4 \oplus -9 = 4 + (-9) = 4 - 9 = -5$

Al mismo tiempo que los alumnos van efectuando adiciones con números enteros pueden ir descubriendo las propiedades que cumple esta operación en este conjunto numérico. Pueden hacerlo por comparación con la adición en los números naturales.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
12 Resolver y formular problemas que requieren el empleo de la adición de números enteros.	El alumno formulará problemas que requieran el uso de números enteros y los resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

Se pueden proponer algunos problemas como los siguientes:

- Un señor se encuentra en la calle 2a. Sur. ¿En qué calle se encontrará si camina:

  a) 8 cuadras hacia el Sur
  b) 8 cuadras hacia el Norte
  c) 1 cuadra hacia el Norte

- La oficina del correo en una ciudad está ubicada en la calle que separa el Norte del Sur. En la mañana el cartero va a distribuir la correspondencia del Sur y en la tarde la del Norte.

  La primera carta de la mañana la entregó 3 cuadras hacia el Sur, la segunda carta 4 cuadras más hacia el Sur, la tercera 8 cuadras más, y la cuarta 10 cuadras a partir de donde entregó la tercera carta.

  La primera carta de la tarde la entregó en la calle 16 Norte, 5 cuadras más adelante entregó la segunda carta y la última carta la entregó 3 cuadras a partir de donde dejó la segunda.

  a) ¿En qué calle entregó la última carta del Sur?

  b) ¿En qué calle entregó la última carta del Norte?

  b) ¿En qué calle entregó la tercera carta del Sur?

- Don Pedro tiene $ 2500. A un amigo le debe $ 1000 y a otro $825. ¿Cuál es la situación financiera de Don Pedro?

Para la solución de estos problemas se considerará como entero positivo lo que está hacia el Norte, o lo que una persona tiene o gana; y se considerará como entero negativo lo que está hacia el Sur, o lo que una persona debe o pierde.

Hay que tener en cuenta que en muchas ciudades se pasa de la calle 1N a la calle 1S, y no existe la calle O. Se puede poner la Oficina de Correos en la calle 0, como si estuviera a la misma distancia de la calle 1N y de la calle 1S.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Solamente se propondrán aquellos problemas que tengan sentido para el alumno porque corresponden a situaciones que se dan en la vida real. Algunos de estos problemas están relacionados con la ubicación en una ciudad en la que se han demarcado el Norte y el Sur o el Oriente y el Occidente.

Otros estarán relacionados con los negocios de una persona que posee o que debe dinero, o, que gana o pierde en ellos.

Se debe tener cuidado que para solucionar cualquier problema que se plantee, el alumno lo resuelva inicialmente como lo hará en la vida práctica posiblemente ayudándose de dibujos o de algunas manipulaciones. Luego él relacionará esta situación con la adición de enteros y verá que el problema también se puede resolver utilizando dicha operación.

Cuando hayan resuelto un buen número de problemas se les pedirá que formulen algunos problemas, cuidando que tengan los datos suficientes para resolverlos.

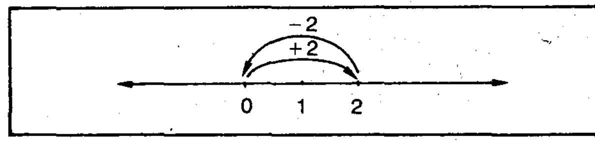
OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
13 Reconocer los inversos aditivos de los números enteros positivos.	Dados varios números enteros positivos, el alumno hallará el inverso aditivo de cada uno.

CONTENIDOS BASICOS

El resultado de aplicar al cero un operador de la forma $+a$, es un número entero positivo.

Si queremos anular el efecto de dicho operador, aplicamos un operador de la forma $-a$ al resultado de haber aplicado el operador anterior: $(+a) + (-a) = 0$; $-a$ sería el inverso aditivo de a.

Ejemplo: el resultado de aplicar al cero el operador $+2$ es el entero $+2$; si se quiere anular este efecto, se aplica el operador -2 a 2 y se obtiene nuevamente el cero.



$$[(0) + 2] - 2 = 0$$

$$+2 \oplus -2 = 0$$

$$2 - 2 = 0$$

Los inversos aditivos de los números enteros positivos son los números enteros negativos y viceversa.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Harán algunos ejercicios de aplicar sucesivamente al cero operadores de la forma $+a$ y $-a$ para que analicen los resultados.

Hallarán los inversos aditivos de algunos números enteros.

Ejemplo: el inverso aditivo de 3 es -3, de 4 es -4, de 5 es -5, de 8 es -8, de -20 es 20, etc.

OBJETIVO ESPECIFICO

14 Reconocer que a cada número entero le corresponde un valor absoluto que depende de la distancia a que se encuentra del origen de la recta numérica.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados varios números enteros el alumno hallará el valor absoluto de cada uno de ellos.

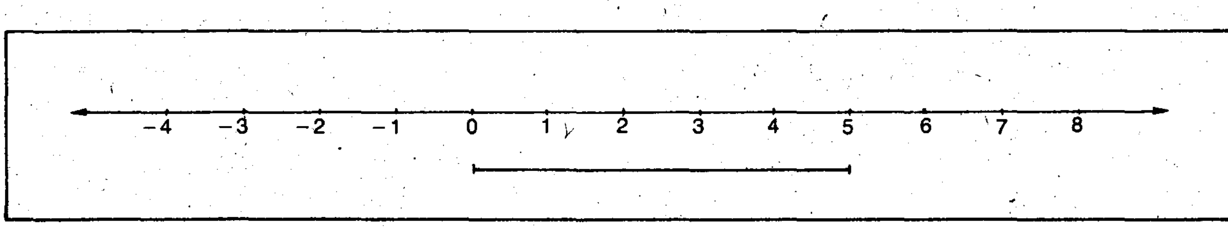
CONTENIDOS BASICOS

A cada número entero le corresponden dos valores: el valor relativo y el valor absoluto.

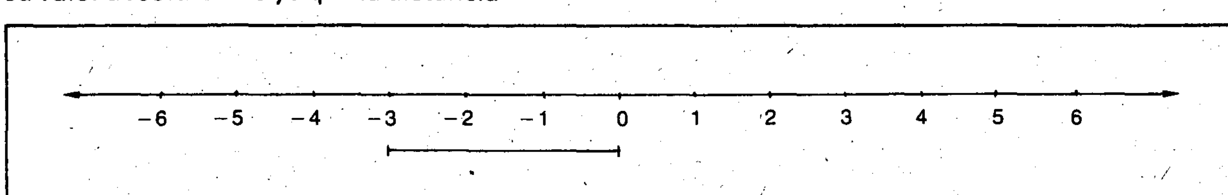
El valor relativo está determinado por la posición en la recta numérica, a la derecha o a la izquierda del cero.

El valor absoluto está determinado por la magnitud del desplazamiento; es decir, por la distancia a que se encuentra el número del origen de la recta.

Ejemplo: Dado el entero $+5$, su valor relativo es $+5$ y su valor absoluto es 5, ya que el desplazamiento es de 5 unidades a partir del origen.



Dado el entero -3, su valor relativo es -3 y su valor absoluto es 3 ya que la distancia a partir del origen es 3 unidades de longitud.



Para indicar que se propone hallar el valor absoluto de un número se acostumbra encerrarlo entre dos barras verticales así:

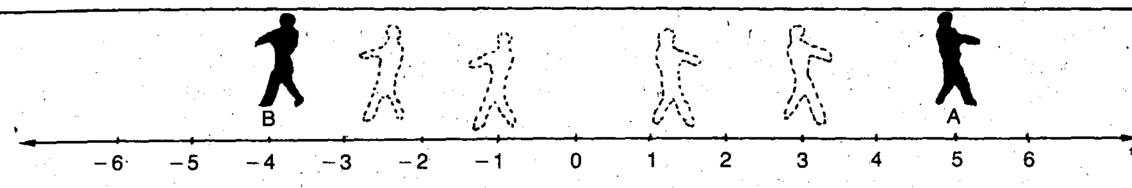
$|-3|$, $|+5|$.

$|-3| = 3 \qquad |+5| = 5$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Pueden realizar una actividad que consiste en desplazarse a lo largo de una recta numérica dibujada en el suelo, partiendo desde el origen, que puede ser cualquier punto, señalado en la recta antes de empezar la actividad.

Ejemplos:



Partiendo del origen el alumno que está ubicado en el punto A, tuvo que desplazarse el largo de 5 baldosas (5 unidades de longitud) y el que está en B tuvo que desplazarse el largo de 4 baldosas (4 unidades de longitud), así que:

El valor absoluto de $+5 = 5 \qquad |+5| = 5$

El valor absoluto de $-4 = 4 \qquad |-4| = 4$

El alumno que está en el punto A, está a la derecha del cero y el que está en el punto B, está a la izquierda del cero, así que:

El valor relativo de $+5 = +5$

El valor relativo de $-4 = -4$

OBJETIVOS ESPECIFICOS

15 Reconocer que entre dos números enteros es mayor en valor absoluto el que en la recta numérica queda más alejado del cero.

16 Reconocer que el orden aditivo entre dos números enteros es independiente de sus valores absolutos.

INDICADORES DE EVALUACION

Dados dos números enteros, el alumno determinará cuál es mayor, en valor absoluto.

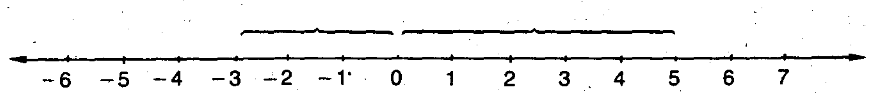
Dados dos números enteros, el alumno establecerá una relación de orden aditivo y concluirá que es independiente del valor absoluto de cada uno.

CONTENIDOS BASICOS

Dados dos números enteros podemos comparar sus valores absolutos. Es mayor en valor absoluto el que en la recta numérica está más alejado del cero; es decir, aquel cuya representación exige un desplazamiento mayor.

Ejemplo: $|5| = 5$

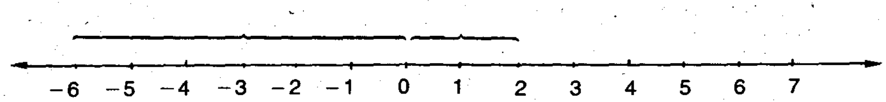
$|-3| = 3$



$|5| > |-3|$

$|-6| = 6$

$|2| = 2$

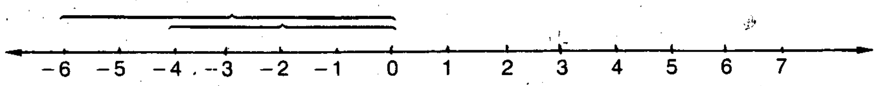


$|-6| > |2|$

$|-6| = 6$

$|-4| = 4$

$|-6| > |-4|$



Sinembargo, al establecer la relación de orden aditivo entre dos números enteros no se tiene en cuenta el valor absoluto de cada uno de ellos.

Así por ejemplo:

$|-6| > |-2|$ y $-2 > -6$

$|5| > |-3|$ y $5 > -3$

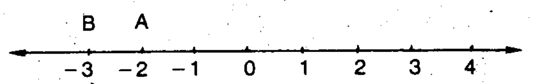
$|-6| > |2|$ y $2 > -6$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Pueden seguir desplazándose en la recta trazada en el suelo.

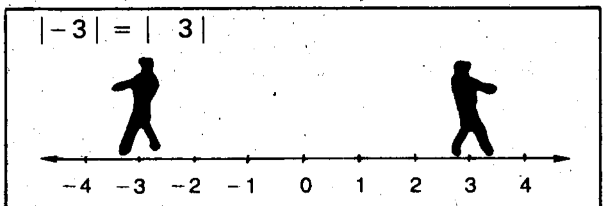
Al establecer la relación de orden aditivo, será mayor el que haya avanzado más hacia la derecha sobre la recta y, al establecer la relación de orden entre dos valores absolutos, será mayor el que esté más alejado del origen.

Ejemplo: Dados dos enteros -3 y -2



$-3 < -2$ o $-2 < -3$ ya que el punto A está situado a la derecha del punto B.

$|-3| > |-2|$ ya que el alumno del punto B se desplazó 3 unidades de longitud y el alumno del punto A se desplazó 2 unidades.



$-3 < 3$ o $3 > -3$

OBJETIVOS ESPECIFICOS

17 Reconocer la sustracción de enteros como una adición en la que uno de los sumandos es el inverso aditivo del sustraendo y practicar un algoritmo de esta operación.

18 Resolver y formular problemas que requieran de la sustracción de enteros.

INDICADORES DE EVALUACION

El alumno explicará oralmente o por escrito en qué sentido la sustracción de enteros es una adición y efectuará sustracciones con estos números.

El alumno formulará un problema que requiera de la sustracción de enteros y lo resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

En los grados anteriores se estudió la sustracción en los naturales como una operación inversa de la adición. Así, si en una adición se desconoce uno de los sumandos, para hallarlo se utiliza la sustracción. El sumando desconocido es la diferencia entre la suma y el otro sumando.

En el conjunto de los enteros se va a considerar de la misma manera.

Consideremos la situación aditiva en la que se desconoce un sumando:

$$+m + \square = +n$$

$$+m + \square = -n$$

$$-m + \square = +n$$

$$-m + \square = -n$$

Para encontrar la respuesta habría que adicionar el opuesto aditivo del primer entero ($\pm$ m) a ambos lados de las igualdades anteriores.

$\square = +n - (+m) = +n + (-m)$,
la diferencia entre n y m es n − m

$\square = -n - (+m) = -n + (-m)$,
la diferencia entre −n y m es −n − m

$\square = +n - (-m) = +n + (+m)$,
la diferencia entre n y −m es n + m

$\square = -n - (-m) = -n + (+m)$,
la diferencia entre −n y −m es −n + m

Resumen: la diferencia $a - b = a + (-b)$

Así aparece la sustracción como una adición de la suma y del opuesto aditivo del sumando conocido.

Ejemplos: De −8 restar −3

$(-8) - (-3) = (-8) + (+3) =$
$-8 + 3 = -5$

De −9 restar 6

$-9 - (+6) = -9 - (-6) =$
$-9 - 6 = -15$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El profesor puede comenzar con alguna actividad práctica que lleve a los alumnos a aplicar la sustracción.

Se puede aprovechar esta actividad para que los alumnos resuelvan polinomios aritméticos, para que verifiquen qué propiedades (asociativa, conmutativa, modulativa) cumple esta operación y para que resuelvan algunas ecuaciones sencillas, mediante ejercicios como los siguientes:

Calcular

$[(-8) + (-3) - (+4)] - [(+8) + (-20) - (-4)]$

Calcular el valor de la siguiente expresión:

$(a + b) - (b + c)$ dados: $a = -7$; $b = +4$; $c = -2$

¿Cuál es el número que sumado con −3 da +8?

¿Cuál es el número que restado de (+17) da −20?

Hallar el valor de x:

$$\begin{aligned} x + (-27) &= -30 \\ -2 + x &= -7 \\ x - 16 &= -8 \\ -20 - x &= 35 \end{aligned}$$

Finalmente, pueden resolver algunos problemas que requieran de la sustracción de enteros y posteriormente formular sus propios problemas y resolverlos. Ejemplo: Don Roberto desea tener en su cuenta de ahorros al fin de mes $ 25 202 ¿Qué transacción tendrá que hacer para lograrlo si a mediados del mes tiene un saldo de $ 19 525?

¿Cuánto retira o cuánto consigna?

OBJETIVO ESPECIFICO

19 Reconocer en la recta numérica el efecto de aplicar los operadores +( ) y −( ) a un número entero dado.

INDICADOR DE EVALUACION

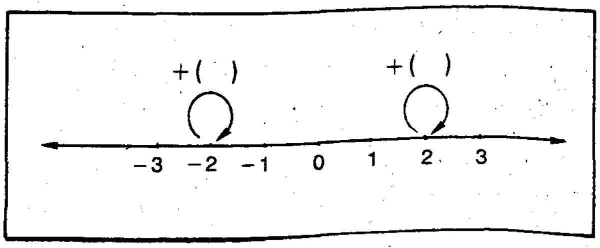
Dado un número entero, el alumno representará en la recta numérica el efecto de aplicarle los operadores +( ) y −( ) y comparará los resultados.

CONTENIDOS BASICOS

El operador +( ) es el operador idéntico, pues al aplicárselo a cualquier entero, lo deja quieto, no lo altera, lo deja invariante.

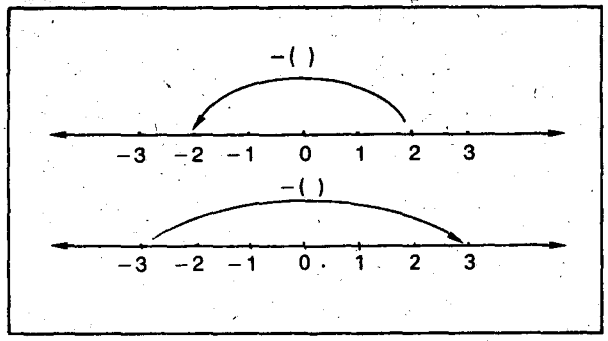
Ejemplo: $+(+2) = +2$

$+(-2) = -2$



En la recta numérica cualquier número entero estará ubicado hacia la derecha del cero (si es positivo) o hacia la izquierda del cero (si es negativo). El efecto del operador $-(\ )$ es cambiar el entero al cual se aplica, por su opuesto aditivo. Por ejemplo, si se le aplica el operador $-(\ )$ al 2, resulta el entero -2, que es el opuesto aditivo de $+2$.

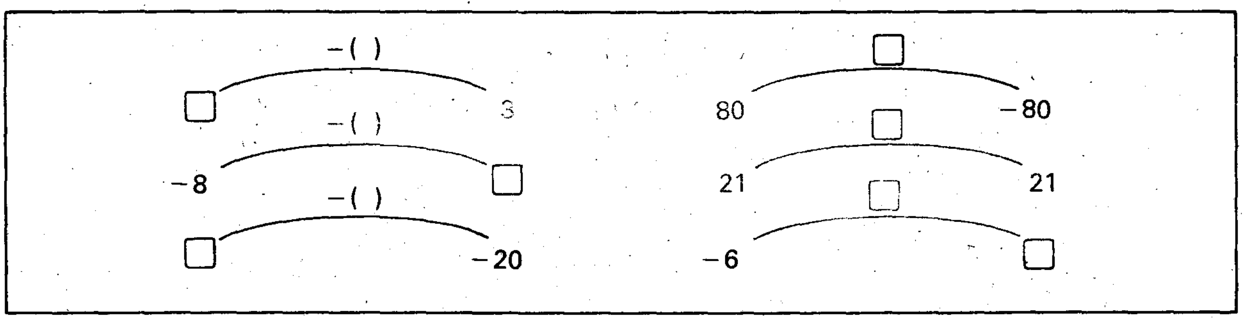
Si se le aplica a (-3), resulta $+3$.



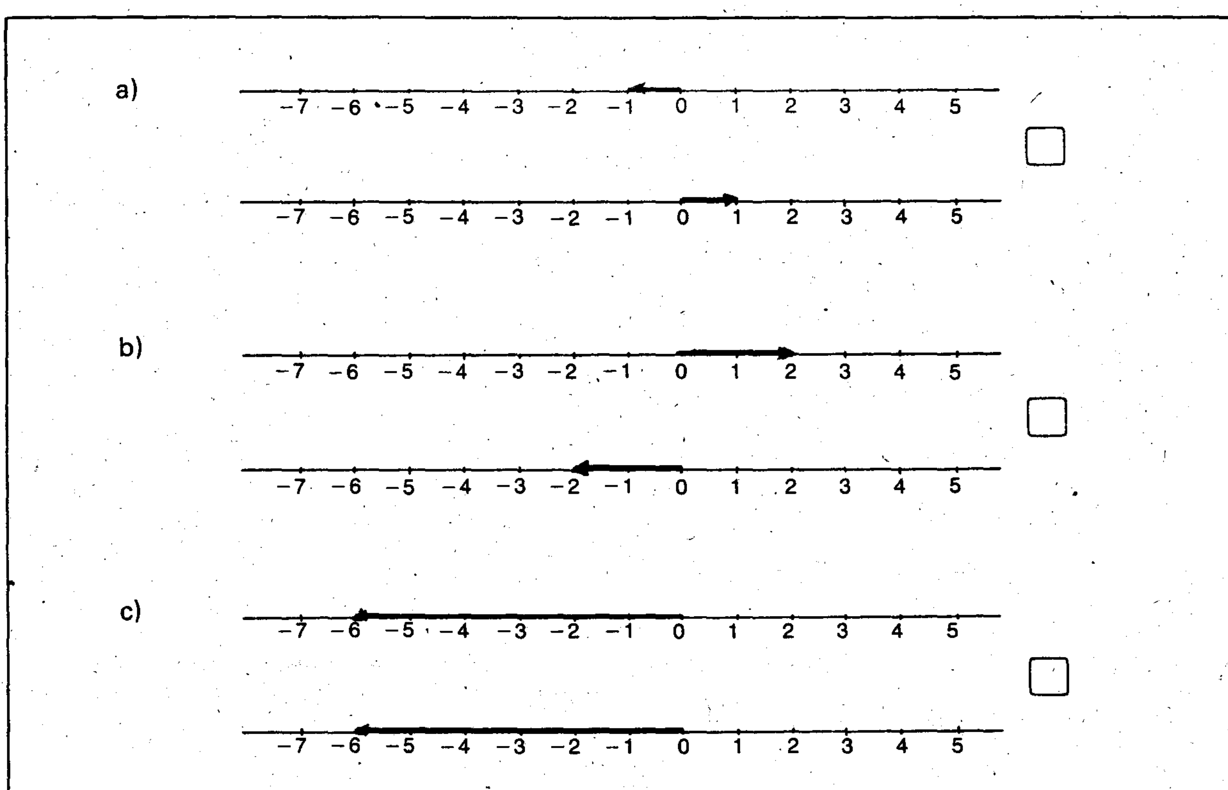
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden proponer algunos ejercicios como los siguientes:

Llenar los espacios en blanco colocando bien sea el operador que se aplicó, o el resultado o el número al cual se le aplicó



Escribir en cada caso el operador que se aplicó al número representado en la primera recta para obtener el número representado en la segunda recta.



OBJETIVO ESPECIFICO

20 Relacionar la multiplicación de enteros con la aplicación de operadores de la forma $+a\times$ a un número entero y practicar un algoritmo de esta operación.

INDICADOR DE EVALUACION

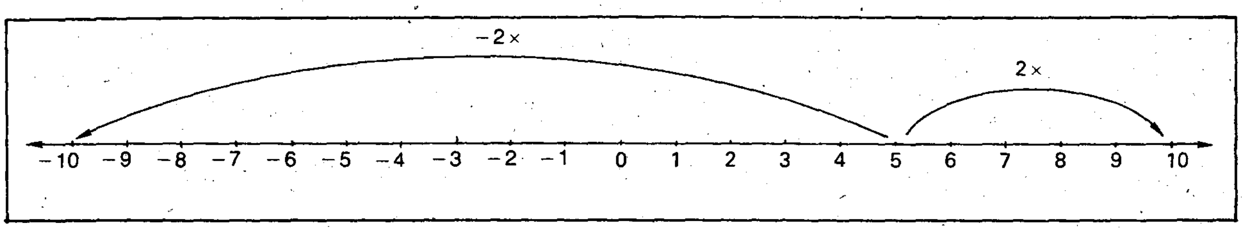
El alumno relacionará la aplicación de operadores de la forma $-a\times$ y $a\times$ con la multiplicación de números enteros y efectuará varias multiplicaciones entre estos números.

CONTENIDOS BASICOS

El efecto de aplicar el operador $+a\times$ es equivalente al efecto de aplicar el operador $a\times$ a cualquier entero.

El efecto de aplicar el operador $-a\times$ es equivalente a aplicar el operador $a\times$ y luego el operador $-(\ )$; es decir, aplicar primero el operador $a\times$ y tomar el resultado en el otro sentido.

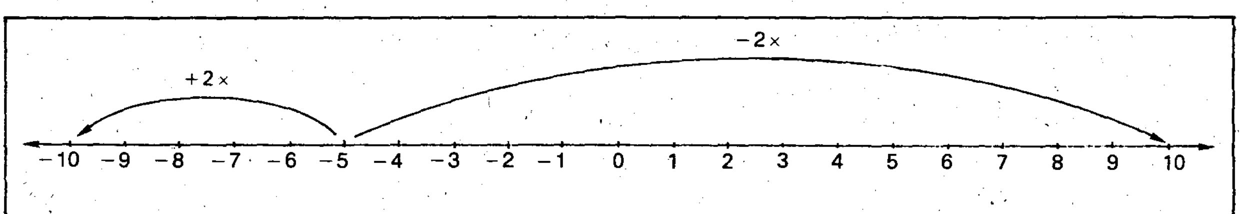
Ejemplos: al aplicar separadamente los operadores $+2\times$ y $-2\times$ al entero $+5$, se tiene:



$+(2\times)(+5) = +10$

$-(2\times)(+5) = -10$

Si le aplicamos estos operadores al entero -5 se tiene:

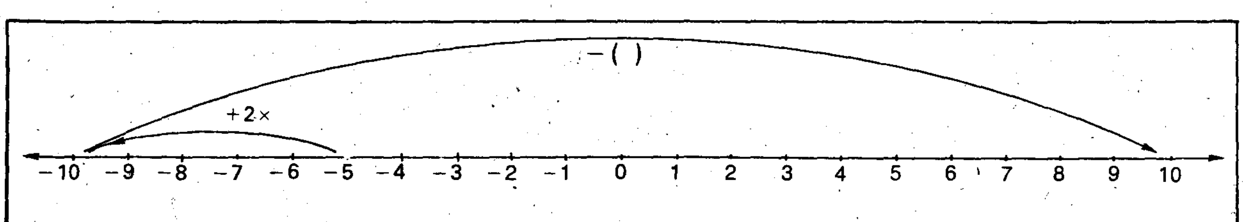


$+(2\times)(-5) = -10$

Para aplicar el operador $-(2\times)$ a -5, se puede primero aplicar el operador $+(2\times)$, de esta manera obtenemos el entero -10: $+(2\times)(-5) = -10$

Luego se aplica el operador $-(\ )$ para obtener así $+10$, opuesto aditivo de -10

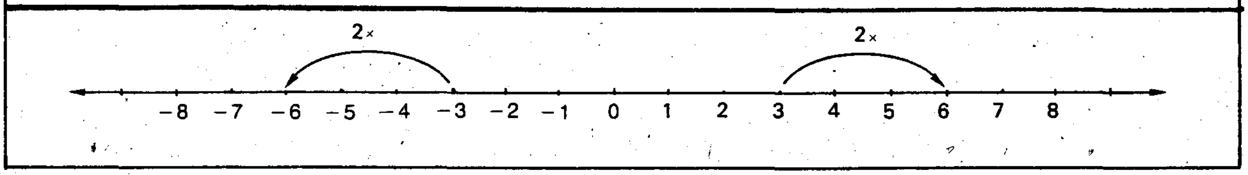
$-(-10) = +10 \qquad -(2\times)(-5) = +10$



De la práctica de aplicar operadores de la forma $+a\times$ y $-a\times$ a cualquier número entero se puede pasar a la multiplicación de enteros.

Si se aplica un operador de la forma $+a\times$ a los enteros $+b$ y $-b$ el resultado estará del mismo lado en que se encuentra el entero.

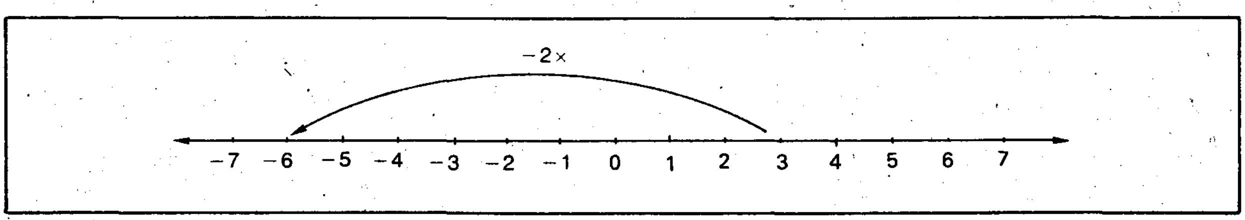
Ejemplo: al aplicar el operador $2\times$ a $+3$ y a -3 se obtiene:



$2\times(+3) = +6$ $\quad$ $2\times(-3) = -6$

Si se aplica un operador de la forma $-a\times$ al entero $+b$, el resultado está del lado contrario en que se encuentra el entero, ya que se obtiene de aplicar el operador $+a\times$ al entero $+b$ y tomar el opuesto aditivo que se encuentra en la semirecta de los enteros negativos.

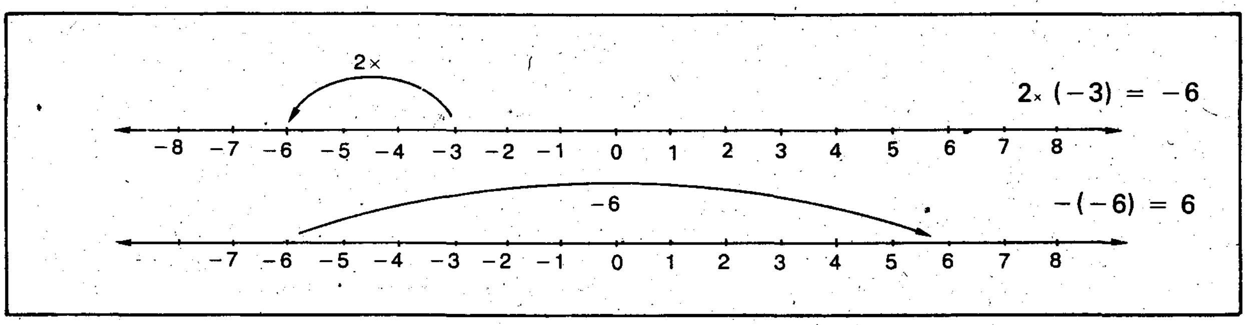
Ejemplos: al aplicar el operador $-2\times$ a $+3$ se obtiene: $(-2)(+3) = -6$



Si se aplica un operador $-a\times$ al entero $-b$, el resultado estará en la semirecta de los enteros positivos porque: si al entero $-b$ que está en la semirecta de los enteros negativos, se le aplica el operador $-(\ )$, se obtiene el inverso aditivo que está en la semirecta de los positivos.

Ejemplo :

Al aplicar a -3 el operador $-2\times$ se obtiene:



Recordando que aplicar el operador $a\times$ al entero b es lo mismo que multiplicar el entero a por el entero b, se puede concluir que:

★ El producto de dos enteros positivos es positivo:

$$+a \times (+b) = +a \times b$$

★ El producto de un entero positivo y un entero negativo es negativo:

$$+a \times (-b) = -a \times b$$

★ El producto de un entero negativo y un entero positivo es negativo:

$$-a \times (+b) = -a \times b$$

★ El producto de dos enteros negativos es positivo:

$$-a \times (-b) = a \times b$$

Así los alumnos podrán encontrar la conocida regla de los signos, utilizada en la multiplicación de enteros:

$(+)\times(+) = +$	pues	$(+1)\times(+1) = +1$
$(+)\times(-) = -$	pues	$(+1)\times(-1) = -1$
$(-)\times(+) = -$	pues	$(-1)\times(+1) = -1$
$(-)\times(-) = +$	pues	$(-1)\times(-1) = +1$

porque es el opuesto aditivo del opuesto aditivo.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es conveniente hacer suficientes ejercicios de aplicación de operadores de la forma $a\times$ y $-a\times$ en la recta numérica a cualquier número entero, para que al final se desprendan de la recta y descubran cómo se efectúa la multiplicación entre dos números enteros cualesquiera. (No debe darse la regla de los signos hasta que el alumno comprenda lo que está haciendo al aplicar estos operadores en la recta numérica. Ojalá descubra por sí mismo cómo se halla el resultado).

Harán varios ejercicios de multiplicación de dos o más enteros como:

$$(+2) \times (-3) \times (-7) \times (-1)$$

Se puede aprovechar para repasar los algoritmos de la adición y de la sustracción de enteros, combinándolos con multiplicación como:

$$2 \times (8-5+3-4) - (3+2) - 4 \times (-5) + 3 \times (-2)$$

$$[(-7+3-4) \times (-8+2-5)] - [(-3) \times (-4)]$$

También, para verificar que la multiplicación de enteros cumple las mismas propiedades de la multiplicación de naturales y para que apliquen en el cálculo numérico estas propiedades pueden hacer otros ejercicios como los siguientes:

- Si $a = -8 \quad b = +4 \quad c = -4$

  Calcular $a\times (b + c)$ y $(a \times b) + (a \times c)$ y comparar los resultados.

- Completar igualdades:

  $(-5) \times (\ ) = -10$

  $(+4) \times (-2) \times (\ ) = (+30) \times (-8)$

- Resolver las siguientes ecuaciones:

  $[(-4) \times (-7)] + \square = -35$

  $-5 + 3 + \square = (-5) \times (+3)$

  $[(-3) \times (+8)] + \square = (-3) \times (+7)$

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
21 Efectuar la división euclidiana de números enteros.	Dados dos números enteros, el alumno efectuará la división euclidiana entre ellos.
22 Analizar las relaciones "... es múltiplo de ..." en el conjunto de los números enteros.	Dado un conjunto finito de enteros, el alumno establecerá en él, las relaciones "... es múltiplo de ..." y "... es divisor de ...".
23 Reconocer las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división en $\mathbb{Z}$ como operaciones binarias.	El alumno explicará por qué la adición, la sustracción, la multiplicación y la división en $\mathbb{Z}$, son operaciones binarias.
24 Resolver y formular problemas que requieran de una o varias de las operaciones en $\mathbb{Z}$.	El alumno formulará mínimo dos problemas que exijan el empleo de dos o más de las operaciones estudiadas, y los resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

La división es una operación inversa de la multiplicación.

Si en una multiplicación de dos enteros se desconoce uno de los factores, para hallarlo se utiliza la división.

Ejemplo: $-5 \times \square = -20$;

$\square = 4$

porque $-5 \times 4 = -20$

El factor desconocido es 4. Este se puede hallar empleando la división.

$$-20 \div -5 = 4$$

Sean a, b enteros positivos.

Si $-a \times \square = -ab$ entonces $\square = (-ab) \div (-a)$

$\square = b$

Si $a \times \square = ab$ entonces $\square = (ab) \div a$

$\square = b$

Si $a \times \square = -ab$ entonces $\square = (-ab) \div a$

$\square = -b$

Si $-a \times \square = ab$ entonces $\square = (ab) + (-a)$

$\square = -b$

De esto se puede concluir que:

- Si los enteros que se dividen son ambos positivos o ambos negativos el cociente es positivo.

- Si los enteros que se dividen son tales que uno es positivo y otro es negativo el cociente es negativo.

Ejemplo: $(-6) \div (-3) = 2$

$(-6) \div (+3) = -2$

$(+6) \div (+3) = 2$

$(+6) \div (-3) = -2$

- Dados dos números enteros a y b, si existe un entero c, tal que b se pueda expresar como el producto de a y c, $b = a \times c$, se dice que "b es múltiplo de a", que "*a es divisor de b*" o que "a es factor de b". También puede decirse que "b es múltiplo de c" y que "c es divisor de b", o que "c es factor de b".

El conjunto de los múltiplos del cero es un conjunto unitario: $M(0) = \{0\}$.

El conjunto de los múltiplos de un número entero distinto de cero se obtiene multiplicando dicho entero por cada uno de los números enteros, incluído el cero. Dicho conjunto es infinito. Puede excluirse el cero, y así obtener los múltiplos no nulos de ese entero.

El conjunto de los divisores de un número entero distinto de cero está formado por todos sus factores. Dicho conjunto es finito. Si se trata del cero, se consideran todos los enteros como divisores o factores del cero: $D(o) = \mathbb{Z}$, pues para cada entero z se cumple que $0 \times z = 0$.

Ejemplos: El conjunto $M(-6)$ de los múltiplos no nulos de -6 es:

$M(-6) = \{ ..., -18, -12, -6, 6, 12, 18, ... \}$

El conjunto $D(-6)$ de los divisores de -6 es:

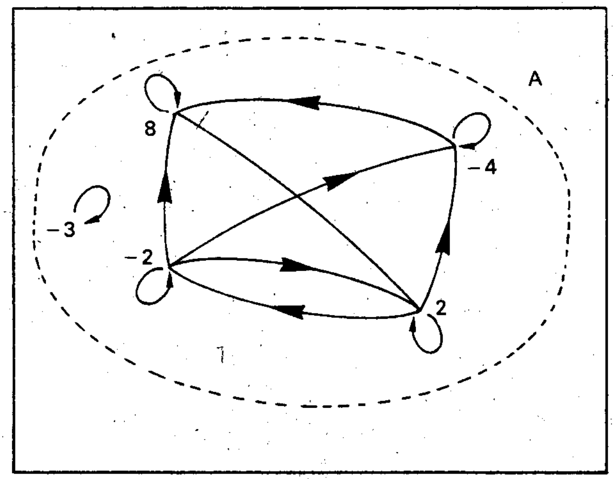
$D(-6) = \{ -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6 \}$

La relación "... es divisor de ..." es la relación inversa de la relación "... es múltiplo de ...".

Supongamos que se tiene la proposición verdadera "-12 es múltiplo de -3". Al intercambiar los argumentos, es necesario cambiar la relación por su inversa, para que la proposición que resulte sea verdadera, así: "-3 es divisor de -12".

Consideremos las relaciones "... es divisor de ..." y "... es múltiplo de ..." en el conjunto $A = \{ 8, -4, 2, -2, -3 \}$.

El diagrama sagital para la relación "... es múltiplo de ...", simbolizada por M, es:



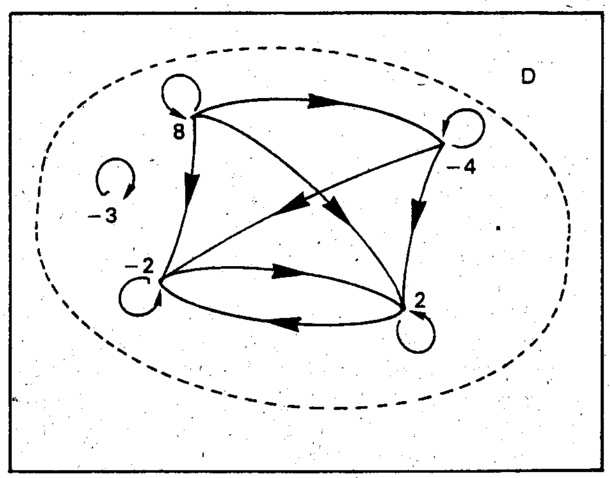
Recordemos que cada flecha señala a la imagen, es decir al múltiplo.

El conjunto de las parejas de la relación M: es $\{ (8,8), (-4,4), (2,2), (-2,-2), (-4,8), (2,-4), (2,8), (-3,-3), (2,-2), (-2,2), (-2,-4), (-2,8) \}$

Recordemos que en el esquema de lectura se lee primero la imagen, o sea la segunda componente de la pareja ordenada.

Ejemplo: $(-4,8)$: 8 es múltiplo de (-4), $8M(-4)$

El diagrama sagital para la relación "... es divisor de ...", simbolizada por D, es:



El conjunto de las parejas de la relación D es: { (8,8), (−4, −4), (−2, −2), (2,2) (−3, −3), (8, −4), (−4,2), (8,2), (−2,2), (2, −2), (−4, −2), (8, −2) }

Cuando una operación se efectúa entre dos objetos se dice que es binaria.

La adición, la sustracción, la multiplicación y la división de números enteros son operaciones binarias.

– La operación adición transforma dos números a y b en otro número: a + b, que es entero

$$(a,b) \longrightarrow a + b$$

– La operación sustracción transforma dos números a y b en otro número: a − b, que es entero

$$(a,b) \longrightarrow a - b$$

– La operación multiplicación transforma dos números enteros a y b en otro número: $a \times b$ que es entero.

$$(a,b) \longrightarrow a \times b$$

– La operación división transforma a una pareja de números a y b, $b \neq 0$, llamados dividendo y divisor en:

a) Otro número entero, llamado cociente, cuando el dividendo es múltiplo del divisor. Ejemplo: $-36 \div 4 = -9$

b) Una pareja de números enteros, llamados cociente y residuo, cuando el dividendo no es múltiplo del divisor. Esta es la llamada división euclidiana o división con residuo. El caso a) se puede considerar como un caso particular de división euclidiana donde el residuo es cero.

$$\begin{array}{r|l} -41 & 8 \\ \hline -1 & -5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -36 & 4 \\ \hline 0 & -9 \end{array}$$

$$(-41,8) \longrightarrow (-5,-1) \ ; \ (-36,4) \longrightarrow (-9,0)$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se puede comenzar repasando los algoritmos de las operaciones ya vistas por los alumnos; se pueden hacer ejercicios como los siguientes y en cada operación verificar qué propiedades cumple:

a) $(-12) \times (-8 \div 4)$

b) $(-8+5-3+4) \times (-9 \div -3)$

c) Hallar el valor de n: $-32 \times n = -96$

$$-56 \div 4 = n$$

$$-72 \div n = 8$$

$$n \div -8 = +15$$

d) $\{ (-5+3-20+5-42) \times (-5+8-2-3) \} \div (-8+6)$

También podrán hacer ejercicios de cálculo mental, en los que los alumnos efectuarán mentalmente y con rapidez las operaciones, sin necesidad de utilizar papel y lápiz.

Es conveniente que a medida que los alumnos vayan repasando los algoritmos, de vez en cuando interrumpan el procedimiento para hacer resaltar las propiedades que se han tenido en cuenta y las relaciones que pueden establecerse entre dos números enteros.

Algunas de estas relaciones ya conocidas por los alumnos son: "... es menor que ...", "... es mayor que ...", "... es múltiplo de ..." y "... es divisor de ...".

Las relaciones "... es múltiplo de ..." y "... es divisor de ..." se pueden estudiar simultáneamente, tomando un conjunto pequeño de números enteros y analizando para cada relación: el esquema de lectura, el diagrama sagital, las parejas que cumplen la relación; así verifican que una relación es la inversa de la otra.

Finalmente, resolverán algunos problemas que requieran de una o de varias operaciones con enteros. Es conveniente desarrollar solo aquellos problemas que tengan algún sentido en la vida diaria del alumno, como los relacionados con la ubicación en una ciudad en la que se ha demarcado el Norte y el Sur, con la situación financiera de una persona o de una empresa, con la temperatura (en algunos sitios), etc. Se pueden proponer algunos, como los siguientes:

– Un señor camina 5 cuadras hacia el Norte y 7 cuadras hacia el Sur. ¿En qué cuadra va a parar con relación al punto de partida?

– Un señor salió de la calle sexta Sur y caminó 4 cuadras hacia el Sur. Decide recorrer 5 veces la distancia que ya había caminado. ¿A qué cuadra llegará?

– Un vendedor parte de la calle 40 al Norte de la Ciudad y camina 8 cuadras hacia el Norte, luego 6 cuadras hacia el Sur, luego 10 cuadras hacia el Sur, luego 5 cuadras hacia el Norte y luego 3 cuadras hacia el Sur. ¿En qué parte terminó su recorrido?

(Para problemas como los anteriores hay que suponer que los recorridos siempre se hacen al Sur o al Norte de la ciudad, para evitar el problema de pasar de la calle primera Norte a la primera Sur, o suponer que existe una Calle Cero, como en la ciudad de Cúcuta).

– Pedro tiene una cuenta de Ahorros en la Caja Agraria. El movimiento de esta cuenta durante el mes de Febrero fue el siguiente:

FECHA	RETIROS	DEPOSITOS	SALDO
1o. de Febrero 1983	15 000		32 516
4 de Febrero 1983	1 570		
8 de Febrero 1983		250	
11 de Febrero 1983		1 500	
15 de Febrero 1983	350		
16 de Febrero 1983		1 000	
18 de Febrero 1983	3 500		
22 de Febrero 1983		5 000	
25 de Febrero 1983	2 500		
26 de Febrero 1983		350	

¿Cuál es el saldo de la cuenta de Pedro, en cada uno de los días que hizo alguna transacción?

Se debe procurar que el alumno resuelva los problemas inicialmente como lo haría en su vida práctica, posiblemente ayudándose de representaciones o de manipulaciones, etc., para que luego él mismo busque la relación con las operaciones con enteros y vea que dichos problemas se pueden resolver utilizando estas operaciones.

Al tiempo que los alumnos vayan resolviendo algunos problemas pueden ir formulando otros con base en sus actividades. Es conveniente orientar al alumno para que al formular los problemas vea cuáles son los datos que necesita y dónde están los aciertos y desaciertos de su razonamiento.

	OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
25	Recopilar las operaciones binarias conocidas entre conjuntos, números naturales y números enteros.	El alumno dará una lista de operaciones que puedan realizarse entre conjuntos, números naturales y números enteros.
26	Reconocer cuándo una operación es clausurativa.	Dados dos conjuntos y una operación, el alumno explicará por qué la operación es clausurativa en uno de dichos conjuntos y en el otro no.
27	Elaborar un cuadro sinóptico de las propiedades estudiadas para cada una de las operaciones conocidas entre conjuntos, números naturales y números enteros.	El alumno elaborará e interpretará un cuadro en donde se pueda ver qué propiedades cumplen las operaciones estudiadas.
28	Reconocer cuándo una operación es invertiva.	Dado un conjunto y una operación, el alumno dirá si esta operación es invertiva o no.
29	Expresar las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa e invertiva de una manera que represente todos los casos estudiados.	El alumno escribirá, para cada una de las propiedades mencionadas una expresión general que represente los distintos casos estudiados.

CONTENIDOS BASICOS

Los contenidos básicos requeridos para el logro de los objetivos aquí propuestos son suficientemente conocidos por el profesor y, además, dentro de esta propuesta, se vienen estudiando desde la básica primaria.

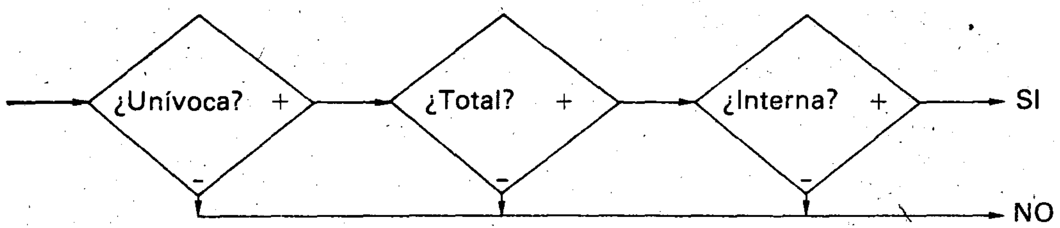
En cuanto a decidir si una operación es clausurativa en un conjunto referencial dado o no, es conveniente distinguir tres aspectos:

a. ¿Es unívoca?, es decir: ¿En caso de existir un resultado, es éste único? (Algunos libros dicen: "¿Está bien definida?").

b. ¿Está totalmente definida?, es decir: ¿De alguna manera le queda asignado un resultado único a cualquier pareja de elementos?

c. ¿Es interna?, es decir: ¿El resultado de la operación (cuando existe) está dentro del conjunto al cual pertenecen las componentes de la pareja?

Figura 1



En la mayoría de los libros no se cae en la cuenta de que hay tres cosas qué verificar para decidir si la operación es clausurativa en un conjunto referencial dado o no. (En algunos libros se dice que el conjunto referencial es cerrado bajo la operación, en vez de decir que la operación es clausurativa en el conjunto dado. Estas dos expresiones son pues equivalentes).

Ejemplos:

La división en $\mathbb{Z}^+$ (los enteros estrictamente positivos) falla por no estar totalmente definida, pues no sabemos cómo dividir a 2 entre 3: solo la hemos definido cuando el dividendo es múltiplo del divisor. Si tratamos de corregir este defecto, ampliando las posibilidades de dividir cualquier entero estrictamente positivo por otro y permitiendo resultados fraccionarios, esta operación falla por no ser interna: el resultado de dividir 2 entre 3 sería 2/3, que no pertenece a $\mathbb{Z}^+$.

Estudiemos ahora la división en $\mathbb{Q}$. Esta operación falla por no ser unívoca: en el caso de tratar de dividir 0 entre 0, cualquier resultado estaría bien, pues por ejemplo: 2×0 da 0, 3×0 da 0, etc. También falla por no estar totalmente definida: en el caso de tratar de dividir 5 entre 0, ningún resultado sirve, pues $5 \times 0 = 0$, $500 \times 0 = 0{,}5\,000\,000 \times 0 = 0$, etc.

En una operación invertiva hay que estudiar primero si es modulativa o no, es decir, si tiene elemento neutro o no.

En caso de tenerlo, se puede considerar que cualquier otro elemento del conjunto se aparta del elemento neutro, y se pregunta si hay alguna manera de devolverse al elemento neutro utilizando la misma operación. Si esto siempre puede hacerse, la operación es invertiva.

Ejemplos:

La adición en $\mathbb{Z}$ es modulativa, y el elemento neutro es el cero. Cualquier elemento distinto de cero en $\mathbb{Z}$ que le sumemos al cero se aleja de él: $0 + (+7) = +7$. Pero todavía sumando podemos devolvernos al cero: $(+7) + (-7) = 0$. Si nos hubieramos alejado sumando (-7), podríamos volver al cero sumando $(+7)$, etc. Cualquier número entero tiene un inverso que al sumarlo con el primero lo devuelve al neutro (que es el cero).

En cambio la adición en **N**, aunque es modulativa (y el módulo es el mismo cero), al alejarnos hasta el 7 no hay manera de devolvernós sumando. (Devolverse restando no vale, pues estamos estudiando la adición!).

Cuando se estudia la multiplicación en **N**, se trata de que los alumnos capten que no hay manera de devolverse al uno multiplicando, mientras que en $\mathbb{Q}$ sí.

Luego tratarán de formular en sus propias palabras qué es lo que pasa en ambos caso, y decirlo de manera que se aplique tanto a la adición y al cero, como a la multiplicación y al uno. En caso de que los alumnos no encuentren una formulación perfectamente general, el profesor se limitará a verificar que los alumnos capten la similitud entre los casos de la adición y la multiplicación, aunque formulen la propiedad invertiva separadamente para esos dos casos. En estas formulaciones no debe utilizarse lógica simbólica sino palabras del lenguaje usual.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es conveniente que el profesor revise las unidades cuarta y quinta de sexto grado y, si es posible, la unidad primera del grado quinto de básica primaria. Esto le permitirá ver cuál ha sido la secuencia y especificidad seguidas en el estudio de las operaciones binarias y de sus propiedades.

La mejor estrategia es encargar a los alumnos de recopilar la información requerida para que, a partir de ella, se complete la lista de operaciones, desde la unión de conjuntos hasta las operaciones entre números enteros, recientemente estudiadas.

Durante el recuento sobre las operaciones, el profesor hará énfasis sobre el carácter activo de las mismas. También recordará las condiciones que es necesario fijarles a algunas de ellas con el fin de que el resultado viva en el conjunto referencial del cual se toman los dos números que serán transformados mediante la operación.

Para la sustracción en **N**, la condición es que el minuedo sea mayor que el sustraendo (o "minuidor"). Cuando el referencial es $\mathbb{Z}$, la sustracción puede efectuarse entre cualquier pareja de números y el resultado siempre es un elemento de $\mathbb{Z}$. Es el momento oportuno para que los alumnos caigan en la cuenta de aquellos aspectos especiales de las operaciones que permiten denominarlas clausurativas o no.

Esta es la primera vez que se habla explícitamente de operación clausurativa.

En el caso de la sustracción en **N** se les hará observar lo siguiente:

1. Cuando es posible realizar la operación, el resultado es único. Por este aspecto no falla la clausurativa.
2. Existen parejas de elementos a las cuales no puede asignárseles un resultado (3,5), (0,1),... Ya por este aspecto falla la clausurativa. (Los alumnos pueden sugerir que a todas estas parejas se les asigne el resultado cero. Pero esa ya sería otra operación distinta a la sustracción usual. También se usa y se llama sustracción truncada).

Ahora consideremos la misma operación, pero en $\mathbb{Z}$:

1. Para cada pareja de elementos, si hay resultado, ese resultado es único.
2. A cualquier pareja de elementos puede asignársele un resultado.
3. Cada resultado vive en $\mathbb{Z}$.

Al comparar las observaciones obtenidas en los dos casos, el profesor podrá decirle a los alumnos que la sustracción en $\mathbb{Z}$ es clausurativa por los tres aspectos considerados, mientras que la misma operación no es clausurativa en **N**.

Los alumnos verificarán si la adición y la multiplicación en $\mathbb{Z}$ son operaciones clausurativas. Harán el mismo análisis para la división en $\mathbb{Z}^+$.

El profesor podrá dar ejemplos de otras operaciones diferentes de las que conocen los alumnos.

Ejemplos:

1. La operación (máx) saca el máximo de dos números dados:

   $3 \text{ (máx) } -3 = 3$. ¿Es clausurativa en $\mathbb{Z}$?

2. La operación $\boxed{p}$ saca el promedio de dos números dados:

   $3 \boxed{p} 5 = 4$. ¿Es clausurativa en $\mathbb{Z}^+$? ¿En $\mathbb{Q}^+$?

3. La operación $\diamond$exp eleva la base que tiene a la izquierda al exponente de la derecha:

   $3 \text{ exp } 4 = 3^4 = 81$.

   ¿Es clausurativa en $\mathbb{Z}^+$? Supongamos que:

   $0 \text{ exp } 0 = 1,\quad 1 \text{ exp } 0 = 1,$

   $2 \text{ exp } 0 = 1$, etc.,

y que si $n \in \mathbb{Z}^+$:

$$m \; \langle \text{exp} \rangle \; -n = \frac{1}{m \; \langle \text{exp} \rangle \; n}$$

Es $\langle \text{exp} \rangle$ *clausurativa en* $\mathbb{Z}$?

4. Tomemos como conjunto referencial el de las letras de la palabra *"celia"* y simbolicemos por ▲ la operación que a cada pareja de letras consecutivas de izquierda a derecha en la palabra *"celia"* (en cualquier orden en que aparezcan en la pareja), la transforma en la letra que sigue en la palabra (y a las dos últimas en la primera letra, la *c*).

Así:

(l,i)	▲la transforma en	*l* ▲ *i* = *a*
(l,i)	▲	*i* ▲ *l* = *a*
(c,e)	▲	*c* ▲ *l* = *l*
(e,c)	▲	*e* ▲ *c* = *l*
(e,l)	▲	*e* ▲ *l* = *i*
(l,e)	▲	*l* ▲ *e* = *l*
(i,a)	▲	*i* ▲ *a* = *c*
(a,i)	▲	*a* ▲ *i* = *c*

A las parejas *(i,c)*, *(e,i)*, *(c,a)*,... no es posible transformarlas mediante la operación ▲.

Si se elabora la tabla de la operación, se obtiene:

▲	*c*	*e*	*l*	*i*	*a*
c		*l*			
e	*l*		*i*		
l		*i*		*a*	
i			*a*		*c*
a				*c*	

La operación ▲ es unívoca e interna, pero no es total; luego no es clausurativa.

5. Tomemos como conjunto referencial el de las doce horas del reloj:

   R = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12 } ,

   y simbolicemos por ⊕ la operación que a cada pareja de horas le asigna la que señalaría el horario si después de estar en la primera hora hubieran pasado tantas horas como indique la segunda: a la pareja (6,8) le asigna las dos, porque si el horario estuviera en las 6 y pasaran 8 horas, quedará en las dos. 6 ⊕ 8 = 2.

   Se elabora la tabla de la operación y se decide si la operación ⊕ es clausurativa en el conjunto R o no.

Se espera que al terminar estos ejercicios haya quedado claro el concepto de operación clausurativa. Esta puede ser la primera propiedad que aparezca en el cuadro. De aquí en adelante pueden ser los alumnos quienes recopilen las propiedades de las operaciones que ya ellos conocen.

La propiedad invertiva de algunas operaciones también es nueva para los estudiantes. En los contenidos básicos ya están incluidas algunas de las sugerencias metodológicas que el profesor podrá tener en cuenta para iniciar el estudio de la **propiedad invertiva de una operación**.

Así completarán el cuadro que vienen elaborando. Finalmente podrán trabajar en pequeños grupos para que formulen, en el lenguaje usual, cuándo una operación es clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa o invertiva.

Para que la revisión sobre el tema sea completa, también se estudiará la distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y a la sutracción.

Unidad II

LOS NUMEROS RACIONALES

Introducción

El tema central de esta unidad es el de los números racionales, incluyendo el estudio de los números decimales. Los contenidos se desarrollan siguiendo el enfoque propuesto desde la Educación Básica Primaria.

En los grados 3o., 4o. y 5o. los operadores fraccionarios se aplicaron preferentemente en problemas para cuya solución es posible manipular algún material concreto. En esta unidad se propone que los efectos de aplicar operadores fraccionarios sean estudiados, analizados y visualizados con ayuda de la recta numérica. En esa forma se parte de una percepción concreta del estudiante, y se le sugieren actividades que lo motivan para avanzar en la adquisición de habilidades y destrezas mentales y cognoscitivas.

Como el estudio de los fraccionarios con el enfoque de operadores requiere el empleo de expresiones cuyo uso todavía no está muy generalizado, es recomendable crear un ambiente favorable al debate y al análisis de esas expresiones por parte de los alumnos antes que exigir la repetición mecánica de las expresiones y de las definiciones.

Los primeros objetivos específicos de la unidad se refieren al estudio de los números fraccionarios positivos tratando de hacer un repaso de lo visto en 6o. grado. Pero como en la unidad anterior se aprendieron los números enteros, es conveniente que el profesor considere la posibilidad de integrar este repaso con el estudio de los fraccionarios negativos y lograr así una buena integración de las actividades propuestas.

Así el primer objetivo específico de la unidad podría ser: "Reconocer en la recta numérica el efecto de operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ y $-\frac{a}{b}\times$ al uno", que integra los objetivos 30 y 52 de esta unidad. Lo mismo podría hacerse en los objetivos 33 y 54 que tratan de las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que..." entre números fraccionarios.

De las sugerencias que den los profesores que validan este material se espera poder elaborar una próxima versión más integrada y con algunos comentarios relacionados con otros enfoques para el estudio de los números fraccionarios.

Objetivos generales

Representar en la recta numérica algunos racionales.

Reconocer los inversos multiplicativos de los números naturales y de los fraccionarios.

Reconocer el conjunto de los números racionales.

Efectuar las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de números racionales.

Reconocer relaciones de orden entre números racionales.

Reconocer las propiedades de las operaciones binarias usuales entre números racionales.

Utilizar los números racionales para resolver algunos problemas.

Repasar los algoritmos de la adición, sustracción, multiplicación y división de decimales.

Utilizar los números decimales para resolver algunos problemas.

Objetivos específicos, indicadores de evaluación, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
30 Reconocer en la recta numérica el efecto que producen algunos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno.	El alumno representará en la recta numérica el efecto de algunos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ cuando son aplicados al uno.

CONTENIDOS BASICOS

El efecto de operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ cuando se aplican a una magnitud es equivalente al efecto que se produce al aplicar sucesivamente dos operadores: uno de la forma $a\times$ y otro de la forma $\frac{1}{b}\times$ en cualquier orden.

El resultado de la aplicación de un operador de la forma $\frac{a}{b}\times$ es aumentar o disminuir o dejar como está la magnitud a la cual se aplica.

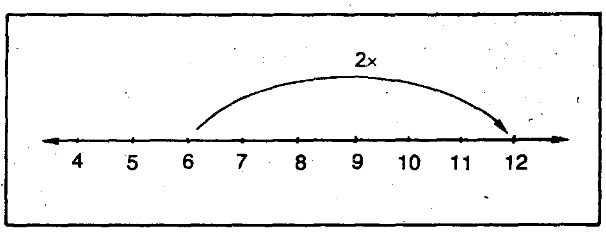
En la recta numérica se puede analizar el resultado que se obtiene y el efecto que producen dichos operadores cuando son aplicados al uno. El resultado puede estar a la derecha o a la izquierda del uno, o caer en el mismo uno; y el efecto es aumentar, disminuir o dejar como está la longitud del segmento que hay entre cero y uno.

El resultado de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ a un número natural en unos casos da un número natural y en otros no da un número natural.

Ejemplos: aplicar el operador $\frac{2}{3}\times$ a 6.

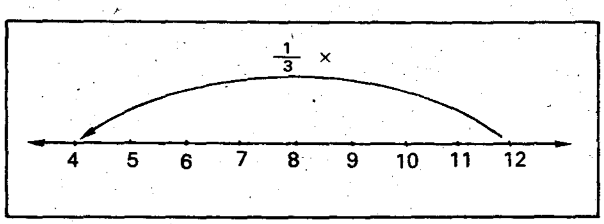
El resultado de aplicar este operador es equivalente a aplicar sucesivamente los operadores $2\times$ y $\frac{1}{3}\times$ en cualquier orden, así:

Primero aplicamos el operador $2\times$.



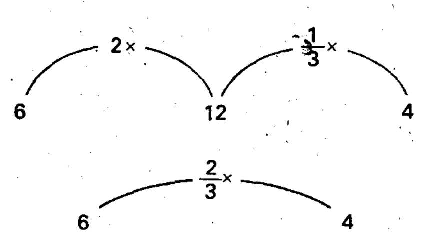
Enseguida aplicamos el operador $\frac{1}{3}\times$ dividiendo en tres partes iguales esta longitud y marcando una de estas divisiones.

$$\frac{1}{3}\times(12) = \frac{12}{3} = 4$$



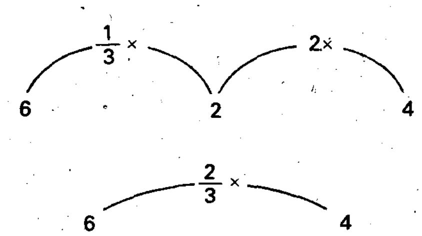
El resultado es 4, que es un número natural.

$$\frac{1}{3}\times[2\times(6)] = \frac{1}{3}\times(12) = \frac{12}{3} = 4$$



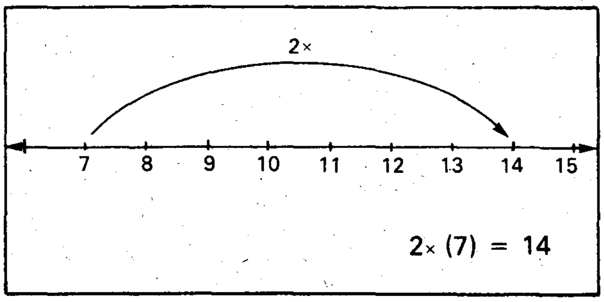
En el otro orden se tendría:

$$2\times[\frac{1}{3}\times(6)] = 2\times(2) = 4$$

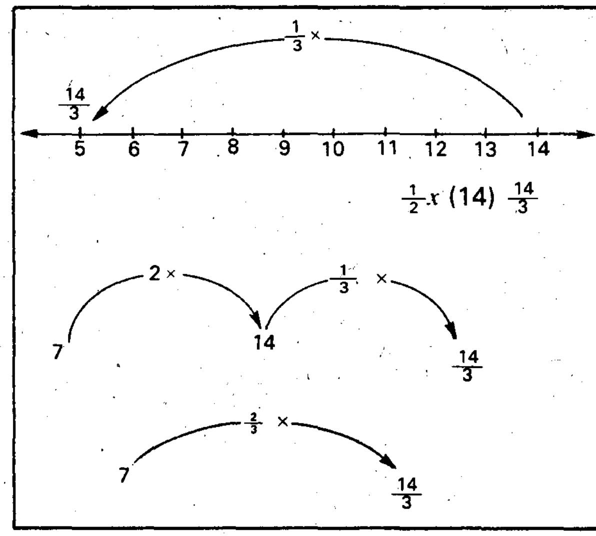


Si a 7 le aplicamos el mismo operador el resultado ya no es un número natural.

Veámos: Primero apliquemos el operador 2×



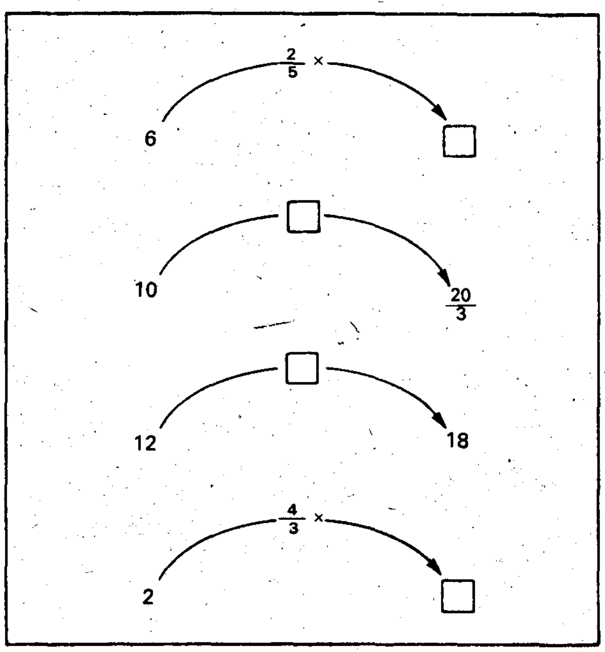
Luego el operador $\frac{1}{3}\times$ En este caso hay que hacer una marca adicional entre 4 y 5, porque el resultado no es un número natural.



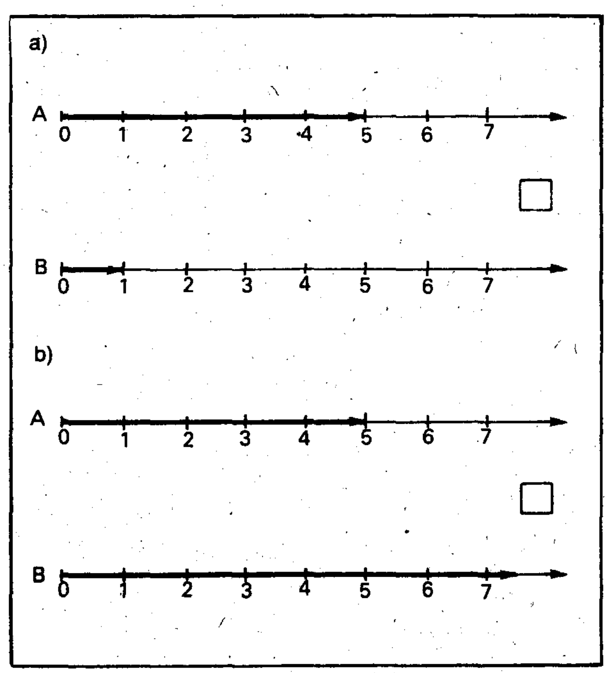
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden proponer algunos ejercicios como los siguientes:

– Llenar los espacios en blanco.



– Escribir el operador que se aplicó al número representado en la semirrecta A para obtener el número representado en la semirrecta B.



OBJETIVO ESPECIFICO

31 Identificar los números fraccionarios positivos como los resultados de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno y reconocer que el mismo número fraccionario puede estar representado por distintas fracciones $\frac{a}{b}$.

INDICADOR DE EVALUACION:

– El alumno denominará fraccionarios positivos a los resultados de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno.

CONTENIDOS BASICOS

Al conjunto que se forma con los resultados de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}$x al uno, se le llama "números fraccionarios positivos"; $b \neq 0$.

Si aplicamos un operador de la forma $\frac{a}{b}$x al uno, se obtiene el número fraccionario positivo, representado por la fracción $\frac{a}{b}$, en donde $\underline{a}$ es el numerador y $\underline{b}$ es el denominador. El numerador indica las veces que se tuvo que aumentar el uno y el denominador las veces que tuvo que disminuirse.

También se puede utilizar la notación $\frac{a}{b}\times($ $)$, $\frac{a}{b}($ $)$.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Aplicar diferentes operadores de la forma $\frac{a}{b}$x al uno y obtener el conjunto de números fraccionarios, como los resultados de dichos operadores.

Ejemplos:

$\frac{7}{3}\text{x}\ (1) = \frac{7}{3}$

$\frac{1}{2}\text{x}\ (1) = \frac{1}{2}$ $\qquad \frac{6}{3}\text{x}\ (1) = \frac{6}{3}$

$\frac{3}{5}\text{x}\ (1) = \frac{3}{5}$ $\qquad \frac{6}{10}\text{x}\ (1) = \frac{6}{10}$

Observar, que varios operadores producen el mismo resultado, o sea, el mismo número fraccionario. Este fraccionario puede ser representado de muchas maneras.

Ejemplo: El fraccionario $\frac{2}{5}$ se obtiene de aplicar entre otros los siguientes operadores:

$$\frac{2}{5}\text{x},\ \frac{4}{10}\text{x},\ \frac{6}{15}\text{x},\ \frac{8}{20}\text{x}$$

Las fracciones $\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{6}{15}, \frac{8}{20}$

son representaciones para el mismo número fraccionario. De estas fracciones se dice que "son iguales" porque representan el mismo número fraccionario, si las miramos como dibujitos, no serían iguales pues no tienen los mismos numeradores y denominadores.

Para reconocer las fracciones que representan el mismo número fraccionario se utiliza la simplificación y la complificación de fracciones.

Podrán hacer algunos ejercicios como los siguientes:

– Hallar 5 fracciones iguales a la fracción: $\frac{3}{5}$.

– Hallar una fracción que no se pueda simplificar, y sea igual a las cinco fracciones siguientes:

$$\frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \frac{7}{14}$$

– Simplificar la fracción: $\frac{136}{240}$

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
32 Reconocer que algunos números fraccionarios son también enteros.	El alumno dará ejemplos de fraccionarios que son también enteros.

CONTENIDOS BASICOS

Algunos números fraccionarios son también números enteros.

Ejemplo: $\frac{10}{2}$ es un fraccionario; pero $\frac{10}{2} = 5$, y 5 es un número entero.

En una fracción que represente un número entero, el numerador es múltiplo del denominador (múltiplo en sentido amplio o en sentido estricto).

NOTA: Los alumnos pueden tener dificultades en aceptar que un número fraccionario (o "quebrado") puede ser también entero, pues en el lenguaje ordinario "entero" y "quebrado" son opuestos. En el lenguaje usual no tenemos un nombre para los fraccionarios que no son enteros; por eso, es necesario aclarar que los fraccionarios no son el complemento de los enteros, sino que los enteros son un subconjunto de los fraccionarios, puesto que todo entero es fraccionario y puede representarse por medio de fracciones:

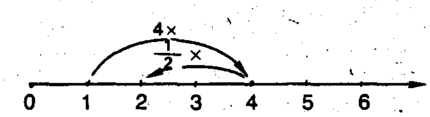
$$4 = \frac{8}{2} = \frac{20}{5} \text{etc}$$

A estos fraccionarios que son también enteros, podemos llamarlos "fraccionarios enteros".

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Al aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno, en la semirrecta se podrá observar que algunos caen en donde ya se han representado números enteros, es decir, dan como resultado un número entero, de esta forma pueden concluir que algunos fraccionarios son también enteros.

Ejemplo: al aplicar el operador $\frac{4}{2}\times$ al uno se obtiene como resultado el 2, que es un número entero.



El mismo resultado se obtiene si se aplica cada uno de los siguientes operadores:

$\frac{6}{3}\times$, $\frac{8}{4}\times$, $\frac{10}{5}\times$, $\frac{12}{6}\times$, etc.

Observar que en las fracciones que representan el mismo número entero, el numerador es múltiplo del denominador.

Ejemplo: $\frac{20}{5} = 4$

Como ejercicio se les puede pedir que obtengan diferentes fracciones para representar un número entero dado.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
33 Analizar en la semirrecta numérica las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que..." entre números fraccionarios.	Dados dos números fraccionarios el alumno dirá cuál de ellos es el mayor. Dados varios números fraccionarios el alumno los ordenará descendentemente.

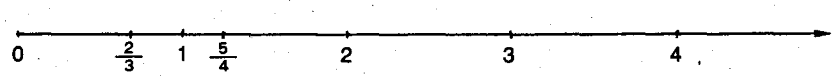
CONTENIDOS BASICOS

Al representar varios números fraccionarios en la semirrecta numérica se pueden analizar entre ellos las relaciones "...es mayor que..." y "... es menor que...", así:

- Todo número representado a la izquierda de otro, es menor que ese otro.

Todo número representado a la derecha de otro, es mayor que ese otro.

Ejemplo:

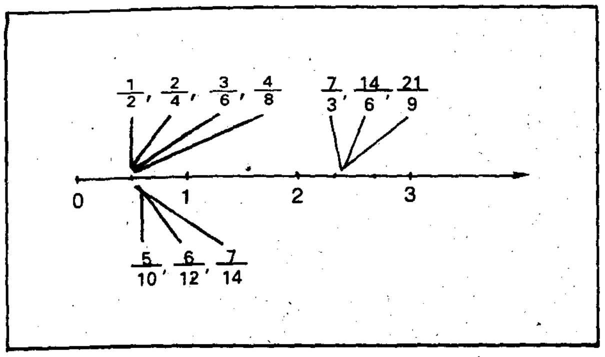


$\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$ $\qquad$ $\frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Hacer la representación gráfica de varios números fraccionarios, aplicando operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno (con $a \neq 0$ y $b \neq 0$). Se puede hacer la aplicación de los operadores de las dos maneras, para que el alumno luego elija la que más se le facilite (aplicando primero el operador $a\times$ y luego el operador $\frac{1}{b}\times$, o aplicando el operador $\frac{1}{b}\times$ y luego $a\times$).

Observar que unos resultados caerán antes del uno, otros en el uno y otros después del uno; es decir, unos operadores aumentan, otros dejan como está y otros disminuyen respectivamente. Observar también que en un mismo punto de la semirrecta pueden estar anotadas varias fracciones.



Se podrán proponer algunos ejercicios como los siguientes:

– Colocar adecuadamente el símbolo $>$, $<$, o, $=$ entre los siguientes números fraccionarios:

$\frac{3}{5}\ \frac{2}{3}$; $\frac{4}{9}\ \frac{1}{4}$; $\frac{2}{2}\ \frac{3}{3}$;

$\frac{5}{4}\ \frac{1}{3}$; $\frac{4}{7}\ \frac{2}{3}$; $2\ \frac{1}{2}$

– Ordenar descendentemente los siguientes fraccionarios:

$\frac{2}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{2}, \frac{1}{9}, \frac{3}{8}, \frac{7}{2}, \frac{6}{3}$

OBJETIVO ESPECIFICO

34 Analizar sobre la recta numérica el efecto de aplicar sucesivamente dos operaciones de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno.

INDICADOR DE EVALUACION

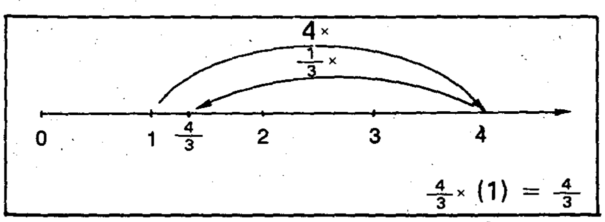
Dados dos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$, el alumno analizará en la recta numérica el resultado de aplicarlos sucesivamente al uno.

CONTENIDOS BASICOS

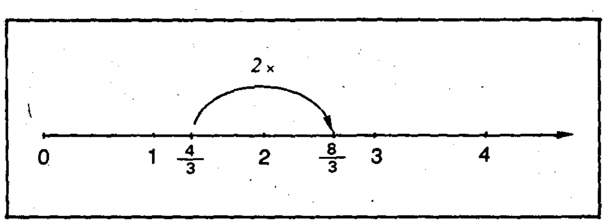
El efecto de aplicar sucesivamente al uno dos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ es aumentar, disminuir o dejar como está. Estos operadores se pueden aplicar en cualquier orden y el resultado siempre es el mismo.

Ejemplo: Aplicar sucesivamente los operadores $\frac{4}{3}\times$ y $\frac{2}{3}\times$.

Apliquemos primero el operador $\frac{4}{3}\times$ y después el operador $\frac{2}{3}\times$.



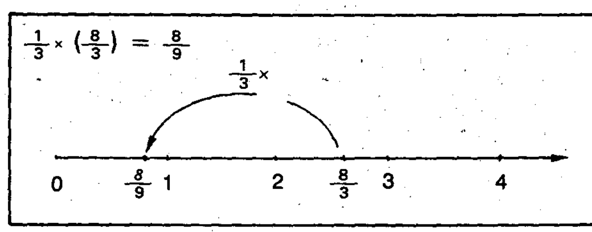
A este resultado ($\frac{4}{3}$) apliquemos ahora el operador $\frac{2}{3}\times$.



Al aplicar el operador $2\times$ a $\frac{4}{3}$ se obtiene:

$$2\times\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}, \text{ y}$$

al aplicar el operador $\frac{1}{3}\times$ a $\frac{8}{3}$ se obtiene:



Pueden aplicar los operadores en el otro orden: primero $\frac{2}{3}\times$ y luego $\frac{4}{3}\times$.
Los alumnos observarán que el fraccionario $\frac{8}{9}$ es el resultado de aplicar el operador $\frac{8}{9}\times$ al uno, es decir, que el efecto de aplicar sucesivamente al uno los operadores $\frac{4}{3}\times$ y $\frac{2}{3}\times$ es equivalente al efecto de aplicar al uno el operador $\frac{8}{9}\times$.

$$\frac{2}{3}\times\left[\frac{4}{3}\times(1)\right] = \frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{9}\times(1) = \frac{8}{9}$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Pueden iniciar haciendo algunos ejercicios de aplicación sucesiva de operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ a magnitudes, como:

Hallar $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$ de una longitud de 40 m.

Hallar $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$ de una superficie que tiene 50 m^2 de área.

Hallar la mitad de la tercera parte de \$900.

El profesor hará notar el uso del "de" para indicar la aplicación sucesiva de operadores.

Después pueden aplicar sucesivamente operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno y sacar algunas conclusiones como:

– El resultado de aplicar sucesivamente al uno los operadores $\frac{a}{b}\times$ y $\frac{c}{d}\times$ al uno, es otro operador de la misma forma, que resulta de multiplicar los dos anteriores.

Notamos:

$\frac{a}{b}\times[\frac{c}{d}\times(1)] = [\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}]\times(1);$

el signo $\otimes$ se lee "de":

$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{4}$ se lee "la mitad de la cuarta parte".

Pueden aplicar sucesivamente tres o más operaciones al uno para que analicen el resultado.

OBJETIVOS ESPECIFICOS		INDICADORES DE EVALUACION
35	Relacionar la multiplicación de números fraccionarios con la aplicación sucesiva de dos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno.	Dados dos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$, el alumno aplicará sucesivamente los operadores y comparará el resultado con el que se obtiene de aplicar el operador representado por una fracción que resulta de multiplicar las dos fracciones.
36	Practicar el algoritmo de la multiplicación de números fraccionarios.	Dados tres números fraccionarios el alumno efectuará la multiplicación entre ellos.

CONTENIDOS BASICOS

El efecto de aplicar sucesivamente al uno, los operadores $\frac{a}{b}\times$ y $\frac{c}{d}\times$ es equivalente al de aplicar el operador $\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}\times$ al uno, en donde el signo $\otimes$ se lee "de":

$\frac{a}{b}\times[\frac{c}{d}\times(1)] = [\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}]\times(1)$

El resultado de aplicar el operador $\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}\times$ al uno es el número fraccionario que escribimos:

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$,ó, $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$

Los alumnos descubrirán pronto que la fracción $\frac{a\times c}{b\times d}$ representa el mismo resultado que $\frac{a}{b}\otimes\frac{c}{d}\times(1)$. No debe darse esta regla de multiplicar numeradores y denominadores hasta que el alumno comprenda lo que está haciendo al aplicar sucesivamente los dos operadores; ojalá descubra por sí mismo el truco para escribir rápidamente el resultado. Una vez que todos lo hayan descubierto, podrá omitirse el círculo alrededor del signo $\times$.

De la práctica de aplicar sucesivamente estos operadores se puede pasar a multiplicar números fraccionarios, ya que $\frac{a\times c}{b\times d}$ es la fracción que representa al número fraccionario que obtenemos al aplicar sucesivamente $\frac{c}{d}\times$ y luego $\frac{a}{b}\times$ al uno.

Ejemplo: la aplicación sucesiva al uno de los operadores $\frac{3}{5}\times$ y $\frac{1}{4}\times$ como resultado el número fraccionario $\frac{3}{20}$ que es el resultado que se obtiene si se hubiera aplicado el operador $\frac{3}{20}\times$ al uno.

$\frac{3}{5}\times[\frac{1}{4}\times(1)] = [\frac{3}{5}\otimes\frac{1}{4}]\times(1);\ \frac{3}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{3}{20}$

Para multiplicar dos o más fraccionarios se escriben las fracciones respectivas, se multiplican entre sí los numeradores y entre sí los denominadores. Resulta una fracción que a veces puede simplificarse.

Ejemplo:

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{5} = \frac{2\times1\times3}{3\times4\times5} = \frac{6}{60}$

Se simplifica el resultado $\frac{6}{60} = \frac{1}{10}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Pueden hacer varios ejercicios de aplicación sucesiva de operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno en la recta numérica, como los siguientes:

- Aplicar sucesivamente al uno los operadores

  $\frac{3}{5}\times$, $\frac{2}{3}\times$.

- Hallar el operador cuyo efecto es equivalente al efecto de aplicar sucesivamente los operadores

  $\frac{2}{5}\times$ y $\frac{3}{2}\times$.

- Hallar dos operadores cuyo efecto de aplicarlos sucesivamente al uno, sea equivalente al efecto de aplicar el operador $\frac{6}{15}\times$ al uno.

En cada caso analizarán el efecto que se produce al aplicar sucesivamente los dos operadores al uno. Utilizarán $\otimes$ para leer "los dos quintos **de** los tres medios". Después de varios ejercicios, ellos mismos podrán concluir que para hallar la fracción que representa al operador cuyo efecto es equivalente al efecto de aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$, se multiplican las fracciones que representan a los dos operadores. Entonces se podrá abandonar el círculo alrededor de la $\times$.

Harán varios ejercicios de multiplicación de fracciones como los siguientes:

Multiplicar:

$\frac{2}{7}\times\ \frac{1}{2}\times\ \frac{4}{3}$ $\quad \frac{3}{5}\times\frac{5}{3}$ $\quad \frac{4}{2}\times\ \frac{2}{5}$

OBJETIVOS ESPECIFICOS

37 Identificar el inverso multiplicativo de un número fraccionario.

INDICADOR DE EVALUACION

Dados varios números fraccionarios, el alumno hallará el inverso multiplicativo de cada uno de ellos.

CONTENIDOS BASICOS

El resultado de aplicar al uno un operador de la forma $\frac{a}{b}\times$ (con $a \neq 0, b \neq 0$) es un número fraccionario.

Si queremos anular el efecto de dicho operador, aplicamos el operador de la forma $\frac{b}{a}\times$, al resultado de haber aplicado el operador anterior.

$\frac{a}{b}\times\left[\frac{b}{a}\times(1)\right] = \left(\frac{a}{b}\otimes\frac{b}{a}\right)\times(1);$

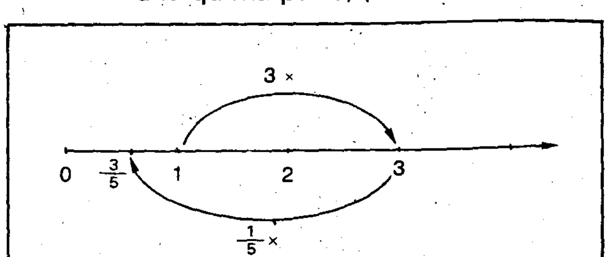
$\frac{a}{b}\times\frac{b}{a} = \frac{a\times b}{b\times a} = 1$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

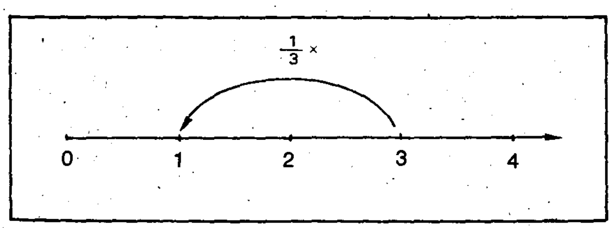
Inicialmente se hallará el inverso multiplicativo, aplicando operadores en la semirrecta numérica.

Ejemplo: hallar el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}\times$.

El efecto del operador $\frac{3}{5}\times$ al aplicarlo al uno es triplicar y luego disminuir a la quinta parte, (o viceversa).



Para anular el efecto de dicho operador se tendrá que aplicar un operador que aumente cinco veces ($5\times$) y luego disminuya a la tercera parte ($\frac{1}{3}\times$). Este operador $\frac{5}{3}\times$; así se obtiene nuevamente el 1.



$\frac{5}{3}\times\left[\frac{3}{5}\times(1)\right] = \left(\frac{5}{3}\otimes\frac{3}{5}\right)\times(1);$

$\frac{5}{3}$ es el inverso multiplicativo de $\frac{3}{5}$

$\frac{5}{3}\times\frac{3}{5} = \frac{15}{15} = 1$

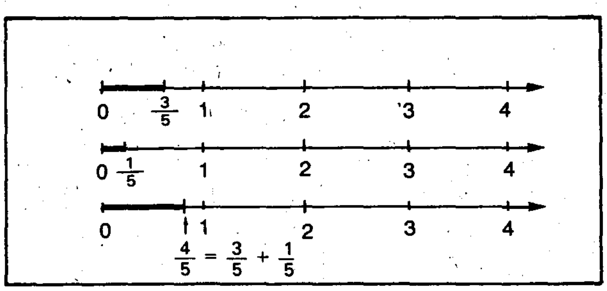
El producto de un número fraccionario por su inverso multiplicativo siempre es 1. El profesor insistirá en que esto es lo natural: si el fraccionario que primero se aplicó al uno lo amplió, su inverso vuelve a reducir ese resultado otra vez al uno, y si el primero redujo al uno, su inverso vuelve a aumentar ese resultado hasta caer otra vez en el uno. El inverso de un ampliador es pues un reductor (o el de un reductor es un ampliador), que compensa exactamente la transformación hecha por el primero.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
38 Analizar sobre la semirrecta numérica el efecto de adicionar dos número fraccionarios.	Dados dos números fraccionarios, el alumno los adicionará en la semirrecta numérica.
39 Practicar un algoritmo de la adición de números fraccionarios.	Dados tres números fraccionarios el alumno efectuará la adición entre ellos.

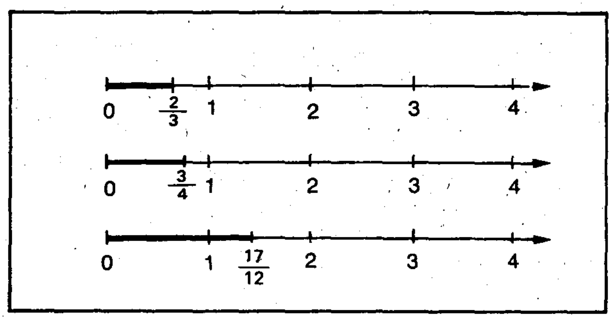
CONTENIDOS BASICOS

Para adicionar dos números fraccionarios en la semirrecta numérica, se representa cada uno de ellos en una semirrecta (así se determinan dos segmentos, en los que el extremo izquierdo es el cero y el extremo derecho es cada uno de los fraccionarios); luego, en otra semirrecta, se coloca uno a continuación del otro. De esta manera se obtiene un nuevo segmento, cuyo extremo izquierdo es el cero y el extremo derecho es el fraccionario que resulta de adicionar los dos fraccionarios dados.

Ejemplo: adicionar en la semirrecta numérica los fraccionarios $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{5}$



Adicionar en la semirrecta numérica los fraccionarios $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$.



$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8 + 9}{12} = \frac{17}{12}$$

Para efectuar la adición de fraccionarios pueden emplear también alguno de los algoritmos conocidos.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente se adicionará el efecto de dos operadores cuando son aplicados a una magnitud.

Ejemplo:

$\frac{1}{2}$ (metro) + $\frac{1}{4}$ (metro)

$\frac{3}{5}$ (litro) + $\frac{1}{3}$ (litro)

Posteriormente, se adicionarán dos o más fraccionarios en la semirrecta numérica, primero con fracciones que tengan el mismo denominador y luego con fracciones de distinto denominador. Al mismo tiempo van practicando cualquiera de los algoritmos para la adición de fraccionarios.

Finalmente harán algunos ejercicios como los siguientes:

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{8} + 2$ b) $8 + \frac{1}{4} + \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

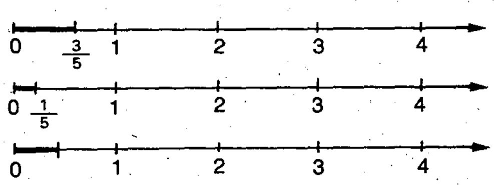
En cada caso podrán estimar el resultado antes de efectuar la operación, tratando de predecir si es mayor que 1, o si está entre 1 y 2, o entre 2 y 3, etc.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
40 Analizar sobre la semirrecta numérica el efecto de la sustracción de dos números fraccionarios.	Dados dos números fraccionarios el alumno efectuará la sustracción de ellos en la semirrecta numérica.
41 Practicar el algoritmo de la sustracción de números fraccionarios.	Dados dos números fraccionarios el alumno efectuará la sustracción entre ellos.

CONTENIDOS BASICOS

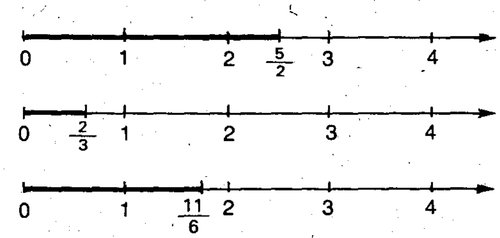
Para efectuar la sustracción de dos números fraccionarios en la semirrecta numérica se representa cada uno de ellos en una semirrecta determinando dos segmentos; luego en otra semirrecta se coloca uno encima del otro, de tal manera que los extremos derechos coincidan. Así se obtiene otro segmento cuyo extremo izquierdo es el cero y cuyo extremo derecho es el fraccionario que resulta de efectuar la sustracción de los dos fraccionarios.

Ejemplo: efectuar la sustracción de $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{5}$



$\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

– En la semirrecta numérica restar $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{2}$



$\frac{5}{2} - \frac{2}{3} = \frac{15-4}{6} = \frac{11}{6}$

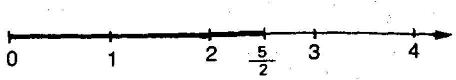
Hay varios algoritmos (ya conocidos) para efectuar la sustracción de dos números fraccionarios.

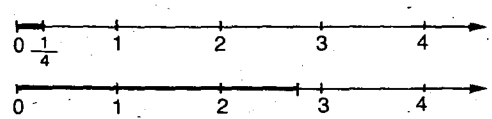
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Inicialmente se sugiere efectuar la sustracción entre dos fraccionarios en la semirrecta numérica; posteriormente hacer ejercicios de adición y sustracción combinadas, tanto en la semirrecta numérica como practicando el algoritmo.

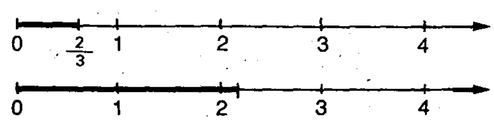
Ejemplo: efectuar en la semirrecta:

$\frac{5}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}$





$\frac{5}{2} + \frac{1}{4} = \frac{10+1}{4} = \frac{11}{4}$



$\frac{11}{4} - \frac{2}{3} = \frac{33-8}{12} = \frac{25}{12}$

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
42 Reconocer como fraccionarios propios los que están entre cero y uno y los demás como impropios.	Dados varios fraccionarios, el alumno dirá de cada uno, si es propio o impropio.

CONTENIDOS BASICOS

Al aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno, en la semirrecta numérica el resultado puede estar antes del uno, en el uno, o después del uno. Esto quiere decir que cualquier número fraccionario es menor que uno, igual a uno o mayor que uno.

Los fraccionarios positivos menores que uno (o sea los que están entre 0 y 1) se llaman "fraccionarios propios" y las fracciones que los representan tienen el numerador estrictamente menor que el denominador.

Los fraccionarios iguales a uno o mayores que uno se llaman "fraccionarios impropios" y las fracciones que los representan tienen el numerador mayor o igual que el denominador.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden proponer algunos ejercicios como los siguientes:

- Representar en la semirrecta numérica los siguientes fraccionarios y decir cuáles son propios y cuáles son impropios.

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{9}, \frac{8}{7}, \frac{2}{5}, \frac{3}{3}$$

- Establecer la relación adecuada (<, >, =) entre cada uno de los siguientes fraccionarios y el uno:

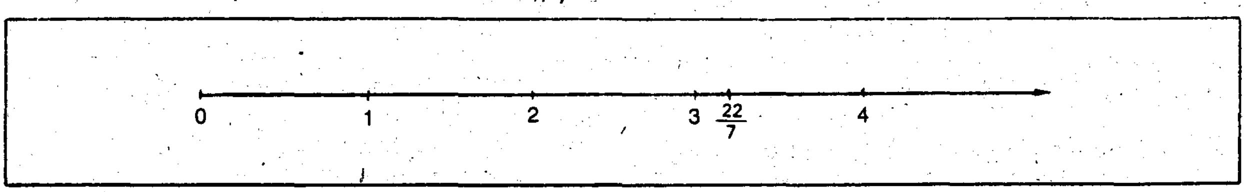
$$\frac{3}{8}, \frac{4}{3}, \frac{2}{2}, \frac{1}{9}, \frac{9}{3}$$

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
43 Identificar un fraccionario estrictamente mayor que uno como la suma de un fraccionario entero y un fraccionario propio.	Dado un fraccionario mayor que uno, el alumno lo expresará como la suma de un entero y un fraccionario propio.
44 Reconocer la notación mixta como abreviatura para la suma de un entero y una fracción propia.	Dada una fracción impropia el alumno lo expresará en notación mixta.

CONTENIDOS BASICOS

Un número fraccionario estrictamente mayor que uno es igual a la suma de un número entero y uno fraccionario propio. Para hallar dichos sumandos se descompone la fracción como la suma de dos fracciones del mismo denominador; en una de ellas el numerador será múltiplo del denominador (así se obtiene el entero), y la otra será una fracción propia.

Ejemplo: al representar en la semirrecta numérica, el fraccionario $\frac{22}{7}$ se obtiene 3 y un poquito. ¿Cuánto es ese poquito?



$$\frac{22}{7} = \frac{21}{7} + \frac{1}{7} = 3 + \frac{1}{7}$$

$\frac{22}{7}$ se puede expresar como la suma del entero 3 y el fraccionario propio $\frac{1}{7}$.

$3 + \frac{1}{7}$ se puede abreviar omitiendo el signo + entre ellos: $3\frac{1}{7}$ que es la llamada notación mixta.

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{1} = 3\frac{1}{7}$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se puede utilizar la semirrecta numérica para identificar un número fraccionario, estrictamente mayor que uno, como la suma de un fraccionario entero y un fraccionario propio.

Pueden hacer algunos ejercicios como los siguientes:

– Expresar en notación mixta:

$3+\frac{1}{2}$, $8+\frac{5}{7}$, $1+\frac{2}{7}$.

– Expresar como una suma y como una fracción impropia cada uno de los siguientes fraccionarios en notación mixta:

$2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{8}$, $12\frac{7}{8}$

– Utilizar la notación mixta para expresar las siguientes fracciones impropias:

$\frac{21}{5}, \frac{32}{3}, \frac{41}{7}, \frac{47}{9}$

– Efectuar las siguientes operaciones entre fraccionarios:

$\frac{22}{3}+\frac{11}{4}+\frac{2}{5}$ $\qquad 5\frac{1}{3}\times 2\frac{3}{5}$

$2\frac{1}{3}+3\frac{2}{5}+8\frac{3}{4}$ $\qquad 8\frac{1}{4}-6\frac{2}{7}$

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
45 Resolver y formular problemas que requieran el uso de operaciones con fraccionarios.	El alumno formulará dos problemas que requieran del uso de operaciones con fraccionarios para resolverlos.

CONTENIDOS BASICOS

Problemas como los siguientes contribuyen a desarrollar el objetivo propuesto.

– Carlos pintó $\frac{2}{7}$ del área de una pared durante la mañana. Al medio día pintó $\frac{3}{5}$ más del área de la misma pared y por la tarde $\frac{1}{10}$ del área. ¿Qué tanto del área de la pared le hace falta por pintar?

– De un terreno de 400 m^2 de área se vendieron $\frac{2}{5}$ de esa área a \$10000 cada m^2. ¿Cuánto dinero se recibió por esta venta?

– La cuarta parte de la duración de un día la emplea Juanito para ir al colegio; la sexta parte para hacer las tareas, la doceava parte para divertirse y el resto de la duración del día para dormir. ¿Qué parte de la duración del día emplea Juanito para dormir?

– Roberto tiene \$50 000 para gastarlos de la siguiente manera: con $\frac{2}{5}$ del dinero compra libros, con $\frac{1}{4}$ del dinero compra zapatos y con el resto compra dos camisas. ¿A cómo compró cada camisa?

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se partirá de situaciones reales, teniendo el cuidado de que los alumnos inicialmente resuelvan cada problema como lo harían en su vida práctica, y posteriormente observen que se pueden utilizar los números fraccionarios para encontrar la solución.

Se puede aprovechar para que los alumnos recuerden el efecto de cada operador, el resultado que produce, su representación en la semirrecta numérica, etc.

Cuando hayan resuelto un número suficiente de ejercicios, se les pedirá que formulen algunos problemas tomados de sus actividades diarias; el profesor los orientará para que ellos mismos se den cuenta de los datos que hacen falta o que sobren.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
46 Reconocer como fracciones decimales las fracciones con denominador diez o potencia de diez y representarlas mediante una expresión decimal.	Dadas varias fracciones, el alumno identificará aquellas que tengan denominador diez o potencia de diez como fracciones decimales y las representará mediante una expresión decimal.

CONTENIDOS BASICOS

Las fracciones como: $\frac{3}{10}, \frac{20}{100}, \frac{35}{1000}, \frac{78}{10000}$, que tienen denominador diez o potencia de diez, se suelen llamar "fracciones decimales".

Estas fracciones se pueden representar mediante una expresión decimal, en donde se separa la parte entera mediante un punto (hasta hace poco se usaba una coma más que un punto). Este punto se llama "punto decimal".

Para la representación se siguen los mismos pasos del sistema de numeración en base diez, en el sentido de que la posición ocupada por un dígito señala un valor diez veces menor que el valor señalado por la posición que está inmediatamente a la izquierda.

Ejemplo: $123.456 = (1 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1) + (4 \times \frac{1}{10}) + (5 \times \frac{1}{100}) + (6 \times \frac{1}{1000})$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para representar una fracción decimal impropia mediante una expresión decimal se puede transformar la fracción en la suma de un entero y una fracción propia. Si la fracción es propia el entero es cero y la fracción será la misma.

Ejemplos:

$\frac{25}{10} = \frac{20}{10} + \frac{5}{10} = 2 + \frac{5}{10} =$

$2 + (5 \times \frac{1}{10}) =$ 2 más 5 décimas.

Siguiendo los pasos de la numeración decimal se tiene

$\frac{25}{10} = 2.5$

2 es la parte entera y 5 es la parte decimal.

$\frac{7}{100} = 0 + (0 \times \frac{1}{10}) + (7 \times \frac{1}{100}) = 0.07$

que se lee "siete centésimas".

O es la parte entera y 07 la parte decimal.

$\frac{1257}{10} = \frac{1250}{10} + \frac{7}{10} = 125 + \frac{7}{10} = (1 \times 100) + (2 \times 10) + (5 \times 1) + (7 \times \frac{1}{10}) = 125.7$

Se puede aprovechar esta actividad para que los alumnos reconozcan fracciones decimales equivalentes.

Ejemplo:

$\frac{3}{10} = \frac{30}{100} = \frac{300}{1000}$ $\quad 0.3 = 0.30 = 0.300$

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
47 Practicar un algoritmo de la adición de números decimales.	El alumno efectuará varias adiciones de números decimales.
48 Practicar un algoritmo de la sustracción de números decimales.	El alumno efectuará varias sustracciones de números decimales.

CONTENIDOS BASICOS

Se utilizará cualquiera de los algoritmos conocidos para efectuar cada una de estas operaciones.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se pueden plantear algunos problemas cuya solución requiera del uso de la adición o la sustracción de decimales para que al resolverlos los alumnos practiquen el algoritmo de cada una de estas operaciones.

Ejemplo: hallar el perímetro de un terreno triangular cuyos lados miden: 30.835 m, 27.35 m, y 31.22 m

Es conveniente que hagan algunos ejercicios de cálculo mental, estimando aproximadamente la magnitud del resultado de una adición o de una sustracción de decimales, sin hacer el cálculo escrito.

Ejemplo: calcular aproximadamente el resultado de:

$$3.68 + 12.2 + 32.53 + 21.32$$

Pueden tomar como referencia la parte entera del decimal:

$$3 + 12 + 32 + 21 = 68$$

Esta aproximación es suficiente. Si queremos una mejor, sumamos mentalmente las décimas y obtenemos $6 + 2 + 5 + 3 = 16$ décimas como aproximación, por estas décimas se pueden aumentar dos unidades, que al sumarlas con las 68 anteriores nos da 70 unidades. Luego el resultado de la adición estará entre 69 y 70.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
49 Practicar un algoritmo de la multiplicación de decimales.	El alumno efectuará varias multiplicaciones entre números decimales.
50 Practicar un algoritmo de la división de decimales.	El alumno efectuará varias divisiones entre números decimales.

CONTENIDOS BASICOS

Se empleará cualquiera de los algoritmos conocidos para efectuar cada una de estas operaciones.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se puede partir de varias situaciones de la vida diaria donde el alumno reconozca que para resolverlas es necesario efectuar multiplicación o división entre decimales.

Ejemplos: Una puerta tiene forma rectangular. ¿Cuál será el área si mide 20.35 dm de largo y 12.37 dm de ancho?

Se compró un rollo de cinta cuya longitud es de 75.36 m a $7.25 cada metro. ¿Cuánto se pagó por el rollo de cinta?

Por 25.85 libras de queso se pagó $2594.05. ¿Cuánto se pagó por cada libra de queso?

El área de un terreno rectangular es de 96.32 m^2. Si el ancho del terreno es de 8.75 m, ¿cuál es el largo del terreno?

Cuando hagan multiplicaciones se puede aprovechar para que los alumnos comprueben que se cumple la propiedad conmutativa.

También se pueden repasar multiplicaciones y divisiones abreviadas por 10, 100, 1000, etc., cuando uno de los factores o el dividendo es un número decimal, corriendo solo el punto decimal. Esto se puede hacer mediante conversiones de unidades de longitud, área, volumen, capacidad y peso en el sistema métrico decimal. Para estas conversiones hay que tener en cuenta el operador o factor de conversión que se va a utilizar.

Ejemplos: Convertir 32.475 m a dm.

En este caso el factor de conversión es: $10 \times$ y al aplicarlo se corre el punto decimal un lugar a la derecha:

$10 \times (32.475) = 324.75$ dm

Convertir 435.85 m^2 a Dm^2

En este caso el factor de conversión es

$\frac{1}{100} \times (435.85) = 4.3585$ 435.85 m^2 = 4.3585 Dm^2

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADOR DE EVALUACION
51 Resolver y formular problemas cuya solución requiere el empleo de las operaciones con decimales.	El alumno formulará por lo menos dos problemas de su vida práctica cuya solución requiera el empleo de los decimales y los resolverá.

CONTENIDOS BASICOS

Se puede formular algunos problemas como los siguientes:

– Se compran 3 docenas de camisas por $45018 y se quieren vender ganando a todas las camisas $7922. ¿Cuál es el valor de compra y cuál el valor de venta de cada camisa?

– Se desea embaldosar un patio que tiene 2636.55 dm^2 de área. Si se van a utilizar baldosas de forma rectangular cuyos lados miden: 21.7 cm y 24.3 cm, ¿cuántas baldosas se necesitarán?

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es conveniente trabajar en grupo ya que el tema es apropiado para que los alumnos discutan. Se debe hacer énfasis en que el alumno entienda el enunciado del problema, en que identifique la información que posee y vea cuál es la mejor manera de emplearla para solucionar el problema. Posteriormente formularán algunos problemas, con base en sus juegos, en las compras, en las actividades del trabajo diario, etc. Entre todos revisarán los problemas formulados y harán las correcciones necesarias. Se puede aprovechar para que los alumnos elaboren un presupuesto familiar, para lo cual hay que tener en cuenta lo que gana mensualmente la familia y los gastos que se hacen como: vivienda, vestido, alimentación, salud, educación, recreación, etc. Se puede sugerir una presentación del presupuesto en un cuadro como éste:

	INGRESOS RECIBIDOS	GASTOS REALIZADOS
Salarios		
Otros ingresos		
Arriendo		
Alimentación		
Vestido		
Educación		
Salud		
Recreación		

Para esta actividad es conveniente dedicar más de una sesión de clase.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

52 Reconocer en la recta numérica el efecto de aplicar operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno.

53 Identificar los números fraccionarios negativos como los resultados de aplicar operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno.

INDICADORES DE EVALUACION

El alumno representará en la recta numérica el efecto de algunos operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ cuando son aplicados al uno.

El alumno denominará fraccionarios negativos a los resultados de aplicar operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno.

CONTENIDOS BASICOS

Recordemos que el efecto de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno es equivalente al efecto de aplicar sucesivamente los operadores $a\times$ y $\frac{1}{b}\times$, en cualquier orden, al uno. Así, el efecto de aplicar el operador $\frac{3}{5}\times$ es triplicar y luego reducir a la quinta parte o viceversa. Hasta este momento a y b han sido enteros positivos, es decir, $a > 0$ y $b > 0$.

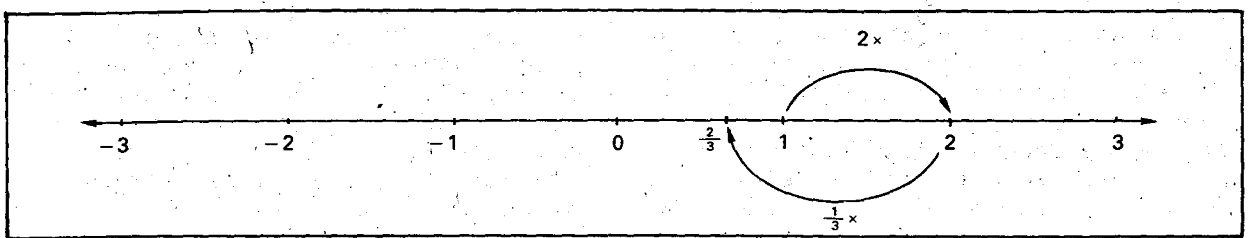
Ahora vamos a analizar en la recta numérica el efecto de aplicar operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno, todavía con a, b enteros positivos.

En la recta numérica usual (orientada de izquierda a derecha), el resultado de aplicar un operador de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno, siempre está a la derecha del 0; si a este resultado le aplicamos el operador $-(\quad)$ obtenemos el resultado de aplicar el operador $-\frac{a}{b}\times$. Dicho resultado está en la recta numérica a la izquierda del cero. Es decir, que el efecto de aplicar el operador $-\frac{a}{b}\times$ al uno, es equivalente al efecto de aplicar el operador $\frac{a}{b}\times$ al uno y tomar el resultado en el otro sentido de la recta.

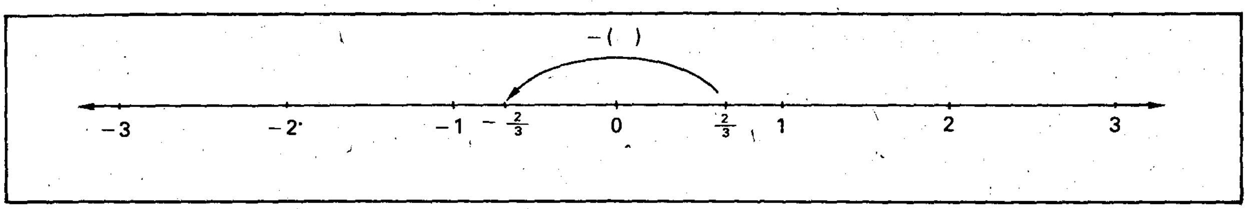
Ejemplo: aplicar el operador $-\frac{2}{3}\times$ al 1.

El efecto de aplicar este operador es equivalente al efecto de aplicar el operador $\frac{2}{3}\times$ y luego tomar el resultado en el otro sentido de la recta.

Apliquemos primero el operador $\frac{2}{3}\times$ al 1.



Luego apliquemos el operador $-(\quad)$ al resultado:



Al conjunto que se obtiene de los resultados de aplicar operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno, se le llama "números fraccionarios negativos".

Al aplicar el operador $-\frac{a}{b}\times$ al uno, se obtiene el fraccionario negativo $-\frac{a}{b}\times$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Aplicar diferentes operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno y obtener así el conjunto de los fraccionarios negativos. También se puede obtener este conjunto aplicando operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ a -1.

Verificar que el fraccionario $-\frac{a}{b}$ se puede obtener de dos maneras:

aplicando $-\frac{a}{b}\times a + 1$, o, aplicando $\frac{a}{b}\times a - 1$.

$$\left(-\frac{a}{b}\right)(+1) = \left(\frac{a}{b}\right)(-1)$$

Observar que cualquier fraccionario negativo puede ser representado por muchas fracciones. De estas fracciones se dice que son equivalentes.

Ejemplo: las fracciones: $-\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{6}$, $-\frac{6}{9}$, $-\frac{8}{12}$, etc. son representaciones para el mismo fraccionario negativo y son equivalentes entre sí.

Complificar y simplificar para obtener fracciones equivalentes.

Después de aplicar en la recta numérica operadores para obtener los fraccionarios negativos los alumnos podrán observar que algunos caen donde ya se han representado números enteros. De esta forma podrán concluir que algunos fraccionarios negativos son también enteros negativos.

OBJETIVO ESPECIFICO

54 Analizar, en la recta numérica, las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que..." entre números fraccionarios negativos.

INDICADOR DE EVALUACION

Dado un conjunto finito de fraccionarios negativos, el alumno los ordenará ascendentemente o descendentemente.

CONTENIDOS BASICOS

En la recta numérica se pueden analizar las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que..." entre dos números fraccionarios negativos así:

$$-\frac{a}{b} > -\frac{c}{d} \quad \text{si} \quad -\frac{a}{b}$$

está representado a la derecha de $-\frac{c}{d}$

$$-\frac{m}{n} < -\frac{x}{y} \quad \text{si} \quad -\frac{m}{n}$$

está representado a la izquierda de $-\frac{x}{y}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Localizar en la recta numérica varios fraccionarios negativos y ordenarlos ascendentemente o descendentemente. Observar que mientras más grande sea el fraccionario $\frac{a}{b}$. (con a, b enteros positivos), más a la izquierda estará el punto correspondiente a $-\frac{a}{b}$. Por eso decimos que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $-\frac{c}{d} < -\frac{a}{b}$

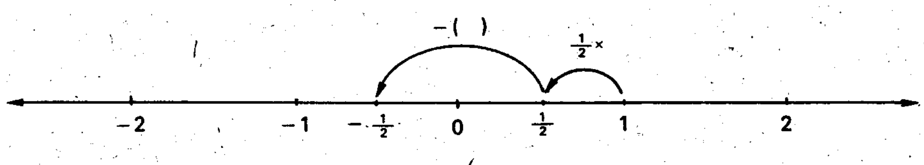
OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
55 Reconocer en la recta numérica el efecto de aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno.	Dados dos operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ el alumno analizará en la recta numérica el resultado de aplicarlos sucesivamente al uno.
56 Efectuar la multiplicación de dos fraccionarios negativos.	El alumno efectuará multiplicaciones y divisiones entre dos fraccionarios negativos.
57 Efectuar la división de dos fraccionarios negativos.	

CONTENIDOS BASICOS

El resultado de aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno está a la derecha del cero en la recta numérica. (Hay que cambiar dos veces el sentido).

Ejemplo: Apliquemos al 1 los operadores $-\frac{1}{2}\times$ y $-\frac{2}{3}\times$.

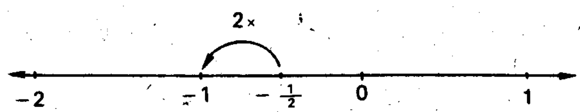
Apliquemos primero $-\frac{1}{2}\times$ al 1. Se aplica $\frac{1}{2}\times$ al 1 y luego se le cambia el sentido.



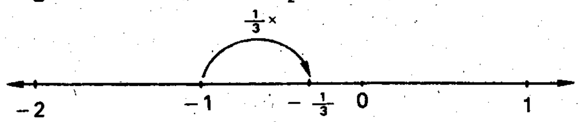
$$-\frac{1}{2}\times\ (1) = -\frac{1}{2}$$

A este resultado $(-\frac{1}{2})$ apliquemos el operador $-\frac{2}{3}\times$. Primero apliquemos el operador $2\times$, luego $\frac{1}{3}\times$ y enseguida cambiemos el sentido.

$$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{2} = -1$$

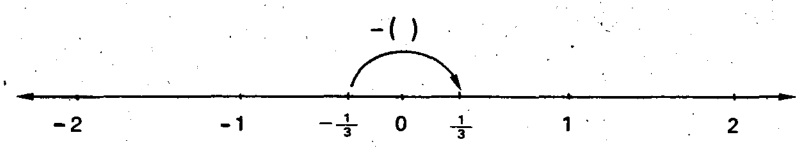


$$\frac{1}{3} \times (-1) = -\frac{1}{3}$$



Ahora apliquemos el operador $-(\ )$ y obtenemos $\frac{1}{3}$

$(-1)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$



Obsérvese que $\frac{1}{3}$ es el resultado de aplicar el operador $\frac{1}{3}\times$ al 1; es decir que el efecto de aplicar sucesivamente al 1 los operadores $-\frac{1}{2}\times$ y $-\frac{2}{3}\times$, es equivalente al efecto de aplicar al 1 el operador $\frac{1}{3}\times$

$$-\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}\times(1)\right] = -\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\times(1) = \frac{1}{3}$$

La aplicación sucesiva de dos operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al 1 se relaciona con la multiplicación de dos fraccionarios negativos. De esta manera se puede concluir que "el producto de dos fraccionarios negativos es un fraccionario positivo".

El resultado de aplicar sucesivamente a 1 los operadores $-\frac{a}{b}\times$ y $-\frac{c}{d}\times$ es el mismo número fraccionario que escribimos: $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$ o $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$, y este es el resultado de multiplicar los fraccionarios negativos $-\frac{a}{b}$ y $-\frac{c}{d}$.

$$-\frac{a}{b}\times-\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\times\frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Aplicar sucesivamente al $+1$ dos operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ hasta comprobar que el resultado en la recta numérica siempre está a la derecha del cero.

De la práctica de aplicar sucesivamente estos operadores se puede pasar a la multiplicación de fraccionarios negativos. No debe darse la regla de multiplicar numeradores y denominadores hasta que el alumno comprenda lo que está haciendo al aplicar sucesivamente los dos operadores. Ojalá descubra por sí mismo el truco para escribir rápidamente el resultado.

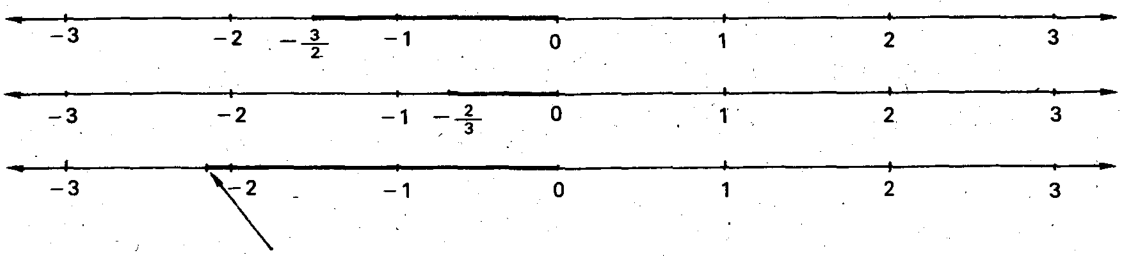
Pueden aplicar sucesivamente al 1 tres operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$, o cuatro, para ver a qué lado de la recta numérica cae el resultado.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
58 Analizar sobre la recta numérica el efecto de la adición de dos números fraccionarios negativos.	Dados dos fraccionarios negativos el alumno los adicionará en la recta numérica. También efectuará entre ellos la sustracción.
59 Analizar sobre la recta numérica el efecto de la sustracción de dos fraccionarios negativos.	El alumno realizará ejercicios combinados de adición y sustracción de fraccionarios negativos.
60 Practicar el algoritmo de la adición y de la sustracción de números fraccionarios negativos.	

CONTENIDOS BASICOS

Para adicionar dos fraccionarios negativos en la recta numérica, se representa cada uno de ellos en una recta numérica (así se determinan dos segmentos, en los que el extremo derecho es el cero y el extremo izquierdo es cada uno de los fraccionarios negativos); luego en otra recta se coloca uno a continuación del otro. Así se obtiene un nuevo segmento, cuyo extremo derecho es el cero y el extremo izquierdo es el fraccionario negativo que resulta de adicionar los dos fraccionarios dados.

Ejemplo: adicionar en la recta numérica los fraccionarios $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{2}{3}$

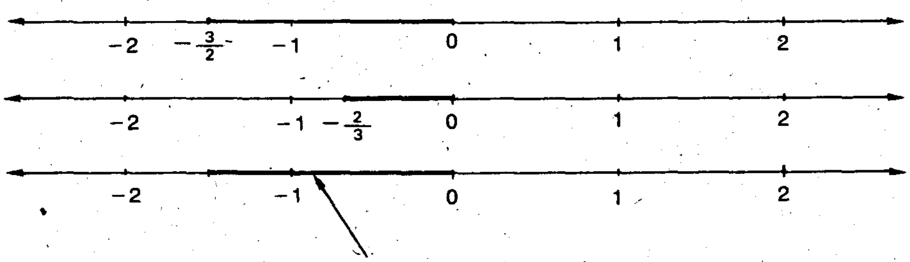


$-\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9 \; - \; 4}{6} = -\frac{13}{6}$

Para efectuar la sustracción de dos números fraccionarios negativos en la recta numérica se representa cada uno de ellos en una recta numérica determinando dos segmentos; luego, en otra recta, se coloca uno encima del otro de tal manera que los extremos izquierdos coincidan.

Así se obtiene otro segmento cuyo extremo derecho es el cero y cuyo extremo izquierdo es el fraccionario que resulta de efectuar la sustracción de los dos fraccionarios.

Ejemplo: De $-\frac{3}{2}$ restar $-\frac{2}{3}$



$-\frac{3}{2} - (-\frac{2}{3}) = \frac{-9-(-6)}{6} = \frac{-9+6}{6} = -\frac{5}{6}$

Hay varios algoritmos (ya conocidos) para efectuar la adición y la sustracción de números fraccionarios negativos.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Efectuar adiciones y sustracciones de dos o más fraccionarios negativos en la recta numérica y al mismo tiempo algún algoritmo. Pueden hacer ejercicios de adición y sustracción combinados.

Comparar el resultado de adicionar dos fraccionarios negativos con el resultado de sustraer dos fraccionarios negativos y sacar algunas conclusiones.

También se puede verificar qué propiedades de las estudiadas en la adición de enteros se cumplen en la adición de fraccionarios negativos.

Ejercitarse en hacer adiciones y sustracciones de números fraccionarios negativos pasándose al lado positivo, operando allí, y luego volviendo al lado negativo para verificar que:

$(-\frac{a}{b}) + (-\frac{c}{d}) = -(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})$

primero sumar al lado derecho y después pasarse al izquierdo

$(-\frac{a}{b}) - (-\frac{c}{d}) = -(\frac{a}{b} - \frac{c}{d})$

primero restar al lado derecho y después pasarse al izquierdo

$(-\frac{a}{b}) - (-\frac{c}{d}) = (-\frac{a}{b}) + (-\frac{c}{d}) =$

$(\frac{c}{d} + (-\frac{a}{b}) = (\frac{c}{d}) - (\frac{a}{b})$

Se fijarán en las dos utilizaciones diferentes de la barra "−": una para la operación de sustracción (binaria) y otra para la operación de cambiar de sentido (unaria).

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
61 Reconocer el conjunto de los racionales como el conjunto formado por los fraccionarios positivos, el cero y los fraccionarios negativos.	El alumno identificará como conjunto de los números racionales al conjunto: $Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$
62 Reconocer que algunos números racionales son también enteros.	El alumno dará 5 ejemplos de números racionales que también son enteros.

CONTENIDOS BASICOS

Como resultado de aplicar operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno se obtienen los fraccionarios positivos y como resultado de aplicar operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno se obtienen los fraccionarios negativos. Si a estos dos conjuntos agregamos el cero, se obtiene el conjunto de los números racionales.

El conjunto de los números racionales se puede simbolizar así: Q

El conjunto de los fraccionarios positivos: Q^+

El conjunto al que pertenece sólo el cero: $\{0\}$

El conjunto de los fraccionarios negativos: Q^-

$Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$

Algunos números racionales son también enteros.

Ejemplo: $-\frac{10}{1}$ es un racional, $-\frac{10}{2} = -5$, -5 es un número entero.

Todo número racional cuyo numerador es múltiplo del denominador, es también un número entero.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Uniendo estos dos conjuntos y el cero se obtiene el conjunto de los números racionales.

$Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$

Q se obtendría de la unión de Q^-, Q^+ y $\{0\}$

Observar que cualquier número racional puede ser representado por muchas fracciones.

Ejemplo: las fracciones

$-\frac{2}{3}, -\frac{4}{6}, -\frac{6}{9}, -\frac{8}{12}, -\frac{10}{15}$, etc.

son representaciones para el mismo número racional. De estas fracciones se dice que son equivalentes.

Obtener algunas fracciones equivalentes a una fracción dada, utilizando la complificación y la simplificación de fracciones.

Después de aplicar en la recta numérica operadores de las formas $\frac{a}{b}\times$, o, $-\frac{a}{b}\times$ al uno, los alumnos podrán observar que algunos caen donde ya se han representado números enteros; es decir, dan como resultado un número entero. De esta forma podrán concluir que algunos racionales son también enteros.

La letra Q sugiere hablar de "quebrados"; pero hay que tener cuidado de que los alumnos no opongan "enteros" a "quebrados", pues todo entero es también quebrado, y algunos quebrados son enteros.

OBJETIVO ESPECIFICO	INDICADORES DE EVALUACION
63 Analizar en la recta numérica las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que..." entre números racionales.	Dado un conjunto finito de números racionales, el alumno los ordenará ascendentemente y descendentemente.

CONTENIDOS BASICOS

Al representar varios racionales en la recta numérica se puede analizar entre ellos las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que...", así:

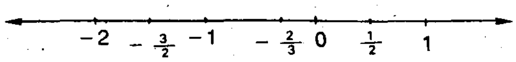
$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

si $\frac{a}{b}$ está representado a la derecha de $\frac{c}{d}$

$\frac{m}{n} < \frac{x}{y}$

si $\frac{m}{n}$ está representado a la izquierda de $\frac{x}{y}$

Ejemplo:



$- \frac{3}{2} < - \frac{2}{3} < \frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2} > - \frac{2}{3} > - \frac{3}{2}$

Estas relaciones también se pueden analizar teniendo en cuenta lo siguiente:

Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entonces se cumple que: $ad < bc$. Esto se puede ver más fácilmente transformando las fracciones a común denominador:

$\frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd}$

Ejemplo: $- \frac{2}{3} < - \frac{1}{2}$

Verifiqué~~mosl~~o: $-2 \times 2 = -4$

$3 \times 1 = -3$, $\quad -4 < -3$

Transformando a común denominador observamos que:

$-\frac{4}{6} < -\frac{3}{6}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Representar algunos racionales en la recta numérica para ordenarlos según la relación de orden "... es mayor que..." (descendentemente), o según la relación de orden "...es menor que..." (ascendentemente).

Para establecer estas relaciones de orden entre dos racionales dados, también se puede multiplicar el numerador del primer racional por el denominador del segundo; si este resultado es mayor que el producto del denominador del primero por el numerador del segundo, entonces el primer racional es mayor que el segundo.

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ si $ad > cb$ o si $\frac{ad}{bd} > \frac{cb}{bd}$

$\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ si $cb < da$ o si $\frac{cb}{db} < \frac{da}{db}$

Es mejor comenzar siempre por la reducción a común denominador.

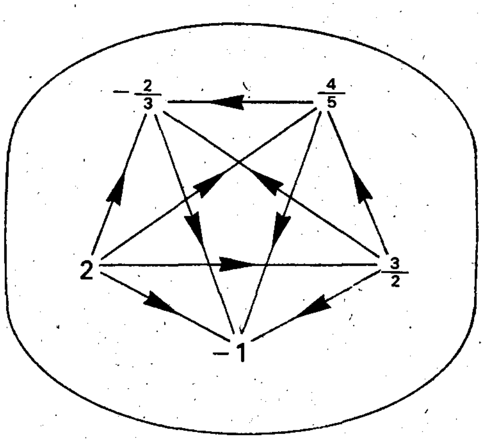
Los alumnos pueden utilizar el método abreviado para establecer la relación de orden entre dos racionales dados, cuando hayan caído en la cuenta de que no hace falta calcular los denominadores para hacer la comparación.

También pueden tomar un conjunto pequeño y analizar las dos relaciones: el esquema de lectura, el diagrama sagital y las parejas que cumplen la relación, etc.

Ejemplo:

$\{ - \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3}, 2, -1 \}$

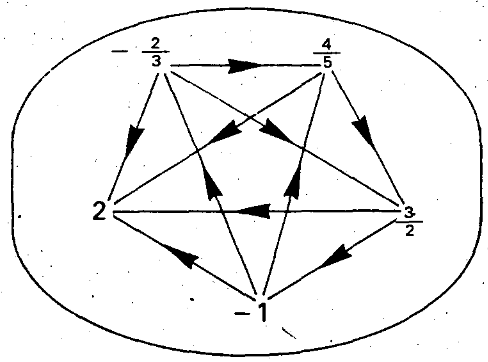
"... es menor que..."



$-1 < -\frac{2}{3} < \frac{4}{5} < \frac{3}{2} < 2$

$R_1 = \{ (-\frac{2}{3}, -1), (\frac{4}{5}, -1), (\frac{2}{3}, -1),$
$(2, -1), (\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}), (\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}),$
$(2, -\frac{2}{3}), (\frac{3}{2}, \frac{4}{5}), (2, \frac{4}{5}), (2, \frac{3}{2}) \}$

"... es mayor que..."

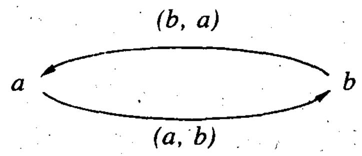


$$2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{5} > -\frac{2}{3} > -1$$

$$R_2 = \{ (\tfrac{3}{2}, 2), (\tfrac{4}{5}, 2), (-\tfrac{2}{3}, 2), (-1, 2), (\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{2}), (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{2}), (-1, \tfrac{3}{2}), (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{5}), (-1, \tfrac{4}{5}), (-1, -\tfrac{2}{3}) \}$$

La relación "... es menor que..." es la inversa de la relación "... es mayor que...".

Si $a < b$ entonces $b > a$

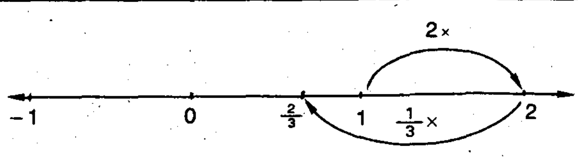


OBJETIVOS ESPECIFICOS		INDICADORES DE EVALUACION
64	Efectuar la multiplicación de dos números racionales.	Dados dos números racionales el alumno efectuará la multiplicación entre ellos.
65	Efectuar la división de dos números racionales.	Dados dos números racionales el alumno efectuará la división entre ellos.

CONTENIDOS BASICOS

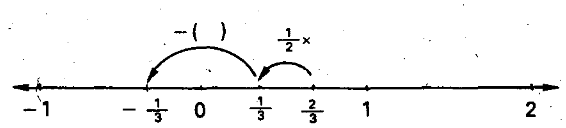
La aplicación sucesiva de operadores de las formas $\frac{a}{b}\times$, o, $-\frac{a}{b}\times$ al uno, se relaciona con la multiplicación de números racionales.

Veámos cómo el resultado de aplicar sucesivamente al uno los operadores $\frac{2}{3}\times$ y $-\frac{1}{2}\times$ es el mismo resultado de aplicar al uno el operador $-\frac{2}{6}\times$, o, $-\frac{1}{3}\times$.



$$\frac{2}{3} \times (1) = \frac{2}{3}$$

Al aplicar al uno el operador $\frac{2}{3}\times$ se obtiene el racional $\frac{2}{3}$. Ahora apliquemos el operador $-\frac{1}{2}\times$ a este resultado. Para esto aplicamos primero $\frac{1}{2}\times$ y luego $-(\ \ )$.



$$\frac{1}{2} \times (\frac{2}{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\ ;\ -(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$$

El resultado de aplicar al uno sucesivamente los operadores $\frac{2}{3}\times$ y $-\frac{1}{2}\times$ es el mismo resultado que se obtiene al aplicar el operador $-\frac{1}{3}\times$ al uno. $-\frac{1}{3}$ es el resultado de multiplicar $\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{2}$.

$$\frac{2}{3} \times -\frac{1}{2} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

De la práctica de aplicar sucesivamente operadores de las formas $\frac{a}{b}\times$, o, $-\frac{a}{b}\times$ al uno, se puede pasar a la multiplicación de números racionales.

– Al aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $\frac{a}{b}\times$ al uno, el resultado siempre está a la derecha del cero en la recta numérica.

– Al aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno, el resultado siempre está a la derecha del cero en la recta numérica.

– Al aplicar sucesivamente dos operadores, uno de la forma $\frac{a}{b}\times$ y otro de la forma $-\frac{a}{b}\times$ al uno, el resultado está siempre a la izquierda del cero, en la recta numérica.

De esta manera se pude concluir que:

- El producto de dos racionales positivos, es positivo.
- El producto de dos racionales negativos, es positivo.
- El producto de un racional positivo y uno negativo, es negativo.

Ejemplos:

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

$-\frac{2}{3} \times -\frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

$-\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = -\frac{8}{15}$

$\frac{2}{3} \times -\frac{4}{5} = -\frac{8}{15}$

Cuando en una multiplicación se desconoce uno de los factores, para hallarlo se divide el resultado entre el factor conocido, es decir, que "dividir es equivalente a encontrar un factor desconocido".

Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el opuesto multiplicativo del divisor.

El resultado de $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ se halla así:

$\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es conveniente hacer suficientes ejercicios de aplicación de operadores de la forma $\frac{a}{b}x$ y $-\frac{a}{b}\times$ al uno, en la recta numérica, para que los alumnos descubran por sí solos cómo se multiplican dos números racionales. No se les debe dar ninguna regla hasta que ellos mismos la deduzcan.

Cuando ya hayan descubierto un algoritmo para multiplicar dos o más números racionales y hayan hecho un número suficiente de ejercicios, los alumnos pueden verificar si la multiplicación de racionales cumple las mismas propiedades de la multiplicación de enteros.

Para efectuar la división de dos números racionales, los alumnos pueden inicialmente plantear las multiplicaciones y hallar el factor desconocido, sin recurrir a la división.

Ejemplos:

$-\frac{9}{10} \div \frac{3}{5} = \square$ Esto significa que $\frac{3}{5} \times \square = -\frac{9}{10}$

Hay que buscar un número que multiplicado por 3 dé -9 y otro que multiplicado por 5 de 10, estos son -3 y 2, -3 es el numerador de la fracción buscada y el 2 el denominador: $-\frac{3}{2}$

$\frac{3}{5} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{10}$ es decir $-\frac{9}{10} \div \frac{3}{5} = -\frac{3}{2}$

Otro ejemplo puede ser:

$-\frac{8}{7} \div -\frac{3}{5} = \square$

Plantearán el ejercicio así:

$-\frac{3}{5} \times \square = -\frac{8}{7}$

Al tratar de encontrar la fracción no van a encontrar un número que multiplicado por -3 dé -8 ni uno que multiplicado por 5 dé 7. Para esto tendrán que complicar el resultado, o sea, $-\frac{8}{7}$ por 3 y por 5 o sea por 15.

$-\frac{3}{5} \times \square = -\frac{8 \times 15}{7 \times 15} = -\frac{120}{105}$

Ahora sí encontrarán el factor desconocido:

es $\frac{40}{21}$ ya que $-\frac{3}{5} \times \frac{40}{21} = -\frac{120}{105}$

Esto quiere decir que:

$-\frac{120}{105} \div -\frac{3}{5} = \frac{40}{21}$ o que $-\frac{8}{7} \div -\frac{3}{5} = \frac{40}{21}$

Cuando hayan hecho un número suficiente de estos ejercicios los alumnos podrán buscar un procedimiento más abreviado para encontrar el factor desconocido una vez que hayan planteado la multiplicación. El profesor los orientará para que concluyan que el factor desconocido se puede obtener siempre multiplicando el inverso multiplicativo del factor conocido o divisor por el producto o dividendo.

Utilizando este método efectuarán otras divisiones como éstas:

$4 \div -\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{5} \div -3$; $-\frac{8}{9} \div \frac{5}{13}$

También verificarán si la división de racionales cumple alguna de las propiedades que cumplen otras de las operaciones ya conocidas:

- ¿Es lo mismo $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ que $\frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$?
- ¿Es lo mismo $(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}) \div \frac{e}{f}$ que $\frac{a}{b} \div (\frac{c}{d} \div \frac{e}{f})$?
- ¿Siempre que se efectúe una división $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ resulta otro racional?
- ¿Es lo mismo $(\frac{a}{b} + \frac{c}{a}) \div \frac{e}{f}$ que $(\frac{a}{b} \div \frac{e}{f}) + (\frac{c}{d} \div \frac{e}{f})$?
- ¿Es lo mismo $\frac{e}{f} \div (\frac{a}{b} + \frac{c}{d})$ que $(\frac{e}{f} \div \frac{a}{b}) + (\frac{e}{f} \div \frac{c}{d})$?

En esta actividad los alumnos podrán reconocer que la multiplicación y la división de racionales son operaciones binarias.

OBJETIVOS ESPECIFICOS	INDICADORES DE EVALUACION
66 Efectuar la adición de dos números racionales.	Los alumnos resolverán algunos problemas que requieran de la adición y sustracción de racionales para practicar los algoritmos de dichas operaciones.
67 Efectuar la sustracción de dos números racionales.	
68 Resolver y formular problemas que requieran de una o varias de las operaciones con números racionales.	Formularán problemas prácticos en los cuales se apliquen operaciones con números racionales.

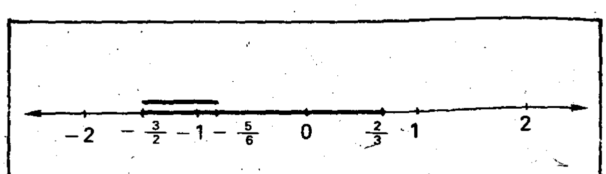
CONTENIDOS BASICOS

El resultado de adicionar en la recta numérica fraccionarios positivos está siempre a la derecha del cero; es decir, es positivo.

El resultado de adicionar en la recta numérica fraccionarios negativos está siempre a la izquierda del cero; es decir, es negativo.

El resultado de adicionar un fraccionario positivo y uno negativo puede estar a la derecha o a la izquierda del cero. Está del lado en donde quede determinado el segmento más largo.

Ejemplo: Sumar $-\frac{3}{2} + \frac{2}{3}$



$-\frac{3}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{9+4}{6} = -\frac{5}{6}$

El segmento determinado por $-\frac{2}{3}$ es más largo que el segmento determinado por $\frac{2}{3}$. El resultado de la adición es negativo.

Cuando en una adición se desconoce uno de los sumandos, para hallarlo se emplea la sustracción:

$\frac{a}{b} + \square = \frac{c}{d}$. $\square = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$

Hay varios algoritmos (ya conocidos) para efectuar la adición y la sustracción entre números racionales.

Es importante que los alumnos desarrollen la habilidad de resolver problemas que requieran de una o de varias de las cuatro operaciones estudiadas con racionales. También es importante estimular la habilidad requerida para formular problemas. Se pueden resolver algunos problemas como los siguientes:

- En un terreno rectangular cuyos lados miden $\frac{1}{5}$ de km y $\frac{3}{4}$ de km, se destinan los $\frac{3}{5}$ del área para cultivarlo. ¿Cuánto mide el área que se cultiva y cuánto el área que no se cultiva?
- Una señora va al mercado con \$5000. $\frac{1}{5}$ del dinero lo gasta en verduras, $\frac{1}{4}$ del dinero lo gasta en frutas, $\frac{1}{3}$ del dinero lo gasta en

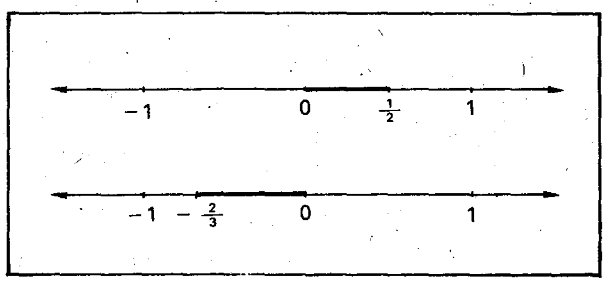
cereales. Después de hacer estas compras desea gastar $\frac{2}{3}$ del dinero que le queda en comprar productos lácteos. ¿Qué parte del dinero que llevaba la señora tiene aún?

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

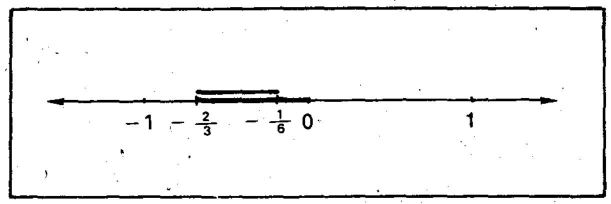
Antes de que los alumnos apliquen cualquier algoritmo de la adición o sustracción de números racionales es conveniente que efectúen estas operaciones en la recta numérica.

Ejemplo: $\frac{1}{2} + (-\frac{2}{3})$

Se representa cada racional en una recta numérica



El resultado va a estar del lado del segmento más largo. Para hallarlo se colocan los dos segmentos uno encima del otro, de tal manera que los extremos diferentes de cero coincidan. Así se obtiene otro segmento cuyo extremo diferente de cero representa el fraccionario que resulta de efectuar la adición de $\frac{1}{2} + (-\frac{2}{3})$



$$\frac{1}{2} + (-\frac{2}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3-4}{6} = -\frac{1}{6}$$

Los alumnos pueden verificar qué propiedades cumplen la adición y la sustracción de racionales.

Para aplicar los algortimos de cálculo de las operaciones con racionales se pueden resolver problemas y también formularlos.

En esta actividad los alumnos pueden reconocer que la adición y la sustracción de racionales son también operaciones binarias.