REPUBLICA DE COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL
Dirección General de Capacitación
y Perfeccionamiento Docente
Currículo y Medios Educativos

MATEMATICAS

MARCO GENERAL

PROPUESTA
PROGRAMA CURRICULAR

Octavo Grado de Educación Básica

Bogotá, D. E. 1990

Edición a cargo de la Dirección General de Capacitación, Currículo y Medios Educativos del Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, 1990.

Producción:
División de Diseño y Programación Curricular de Educación Formal.

Revisión:
Enrique Cabeza Barrios

Coordinación Editorial:
Luz Lillian Cardona
Hernando Garnica Ochoa

Compu-armada y Artes finales:
Morrison Tarquino Daza

Impresión:
Editorial Colombia Nueva Ltda

Presentación

Por nuestra vinculación y compromiso con el sistema educativo seguramente hemos cuestionado algunos de sus problemas principales.

En lo referente al currículo, la situación actual demuestra que, aunque se han realizado algunos esfuerzos por corregir las fallas de los planes y programas correspondientes a los Decretos 1710 de 1963 y 080 de 1974, sobre todo en la concepción educativa y su práctica, quedan problemas como: falta de continuidad entre grados y niveles, predominio de contenidos, poca atención a los intereses de los alumnos y a los asuntos de la vida diaria, escasa participación en los procesos de construcción de conocimiento, memorización ineficaz y aprendizaje verbal, rigidez de programas y falta de adecuación al medio.

Este diagnóstico ha comprometido al gobierno nacional en una política que perfeccione la calidad de la educación de modo que pueda responder con justicia a las necesidades, características, valores y aspiraciones de la sociedad.

Para hacer efectiva esta política se llevó a cabo la re-estructuración del sistema educativo (Decreto 088/76) con estrategias como la Renovación Curricular y se promulgaron decretos como el 1419/78 que explica los fines del sistema educativo y señala pautas para el diseño curricular y su administración y el 1002 de 1984 que establece el Plan de Estudios para Preescolar, Básica (Primaria y Secundaria) y Media Vocacional.

El diseño del nuevo currículo comprende los Fundamentos Generales, el Plan de Estudios, los Marcos Generales, los Programas Curriculares y materiales de apoyo.

Los Fundamentos Generales son una reflexión que, por su naturaleza, integra aspectos filosóficos, epistemológicos, sociológicos, psicológicos y pedagógicos, que permiten proponer en la educación la idea de hombre que se pretende hacer real. En ellos se concibe el conocimiento como proceso y conjunto de experiencias que dura toda la vida, transferible a otras situaciones y presente en diferentes contextos. Los conocimientos y verdades se consideran como proyectos que deben revisarse y corregirse permanentemente. El alumno es el centro del proceso y el maestro es su orientador y animador.

Así la educación llega a ser un proceso para posibilitar la autodeterminación personal y social y la escuela, el espacio necesario para el diálogo y el desarrollo de la conciencia crítica.

Los Marcos Generales son el sustento teórico de las áreas del Plan de Estudios e informan sobre el enfoque, la estructura y la metodología de cada área.

El eje organizativo del currículo es el alumno situado en la sociedad y la historia. Se busca educarlo para la vida con una formación integral, que incluya, además de los cognoscitivo, lo socioafectivo y lo psicomotor; se proponen destrezas y habilidades necesarias para desplegar sus pontencialidades y se le orienta en los aspectos de socialización, participación y transformación de la realidad dentro de una perspectiva democrática.

Los contenidos y la metodología se refieren a conceptos básicos, principios generales y actividades que permitan enriquecer y sistematizar las experiencias y el propio aprendizaje del alumno. Tienen como punto de partida el mundo del educando y buscan desarrollar las áreas de manera integrada e interdisciplinaria, para respetar la percepción globalizante del niño y el mejor avance posible hacia los niveles de madurez.

La evaluación busca detectar fallas y aciertos para incluir los correctivos necesarios que garanticen el progreso del alumno.

Los nuevos programas de Educación Básica Secundaria son continuación de los de Básica Primaria. Surgieron como propuestas que se han debatido con los técnicos de los Centros Experimentales Piloto, por áreas específicas, y han sido estudiados y evaluados por profesores de distintas regiones del país. Siguiendo el proceso de revisión y ajuste, se espera mejorarlos en ediciones posteriores.

Por lo que se refiere a los Programas de Matemáticas, se busca superar algunas de las dificultades que durante muchos años han impedido una buena educación en esta área.

La propuesta requiere del docente un trabajo continuado de reflexión sobre la construcción del conocimiento por parte de los alumnos y sobre la búsqueda y construcción permanentes de una metodología apropiada que permita partir de su realidad, y apoyarse en sus vivencias para construir y organizar los conceptos y emplear símbolos inventados por ellos o aceptados culturalmente.

Después de comprobar que el procedimiento pedagógico usual de pasar de los sistemas simbólicos a los conceptuales lleva, en muchos casos, a la manipulación mecánica de símbolos y a la repetición de definiciones de memoria, consideramos conveniente partir de la investigación de los sistemas matemáticos (y aún pre-matemáticos) que ya se han vuelto concretos y que ya manejan de alguna forma los alumnos, para que de la actividad sobre ellos surjan los sistemas conceptuales que se desea que ellos construyan. Cuando ya se manejan los conceptos en forma de modelos mentales, actividades motrices, gestos y lenguaje ordinario, se procede a introducir los sistemas simbólicos como abreviaturas de dicho lenguaje, a inventar nuevos sistemas simbólicos y a traducir éstos a los sistemas usuales de los libros de matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, cualquier sistema matemático comprende:

- Sistemas simbólicos que aparecen a primera vista, con símbolos verbales del lenguaje ordinario y con símbolos formales u otros sistemas de representación gráfica.
- Sistemas conceptuales, que son los más importantes, y
- Sistemas concretos, que no necesariamente son objetos materiales, sino sistemas matemáticos (y aún pre-matemáticos) que ya maneja el alumno, y que por la familiaridad con ellos han pasado de ser abstractos a ser concretos para ellos.

Cada uno de estos sistemas incluye:

- Un conjunto de componentes, elementos u objetos con los que se juega.
- Un conjunto de transformaciones, operaciones o acciones sobre ellos, y
- Un conjunto de relaciones entre los mismos.

Con este sencillo análisis de cada sistema matemático que quiere trabajar con sus alumnos, el docente puede planear las actividades que conduzcan a la construcción del sistema conceptual por parte del alumno y su eficiente manejo simbólico.

Orlando Munera Patiño
Jefe (E) División de Diseño y Programación
Curricular de Educación Formal

CONTENIDO

Págs.

MARCO GENERAL

PROGRAMADORES - AUTORES:
Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Virginia Cifuentes de Buriticá
Teresa León Pereira
Orlando Múnera Patiño
Carmen Lucila Osorno Reyes

ASESOR:
Universidad Nacional de Colombia
Carlos Eduardo Vasco Uribe

Introducción

Este documento contiene el Marco General del Programa de Matemáticas para la Educación Básica. En él se presenta un enfoque global de los contenidos acorde con el desarrollo de las Matemáticas y se sugiere un enfoque metodológico que se adecúe al elegido para los contenidos, a las características de los estudiantes colombianos y a las diversas transformaciones por las que pasa el conocimiento humano de los 6 a los 18 años.

Enfoque

A. JUSTIFICACION

La historia de las Matemáticas no puede aislarse de la historia de la humanidad puesto que el desarrollo de la una ha avanzado paralelamente con el desarrollo de la otra.

Es innegable el impulso que las Matemáticas le han dado al progreso de la humanidad, tanto en el aspecto científico como en el tecnológico.

Las aplicaciones que actualmente tienen las Matemáticas no se circunscriben a las de las Ciencias Naturales.

Todos en nuestra práctica cotidiana necesitamos, a menudo, efectuar cálculos y estimar rápidamente algunos resultados. Esta utilidad de las Matemáticas es tan antigua como lo es la historia del hombre. Es, por tanto, indispensable insistir en la operatoria y el cálculo mental, sin volver a las rutinas tediosas de antaño que provocaban en la mayoría de los alumnos una aversión permanente hacia las Matemáticas; se insiste más bien en la comprensión de los conceptos y de los procesos, y en la formulación y solución de problemas, para apoyar y motivar el ejercicio de los algoritmos de cálculo. Se introducen también explícitamente experiencias y ejercicios de estimación aproximada de los resultados de cálculos y de mediciones, y se desarrollan habilidades tan importantes como las de encontrar los resultados exactos a través de procedimientos de rutina. Las calculadoras y las computadoras harán cada vez más importantes las primeras que las segundas.

Para la comprensión de conceptos y procesos matemáticos se requiere un mínimo de teoría de conjuntos, la que comienza con el manejo concreto de colecciones figurales y no figurales, necesarias para la comprensión del concepto de número natural, y continúa, gradualmente, con un mínimo de simbolismo formal, a lo largo de toda la Educación Básica, para proporcionar un lenguaje común al estudio de los diversos sistemas matemáticos y preparar el paso al estudio de la teoría axiomática de conjuntos, en la Educación Media Vocacional.

La mayoría de las profesiones y oficios, y aún el desempeño exitoso en muchas circunstancias de la vida ordinaria, exigen un adecuado manejo del espacio y de sus representaciones plásticas, gráficas o simplemente imaginativas.

Por una falsa reacción contra la geometría euclidiana y por faltas de alternativas, el estudio de la geometría en la Educación Básica se había hecho cada vez más limitado, hasta llegar a desaparecer en muchos planteles, con resultados muy negativos en las habilidades de manejo del espacio. En este programa la geometría aparece enfatizada en todos los grados, como una exploración sistemática del espacio. Esta exploración es primordialmente activa, dinámica y sólo secundariamente un estudio de figuras trazadas en el tablero, o en el papel, que ya han perdido su carácter dinámico.

Los computadores encarnan en sus circuítos la lógica simbólica de Boole. Esta lógica, que en la época de su creación, a mediados del siglo XIX, sólo interesó a unos pocos especialistas, ocupa hoy un sitio privilegiado en el diseño y en el manejo de las calculadoras y los computadores y, en general, en todas las áreas de la informática. Por lo tanto, aparecen desde el primer grado algunos objetivos relacionados con la lógica y el seguimiento de instrucciones lógicamente estructuradas, que preparen a los alumnos a una fácil transición a la programación de calculadoras y computadores, cuando puedan tener acceso a ellos.

Hay otro aspecto muy importante, es el relacionado con el rigor y la precisión en la formación intelectual, y la contribución de las Matemáticas a esa formación.

El lenguaje de las Matemáticas intenta ser, esencialmente, preciso y general, en contraste con la ambigüedad y la particularidad del lenguaje usual. Mientras que el primero está sujeto a reglas estrictas que limitan su significación para disminuir las interpretaciones subjetivas, el segundo permite toda una serie de interpretaciones mediante las cuales el sujeto puede manifestar sus sentimientos e intuiciones.

Es de la síntesis de estos dos lenguajes de donde surge el factor de formación intelectual que permite distinguir lo preciso de lo ambiguo y lo particular de lo general.

En el currículo de Educación Básica se incluye el estudio de todos estos aspectos de las Matemáticas con el fin de contribuir decididamente a la educación integral del individuo, y llevarlo a participar activamente de ese gran patrimonio de la humanidad, que son las Matemáticas.

B. ENFOQUE DE SISTEMAS

En la Matemática como en todas las ciencias, ha habido diversas tendencias o enfoques que de alguna manera buscan organizar los contenidos, correlacionarlos, jerarquizarlos, etc., que han constituído "escuelas matemáticas".

Actualmente hay una corriente muy notoria que se propone presentar la Matemática como una ciencia unificada, en la cual las diversas ramas tienen estructuras comunes, afines, que pueden expresarse en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

Este enfoque unificador de todas las ramas de la Matemática (o sea de las Matemáticas) puede articularse o establecerse, de manera coherente, alrededor de un concepto clave más amplio que el de conjunto, que es el concepto de **Sistema.**

El concepto de sistema tiene la ventaja de no ser exclusivo de la Matemática, ya que es empleado en una u otra forma en todas las ciencias. Cada ciencia se ocupa de sistemas especiales; por consiguiente, debe establecer reglas específicas para interpretarlos y manejarlos, y garantizar, además, una utilización adecuada del lenguaje de los sistemas y de la teoría general de sistemas.

El enfoque elegido para el actual programa oficial de Matemáticas correspondiente al nivel de Educación Básica, es el enfoque de sistemas; por eso conviene analizarlo detalladamente.

En círculos dedicados en Colombia a la docencia y a la investigación matemática, son ya bien conocidos estudios como: **Relatores y operadores; Lógica, conjuntos y estructuras; Relaciones, operaciones y sistemas; El concepto de sistema como clave del currículo de Matemática,** en los cuales el asesor del Ministerio de Educación Nacional, en la elaboración de los programas de Matemáticas para el nivel Básico, Carlos E. Vasco U., desarrolla el enfoque de sistemas, analiza los conceptos asociados a dicho enfoque (como los de conjunto, objeto, relación, operación, sistema y estructura), y los especifica al caso particular de los sistemas matemáticos.[1]

1. CONCEPTO DE SISTEMA

Para definir un sistema hay que establecer previamente el significado de las palabras que se van a emplear. Esas palabras son: conjunto, objeto, relación, operación. Quien intente definirlas, se convencerá de que no es posible hacerlo en términos de conceptos más fundamentales, pues lo único que es posible encontrar, para cada una de esas palabras, es una lista de sinónimos, con diversas connotaciones y de que, con base en esos sinónimos, todo el mundo parece entender qué quieren decir esas palabras, sin detenerse a pensar si existe una definición precisa para cada una.

Los sinónimos más usuales para esas palabras son:

Conjunto:	coleccion, clase, agrupación, agregado, montón, grupo (rebaño, jauría, bandada...).
Objeto:	cosa, elemento, individuo, entidad, ser (persona, animal, planta, mineral...).
Relación:	referencia, respecto, "ser hacia" (Aristóteles), nexo, lazo, vínculo, conexión.
Operación:	acción, transformación, modificación, intervención, conversión (Relaciones 1978).

A partir de estas cuatro palabras, o de sus sinónimos, es posible expresar el concepto clave del currículo de Matemática: el concepto de sistema.

Sistema es un conjunto de **objetos** con sus **relaciones y operaciones**

Con base en esta definición, pueden identificarse y analizarse sistemas en diversos campos de la actividad científica, económica, política, etc.

2. SISTEMAS ESPECIFICOS DE LA MATEMATICA

En particular, para describir un sistema determinado de la Matemática hay que especificar un conjunto de objetos, un conjunto de operaciones y un conjunto de relaciones. Un ejemplo puede ser un sistema estudiado en la Aritmética, en el cual:

- el conjunto de objetos es el formado por los números enteros.
- el conjunto de operaciones es el formado por la adición y por la multiplicación, y
- el conjunto de relaciones es el formado por las relaciones de orden: "...es menor o igual que...", "...es mayor o igual que...", "...es estrictamente menor que...", "...es estrictamente mayor que...".

[2] Si cada uno de estos conjuntos se simboliza por una letra mayúscula, se tiene:

- Conjunto de objetos: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$

---

[1] (Ver bibliografía. Las obras se citarán con la primera palabra del título y el año de su publicación).

[2] (Conviene recordar que el conjunto de los número enteros se simboliza mediante una $\mathbb{Z}$ y sus elementos son: el cero, todos los enteros positivos: 1, 2, 3, ... y todos los enteros negativos: -1, -2, -3, ...).

– Conjunto de operaciones: $\Omega = \{+, \times\}$

– Conjunto de relaciones: $R = \{\leqslant, <, >, \geqslant\}$

Es posible, pues, representar este sistema de los números enteros así:

$$(\mathbb{Z}, \{+, \times\}, \{\leqslant, <, >, \geqslant\}).$$

Para nombrar más abreviadamente este sistema, se puede establecer la convención de emplear solamente las letras mayúsculas, que simbolizan los conjuntos de objetos, de operaciones y de relaciones, en ese orden:

$$(\mathbb{Z}, \Omega, R)$$

Por las propiedades que cumplen las operaciones y las relaciones definidas en este conjunto específico de los enteros, se suele o se acostumbra mencionar este sistema indicando la estructura que tiene. Como en este caso el sistema tiene estructura de anillo ordenado, se denomina anillo ordenado de los números enteros.

En forma similar pueden describirse otros sistemas de la Aritmética, de la Geometría, de la Teoría de Conjuntos, de la Lógica Matemática, etc. En general, cada sistema queda perfectamente determinado por tres conjuntos:

a. **Un conjunto de objetos,** simbolizado por una letra mayúscula latina, por ejemplo A. Este conjunto, llamado **conjunto subyacente,** no puede ser vacío.

b. **Un conjunto de operaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula griega, por ejemplo Ω (omega). Este conjunto puede ser vacío en el caso de sistemas puramente relacionales, como el llamado **conjunto parcialmente ordenado,** en el que se tiene: $A \neq \phi, \Omega = \phi, R = \{\leqslant\}$ y que se puede simbolizar así:

$$(A, \phi, \{\leqslant\}), \text{ o },$$
$$(A, \{\leqslant\}), \text{ o },$$
$$(A, \leqslant)$$

c. **Un conjunto de relaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula cursiva, por ejemplo R. En este conjunto, se suelen indicar únicamente las relaciones binarias entre elementos del conjunto A.

Además de estas relaciones en A, se dan otras relaciones en las que intervienen elementos de A, operaciones de Ω y relaciones de R.

Estas relaciones se suelen enunciar en el lenguaje propio del sistema, y constituyen su teoría.

Abreviadamente, cualquier sistema específico de la Matemática puede simbolizarse por medio de una terna o tripla ordenada de conjuntos:

$$\mathcal{S} = (A, \Omega, R)$$

A : el conjunto de objetos del sistema $\mathcal{S}$
Ω : el conjunto de operaciones del sistema $\mathcal{S}$
R : el conjunto de relaciones del sistema $\mathcal{S}$

3. VENTAJAS DEL ENFOQUE DE SISTEMAS

El enfoque de sistemas contenido en los estudios mencionados anteriormente, contribuye al logro de los objetivos del Programa de Matemáticas porque organiza y unifica los diversos contenidos y las diversas ramas de la Matemática, a través de unos conceptos y un lenguaje común; facilita la articulación de la Matemática con las demás áreas del Currículo, y permite desarrollar los contenidos atendiendo a las características de los alumnos del Ciclo Básico y de la realidad en que viven, sin caer en el énfasis desmedido en los conjuntos, que se hace en cierto tipo (ya no tan moderno) de la llamada "Matemática Moderna".

Son, pues, tres las ventajas del enfoque de sistemas: una en el interior de la Matemática, otra en el campo de la integración o articulación de la Matemática con otras ciencias y otra respecto a la metodología propuesta para desarrollar los contenidos.

Conviene analizar las implicaciones que tiene este enfoque en la articulación de la Matemática con las demás ciencias. Basta una rápida revisión de los contenidos tratados en Ciencias Naturales, en Ciencias Sociales, en Administración, etc., para concluir que todas estudian determinados sistemas, y que, por consiguiente, hay en este concepto una fuente de articulación e integración.

Ejemplos de esos sistemas, no estrictamente matemáticos, son: el sistema ecológico (uno de los conceptos de más actualidad), el sistema respiratorio, el sistema circulatorio, el sistema social, el sistema económico, el sistema solar, etc. Sistemas como el social o el circulatorio son muchísimo más complejos que los sistemas matemáticos.

Los sistemas matemáticos son muy simplificados. Los sistemas reales son siempre más complejos. Esta es la regla clave para la articulación de la Matemática con las demás ciencias. El dominio del concepto de Sistema en Matemática prepara para el dominio de ese concepto y sus aplicaciones en las Ciencias Naturales y Sociales, en el Lenguaje, y en la solución de problemas de la vida real. (Ver: Relaciones, 1978; Concepto, 1980).

Las otras dos ventajas de este enfoque se explicitarán posteriormente en la estructura conceptual del área.

Objetivos

A. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA

El estudiante debe:

- Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente.
- Adquirir independencia en la actividad intelectual.
- Adquirir profundidad y perseverancia en la búsqueda del conocimiento.
- Ampliar su capacidad para realizar generalizaciones.
- Desarrollar habilidades en los procedimientos operativos aritméticos y geométricos.
- Familiarizarse con conceptos básicos de la Matemática.
- Adquirir precisión en la expresión verbal y familiaridad con el lenguaje y expresiones simbólicas.
- Interpretar la realidad a través de modelos matemáticos.
- Utilizar la Matemática para interpretar y solucionar problemas de la vida cotidiana, de la tecnología y de la ciencia.
- Ejercitar la agilidad mental para encontrar soluciones a problemas de diferentes tipos.
- Reconocer y valorar algunas de las funciones de la Matemática en el desarrollo de la ciencia y en el mejoramiento de las condiciones de vida.

B. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA EN LA EDUCACION BASICA

- Construir el conjunto de los números naturales a partir de colecciones, de objetos concretos y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva, multiplicativa y potenciativa.
- Adquirir habilidad para el cálculo aritmético mental y para el cálculo escrito, con ayuda de la calculadora y sin ella.
- Construir el conjunto de los números fraccionarios a partir de operadores sobre magnitudes concretas y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números fraccionarios y de las operaciones entre ellos.
- Construir algunos subconjuntos de números reales a partir de situaciones geométricas e inicar el estudio del conjunto de los números reales y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números reales y de las operaciones entre ellos.
- Realizar cálculos numéricos utilizando las propiedades de las operaciones fundamentales estudiadas en el conjunto numérico respectivo.
- Adquirir habilidades y destrezas para formular, plantear y resolver problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos.
- Explorar el espacio en dos y tres dimensiones y construir modelos imaginativos y pictóricos del mismo y desarrollar algunos sistemas conceptuales y simbólicos que permitan manejar esos modelos.
- Calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras en el espacio.
- Identificar diferentes sistemas métricos y ejercitar las conversiones de unidades.
- Analizar sistemas de datos estadísticos, calcular frecuencia y promedio y representarlos gráficamente.
- Identificar y utilizar correctamente las conectivas del lenguaje ordinario:y; o; si, ... entonces; si, ... entonces... y si no, no.
- Reconocer y utilizar correctamente los cuantificadores del lenguaje ordinario: todos, cada uno, algún, alguno, algunos, ningún, ninguno, nadie, algunos no, hay, no hay.
- Determinar y representar conjuntos y subconjuntos.
- Realizar operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento y producto cartesiano; analizar algunas propiedades de estas operaciones y utilizar correctamente sus símbolos. más usuales.
- Reconocer relaciones de pertenencia, contenencia, disyunción y equinumerosidad; analizar algunas propiedades de estas relaciones y utilizar correctamente sus símbolos más usuales.
- Generar todas las permutaciones y combinaciones de objetos tomados de conjuntos de pocos elementos, atendiendo a condiciones previamente determinadas.
- Reconocer, analizar y representar relaciones en sistemas específicos y en particular relaciones de orden y de equivalencia.
- Reconocer, analizar y representar operaciones en sistemas específicos y en particular operaciones conmutativas y asociativas.

Estructura

Es fácil comprender ahora la ventaja del enfoque de sistemas, como organizador de los contenidos de Matemática (ver Cuadros Nos. 1 y 2). Este enfoque suministra una organización o estructura de carácter general para el área y un esquema de presentación de cada sistema, los cuales proporcionan las bases necesarias para desarrollar los contenidos mínimos del programa, para abordar otros temas de las diversas ramas de la Matemática, y aún de otras ciencias.

La estructura del área de Matemática, debe señalar, como mínimo, algunos aspectos, tales como: organización de los contenidos, grandes temas, secuencia, grado de profundidad, interrelaciones y desarrollo del enfoque. Los cuadros 1, 2, 3 y 4 que aparecen en las páginas siguientes constituyen una aproximación a dicha estructura.

CONTENIDOS (lo.a 5o. GRADOS)

Los contenidos del área para la Educación Básica Primaria (1o. a 5o. grados) se han organizado, bajo los siguientes títulos: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos, conjuntos, relaciones y operaciones. (Ver cuadro No. 1).

Los contenidos para la Básica Secundaria (6o. a 9o. grados) tienen además de los títulos anteriores, otro denominado análisis real (Ver cuadro No. 2).

1. SISTEMAS NUMERICOS

Estos se estudian de manera gradual. En la Educación Básica Primaria, el de los números naturales, comenzando con los números de 0 — 100 en primer grado y ampliando en cada grado el conjunto numérico. En cada uno de estos conjuntos se van introduciendo progresivamente las operaciones comenzando con la adición y la sustracción en primer grado, hasta llegar a las primeras nociones de potenciación, radicación y logaritmación en quinto grado y además las relaciones de orden aditivo y de orden multiplicativo. También en la Primaria se inicia el estudio de los números fraccionarios y de los decimales. En la Educación Básica Secundaria se avanza en el estudio de los números enteros, los racionales, los reales y los complejos, vistos como sistemas numéricos con sus operaciones y las relaciones que hay entre sus elementos. Se hace mucho énfasis en la solución y formulación de problemas, como aplicación de los algoritmos de las operaciones y en ejercicios de cálculo mental. Con ésto se espera que, a medida que los niños vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar las semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que más adelante les permitan integrar conocimientos y hacer generalizaciones.

2. SISTEMAS GEOMETRICOS

Se incorpora toda la parte de Geometría activa a través de la exploración del espacio. De esta manera se estudian los sólidos, las figuras planas, las líneas, los ángulos, etc.; destacando relaciones como paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza, y transformaciones como rotaciones, traslaciones, reflexiones, reducciones y ampliaciones.

3. SISTEMAS METRICOS

Se estudia el sistema métrico decimal y otros sistemas no decimales. En dichos sistemas se expresa el resultado de medir longitudes, superficies, el volumen de un cuerpo, la capacidad de un recipiente, el peso y la masa de un objeto, la duración de un evento y la amplitud de un ángulo. Los patrones estandarizados se utilizan después de realizar mediciones con unidades arbitrarias y sentir así la necesidad de una unidad común de medida aplicable en todos los casos. En los diferentes sistemas se realizan conversiones con sus aplicaciones y se hacen comparaciones.

4. SISTEMAS DE DATOS

Se estudian algunos conceptos fundamentales de estadística que sirven para interpretar algunos modelos de la realidad. Se inicia con la recolección de datos, su organización en tablas de frecuencia y su representación en diagramas. Se hace algún análisis de los datos recogidos y tabulados mostrando lo que puede deducirse de ellos y cómo pueden compararse entre sí; para ello se estudian al final de la Básica Primaria algunas medidas de tendencia central y al final de la Básica Secundaria se completan estas medidas y se introducen las medidas de dispersión.

5. SISTEMAS LOGICOS

No se pretende hablar de lógica matemática abstracta, sino de ciertos aspectos del lenguaje en los que se notan regularidades que se pueden manejar matemáticamente. Por eso se parte de las expresiones que manejan los alumnos para ir introduciéndolos poco a poco en un lenguaje más riguroso, que tiene por objeto, entre otros, evitar las frecuentes ambigüedades del lenguaje usual, y más tarde, desarrollar las habilidades del pensamiento deductivo.

6. CONJUNTOS

Como ya se dijo en la justificación, se trata la teoría mínima necesaria para introducir algunos conceptos fundamentales de la Aritmética, de la combinatoria y de la probabilidad, y para preparar una posterior formulación unificada de las diversas áreas de las matemáticas.

7. RELACIONES Y OPERACIONES

Se analizan algunos fundamentos teóricos sobre estos conceptos. Dicho análisis se insinúa empíricamente desde la Básica Primaria hasta llegar a una conceptualización más general al finalizar la Básica Secundaria. Las operaciones se estudian como transformaciones sobre los elementos de un sistema, mientras que las relaciones corresponden a la teoría acerca de los mismos. Se estudian también las propiedades, tanto de las operaciones como de las relaciones y se presentan algunos aspectos teóricos sobre las funciones.

8. ANALISIS REAL

Se estudian las funciones reales, en donde se incorporan algunos temas de los que se habían venido tratando en los programas tradicionales bajo el nombre de "Algebra", y que en realidad son solo el manejo de ciertas expresiones para las funciones reales o sus valores. Se enfatiza en los aspectos de representación gráfica de estas funciones. Se empieza estudiando funciones tan sencillas como la función lineal, con lo cual se cubren temas como la proporcionalidad y todas sus aplicaciones; posteriormente se trabajan las funciones cuadráticas y demás funciones polinómicas. Paralelamente a las funciones se van estudiando las ecuaciones e inecuaciones y en 9o. grado se introducen las funciones lineales en dos y tres dimensiones.

En este programa se hace énfasis en el estudio de sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos y en Secundaria en el análisis real. En cuanto a los demás sistemas se hace un manejo racional y prudente necesario para adquirir familiaridad con las matemáticas no numéricas y para contribuir al desarrollo de la capacidad de análisis, y a largo plazo, del pensamiento formal.

En síntesis, los contenidos básicos vistos en los cuadros 1 y 2, permiten: identificar los sistemas de la Matemática en los cuales se ubican los contenidos propuestos para el programa; identificar los grandes temas que se proponen para cada grado; reconocer la secuencia que debe seguirse al desarrollar los contenidos; apreciar el grado de profundidad con que deben ser tratados los contenidos en cada grado e identificar las correlaciones que hay entre los temas de un mismo grado o entre temas de diferente grado. El hecho de tener una visión global del programa de cada grado favorece la enseñanza correlacionada y permite además, obtener información sobre lo que un alumno, que cursa un determinado grado, estudió en el grado anterior y lo que va a necesitar para el grado siguiente.

El cuadro No. 3, titulado **Sistema,** señala una forma común para la presentación de los diversos sistemas. Según lo explicado anteriormente, es importante identificar en cada caso los elementos u objetos, las relaciones y las operaciones.

En el ejemplo tomado de la aritmética, los elementos son números enteros, las operaciones son la adición y la multiplicación y las relaciones son: "...es estrictamente menor que...", "...es menor o igual que..." , etc. En el ejemplo tomado de la geometría, los elementos son líneas del plano, las operaciones son las rotaciones y las traslaciones, y las relaciones son: "...es perpendicular a...", "...es paralela a...". En forma similar se explican los ejemplos tomados de la Teoría de Conjuntos y de la Lógica. Los ejemplos podrían ser otros, pero el esquema de presentación es el mismo en todos los casos.

No se pretende que los niños conozcan e interpreten ese cuadro. Pero sí se espera que a medida que vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que, más adelante, les permitan integrar los conocimientos y hacer generalizaciones. Por ejemplo el "descubrir", en la primaria, que la adición y la multiplicación de números naturales son conmutativas y que la unión e intersección de conjuntos también lo son, debe llevar al estudiante de secundaria a elaborar un concepto más general de conmutatividad. Así se propicia el desarrollo mental del estudiante, se ahorra tiempo y se adquieren conocimientos más sólidos y duraderos. En esa forma, también, la mente del niño elabora progresivamente los conceptos y no tiene necesidad de repetir fórmulas y definiciones abstractas carentes de significado para él.

Además de los sistemas que se presentan en el cuadro No. 3 para la Aritmética, la Geometría, la Teoría de Conjuntos y la Lógica, podrían darse muchos otros sistemas de esas y otras ramas de las Matemáticas: por ejemplo, se puede hablar de muchos sistemas numéricos diferentes, no sólo cambiando el conjunto de los números enteros por los naturales, los fraccionarios, los reales o los complejos, sino distinguiendo varios sistemas diferentes sobre cada uno de esos conjuntos.

"Puede hablarse también de un sistema de numeración diferente de un sistema numérico: en el sistema de numeración los objetos son los símbolos, de los cuales hay primitivos (dígitos) y derivados, y la operación básica es la concatenación o yuxtaposición.

También puede enfocarse en este sentido el estudio de un sistema métrico, y comparar las presentaciones del sistema métrico decimal que dan los libros de Matemáticas, con los sistemas que aparecen en los libros de Física (IS, MKS, CGS, FPS). Se notará inmediatamente que ninguno de ellos es el presentado por los libros de Matemáticas; que las unidades de tiempo nc son decimales; que la teoría de la dimensión se hace necesaria para entender el sistema; que la multiplicación de unidades produce múltiplos y submúltiplos, si es externa, pero que la multiplicación interna produce unidades de otra dimensión". (Concepto, 1980).

CUADRO No. 1

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA PRIMARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 SISTEMAS DE DATOS	5 SISTEMAS LOGICOS	6 CONJUNTOS	7 RELACIONES Y OPERACIONES
1o.	. Naturales de 0 á 100 con adición y sustracción y simbolización. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden aditivo ... es mayor que ... ... es menor que ... . Ordinales . Operadores como -1, + 1, -2, etc.	. Relaciones espaciales. . Algunos sólidos geométricos regulares. . Figuras planas. Bordes rectos y bordes curvos. . Introducción a la simetría. . Líneas (abiertas y cerradas).	. Introducción a la medición de longitudes: patrones arbitrarios, el dm. y el m. . Medición de tiempo.	. Iniciación a gráficas de barras.		. Clasificaciones. . Noción de conjunto; elemento. . Conjuntos equinumerosos. Cardinal. . Noción de unión de conjuntos disyuntos. . Representación gráfica. . Arreglos sencillos.	. Iniciación a la representación de relaciones. . Diversas maneras de efectuar operaciones.
2o.	. Naturales de 0 a 1000 con adición, sustracción y multiplicación. División (iniciación). . Números pares y números impares. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo ... es múltiplo de ... ... es divisor de ...	. Rectas paralelas y perpendiculares. . Rotaciones y giros. Angulos. . Formas geométricas regulares: cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares. . Noción de perímetro.	. Longitud: m., dm., cm. . Area. Unidades arbitrarias, dm^2. . Unidades de duración: horas, minutos.	. Gráficas de barras.	. Significado de la "y" y de la "o" en una instrucción. . Expresiones "todos", "algunos", "ninguno".	. Pertenencia. . Noción de subconjunto. . Unión de conjuntos disyuntos y no disyuntos. . Cardinal de la unión. . Parejas con y sin orden.	. Propiedades: conmutativa, asociativa, modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (introducción).
3o.	. Nuestros sistema de numeración. . Numeración romana. . Naturales mayores que 1000 con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos generalizados para adición, sustracción y multiplicación con aplicaciones. . Números primos. . Operadores naturales. . Introducción a los operadores fraccionarios.	. Superficies (fronteras de sólidos). Superficies planas. . Líneas (fronteras de superficies). . Puntos (fronteras de líneas) . Caracterización de: triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo.	. Longitud, m., múltiplos y submúltiplos. Yarda y vara. . Superficie. Area. Patrones standarizados: m^2, cm^2, y mm^2. . Volumen. Patrones arbitrarios. . Capacidad: patrones arbitrarios. Litro.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos.	. Diversos significados de la "y" y de la "o" en el lenguaje ordinario. . Diversas maneras de cuantificar expresiones en el lenguaje ordinario.	. Simbolización de las relaciones de pertenencia y contenencia. . Unión e intersección. . Algunos arreglos con y sin orden.	. Relaciones de orden. . Diagrama de flechas. . Propiedades antisimétrica y transitiva. . Propiedades: conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.
4o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación y división. M. C. D. y M. C. M. . Fraccionarios con adición, sustracción y multiplicación. . Decimales con adición y sustracción. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo.	. Modelos de sólidos. . Cuadriláteros: trapecios. . Perímetro (generalizado). . Radios, diámetros. . Areas: trapecio, cuadrado, rectángulo, triángulo. . Cuadrícula.	. Area. Algunos múltiplos y submúltiplos del m^2. Medidas agrarias. . Volumen: m^3, dm^3, cm^3. Peso: gramo, kilogramo.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos. . Iniciación al análisis de datos. . Frecuencias, moda.	. Proposiciones: Significado verdad o falsedad. . Negación de proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario.	. Relaciones de contenencia. . Igualdad de conjuntos. . Conjunto referencial. . Complemento de un conjunto. Simbolización y representación. . Algunos tipos de arreglos.	. Relación inversa. Diagramas de flechas. Propiedades antisimétrica y transitiva.
5o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación. . Fraccionarios con adición, sustracción, multiplicación y división. . Decimales con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos con aplicaciones. . Razones y proporciones. . Proporcionalidad directa e inversa.	. Construcciones con regla y compás. . Polígonos regulares. . Construcción de algunos sólidos. . Area de círculo. . Area y volumen de algunos sólidos.	. Conversiones con unidades de longitud, área, capacidad y peso. . Otras unidades de peso. . Unidades de duración. . Conversiones.	. Noción de promedio en un conjunto pequeño de datos.	. Proposiciones Conjuntivas, disyuntivas y condicionales.	. Extensión y comprensión. . Conjuntos: infinito (N), unitario, vacío. . Unión e intersección. . Otros tipos de arreglos.	. Recopilación de las operaciones conmutativas, asociativas, modulativas estudiadas. . Igualdades.

CUADRO No. 2

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA SECUNDARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 ANALISIS REAL	5 SISTEMAS DE DATOS	6 SISTEMAS LOGICOS	7 CONJUNTOS	8 RELACIONES Y OPERACIONES
6o.	. Sistemas de numeración: Historia Bases (sin operaciones): 2, 5, 10, 12. . $(\mathbb{N}, +, -, \times, \div, \leqslant, \geqslant)$. Potenciación, radicación y logaritmación. . $(\mathbb{Q}^+, +, -, \times, \div, \leqslant, \geqslant)$. Expresiones fraccionarias y decimales.	. Traslaciones. Paralelismo . Rotación. Angulos. . Perpendicularidad. . Triángulos y cuadriláteros. . Distancias. . Teorema de Pitágoras.	. Unidades de longitud (sistema métrico decimal y otros sistemas). . Repaso de unidades de área. . Unidades de amplitud de ángulos (vueltas y grados).	. Representación en la recta numérica $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}^+)$ (no "recta real"). . Relaciones: $\leqslant, <, \geqslant, >$	. Frecuencias absolutas. . Frecuencias relativas (porcentuales, fraccionarias). . Diagramas de barra y circular. . Frecuencias ordinarias o puntuales. . Frecuencias acumuladas.	. Conectivas. . Constantes y variables. . Términos y predicados. . Proposiciones abiertas y cerradas. Sustitución.	. Conjuntos finitos e infinitos. . Conjunto referencial. . Subconjunto. . Complemento de un conjunto. - Operaciones entre conjuntos numéricos.	. Relaciones binarias. . Propiedad antisimétrica y transitiva de algunas relaciones. . Operaciones unarias y binarias. . Diferencia entre operación y relación.
7o.	. $(\mathbb{Z}, +, -, \times, \div, \leqslant, \geqslant, \lfloor\ , \rfloor)$. $(\mathbb{Q}, +, -, \times, \div, \leqslant, \geqslant)$. Valor absoluto . Algoritmos con aplicaciones: porcentajes, descuentos, interés, cambio de moneda. . Algunos reales: π $\sqrt{2}$	. Movimientos rígidos: Rotaciones Reflexiones Traslaciones . Congruencias y semejanzas. . Homotecias . Polígonos . Círculo . Perímetro	. Otros sistemas de unidades de amplitud de ángulos. . Unidades de duración. Conversiones ("Complejos").	. Funciones crecientes y decrecientes. Correlación. . Funciones lineales. Razones Proporciones . Representación gráfica de funciones lineales y de gráfica lineal. Ejes, cortes, intercepto. . Ecuaciones lineales. Solución de ecuaciones lineales.	. Medidas de tendencia central: moda, media y mediana.	. Afirmaciones y negaciones verdaderas y falsas. . Proposiciones abiertas y cerradas. Cuantificación. . Expresiones con variables y paréntesis. . Igualdades.	. Conjunto de partes. Cardinal del conjunto de partes. . Subconjuntos del conjunto de partes. Combinaciones.	. Operaciones binarias. Propiedades: operación clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertiva. . Distributividad. . Linealidad de operadores.
8o.	. $(\mathbb{R}, +, -, \times, \div, \leqslant, \geqslant)$. Potenciación de: $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$.	. Simetrías activas . Grupo de simetrías Rotaciones, traslaciones y reflexiones (grupo de movimientos rígidos). . Homotecias (grupo). . Area del círculo	. Unidades de área en varios sistemas. . Conversiones.	. Función Lineal. Pendiente. . Función cuadrática. Gráficas. . Interpolación. . Función Cúbica. Gráficas. . Raíces cuadrada y cúbica. . Función inversa. Gráfica de la función inversa. . Restricciones de dominio y de recorrido. . Ecuaciones cuadráticas . Funciones exponenciales de base 2, 3, 4, ... 10. . Funciones logarítmicas de base 2, 3, 4, ... 10.	. Medición . Muestreo. . Disposición y representación de datos. . Escala.	. Predicados de uno y dos puestos. . Negación de cuantificadores.	. Colecciones finitas de conjuntos. . Colecciones exhaustivas de conjuntos disyuntos dos a dos. . Subconjuntos del producto cartesiano. Permutaciones.	. Relaciones binarias. Representación gráfica de relaciones. Propiedades: relación totalmente definida, sobreyectiva, funcional, inyectiva, biyectiva. Relación reflexiva, antireflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, antitransitiva. . Clasificaciones, particiones y equivalencias. . Seriaciones y órdenes. . Composición e inversión de relaciones.
9o.	. $(\mathbb{R}, +, \times)$ y $(\mathbb{C}, +, \times)$. $(\mathbb{R}^2, +)$ y $(\mathbb{R}^3, +)$ como espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$.	. Proyecciones . Dibujo técnico (planos, cortes, escalas y perspectivas). . Cónicas . Volumen de sólidos.	. Unidades de volumen y capacidad en varios sistemas. . Unidades de peso y masa en varios sistemas (densidad y peso específico).	. Polinomios. Factorización, división. . Sistemas de ecuaciones. . Funciones de 2 y 3 variables. . Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Matrices y determinantes . Sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas. . Decimales infinitos. . Interés compuesto.	. Medidas de dispersión.	. Demostración: directa, indirecta, refutación, contraejemplos.	. Azar y necesidad: vocabulario de probabilidad. . Eventos, espacios muestrales. . Medidas normalizadas sobre conjuntos finitos.	. Funciones: Composición de funciones. Función idéntica. Inversión de funciones. Función de dos variables.

CUADRO No. 3

SISTEMA		
CONJUNTO DE OBJETOS A	CONJUNTO DE OPERACIONES Ω	CONJUNTO DE RELACIONES $\mathcal{R}$

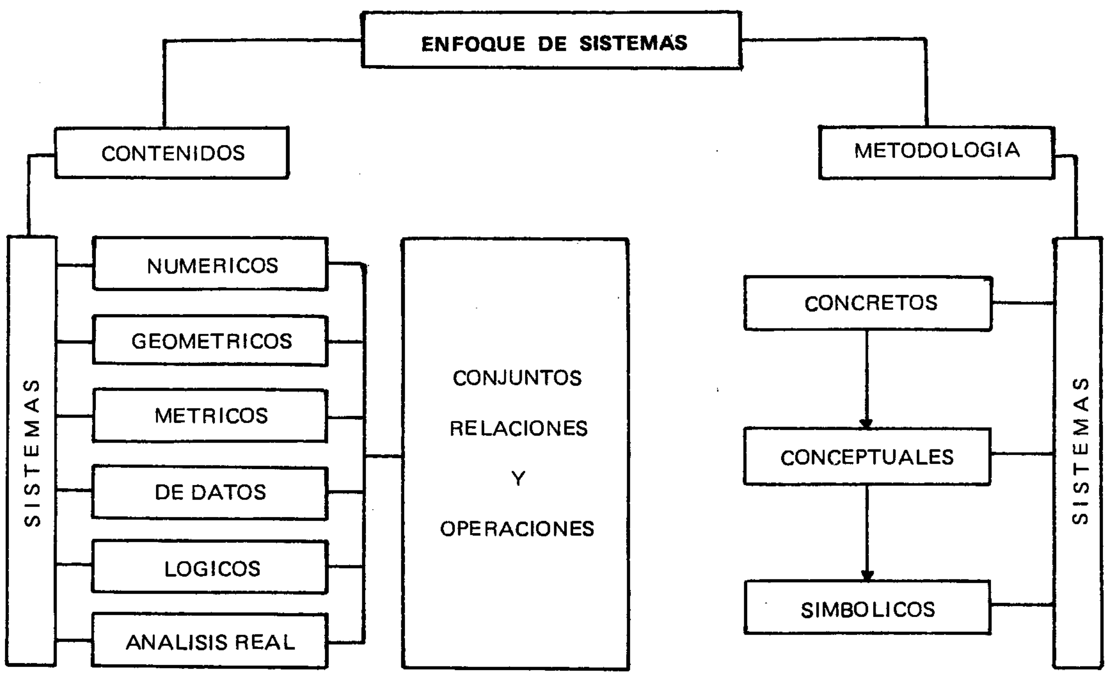
ARITMETICA		
Ejemplo: Un sistema de números enteros		$(Z\ \Omega\ R)$
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	$\{+, \times\}$	$\{<, \leqslant, >, \geqslant\}$

GEOMETRIA		
Ejemplo: Un sistema de líneas en el plano		$(\mathcal{L}, T, P)$
$\{L, M, N, \ldots\}$	{rotaciones, traslaciones}	$\{/\!/, \perp\}$

TEORIA DE CONJUNTOS		
Ejemplo: Un sistema de conjuntos		$(P(U), \Omega, C)$
$\{A, B, C, \ldots, \phi, U\}$	$\{U, \cap, '\}$	$\{\subset, \subseteq, \supset, \supseteq\}$

LOGICA		
Ejemplo: Un sistema de proposiciones		$(\mathcal{L}_o, K, R)$
$\{p, q, r, \ldots\}$	$\{\neg, \vee, \wedge\}$	$\{\equiv, \vdash\}$

CUADRO No. 4



Metodología

Vistas ya las ventajas del enfoque de sistemas, tanto en el interior de las Matemáticas, como en la articulación de las Ciencias, analicemos la metodología que se compagina mejor con este enfoque de sistemas elegido para los contenidos.

La metodología propuesta para el desarrollo del programa de Matemáticas está basado en la teoría sicológica de Jean Piaget, que se concreta en algunas técnicas de aprendizaje de las Matemáticas, como las de Zoltan P.Dienes, Hans Aebli, etc. Entre las varias que se podrían proponer, es quizá esta metodología la que resulta más acorde con los descubrimientos de la Sicología Evolutiva, con la Teoría de Sistemas, y con la realidad individual y social que vive el estudiante.

A. ASPECTO SICOLOGICO

La Sicología Evolutiva ha logrado establecer que los niños piensen en forma diferente a los adultos y que la evolución del pensamiento infantil al pensamiento adulto se logra a través de varios períodos sucesivos ordenados, identificados por características específicas y diferenciados por el grado de complejidad y de generalidad de las estructuras del pensamiento, propias de cada uno. Los períodos de la evolución del pensamiento son el Sensoriomotriz, el Preoperacional, el de las Operaciones Concretas y el de las Operaciones Formales.

Por consiguiente, un programa de Matemáticas centrado en el alumno debe atender a sus características, a sus posibilidades y a sus necesidades. Si atiende a sus características, se adecúa a su forma de pensar y a las capacidades que le ha permitido desarrollar el medio en que vive. Si atiende a sus posibilidades, establece metas cuyo logro supone un progreso siempre renovado hacia el nivel más desarrollado del pensamiento que sigue inmediatamente al nivel en que él se encuentra. Y si atiende a sus necesidades, constituye un estímulo constante que hace que el alumno se desarrolle día a día y adquiera las habilidades de razonamiento, cálculo y simbolización que le permitirán desempeñarse con éxito en su medio.

Un primer requisito para conseguir lo anterior es identificar los períodos y las etapas de desarrollo mental por los que atraviesan los estudiantes, en este caso, los estudiantes del Ciclo Básico. En Colombia puede decirse que los niños inician la Primaria aproximadamente a los 6 años y terminan la Secundaria hacia los 16. Según Piaget, entre estas edades el pensamiento, pasa por dos períodos: el de las operaciones concretas de 7 a 11 años, y el de las operaciones formales de 11 a 15 años.

En nuestro medio apenas se están realizando estudios exploratorios, que permiten conjeturar que el desarrollo de las operaciones concretas en los niños sí empieza hacia los siete años, aunque el período de adquisición de las operaciones formales puede prolongarse hasta los 17 ó 18 años en ciertos casos y ambientes el dominio de las operaciones formales no parece ser necesario, por lo cual este período no llega a estabilizarse ni siquiera en la edad adulta.[3]

Vale la pena insistir en que el maestro necesita conocer las características del pensamiento de sus alumnos, en cada una de estas edades, para poder realizar acertadamente su trabajo.

---

[3] Pre-escolar: Félix Bustos, Ministerio de Educación Nacional (MEN); Martha Arango, Centro Internacional de Educación (CINDE); Primaria: Araceli de Tezano, Universidad Externado de Colombia; Secundaria: Eloisa Vasco, CAFAM; Educación Especial: Miguel de Zubiría, Martha Lucia Pérez, Etti Stiwark, Mariela Tobón, Universidad Javeriana.

Dada la magnitud y la profundidad de la obra que Piaget y su escuela han realizado durante el medio siglo que llevan dedicado al estudio de la inteligencia, resulta muy difícil conocer completamente sus planteamientos y, más difícil aún, tratar de sintetizarlos o de explicarlos en pocas páginas. Sin embargo, dado que la metodología propuesta para desarrollar el programa oficial de Matemáticas está basada en gran parte en la Sicología Evolutiva Piagetiana, es preciso intentar un esbozo de varias de sus ideas. Por ejemplo, es importante mencionar algunas características del desarrollo intelectual en los períodos de operaciones concretas y de operaciones formales.

Una idea bastante general es que los niños pequeños son muy distintos de los adultos en aspectos tales como: métodos para conocer la realidad, ideas sobre el mundo y empleo del lenguaje. Un niño tiene una estructura mental diferente a la de un adulto y por eso muchas veces, aún cuando realicen las mismas acciones o repitan las mismas palabras, pueden pensar cosas muy diferentes. Por ejemplo, cuando un niño de menos de 7 años pasa un líquido del vaso a un plato, se fija solamente en los estados inicial y final del líquido y cree que hay más líquido en donde el nivel está más alto. Si el nivel más alto era el del vaso, dice que por pasarlo del vaso al plato se disminuyó el líquido. Un niño de 8 años, por ejemplo, ya sabe que por el solo hecho de pasarlo de un recipiente a otro no disminuye el líquido, pero no puede predecir acertadamente cosas que no se ciñan a lo que está viviendo. Un joven de 14 ó 15 años no tiene problema con el trasvase del agua y puede hacer conjeturas y formular hipótesis sobre cosas que no está viendo, y finalmente, los adultos pueden pensar que todo eso es tan fácil que no se justifica dedicarle tiempo.

Otro ejemplo: mientras un grupo de adultos puede realizar un diálogo o intercambiar diferentes opiniones, respetar puntos de vista diferentes, etc., los niños de pocos años realizan monólogos colectivos, donde cada uno habla y ninguno escucha. Para otros niños hablar entre sí puede constituir todo un descubrimiento porque les permite darse cuenta de que no todos piensan lo mismo.

De esta y otras consideraciones se puede concluir que el educador no puede suponer que lo que es válido para él, es también válido para el alumno. Y si aceptamos que los niños tienen una estructura mental diferente de la de los adultos, entonces el maestro debe estar atento a la forma como reaccionan los niños ante las distintas actividades y hechos de cada día. Algo muy importante que debe tener en cuenta el educador, es que los niños, especialmente los de menos edad, aprenden a partir de actividades concretas. El niño necesita actuar sobre las cosas para comprenderlas.

Mediante la actividad concreta y la manipulación de los objetos el niño va progresando en su desarrollo intelectual. Por eso en cada período se comporta de manera diferente. En los primeros años simplemente los manipula, los reúne o los separa, los hace girar, los golpea, etc. Unos años más tarde, no solo los manipula físicamente, sino que representa mentalmente operaciones que se puedan realizar con esos objetos y en un período posterior, puede representar mentalmente las actuaciones sobre los objetos, sin necesidad de mirarlos y puede expresar, mediante oraciones, su pensamiento, sus suposiciones y las consecuencias de las mismas.

Características como esas son las que se tienen en cuenta para decir que un niño está en uno u otro período de su desarrollo intelectual. Si solamente logra realizar ciertas manipulaciones coherentes, se ubica en el período preoperacional. Si además de las manipulaciones logra realizar representaciones mentales de acciones organizadas de modo que una acción puede combinarse con otra, y anularla o reforzarla, se ubica en el período de las operaciones concretas. Y cuando el joven además de todo lo anterior logra formular hipótesis sobre objetos que no están presentes, predecir conclusiones y trabajar con proposiciones en lugar de objetos concretos, se ubica en el período de las operaciones formales llamado también del pensamiento abstracto o hipotético - deductivo.

En términos generales, puede decirse que cuando el niño inicia la Educación Básica Primaria está pasando del período preoperacional al de las operaciones concretas y que en los primeros años de Educación Básica Secundaria debe empezar a tener comportamientos propios del período de las operaciones formales.

En cada uno de estos períodos el pensamiento se caracteriza por su habilidad para realizar ciertas acciones y por la propensión a hacer ciertas deducciones que a los adultos les parecen erróneas, aunque sean muy coherentes con la lógica predominante en ese período.

En el período de las operaciones concretas el pensamiento:

1) Adquiere propiedades como la reversibilidad, la transitividad, la asociatividad.
2) Realiza composiciones.
3) Reconoce transformaciones.
4) Puede realizar operaciones aritméticas (como la adición y la multiplicación).
5) Realiza mediciones (de longitud, de duración, de área, de masa, de peso, etc.).
6) Establece correspondencias, clasificaciones y seriaciones.

Resumiendo las características del pensamiento operatorio concreto, podemos decir que se caracteriza porque :

1) No se detiene en los estados inicial y final de las cosas o de los objetos, sino que tiene en cuenta las transformaciones e incluso las imagina.
2) Es reversible; ésto es, razona de modo que mentalmente puede imaginar una acción y anularla con la acción contraria para regresar al estado inicial.
3) Posee, en gran parte, las nociones de conservación.
4) No siempre requiere que las acciones que el niño realiza sobre los objetos o situaciones, se ejecuten "realmente", sino que pueden realizarse de manera imaginaria o mental. Por ejemplo, son operaciones concretas las que realizan los jugadores de ajedrez cuando frente al tablero piensan o se imaginan las posibles jugadas y sus consecuencias, tanto si tocan las fichas como si no tocan ninguna.

"El niño de 7 a 11 años actúa como si su principal tarea fuera organizar y ordenar lo que está inmediatamente presente: la extrapolación limitada de este organizar y ordenar hacia lo "que no está allí", es algo que hará cuando sea necesario, pero que es visto como una actividad restringida de casos especiales". (Sicología, 1978; p. 223).

El período siguiente es el de las operaciones formales, llamado también del pensamiento hipotético - deductivo. "La propiedad general más importante del pensamiento formal, aquella de la cual Piaget deriva todas las restantes, concierne a la distinción entre lo real y lo posible. A diferencia del niño del período de las operaciones concretas, el adolescente, al comenzar la consideración de un problema, trata de prever todas las relaciones que podrían tener validez respecto de los datos y luego intenta determinar, mediante una combinación de la experimentación y el análisis lógico, cuál de estas relaciones posibles tiene validez real". (Sicología, 1978; p. 224).

En la transición de las operaciones concretas a las operaciones formales se registra un paso inicial e importante, que equivale a una reorientación fundamental respecto de los problemas cognoscitivos. El adolescente ya no está preocupado exclusivamente por organizar aquello que llega de modo directo a sus sentidos; gracias a esa reorientación, tiene la capacidad potencial de imaginar todo lo que podría estar allí y de asegurarse, en mayor medida, de que hallará todo lo que de hecho se encuentra allí.

Esa reorientación implica algunas características del pensamiento formal:

El pensamiento formal es fundamentalmente hipotético - deductivo. El adolescente se mueve dentro del ámbito de lo hipotético con mucha más audacia que el niño.

El pensamiento formal es, por sobre todo, pensamiento proposicional.

Las entidades importantes que manipula el adolescente en su razonamiento ya no son los datos de la realidad en bruto, sino afirmaciones o enunciados (proposiciones) que "contienen" esos datos. El adolescente también realiza operaciones de primer orden, (clasificaciones, seriaciones, correspondencia), pero también hace algo más, que es precisamente lo que hace a su pensamiento formal antes que concreto. Toma los resultados de esas operaciones concretas, los moldea en la forma de proposiciones, y luego sigue operando con ellos. Es decir, establece diversos tipos de vínculos lógicos entre ellos.

Las operaciones formales son, pues, operaciones realizadas sobre los resultados de operaciones (concretas) anteriores.

Estas ideas sobre los dos períodos finales del desarrollo, pueden complementarse con otras ideas de John H. Flavell, un estudioso de la teoría Piagetiana y que ha sido ampliamente consultado en lo referente al aspecto sicológico de este marco teórico: "El desarrollo intelectual es un proceso de organización y lo que se organiza son operaciones activas, intelectuales, su organización en sistemas con estructura definible es el sine qua non (indispensable) para la "buena" cognición, vale decir, la cognición de mayor madurez genética". (Sicología, 1978; p. 180).

"El desarrollo ontogénico de estructuras puede verse como un proceso de aproximaciones sucesivas a una especie de equilibrio, un estado final que nunca se alcanza por completo. El desarrollo mismo pues, constituye una totalidad con una meta o ideal que subordina los medios". (Sicología, 1978; p. 67).

B. TRABAJO CON SISTEMAS

Lo expuesto acerca del enfoque de sistemas y de la Sicología Evolutiva debe orientar el trabajo del maestro en el desarrollo del programa de Matemáticas.

Una de las funciones de la metodología es la de determinar la forma de presentar los contenidos a los estudiantes. Específicamente en el caso de las Matemáticas, los contenidos deben trabajarse teniendo en cuenta las características y la forma de aprender propias del niño en cada período del desarrollo. En el Ciclo Básico, el niño aprende a partir de la experimentación y de la manipulación de los objetos.

El niño no encuentra los objetos en forma estática y aislada. El niño se encuentra siempre con sistemas. Pero, como se dijo al tratar las ventajas del enfoque de sistemas, no se pretende que los niños durante la Educación Básica Primaria aprendan en abstracto qué es un sistema ni qué estructura tienen los que con mayor frecuencia se trabajan (como serían las estructuras de grupo y anillo). La razón es que en los grados lo.,2o.,3o.,4o., y aún 5o., no poseen los conocimientos necesarios para entender lo que es un grupo o anillo. Es el maestro quien debe saber, en cada caso, con cuál sistema están trabajando los estudiantes; así podrá orientarlos para que lleguen a conclusiones válidas dentro de la situación que están trabajando y para que cuando se encuentren ante otra situación nueva, no le apliquen irreflexivamente las mismas conclusiones, sino que la analicen para ver en qué se parece y en qué se diferencia de la situación ya conocida.

El maestro acompaña al estudiante para que vaya adquiriendo conceptos que en la secundaria le permitirán estudiar más rigurosamente los sistemas y sus estructuras.

Tenemos, por ejemplo, el caso de un sistema formado por subconjuntos de un conjunto referencial (tapas de gaseosa). El niño de 6 ó 7 años no tiene la noción abstracta de conjunto. Se encuentra con una colección de tapas que forman una figura o agrupación visual. "Esa primera noción de colección figural que desarrolla el niño, es la de un sistema de objetos con sus relaciones de cercanía especial, en el contexto de la posibilidad de reunirlos o separarlos manualmente. No hay, pues, colecciones de un solo elemento y mucho menos colecciones vacías.

La noción de colección no figural que se va desarrollando poco a poco, es también la de un sistema de objetos capaces de una descripción común. Todavía aparecen las relaciones de cercanía, pero empiezan a predominar las relaciones de semejanza, en el contexto de la posibilidad de manipular, comparar, superponer, agregar y retirar objetos". (Concepto 1980).

Sólo más tarde, hacia los doce o catorce años, se independiza el niño de las colecciones figurales y no figurales y maneja un sistema con inclusiones, uniones e intersecciones. Así llega al concepto abstracto de conjunto y al de los sistemas formados por ellos con sus operaciones y relaciones. Este progreso puede permitirle pensar en conjuntos vacios, en conjuntos de un solo elemento, y distinguir un elemento aislado del conjunto formado por ese único elemento. Pero esa es una adquisición tardía. Por eso, no hace falta darle al niño de primaria definiciones de sistema, ni de conjunto, ni de la estructura de semigrupo o de álgebra de Boole. Pero sí es conveniente que el maestro sepa que los subconjuntos de ese referencial de tapas, T., con la unión, forman un semigrupo $(\mathcal{P}(T), \cup)$ y con la unión, la intersección y el complemento forman un álgebra de Boole $[\mathcal{P}(T), \cup, \cap, ']$.

El enfoque de sistemas permite estudiar articuladamente las diversas ramas de las Matemáticas; "no consideramos que la lógica, los conjuntos, las relaciones, las operaciones y las estructuras sean cinco regiones de las Matemáticas que puedan ser enseñadas sucesivamente y como temas completos y consistentes entre sí.

Nos parece que ellos deben aparecer conjunta y unificadamente como un lenguaje que permite no sólo expresar más precisamente las situaciones de la vida real, sino también comprenderla más profundamente" (Lógica 1976; p. 100).

En particular, el profesor debe preparar su clase estudiando cuidadosamente el sistema que va a presentar a sus alumnos. No todo lo que sepa e investigue sobre ese sistema se deberá explicar a los alumnos y, especialmente, se evitará dar palabras y definiciones abstractas, explicitar estructuras formales, o enseñar demasiados símbolos. Para orientación del profesor y para estructurar la presentación del material, podrán servir las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los objetos con los que estamos trabajando?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos objetos?
- ¿Cómo se agrupan esos objetos en conjuntos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos conjuntos?
- ¿Qué operaciones efectuamos con y entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas operaciones?
- ¿Qué relaciones descubrimos entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas relaciones?
- ¿Qué sistema estamos estudiando?
- ¿Cómo lo representamos?
- ¿Qué estructura tiene este sistema?
- ¿Cómo explicitamos simbólicamente esa estructura?

Estas doce preguntas aclaran la situación de cualquier cálculo matemático, desde el cálculo aritmético con números naturales, o el cálculo lógico con proposiciones, el cálculo de clases con los conjuntos como objetos, hasta el cálculo por antonomasia o por excelencia: el cálculo diferencial e integral en el cual los objetos son las funciones reales, o también, el cálculo geométrico sobre puntos, rectas, ecuaciones, o vectores.

Estas preguntas son perfectamente generales para todo tipo de descripción matemática y hasta para cualquier tipo de descripción científica que quiera ser rigurosa.

En particular, para el estudio de la lógica, todas estas preguntas deben estar activas desde el comienzo. "Recuérdese que los objetos son las proposiciones y las operaciones son la negación y las diez conectivas binarias. Para el estudio de las conectivas, recomendamos la utilización de los juegos lógicos al estilo de Dienes - Golding, Papy, etc., por coincidir con el enfoque que busca familiarizar al estudiante con una situación real hasta llegar a su normal formalización o matematización". (Lógica, 1976; pp. 100 - 101).

Este paso de las situaciones reales y concretas a la matematización conceptual y a algún tipo de formalización, así sea una simple simbolización, no es exclusivo de la lógica. Se trae este ejemplo porque las situaciones del lenguaje ordinario, tanto el de tipo declarativo, formado por proposiciones, como el de tipo imperativo, formado por instrucciones, presentan suficientes regularidades para servir de sistemas concretos, de los cuales puede construirse un sistema conceptual, el cual a su vez puede ser simbolizado con palabras, con símbolos, con circuitos, etc. La última formalización simbólica, con definiciones, axiomas y teoremas, puede esperar a la Media Vocacional o a la Universidad; en la Educación Básica es suficiente una mínima simbolización, así sea solo verbal y a lo más con algunos símbolos que sirven de "taquigrafías" de las expresiones verbales, para que esta simbolización ayude a manejar los sistemas conceptuales, no para estorbar su construcción.

La recomendación fundamental es la de no empezar por los sistemas simbólicos para tratar de que el alumno construya los sistemas conceptuales, sino comenzar por los sistemas concretos que él maneja, así el profesor los considere muy elementales, empíricos y pre-matemáticos, para que a través de la familiaridad con las regularidades de esos sistemas concretos vaya construyendo el sistema conceptual respectivo; una vez iniciada la construcción de éste, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aún traducir de unos sistemas simbólicos a otros, puesto que ya comprenden lo que quieren decir. Pero si se fuerza al alumno a manejar un sistema simbólico sin haber construido el sistema conceptual a partir de los sistemas concretos, ese sistema simbólico puede bloquear la construcción del sistema conceptual. La concepción de los sistemas matemáticos que motiva la recomendación anterior es la siguiente: cualquier sistema matemático que el profesor vaya a presentar a sus alumnos puede analizarse como un rayo de luz que pasa por un prisma: si se observa cuidadosamente, se encontrará que tiene un núcleo central, el que es verdaderamente importante, que es el respectivo sistema conceptual. Sobre él, a un nivel superficial, aparecen uno o varios sistemas simbólicos para representar ese único sistema conceptual. Y bajo el sistema conceptual, a un nivel profundo, casi diríamos; arcaico, aparecen uno o varios sistemas concretos, de cuyas regularidades es posible construir el mismo sistema consceptual.

Desafortunadamente, los libros solo pueden ofrecernos los sistemas simbólicos: no se puede imprimir otra cosa que palabras, símbolos y gráficas. Por eso es fácil creer que el verdadero sistema matemático es el sistema simbólico, y así trató de hacerlo creer la filosofía formalista de las matemáticas. Un buen matemático puede reconstruir el sistema conceptual a partir del sistema simbólico, pero los niños y jóvenes más bien pueden experimentarlo como un obstáculo para llegar al sistema conceptual. Ellos tienen una manera mucho más natural de construir el sistema conceptual: jugando con sistemas concretos que lleven a esa construcción. Tarea importante del profesor es la de identificar esos sistemas concretos, ojalá de entre los sistemas que sean familiares para el alumno en su cultura y en su edad específicas, para organizar actividades de juego, de ejercicio, de comparación, que hagan resaltar las regularidades que van a permitir la construcción conceptual respectiva.

Con las colecciones figurales y no figurales de dos o más objetos pueden organizarse una serie de juegos que lleven al sistema conceptual de los números naturales, resaltando las ordenaciones o seriaciones internas de cada colección y las clasificaciones en colecciones iguales de numerosas; la simbolización con palabras, palitos, cifras indo-arábigas o romanas vendrá después. Pero los mismos juegos de colecciones pueden servir para resaltar otras operaciones manuales como reunir y separar, y otras relaciones como las de inclusión y disyunción, para permitir una construcción de un primer sistema conceptual de tipo conjuntista, así no se simbolicen formalmente esas operaciones y relaciones.

Sistemas concretos como los de avanzar o retroceder por las calles de la ciudad, observar subidas o bajadas de temperatura en un termómetro, o jugar con consignaciones y retiros de una caja de ahorros, son la base para la construcción del sistema conceptual de los números enteros con las operaciones de adición y sustracción, y las relaciones de orden aditivo. Obsérvese que las calles mismas, o el termómetro, o el estado de cuenta, no es un buen modelo para el sistema conceptual: son los sistemas activos mencionados los que sirven de sistemas concretos para la construcción del sistema conceptual de los enteros como operadores activos, en los que la adición aparece como una mera composición o aplicación sucesiva de operadores. En la misma forma se aprovechan sistemas concretos conocidos por el alumno, como de las vueltas y fracciones de vuelta, el de los metros o pulgadas y fracciones de las mismas unidades, el de los litros o galones y fracciones de los mismos, para construir el sistema conceptual de los fraccionarios como operadores reductores o ampliadores sobre magnitudes. Los simbolismos vienen después: la mitad, 1/2, 0.5 o el 50% nos muestran cuatro símbolos posibles para el mismo concepto. Nótese que no hace falta "dividir un todo en partes" ni utilizar rectángulos o ponqués para dividirlos en partes de áreas iguales, entre otras cosas, porque este sistema concreto es el más difícil para los niños de 6 a 9 años. También podría utilizarse, si se está seguro de que los niños tienen suficiente familiaridad y dominio del mismo.

Lo ideal, en cuanto a metodología se refiere, es que el maestro organice las actividades de aprendizaje de modo que el estudiante se enfrente siempre con problemas apropiados para la etapa en que se encuentra, o sea aquellos que presentan situaciones propicias para el desarrollo de las estructuras de la etapa inmediatamente siguiente. La manipulación de objetos permite apreciar qué acciones son capaces de hacer los niños con ellos y, a partir de allí, diseñar actividades pedagógicas para llevarlos a imaginar acciones posibles sobre ellos y prever los efectos de éstas. Conviene organizar el trabajo escolar de modo que el estudiante pueda ir superando progresivamente las etapas del aprendizaje de las Matemáticas propuestas por Zoltan P. Dienes. Es muy acorde con la teoría de Piaget, permitir el juego libre y el juego estructurado durante un tiempo suficiente, para la familiarización con las operaciones y las relaciones y para la interiorización de las acciones concretas sobre los sistemas que inventa el niño.

En un grupo escolar puede suceder que el desempeño de los estudiantes refleje grados diferentes de su desarrollo cognoscitivo; que algunos reflejen una mezcla de estructuras (propias del período anterior al que se supone que les corresponde por su edad), organizadas pero inadecuadas; que otros presenten ya el uso vacilante y esporádico de estructuras nuevas que aún no se han organizado por completo; y que otros reflejen una mayor organización y estructuración del pensamiento. El maestro debe tratar de detectar esas diferencias, que, en la mayoría de los casos, pueden ser perfectamente explicables, ya que si bien los períodos y las etapas del desarrollo se suceden en un orden riguroso, no se presentan en todas las personas a la misma edad cronológica. En ese caso, no es preciso exigir a todos el mismo nivel de desempeño intelectual, sino tratar de que cada uno llegue al dominio de las estructuras del nivel en que se encuentra y presentarle situaciones en las que se pueda empezar a generar un avance al nivel siguiente. Ese avance solo comenzará cuando la maduración neuronal y el procesamiento más o menos consciente de la información ya adquirida, lo permitan.

Una actitud permanente de búsqueda, de observación, de análisis de las respuestas de los estudiantes, de las dificultades que encuentran, puede dar al maestro criterios y pautas para mejorar el programa, para adecuarlo al medio; en una palabra, para lograr que sea lo que debe ser: un instrumento que favorezca el desarrollo integral de los educandos y que los prepare en la vida para la vida.

BIBLIOGRAFIA

Bandet, J. R. Zarasana. ***Hacia el aprendizaje de las Matemáticas.*** Buenos Aires, Editorial Kapelusz, 1975.

Berman, Serge y René Bezard. ***Contando y Midiendo. Introducción a la Enseñanza de las Matemáticas. Números en la Escuela de Párvulos.*** México, Editorial Uthea, 1974.

Bustos, Félix. ***El aprendizaje. Alternativa Piagetiana.*** Cúcuta: Grupo Libertad Editores. 2a. edición, 1983.

Castelnuovo, Emma. ***Didáctica de la Matemática Moderna.*** México, Editorial Trillas, 1973.

Dienes, Zoltan P. ***Las seis etapas de aprendizaje en Matemática.*** 2a. edición. Barcelona, Teide, 1975.

Dienes, Zoltan P. y E. U. Golding. ***La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria.*** Barcelona, Editorial Teide, 1973.

Flavell, John H. ***La Sicología Evolutiva de Jean Piaget.*** 5a. edición, Buenos Aires, Paidós, 1975.

Furth, H. G. y Wachs, H. ***La Teoría de Piaget en la Práctica.*** Buenos Aires, Kapulusz, 1978.

Ginsburg, Helbert y Silvia Opper. ***Piaget y la Teoría del Desarrollo Intelectual.*** Madrid, Editorial Prentice, Hall Internacional, 1977.

Kline, Morris. ***El fracaso de la Matemática Moderna.*** Buenos Aires. Editorial Siglo XXI, 1976.

Mazure, Joseph. ***El aprendizaje de la Matemática Moderna.*** Barcelona, Editorial Planeta, 1981.

Mialaret, G. ***Las Matemáticas. Cómo se aprenden y cómo se enseñan.*** Madrid, Pablo del Río, editor, 1977.

Piaget, Jean. ***Sicología y Pedagogía.*** Barcelona, Ediciones Ariel, 1977.

Piaget, Jean y E. W. Beth. ***La Enseñanza de las Matemáticas.*** Madrid, Editorial Aguilar, 1963.

Piaget y otros. ***La Enseñanza de la Matemática Moderna.*** Madrid, Editorial Alianza, 1978.

Polya, G. ***Cómo Plantear y Resolver Problemas.*** México, Editorial Trillas, 1969.

Santalo, Luis A. ***La Educación Matemática Hoy.*** Barcelona, Editorial Teide S.A., 1975.

Vasco, Carlos E. ***Relatores y Operadores.*** Memorias del IV Coloquio Colombiano de Matemática. Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, 1975.

—. ***Lógica, Conjuntos y Estructuras.*** UNESCO - CIAEM. La Educación Matemática en las Américas IV. Montevideo, 1976.

—. ***Relaciones, Operaciones y Sistemas.*** Conferencia mimeografiada para el programa de Maestría Universidad NOVA - CAFAM y para el Seminario sobre Jean Piaget en la Universidad Nacional. Bogotá, 1978.

—. ***El Concepto de Sistema como Clave del Currículo en Matemática.*** Notas de Matemática No. 10. Bogotá, Imprenta Universidad Nacional, 1980.

(Estos y otros trabajos de Carlos E. Vasco han sido reunidos en el libro: ***Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas.*** Bogotá, División de Materiales Impresos y Audiovisuales, Ministerio de Educación Nacional, 1984).

PROGRAMA CURRICULAR

PROGRAMADORES AUTORES:
Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Teresa León Pereira

COLABORADORA:
Virginia Cifuentes de Buriticá

ASESOR:
Universidad Nacional de Colombia
Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

Recomendaciones generales

Es de esperar que como resultado de su proceso de desarrollo integral, los estudiantes lleguen a este grado con interés, clara conciencia de sus posibilidades y de sus limitaciones, y con deseos de seguir construyéndose y construyendo conocimientos, habilidades, actitudes y valores positivos.

En condiciones normales, su pensamiento debe haberse desarrollado progresivamente desde las habilidades para manejar lo visible, presente y manipulable, hasta comprender que las posibilidades de la mente sobrepasan esos límites y que pueden penetrar en otros mundos como el de lo imaginario y lo hipotético; que pueden disfrutar formulando, analizando y refutando conjeturas; que pueden cuestionar las teorías, sean ellas matemáticas o de otra índole, y ver si dichas teorías son suficientes para resolver problemas prácticos o teóricos, reales o hipotéticos; en fin, que en el cultivo de la mente existen retos y desafíos cuyas respuestas exigen una especie de gimnasia mental por lo menos tan importante, necesaria y benéfica como la gimnasia física.

En otras palabras, los estudiantes estarían entrando al período que Piaget y su escuela denominan de las operaciones formales o del pensamiento hipotético-deductivo. Esta circunstancia puede ser aprovechada por los adultos para interesar a los estudiantes por conocer temas y realizar actividades a las cuales en primera instancia no se les reconoce utilidad alguna y, también, para ayudarlos a distinguir entre lo realmente inútil y aquello cuya utilidad va más allá de lo trivial, inmediato y rutinario.

Discusiones y análisis sobre el grado de desarrollo cultural y la importancia histórica de los pueblos que han logrado un mayor cultivo de la mente, y sobre el impacto del mejoramiento de nuestras habilidades lógico-matemáticas en el futuro de nuestro país, seguramente motivarán a los estudiantes de este grado para interesarse a trabajar más allá de la utilidad inmediata de los temas, y más allá del estrecho interés por sacar la mínima calificación necesaria para pasar al grado siguiente.
Así podrán recrearse con las primeras demostraciones y, encontrarle sentido al trabajo con sistemas de números reales, con conjuntos infinitos y con otros temas de este grado, que presentados de manera dogmática y memorística producen rechazo y aparecen como carentes de interés y utilidad, pero presentados en forma activa y a partir de sistemas concretos (o que se han vuelto concretos por la familiaridad con ellos) son muy atractivos e interesantes y revelan prontamente su importancia teórica y sus aplicaciones prácticas.

Este programa de matemáticas para octavo grado es parte de una programación secuencial y progresiva para la Educación Básica (primaria y secundaria) y para la Media Vocacional. De ahí que la primera recomendación para trabajar con él es hacer un estudio del Marco General del área. Dicho marco se encuentra en el libro de "Marcos Generales de los Programas Curriculares" y en los volúmenes I y II sobre "Un nuevo enfoque para la Didáctica de las Matemáticas" del Dr. Carlos E. Vasco U.

Las metas que se espera lograr durante el año pueden resultar de la integración de tres propuestas: una hecha por los alumnos, otra hecha por los profesores y la presentada por el Ministerio de Educación. Los alumnos pueden decir, de acuerdo con sus expectativas y su saber (saber del alumno) qué esperan lograr en ese grado en el área de matemáticas. Los profesores pueden explicitar de acuerdo con su saber (saber del maestro) lo que esperan que sus alumnos logren, y el Ministerio de Educación también explicita unas metas a través de los objetivos generales de las Matemáticas para la Educación Básica y de los objetivos generales para Octavo Grado.

Aún cuando las tres propuestas resulten diferentes, son todas importantes y deben analizarse e integrarse para lograr la adecuación del programa a las necesidades, características y expectativas, etc. de los alumnos en su medio.

En cuanto a la propuesta del Ministerio, la primera prioridad la tienen los objetivos generales de matemáticas para la Educación Básica y en particular los de motivación para las Matemáticas, y los de formulación, análisis y resolución de problemas de la realidad a través de modelos matemáticos de la misma. La segunda prioridad la tienen los objetivos generales de octavo grado.

Merecen especial atención los objetivos relacionados con el desarrollo del pensamiento matemático, con la capacidad de argumentar, inferir, demostrar, refutar, verificar, evaluar, etc. Lo importante es que los estudiantes tengan cada vez ideas más claras, coherentes y organizadas; mayor capacidad de análisis y de búsqueda de soluciones creativas. (No se trata de iniciar un estudio teórico de los métodos de demostración, sino de propiciar un ambiente para que avancen progresiva y seguramente por ese mundo maravilloso del pensamiento matemático, de modo que lleguen a valorar también la coherencia entre lo que dicen y hacen y entre lo que son y lo que desean llegar a ser).

El programa se organiza, como en los demás grados, por sistemas. Pero ello no implica que haya un orden rígido para desarrollar los ocho tipos de sistemas. Tampoco se sugiere que los temas de cada sistema se trabajen aislada o independientemente.

El programa se propone como una ayuda para los profesores; su extensión considerable no implica mayor número de contenidos para el grado; se debe más bien a un intento por suplir, por lo menos en parte, las carencias de capacitación.

En caso de que no se puedan tratar todos los ocho tipos de sistemas propuestos, en octavo grado se puede dar más tiempo a los cinco primeros: numéricos, geométricos, métricos, analíticos y de datos. A su vez, los geométricos y métricos pueden verse en forma integrada; los sistemas métricos pueden utilizarse para practicar los numéricos; las fórmulas geométricas ayudan a avanzar en los sistemas analíticos; los sistemas de datos permiten profundizar y ejercitar los sistemas de reales y fraccionarios y sus expresiones decimales, etc. Los tres tipos de sistemas restantes, a saber: los lógicos, los de conjuntos y los de relaciones y operaciones pueden también desarrollarse desde dos puntos de vista: integrados con todos los demás o como temas específicos. Si no hay tiempo de verlos como temas específicos, es conveniente seleccionar algunos contenidos de esos sistemas para tratarlos en forma integrada con alguno de los cinco primeros.

Esta visión del programa evita dificultades debidas a la extensión del mismo, ya que a medida que se desarrolla un sistema se pueden ir construyendo y aplicando los demás. La creatividad y experiencia del profesor de matemáticas son ampliamente suficientes para resolver estas dificultades de selección e integración de los temas.

Los objetivos específicos y los comentarios sobre evaluación son ayudas para preparar las sesiones de trabajo. Los contenidos básicos y las sugerencias metodológicas permiten al profesor ubicarse dentro de una programación general para que así pueda ampliar y profundizar dichos contenidos y orientar a los alumnos en sus actividades exploratorias. De ninguna manera son para dictárselos, ni para exigírselos de memoria, ni para evaluarlos según la precisión con que los reciten.

A medida que se trabaja cada sistema conceptual del programa, se introduce un álgebra apropiada para ese sistema. No se trata de desarrollar exhaustivamente todos los temas que tradicionalmente se desarrollaban en álgebra de tercero de bachillerato. Cada álgebra es un sistema simbólico que permite obtener símbolos para resultados a través de manipulaciones simbólicas. No debe, pues, presentarse como un puro juego de marcas sin sentido, sino como una manera eficiente de representar el sistema conceptual respectivo. No tiene mucho sentido manejar un sistema simbólico sin haber construido en forma al menos intuitiva el sistema conceptual para el cual esa álgebra es sistema simbólico. El enfoque constructivista de los conocimientos requiere más tiempo, pero da mejores resultados a largo plazo.

El asesor y las programadoras agradecen los comentarios y sugerencias tendientes a mejorar esta propuesta.

Objetivos generales

—Participar en la transformación positiva del ambiente de trabajo en Matemáticas.

— Avanzar en el desarrollo del pensamiento reflexivo, analítico, crítico, inventivo y argumentativo, en cuanto constituye un aspecto del desarrollo integral de la persona.

— Desarrollar habilidades para construir y/o apropiarse de estrategias que ayuden a formular, analizar y resolver problemas, de modo que se logre una mejor comprensión de los conceptos y una organización cada vez más fundamentada y coherente del pensamiento.

— Vivenciar y analizar las características y las exigencias de una evaluación, que contribuya a mejorar la educación y tenga efectos positivos más allá de la vida escolar.

— Avanzar en la construcción activa de herramientas básicas para diferentes tipos de cálculo.

— Construir algunos sistemas con el conjunto de los números reales e identificar las propiedades de las operaciones y de las relaciones que se definen en cada uno.

— Construir activamente el concepto de función y de manera particular las de gráfica lineal y las cuadráticas.

— Asociar las ecuaciones lineales y las cruadráticas con las funciones correspondientes y desarrollar formas para encontrarles solución.

— Desarrollar habilidades que permitan comprender y manejar adecuadamente situaciones de la vida real como son las de tipo económico y financiero.

— Propiciar la exploración activa, la comprensión, la representación y el manejo del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación.

— Inferir del estudio dinámico de los polígonos y del análisis correspondiente, una caracterización de los mismos.

— Abstraer el concepto de grupo como estructura matemática, de las semejanzas encontradas en diferentes sistemas.

— Desarrollar algunos elementos básicos para el trabajo en informática como son las habilidades para la formulación, interpretación, seguimiento, crítica y transformación de algoritmos o listas de instrucciones y su representación en forma de diagrama de flujo.

Contenidos

SISTEMAS CON NUMEROS REALES

- Operadores racionales: ampliadores y reductores de longitudes
- Conmensurabilidad e inconmensurabilidad de longitudes
- Operadores ampliadores y reductores que no son racionales (irracionales)
- Representación de operadores racionales e irracionales en la recta numérica
- Operador reflector
- El conjunto de los números reales: sistemas simbólicos
- Relaciones de orden aditivo en $\mathbb{R}$
- Operaciones en $\mathbb{R}$, +, -, x, ÷, potenciación, radicación y logaritmación
- Propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$
- Formulación y resolución de problemas
- Formulación, interpretación y aplicación de algoritmos

FUNCIONES LINEALES Y CUADRATICAS Y ECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO

- Funciones lineales
- Funciones de gráfica lineal
- La recta, pendiente
- Ecuaciones lineales
- Funciones cuadráticas
- Representación de funciones cuadráticas
- Ecuaciones cuadráticas
- Problemas

GEOMETRIA Y MEDICION

- Simetrías activas
    - Rotaciones
    - Reflexiones
    - Ejes de simetría
- Hacia la construcción del concepto de grupo
    - Grupos de simetrías
    - Grupos de traslaciones en un mismo plano
    - Grupos de rotaciones con un mismo centro y en un mismo plano
    - Grupo de homotecias con un mismo centro y en un mismo plano
- Polígonos
    - Clasificación y caracterización
    - Perímetros y áreas.
- Circunferencia y círculo
- Relación del perímetro y del área de un polígono con la longitud de su lado

MATEMATICA FINITA Y SISTEMAS RELACIONALES

- Permutaciones
    - Relación con subconjuntos del producto cartesiano
    - Número de permutaciones de un conjunto
    - Número de permutaciones entre los elementos de dos conjuntos
- Colecciones finitas de conjuntos
    - Colecciones exhaustivas de conjuntos disyuntos dos a dos
    - Partición de un conjunto. Clasificaciones
    - Equivalencia correspondiente a una partición
    - Relaciones de equivalencia
    - Relación de orden
    - Relaciones binarias: propiedades
    - Composición de relaciones

Unidad I

NUMEROS REALES

Introducción

El tema central de esta unidad es el trabajo activo con sistemas en los cuales el conjunto numérico es el de los reales. De hecho hay que formular una propuesta de construcción de los mismos.

Dicha construcción se realiza mediante el enfoque de operadores. Este enfoque permite construirlos activamente como ampliadores o reductores de longitudes.

La conmensurabilidad y la inconmensurabilidad como relaciones posibles entre longitudes son ideas básicas para el desarrollo de la unidad y en general para la construcción y el trabajo con los números reales.

La metodología sugerida busca que los estudiantes puedan avanzar desde los sistemas con los números racionales hasta estos nuevos sistemas. Algunos casos de inconmensurabilidad de longitudes que han sido estudiados desde los pitagóricos se toman como punto de partida para hacer ver la necesidad de construir un conjunto más amplio que el de los números racionales. Podríamos decir que estas transformaciones de longitudes forman un sistema concreto para la construcción de sistemas conceptuales con los números reales.

A medida que el desarrollo del tema lo requiere se van introduciendo nociones de álgebra. No se trata de aprender unos procedimientos para luego aplicarlos, sino de construirlos a medida que sean necesarios y útiles. A propósito de álgebra, conviene que los docentes profundicen la concepción que tienen al respecto; que analicen cuáles álgebras conocen; cuáles se trabajan en el Bachillerato y por qué con demasiada frecuencia se trabaja como si solo existiera una.

En realidad, un álgebra es un sistema simbólico tan bien diseñado para el sistema conceptual respectivo, que permite obtener símbolos para los resultados a través de la mera manipulación de los símbolos para los argumentos. Cada sistema conceptual puede tener una o varias álgebras asociadas con él, más o menos eficientes para cada tipo de tarea. Pero en cualquier caso, lo más importante es el sistema conceptual.

Objetivos generales

—Analizar algunas razones para la construcción de sistemas numéricos más amplios que los de los números racionales.

—Adquirir los conocimientos básicos para introducir el trabajo con números reales, el álgebra de funciones y los primeros elementos de los métodos de demostración.

—Construir activamente los números reales como ampliadores o reductores de longitudes.

—Extender las operaciones y las relaciones trabajadas en los sistemas ya conocidos, a los sistemas en los cuales el conjunto numérico es el de los reales.

—Facilitar el manejo comprensivo y sistemático de las aproximaciones decimales y de las fracciones decimales como expresiones que permiten trabajar con los números reales.

—Formular, analizar y resolver problemas que permitan el desarrollo de la mente a través de la comprensión de aspectos importantes de la construcción de los números reales y de las particularidades de su aplicación.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVO ESPECIFICO

1 Identificar operadores ampliadores y reductores de longitudes y aplicarlas a éstas.

CONTENIDOS BASICOS

En grados anteriores se ha trabajado con operadores que transforman las magnitudes a las cuales se aplican. Recordemos algunos conceptos:

—Los operadores o transformadores son construcciones mentales que se asemejan a ciertas máquinas que aumentan, disminuyen, amplían, reducen, dejan como está, etc. la magnitud a la cual se aplican.

—Si a una magnitud se le aplica un operador de la forma ax (con a un número natural mayor que 1) o $\frac{a}{b}x$ (con a y b números naturales mayores que 0 y tales que $a > b$) el resultado es una ampliación de la magnitud.Si $a < b$, el resultado es una disminución o reducción de la magnitud.

—También consideramos al cero como un operador reductor muy fuerte. $0x$ es un anulador de magnitudes, y al uno como un operador muy particular $1x$, o $\frac{a}{a}x$ es un operador que deja intacta la magnitud a la que se le aplica. Lo llamamos "operador idéntico" u "operador neutro".

—Todos estos operadores o transformadores que pueden expresarse como ax o $\frac{a}{b}x$ se llaman operadores racionales positivos, cuando a y b son números naturales mayores que 0.

Ejemplo:

Apliquemos los operadores $2x$ y $\frac{5}{3}x$ a una longitud de 6 metros.

$2x$ es el operador que duplica la magnitud dada:

$2x\ (6m) = 12\ m$

$\frac{5}{3}x$ es el operador que quintuplica y luego reduce a la tercera parte (o viceversa) la magnitud dada:

$$\frac{5}{3}x(6m) = \frac{5 \times 6m}{3} = \frac{30m}{3} = 10m$$

En los dos casos se produjo una ampliación de la magnitud inicial. Estos dos operadores son ampliadores.

—Si a una magnitud se le aplica un operador de la forma $\frac{1}{b}x$ (con $b > 1$), o $\frac{a}{b}x$ (con $a < b$),

el resultado es una reducción de la magnitud.

Ejemplo:

A una longitud de 20 m apliquemos los operadores $\frac{1}{4}x$ y $\frac{3}{5}x$:

$\frac{1}{4}x$ es el operador que reduce a la cuarta parte:

$$\frac{1}{4} \times (20m) = \frac{20m}{4} = 5m.$$

$\frac{3}{5}x$ es el operador que triplica y luego reduce a la quinta parte o viceversa:

$$\frac{3}{5} \times (20m) = 3x\frac{20m}{5} = 3x\ (4m) = 12m.$$

$$20m \xrightarrow{\frac{1}{4}x} 5\ m$$

$$20m \xrightarrow{\frac{3}{5}x} 12\ m$$

En ambos casos se produjo una reducción de la magnitud inicial. Estos operadores son reductores.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Conviene hacer un repaso y trabajar lo suficiente con diferentes operadores para que los alumnos puedan fácilmente identificar el efecto y el resultado de aplicarlos a una magnitud. Es conveniente empezar solo con longitudes. Si se nota progreso rápido, puede ensayarse a ampliar o reducir áreas y volúmenes.

Para visualizar estas ampliaciones y reducciones se puede usar material concreto, como pitas para la longitud, hojas de papel periódico o el piso para el área, etc. Lo importante es que el alumno llegue a imaginar intuitivamente los efectos y los resultados aproximados de aplicar dichos operadores a una magnitud, y ojalá a calcular mentalmente valores numéricos, al menos aproximados, de esos resultados.

Es importante insistir en que lo importante son los operadores ampliadores y reductores conceptuales, construidos por el cerebro, y no tanto los símbolos para designarlos. La mitad, el 50%, $\frac{1}{2}\times$, $\frac{4}{8}\times$, y 0.5 son apenas nombres distintos para el mismo operador que extrae la mitad. La diferencia entre el sistema concreto de las longitudes con sus operaciones y relaciones, el sistema conceptual de los operadores o transformadores con sus respectivas operaciones y relaciones, y los sistemas simbólicos utilizados para representarlos, es crucial para el progreso en el desarrollo de la unidad sobre números reales.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

2. Utilizar una longitud como unidad para medir una longitud mayor.

3. Utilizar una longitud mayor para medir una longitud menor.

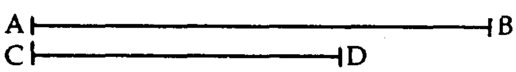
4 Identificar cuándo dos longitudes diferentes son conmensurables.

5 Formular teóricamente y verificar empíricamente la hipótesis de la conmensurabilidad de cualquier pareja de longitudes.

CONTENIDOS BASICOS

Dados dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ con $\overline{AB}$ más largo que $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ se puede medir utilizando como patrón a $\overline{CD}$ y $\overline{CD}$ se puede medir tomando como patrón a $\overline{AB}$.

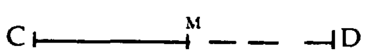
Si los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son los siguientes:



1. Midamos $\overline{AB}$ tomando como patrón $\overline{CD}$.

Una manera de efectuar esta medición es ver cuántas veces se repite el patrón para llegar a coincidir con el segmento de longitud mayor. Si no cabe un número exacto de veces, se recurre a un submúltiplo como patrón auxiliar.

En nuestro ejemplo, como el patrón solo cabe una vez y sobra un segmento más corto que $\overline{CD}$ recurrimos a la mitad del patrón como patrón auxiliar o sea el segmento $\overline{CM}$.



$$\overline{CM} = \frac{1}{2} \times \overline{CD}$$

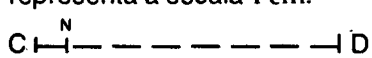
Esta unidad auxiliar cabe 3 veces en la longitud AB:

Así: $\overline{AB} = 3\times\overline{CM}$, o simplemente $\overline{AB} = 3\ \overline{CM}$, omitiendo el signo "x" ("veces", "de", "por")

$$\overline{AB} = 3\left(\frac{1}{2}\overline{CD}\right) = \frac{3}{2}\overline{CD}$$

Podemos decir que $\overline{AB}$ mide una vez y media la longitud de $\overline{CD}$: $\overline{AB} = 1\frac{1}{2} \times \overline{CD}$.

También podemos elegir como unidad auxiliar la décima parte de la unidad inicial (longitud $\overline{CD}$). Suponiendo que midiera 1 decímetro, la décima parte de esa longitud sería 1 centímetro. Nuestra unidad auxiliar sería ahora la longitud $\overline{CN}$ que suponemos representa a escala 1 cm:



Esta unidad auxiliar cabe exactamente 15 veces en la longitud $\overline{AB}$.

El resultado de esta medición es 15 cm o sea 1 dm y 5 cm.

$$\overline{AB} = 15\ \overline{CN} = 15\left(\frac{1}{10}\overline{CD}\right) = \frac{15}{10}\overline{CD}$$

$$\overline{AB} = 1.5\ \overline{CD}$$

Así decimos que $\overline{AB}$ es conmensurable con $\overline{CD}$.

Otra manera de hacer la medición es buscar un operador ampliador que aplicado a la longitud más corta ($\overline{CD}$) produzca la longitud más larga (AB). En este caso el operador es el ampliador 1.5,

$$1\frac{1}{2} \text{ o } \frac{3}{2}$$

Así

$$\overline{AB} = 1\frac{1}{2}\overline{CD} \text{ o } \overline{AB} = \frac{3}{2}\overline{CD}$$

2. Ahora midamos la longitud más corta ($\overline{CD}$) tomando como unidad la longitud más larga ($\overline{AB}$).

Una manera de hacerlo es buscar un operador reductor que aplicado a la longitud más larga ($\overline{AB}$) produzca la más corta ($\overline{CD}$).

Otra manera de hacerlo es tratar de formar dos longitudes iguales repitiendo consecutivamente cada una de las dos longitudes dadas hasta que coincidan sus extremos, y luego ver con cuántas veces la longitud $\overline{AB}$ y con cuántas veces la longitud $\overline{CD}$ se forman esas dos longitudes. Se trata de encontrar dos números naturales m y n tales que $m\overline{CD} = n\,\overline{AB}$.

En nuestro ejemplo se observa que 3 longitudes pequeñas coinciden con 2 de las largas:

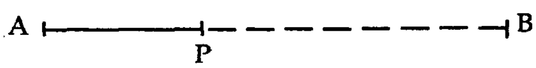
$$3\,\overline{CD} = 2\,\overline{AB}.$$

Esto significa que para obtener $\overline{CD}$ a partir de $\overline{AB}$, se tendría que duplicar $\overline{AB}$ y luego reducir este resultado a la tercera parte, es decir aplicar a $\overline{AB}$ el operador $\frac{2}{3}\times$, o simplemente $\frac{2}{3}$:

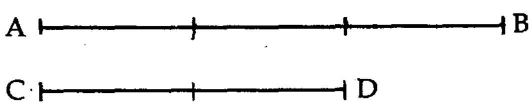
$$\overline{CD} = \frac{2}{3}\,\overline{AB}.$$

Otra manera de efectuar esta medición es subdividiendo las dos longitudes en partes iguales de largas, encontrando así una unidad auxiliar que sea a la vez submúltiplo de ambas, y buscando luego la razón de la longitud más corta a la longitud más larga.

Tomemos como unidad auxiliar la tercera parte (longitud $\overline{AP}$) de la unidad inicial (longitud $\overline{AB}$)



Podemos comprobar que es submúltiplo de las longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; subdividamos esas dos longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en pedazos iguales de largos, cada uno de la misma longitud que $\overline{AP}$:



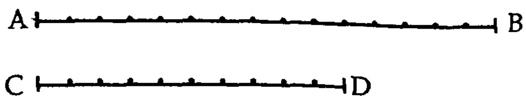
$$\overline{AB} = 3\,\overline{AP} \quad \overline{CD} = 2\,\overline{AP}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2\overline{AP}}{3\overline{AP}} = \frac{2}{3}\ ;\textit{entonces}\ \overline{CD} = \frac{2}{3}\,\overline{AB}$$

Podemos tomar otra unidad auxiliar, como por ejemplo la sexta parte de la longitud $\overline{AB}$, o la novena parte de ella. Se comprueba que cada unidad auxiliar es submúltiplo de ambas, y se encuentra que $\overline{CD} = \frac{4}{6}\,\overline{AB}$ o que $\overline{CD} = \frac{6}{9}\,\overline{AB}$

Tomemos ahora como unidad auxiliar el cm; podemos comprobar que es submúltiplo de ambas.

Subdividamos las dos longitudes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en pedazos iguales de largos cada uno de un cm.



$$\overline{AB} = 15\text{ cm}\ ;\ \overline{CD} = 10\text{ cm}$$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{10\text{ cm}}{15\text{ cm}} = \frac{2}{3}\ ;\ \overline{CD} = \frac{2}{3}\,\overline{AB}$$

De esta manera comprobamos que también $\overline{CD}$ es conmensurable con $\overline{AB}$.

En general dos longitudes diferentes son conmensurables cuando una se puede medir exactamente usando como unidad la otra, o submúltiplos de esa otra.

En nuestro caso decimos que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos longitudes conmensurables.

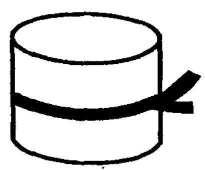
Si dos longitudes diferentes son conmensurables siempre existirá un operador ampliador o reductor racional que nos permita expresar la una en términos de la otra. Si se hace el intento de comprobar la conmensurabilidad en la práctica, o sea empíricamente, siempre es posible encontrar dicho operador racional, es decir: en la práctica toda pareja de longitudes parecen ser conmensurables.

A esta conjetura la podemos llamar "la hipótesis de la conmensurabilidad de cualquier pareja de longitudes".

Veamos algunos ejemplos:

1- *La longitud de la circunferencia y el diámetro. La medición puede hacerse de la siguiente manera:*

— Busque varios objetos que tengan bordes circulares como tarros, tapas, materas, etc. y con una pita mida la longitud del contorno o borde circular (circunferencia). Marque en la pita esta longitud.



— Utilice otra pita para medir el diámetro de la circunferencia anterior y marque esta longitud.

—Compare ahora estas dos longitudes. Tome como unidad de medida la longitud del diámetro.

¿Cabe ésta un número exacto de veces en la longitud de la circunferencia? ¿Habrá un submúltiplo de la longitud del diámetro que mida exactamente la longitud de la circunferencia?

¿Cuál podría ser un valor **aproximado** para la longitud de la circunferencia en términos del diámetro?

—Ahora mida la longitud de la circunferencia (C) y la del diámetro (d) en varios de los objetos anteriores y halle la razón aproximada entre la longitud de la circunferencia y la del diámetro. Consigne sus resultados en una tabla como la siguiente:

Longitud de la circunferencia (C)	Longitud del diámetro (d)	C / d

¿Qué conclusión puede sacar teniendo en cuenta los resultados anteriores?

De la práctica anterior se llega a un resultado como el siguiente:

$$C = 3.14\ d \quad , o \quad C = \frac{22}{7}\ d$$

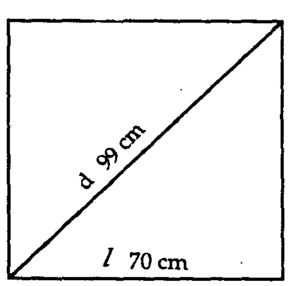
Así vemos que en la práctica un operador ampliador para pasar del diámetro a la circunferencia, o sea para encontrar la longitud de la circunferencia a partir de la longitud del diámetro, podría ser $\frac{22}{7}$, o 3.14

Esto significa que empíricamente la longitud de la circunferencia y el diámetro de un mismo círculo parecen ser dos longitudes conmensurables.

2— La diagonal y el lado de un cuadrado.

La medición puede hacerse mediante las siguientes actividades:

a) Recorte en papel periódico o en cartulina un cuadrado de 70 cm. de lado. Mida la longitud de la diagonal de ese cuadrado. Con sorpresa encontrará que la diagonal mide 99 cm, al parecer exactamente.



La razón de la diagonal al lado sería pues:

$$\frac{d}{l} = \frac{99\ cm}{70\ cm} = 1.41428 \textit{ con mucha aproximación}$$

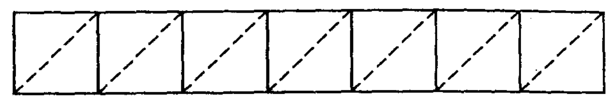
De esta práctica se llega al siguiente resultado

$$d = \frac{99}{70}\, l = 1.41428\, l$$

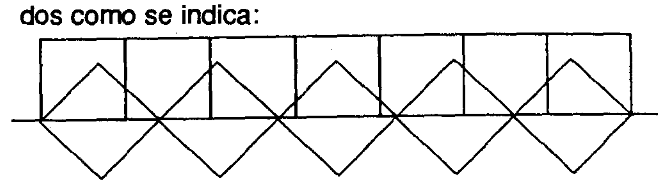
Así comprobamos empíricamente que un buen operador ampliador para pasar del lado a la diagonal del cuadrado podría ser $\frac{99}{70}$, o 1.41428

Esto significa que en la práctica la diagonal y el lado de un mismo cuadrado parecen ser dos longitudes conmensurables.

b) Recorte 12 cuadrados de la misma área y marque una diagonal en cada uno. Coloque 7 de ellos uno a continuación del otro como se indica:



Ahora tome los otros cinco cuadrados y superpóngalos de modo que las diagonales coincidan con los lados como se indica:



Se puede observar que con la longitud de cinco diagonales se cubre la longitud de siete lados del cuadrado en cuestión.

Es decir, $5d = 7\,l$ luego:

$$\frac{d}{l} = \frac{7}{5} \quad \textit{con bastante aproximación.}$$

El ejercicio anterior nos conduce al siguiente resultado:

$$d = \frac{7}{5}\, l$$

Entonces un operador ampliador que nos permite encontrar la longitud de la diagonal de un cuadrado cuando se conoce la longitud del lado es:

$$\frac{7}{5}$$

También se puede encontrar la longitud del lado del cuadrado cuando se conoce la longitud de la diagonal del mismo.

En ese caso:

$$7\,l = 5\,d,$$

luego:

$$l = \frac{5}{7}\, d$$

Es decir, si a la diagonal se le aplica el operador reductor $\frac{5}{7}$ se obtiene el lado del cuadrado.

Este segundo ejemplo es otra verificación de que, en la práctica, las longitudes de la diagonal y del lado de un cuadrado parecen ser dos magnitudes conmensurables; es decir, que la una se puede obtener aplicándole a la otra un operador ampliador o reductor según el caso.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Conviene hacer un número suficiente de mediciones de longitudes tomando como unidad otra longitud.

Ejemplos:

- La longitud de un lápiz tomando como unidad el decímetro.
- La longitud del escritorio tomando como unidad la longitud de una regla.
- El largo del salón tomando como unidad el metro.
- El ancho del salón tomando como unidad la longitud del pie de un alumno.
- El largo de una regla tomando como unidad el ancho de esta misma.
- El ancho de un cuaderno tomando como unidad el largo.
- La longitud de un lápiz tomando como unidad la longitud de la regla.

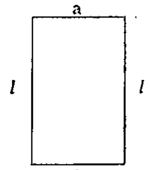
En cada caso los mismos alumnos elegirán la forma de hacer la medición y buscarán el operador ampliador o reductor racional que permite obtener una longitud a partir de la unidad. Se procurará obtener ampliadores y reductores como los siguientes:

$$2\text{x}, \frac{1}{3}\text{x}, \frac{2}{5}\text{x}, 3\frac{1}{2}\text{x}, \frac{4}{7}\text{x} \quad 3\text{x}, 4\text{x}, \frac{1}{5}\text{x}, \quad etc.$$

(Cuando el profesor lo considere oportuno, puede empezar a omitir el signo "x" de los operadores, que se lee "veces", "de", "por").

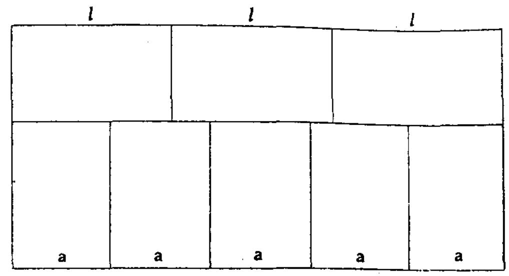
Ejemplo:

Se desea medir el ancho de la siguiente tarjeta, tomando como unidad el largo de la tarjeta.



Una forma de hacerlo es así:

Extender tarjetas de las mismas dimensiones a lo largo y a lo ancho hasta encontrar que sus extremos coincidan.



5 veces el ancho es igual a 3 veces el largo.

$$5a = 3\,l \qquad a = \frac{3}{5}\,l$$

El operador reductor del largo al ancho en este caso es $\frac{3}{5}$x o simplemente $\frac{3}{5}$;

En este caso $\frac{3}{5}$ es la razón del número de longitudes más largas al número de longitudes más cortas.

Para efectuar las mediciones conviene recordar que una longitud es submúltiplo de otra cuando cabe un número exacto de veces en ella.

Ejemplo: Dada la longitud $\overline{MN}$:

M————————————N

Las siguientes longitudes son submúltiplos de ésta:

X————Y   A————————B   D————E

Compruébelo hallando cuántas veces cabe cada una de las longitudes $\overline{XY}$, $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ en la longitud $\overline{MN}$.

Conviene hacer caer en la cuenta de que la conmensurabilidad es una relación binaria entre dos longitudes (o entre dos instancias concretas de una magnitud), y no una propiedad de una sola de ellas. También debe comprobarse que esta relación es simétrica, es decir que si la longitud $\overline{AB}$ es conmensurable con la longitud $\overline{CD}$, entonces $\overline{CD}$ es conmensurable con $\overline{AB}$; por esto se dice que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos longitudes conmensurables.

Vale la pena observar que predicados binarios como:

“________ y ________ son conmensurables”,

“________ y ________ son de la misma edad”,

“________ y ________ son hermanos”,

“________ y ________ son perpendiculares”,

“________ y ________ son amigos”,

que no tienen la forma relacional usual:

“________ es R de ________”, pueden expresarse en esa forma precisamente porque la relación es simétrica.

(Con los alumnos más avanzados, o en los grados superiores, puede hacerse caer en la cuenta de que la relación de conmensurabilidad es también transitiva y reflexiva. Por lo tanto, es una relación de equivalencia, que particiona el conjunto de las longitudes reales en un número incontable de clases de equivalencia. Las longitudes racionales son solo una de esas clases, y las longitudes irracionales quedan repartidas en un número incontable de clases).

Conviene insistir en que los ampliadores y reductores racionales parecen ser suficientes para transformar cualquier longitud dada en cualquier otra. Sin esa expectativa de la conmensurabilidad de cualquier pareja de longitudes, pierde sentido la presentación de parejas de longitudes que parecen conmensurables en la práctica, pero que teóricamente son inconmensurables.

Esta discusión puede ser una primera introducción de los alumnos a la teoría del conocimiento, y una buena experiencia del poder del cerebro humano para crear conceptos nuevos, generar y proponer hipótesis, y contrastarlas con la teoría y con la práctica.

Una discusión en clase sobre la historia de los intentos de reconstruir la discusión entre los pitagóricos que creían en la suficiencia de los números naturales y las razones entre ellos para explicar el mundo, y las de los disidentes que se ingeniaron la prueba de que esto no era así, puede motivar a los alumnos y generar discusiones y precisiones muy útiles.

Esta actividad de generar hipótesis o conjeturas y de tratar de ponerlas a prueba, es una de las principales de la práctica científica. En este caso, la conjetura más plausible parece ser la de la conmensurabilidad de cualquier pareja de longitudes. Así le parecía a los antiguos pitagóricos, y así les debe parecer a nuestros alumnos. Si no logramos que les parezca así, no podrán llevarse la sorpresa de la inconmensurabilidad de ciertas parejas de longitudes. Sobre la existencia de esas parejas tratan las páginas siguientes.

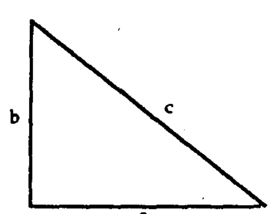
OBJETIVO ESPECIFICO

6. Repasar las relaciones entre los lados de los triángulos rectángulos y entre los lados y las diagonales de los rectángulos.

CONTENIDOS BASICOS

El teorema de Pitágoras establece una relación sumamente importante entre las longitudes de los catetos y la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Dice así:

“En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

El Teorema de Pitágoras recibe este nombre por atribuirse al famoso filósofo griego Pitágoras (584 - 495 A.C.) su primera demostración. Se cree que su método de demostración estuvo basado en la comparación de áreas.

Este teorema ha sido objeto de interés y estudio por parte de matemáticos y profesionales de todo el mundo a través de los años. Hay muchas demostraciones de el.

Veamos una de ellas:

Dado el triángulo rectángulo RXS. Demostrar que

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

“Demostrar” algo en Matemáticas es una exigencia muy fuerte. Hasta ahora, bastaba con una comprobación de que lo que dice el profesor o el libro era verdad, o por lo menos era muy plausible. De este momento en adelante, el alumno puede y debe cuestionar no sólo la afirmación del profesor y del libro, sino el intento mismo de verificación. Hay que buscar argumentos convincentes que satisfagan a la persona más crítica y escéptica. Hay que elaborar una lista de argumentos convincentes, rigurosamente dispuestos para llevar al lector desde los axiomas, postulados, teoremas e hipótesis que ya aceptaba como ciertos, hasta la conclusión o tesis que todavía ponía en duda. Esa lista de pasos argumentativos bien dispuestos es lo que se llama una demostración de esa tesis o conclusión.

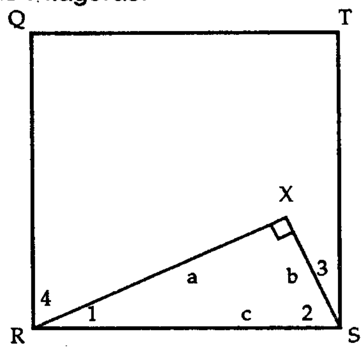
Si la demostración pasa la prueba de los críticos más exigentes, la frase que dice precisamente bajo qué hipótesis se cumple la tesis, se convierte en teorema. Una conjetura ingeniosa puede ser refutada, o puede convertirse en teorema cuando se le encuentra una demostración rigurosa.

Puede haber varias demostraciones de un mismo teorema. Aunque todas sean rigurosas, unas pueden ser más convincentes para el lector que otras, y unas pueden parecerle más elegantes, más breves o más ingeniosas que otras. Ese es uno de los componentes estéticos de las matemáticas, componente que muchos libros y programas de matemáticas dejan de lado.

En el Programa de Matemáticas de la Renovación Curricular se intenta recuperar ese aspecto estético, ese desafío de encontrar demostraciones más bellas y de comparar las distintas demostraciones existentes.

El Teorema de Pitágoras se presta admirablemente para empezar esa confrontación con la tarea de demostrar una tesis a partir de un mínimo de hipótesis. Es un teorema que fue trabajado unos tres siglos antes de que Euclides escribiera sus "Elementos" y que durante casi veinticinco siglos ha sido estudiado y demostrado de muchas maneras ingeniosas y sorprendentes. Además, es la base para el desarrollo de la medición indirecta de longitudes, para la geometría analítica, los espacios vectoriales, la rectificación de curvas y otros aspectos cruciales del análisis matemático.

En esta primera demostración que intenta ser rigurosa, el profesor irá detectando lo que ya aceptan los alumnos y lo que ponen en duda, y les pedirá que traten de relacionar eso que ponen en duda con afirmaciones que ya consideren verdaderas. En este grado no es importante distinguir entre la verdad intuitiva de la Geometría Euclidiana y la demostrabilidad puramente formal de teoremas a partir de postulados o axiomas rigurosos que relacionan términos primitivos. Es preferible seguir el proceso histórico de sistematización de las exploraciones intuitivas del espacio dibujado e imaginado, para preparar el paso a la formalización de la geometría en el Siglo XIX. Empecemos pues con una primera demostración del Teorema de Pitágoras.



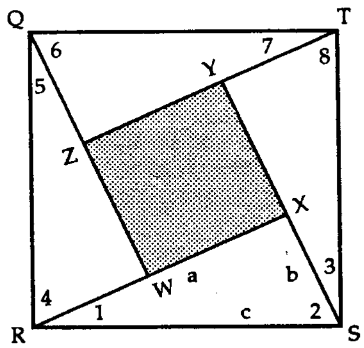
Tracemos el cuadrado QRST con lados iguales al segmento $\overline{RS}$, como se indica en la figura.

$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 4 = 90^\circ \qquad \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 90^\circ$$
$$\sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 90^\circ$$
$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \quad \text{y} \quad \sphericalangle 2 = \sphericalangle 4$$

Desde Q se traza el segmento $\overline{QW}$ perpendicular al segmento $\overline{RX}$; entonces $\sphericalangle 5 = \sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 6 = \sphericalangle 4$. (¿Por qué?).

Desde T se traza el segmento $\overline{TZ}$ perpendicular al segmento $\overline{QW}$; entonces $\sphericalangle 7 = \sphericalangle 5$ y $\sphericalangle 8 = \sphericalangle 6$ (¿Por qué?).

Se prolonga el rayo $\overline{SX}$ hasta intersecar el segmento $\overline{TZ}$ en Y. Como los lados del cuadrado son iguales, los 4 triángulos son congruentes:



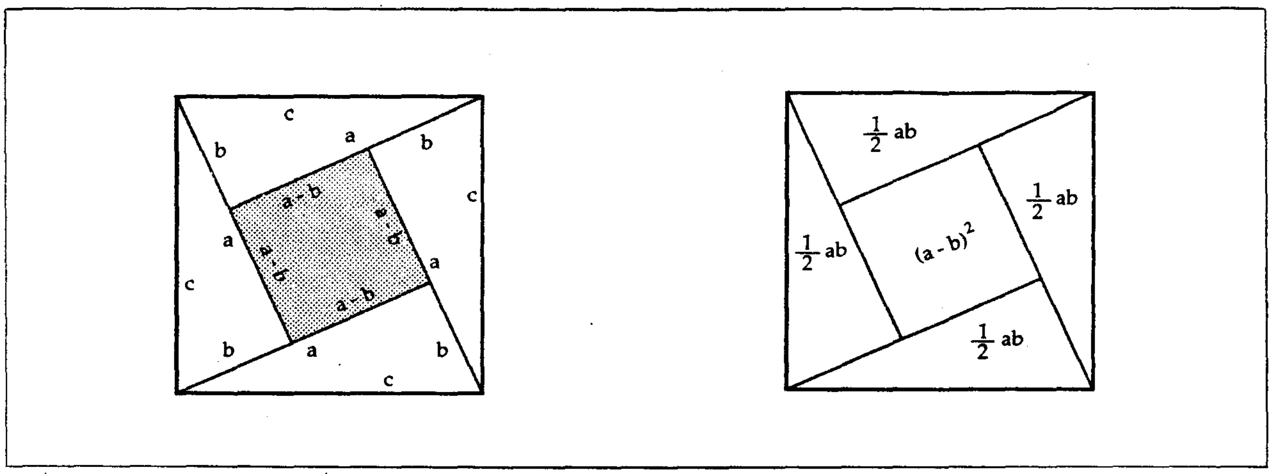
Vemos que:

$$a = \overline{RX} = \overline{QW} = \overline{TZ} = \overline{SY}$$

$$b = \overline{SX} = \overline{RW} = \overline{QZ} = \overline{TY}$$

$$a - b = \overline{XW} = \overline{WZ} = \overline{ZY} = \overline{YX}$$

El área del cuadrado QRST es c^2, el área del cuadrado WXYZ es $(a - b)^2$ y el área de cada triángulo es $\frac{1}{2}ab$.

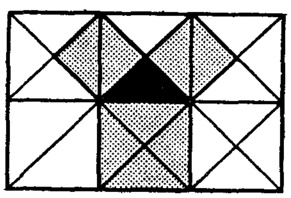


El área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de las regiones de su interior: El cuadrado pequeño y los cuatro triángulos, esto es:

$$c^2 = (a - b)^2 + 4 \left(\tfrac{1}{2} ab \right) = a^2 - 2 ab + b^2 + 2 ab.$$

Por lo tanto, $c^2 = a^2 + b^2$, que era lo que queríamos demostrar.

Las baldosas de un piso como el siguiente nos sugieren una verificación del teorema de Pitágoras.



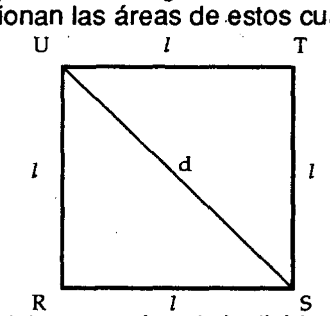
Con líneas mas gruesas hemos trazado los lados de un triángulo rectángulo isósceles y hemos punteado los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa del triangulo ¿cuántas baldosas forman cada uno de los cuadrados pequeños?

¿Cuántas baldosas forman el cuadrado grande?

Recorte en cartulina un dibujo parecido y verifique el teorema de Pitágoras para el caso de los triángulos rectángulos isósceles.

NOTA: En la Unidad de Geometría del Programa de 6º Grado se proponen otras dos verificaciones o comprobaciones de este Teorema, que el profesor puede fácilmente redactar en forma de demostración más rigurosa.

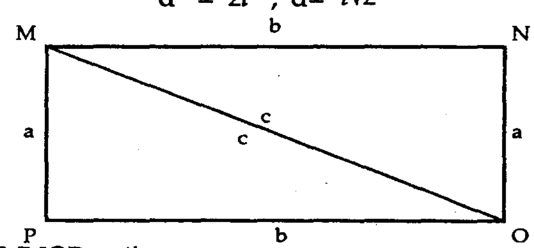
Como un caso especial, veamos qué pasa si trazamos una diagonal de un rectángulo cualquiera. (Recordemos que una diagonal de un polígono es un segmento que une dos vértices no consecutivos). Para el caso del rectángulo MNOP que hay más adelante, se pueden recortar cuatro cuadraditos, dos de lado a y dos de lado b, para colocarlos sobre los cuatro lados del rectángulo, y dos cuadrados grandes que tengan por lado la diagonal del rectángulo. ¿Cómo se relacionan las áreas de estos cuadrados?



Una diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos de la misma área. Cada uno de estos triángulos es rectángulo y su hipotenusa es la diagonal, por tanto se cumple el teorema de Pitágoras.

En UTSR se tiene:

$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$d^2 = 2l^2 \text{ , } d = l\sqrt{2}$$



En MNOP se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Una lectura sobre Pitágoras podría despertar en los estudiantes un gran interés hacia el estudio del teorema y sus demostraciones. Conviene consultar otras demostraciones. Puede verse el Nº 11 de la revista Notas de Matemáticas y el Nº 19 de la revista Matemática, Enseñanza Universitaria.

Resolver algunos ejercicios como los siguientes da a los alumnos la oportunidad de aplicar el Teorema de Pitágoras.

— ¿Cuánto mide la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 8 mm?

— Hallar el lado más largo de un rectángulo si la diagonal mide 10 cm y el lado más corto mide 4 cm.

— La altura trazada a la base de un triángulo isósceles mide 8 cm. Cada uno de los lados iguales mide 10 cm. Encontrar la medida de la base.

— Las diagonales de un rombo miden 12 cm y 16 cm. Encontrar el perímetro del rombo.

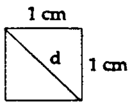
OBJETIVO ESPECIFICO

7 Probar que hay algunos ampliadores y reductores que no son racionales (o sea que son irracionales).

CONTENIDOS BASICOS

Vamos a ver que las teorías geométricas y aritméticas permiten demostrar que no existen operadores ampliadores racionales que nos permitan pasar del lado a la diagonal de un cuadrado. Si esto es así, para cada cuadrado que fijemos habremos encontrado dos longitudes inconmensurables: la de su lado y la de su diagonal.

La teoría de Pitágoras, nos permite encontrar algunos de estos ampliadores. Supongamos que se tiene un cuadrado cuyo lado mide 1 cm ¿Cuánto mide la diagonal?



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$
$$d^2 = 1 + 1 = 2$$
$$d^2 = 2 \qquad d = \sqrt{2}$$

El ampliador que nos permite pasar del lado a la diagonal de un cuadrado, o sea transformar la longitud del lado en la diagonal, es $\sqrt{2}$. (De ahora en adelante vamos a omitir el signo "x" que se lee "veces", "de", o "por" que acompañaba al símbolo de un operador. Así escribiremos $\frac{1}{3}$ en vez de $\frac{1}{3}\times$ para el operador reductor que saca la tercera parte, y $\sqrt{2}$ para el operador ampliador que agranda la longitud del lado de un cuadrado a la de la diagonal del mismo).

El operador $\sqrt{2}$ no es racional. Veámoslo:

Probar que $\sqrt{2}$ no es racional es probar que no se puede expresar como una razón de números naturales, o sea que no hay ningún operador racional de la forma $\frac{m}{n}$ que produzca el mismo ~~efecto~~.

Probar que $\sqrt{2}$ no es racional es probar que no se puede expresar como una razón de números naturales.

Intentemos escribir $\sqrt{2}$ como un cociente de dos naturales m y n:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}; \; (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 ; \; 2 = \frac{m^2}{n^2} \quad ; \textit{ entonces}$$

$$m^2 = 2n^2$$

Descompongamos a m y a n en sus factores primos. Sea p el mayor primo que aparezca entre los divisores de m o de n.

A ambos los podemos factorizar así:

$$m = 2^{a}\, 3^{b}\, 5^{c} \ldots p^{e} \qquad n = 2^{a'}\, 3^{b'}\, 5^{c'} \ldots p^{e'}$$
$$m^2 = 2^{2a}\, 3^{2b}\, 5^{2c} \ldots p^{2e} \qquad n^2 = 2^{2a'}\, 3^{2b'}\, 5^{2c'} \ldots p^{2e'}$$
$$2n^2 = 2.2^{2a'}\, 3^{2b'} 5^{2c'} \ldots p^{2e'}$$
$$2n^2 = 2^{2a'+1}\, 3^{2b'}\, 5^{2c'}\, 7^{2d'} \ldots p^{2e'}$$

$m^2 = 2\,n^2$ no puede ser, porque a la izquierda el exponente de 2 es par y a la derecha es impar. Esto puede afirmarse gracias al llamado "Teorema fundamental de la aritmética", que afirma que la descomposición de un número en factores primos es única.

Por tanto no puede haber una descomposición en primos que cumpla esa igualdad.

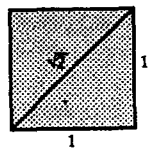
Se concluye que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como la razón de dos naturales, es decir no es racional.

Si vamos a obtener el lado a partir de la diagonal, lo hacemos mediante el operador reductor $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

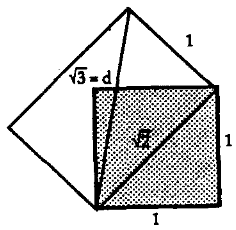
$\frac{1}{\sqrt{2}}$ no es racional. Si lo fuera $\sqrt{2}$ también lo sería:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q} \textit{ o sea } \sqrt{2} = \frac{q}{p}$$

Veamos otros ampliadores y reductores que no son racionales y que resultan de medir la diagonal de rectángulos de altura unitaria.



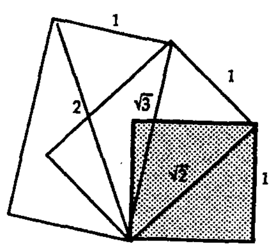
Sobre la diagonal de este rectángulo construimos otro rectángulo cuya altura sea unitaria.



La diagonal de este rectángulo es:

$$d^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2$$
$$d^2 = 2 + 1$$
$$d = \sqrt{3}$$

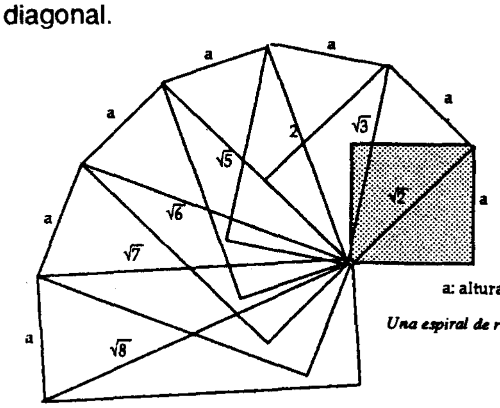
Sobre la nueva diagonal construimos otro rectángulo de altura unitaria y trazamos su diagonal.



La diagonal del último rectángulo es:

$$d^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$$
$$d^2 = 3+1$$
$$d^2 = 4$$
$$d = \sqrt{4}$$
$$d = 2$$

Y así sucesivamente seguimos construyendo rectánulos de altura unitaria, cuya base sea la diagonal del rectángulo anterior construido y hallando la diagonal.



a: altura

Una espiral de rectángulos

Así encontramos ampliadores como:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, ..., que son conocidos como raíces cuadradas de los números primos.

Ninguno de ellos puede ser racional por la misma razón que $\sqrt{2}$ no puede serlo.

Por ejemplo:

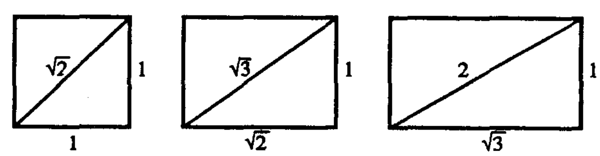
Si $\sqrt{7} = \frac{p}{q}$ $\quad p^2 = 7q^2$. *¡Imposible! (¿Por qué?)*

b) $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, ..., que son raíces cuadradas de números compuestos que no son cuadrados. Ninguno de ellos es racional, pero no es tan fácil demostrarlo.

De esta manera hemos encontrado ampliadores que hacen que longitudes inconmensurables se puedan transformar la una en la otra por medio de un operador que por definición de inconmensurabilidad no puede ser racional. A estos operadores los llamamos "irracionales".

¿Cuál será el operador que nos permite pasar de la diagonal a la altura unitaria de cada uno de los rectángulos de la actividad anterior?

Veamos algunos de esos rectángulos:



El operador que aplicado a la diagonal produce la altura tiene que ser un reductor, pues la longitud se acorta.

En el primer rectángulo este operador es $\frac{1}{\sqrt{2}}$, en el segundo es $\frac{1}{\sqrt{3}}$ y en el tercero es $\frac{1}{2}$ y así encontramos otros operadores reductores como:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \textit{etc.}$$

No todos ellos son racionales.

El ampliador no racional que nos permite obtener la longitud de la circunferencia tomando como unidad el diámetro se designa con la letra griega "pi" (π). Se llama así por la letra inicial de la palabra griega que expresa el perímetro de la circunferencia. Anteriormente hemos visto cómo obtener π y hemos encontrado algunas aproximaciones como $\frac{22}{7}$, 3.14, 3.1416 y 3.14159265. Demostrar que π es un irracional que ni siquiera es raíz de una ecuación algebráica, es tarea que rebasa los propósitos de este curso, pero que puede resultar interesante para los estudiosos

Esto nos indica que además de los operadores racionales, nuestro cerebro también puede considerar otros que no son racionales y que llamamos irracionales, no porque sean ilógicos, sino porque no corresponden a razones entre números naturales ni enteros.

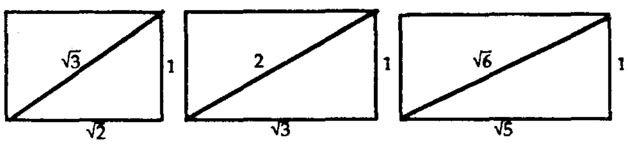
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Conviene que los alumnos busquen un número suficiente de operadores irracionales tanto ampliadores como reductores, hasta caer en la cuenta de que no se puede hacer una lista completa de estos y de que el cerebro puede seguir construyendo muchos más.

Pueden hacer algunos ejercicios como estos:

— Hallar la medida de la diagonal de un cuadrado que tiene 4 cm de lado.

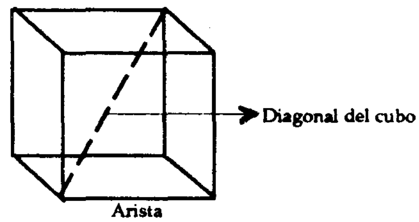
En cada uno de los siguientes rectángulos hallar el reductor que pasa de la diagonal a la base del rectángulo:



— Hallar también el operador que pasa de la altura unitaria a la base y viceversa.

— Hallar el operador que nos permite obtener el diámetro a partir de la circunferencia respectiva.

— Hallar el operador ampliador que nos permite pasar de la arista de un cubo a la diagonal principal del cubo.



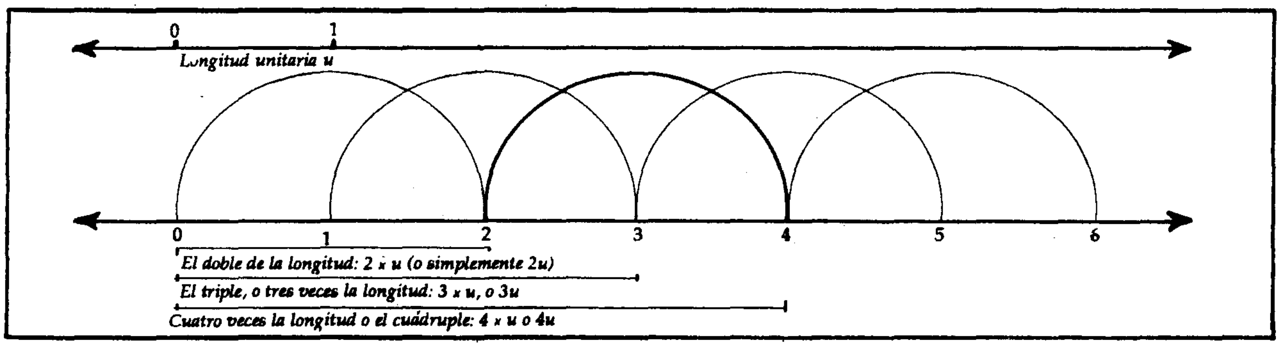
Para el cubo, ¿Cuál es el operador que reduce de la diagonal a la arista?

OBJETIVO ESPECIFICO

8 Dada una recta, fijar un origen, determinar sobre ella una longitud unitaria y representar sobre la recta algunas ampliaciones y reducciones racionales e irracionales de esa longitud unitaria.

CONTENIDOS BASICOS

Sobre una recta graduada podemos representar algunas ampliaciones y reducciones racionales e irracionales de la longitud unitaria que hayamos escogido. Para ello podemos proceder de la siguiente manera: Trazamos una recta cualquiera; fijamos un punto de origen 0; determinamos sobre ella una longitud unidad u; aplicamos algunos ampliadores y reductores a esa longitud unitaria y señalamos los resultados en la recta. Veamos primero ampliaciones de la longitud unitaria como 2u, 3u, 4u, 5u, etc. Hagámoslas mentalmente o con regla y compás, y marquemos el extremo derecho del resultado de la ampliación.

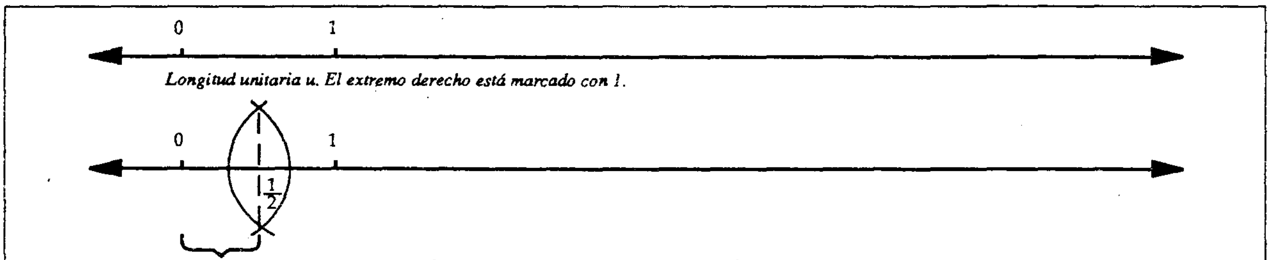


Cuando tenemos marcadas las ampliaciones enteras sobre la recta, decimos que está graduada.

Hagamos ahora algunas reducciones de la longitud unitaria como:

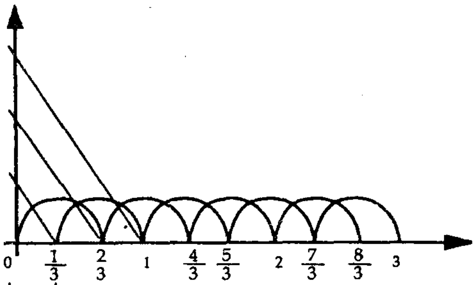
$\frac{1}{2}u$, $\frac{1}{3}u$, $\frac{1}{4}u$, *etc.*

y marquemos el extremo derecho de la longitud reducida:



Longitud unitaria u. El extremo derecho está marcado con 1.

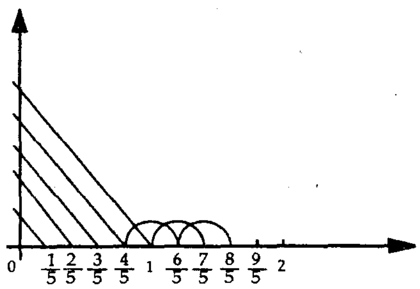
La mitad de la longitud unitaria: $\frac{1}{2}$ u. El extremo derecho se marca con $\frac{1}{2}$



$\frac{1}{3}$ de la longitud unitaria: $\frac{1}{3}u$

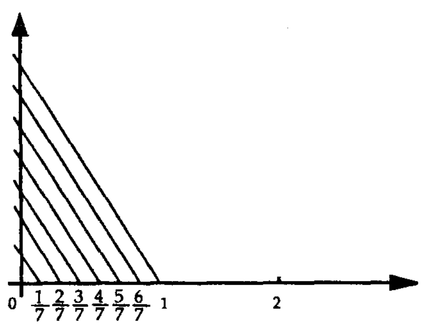
$\frac{2}{3}$ de la longitud unitaria: $\frac{2}{3}u$

$\frac{5}{3}$ de la longitud unitaria: $\frac{5}{3}u$



$\frac{1}{5}$ de la longitud unitaria: $\frac{1}{5}u$

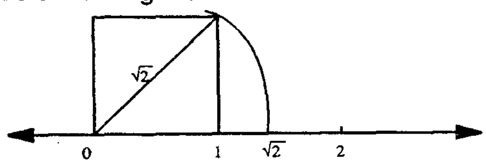
$\frac{8}{5}$ de la longitud unitaria: $\frac{8}{5}u$



$\frac{3}{7}$ de la longitud unitaria: $\frac{3}{7}u$

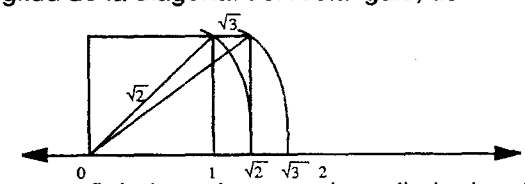
Hemos señalado sobre la recta algunas ampliaciones y reducciones racionales.

Veamos cómo obtener algunas ampliaciones irracionales. Tracemos el cuadrado cuyo lado es la longitud unitaria, hallemos su diagonal, y con el compás haciendo centro en 0, transportemos sobre la recta la longitud de la diagonal.



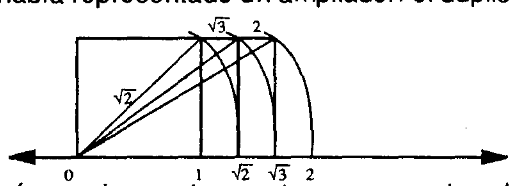
De esta manera hemos señalado en la recta el resultado de aplicar el ampliador irracional $\sqrt{2}$ a la longitud unitaria.

Con esta nueva longitud como base (longitud de la diagonal del cuadrado) tracemos el rectángulo de altura unitaria; hallemos su diagonal y con el compás haciendo centro en 0, obtengamos sobre la recta la longitud de la diagonal del rectángulo, así:

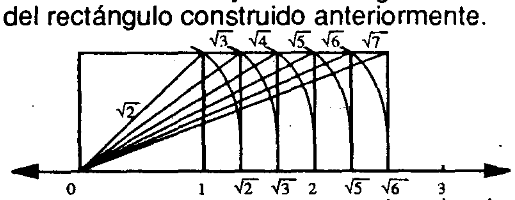


Hemos señalado en la recta el ampliador irracional $\sqrt{3}$.

Con esta nueva longitud como base (longitud de la diagonal del rectángulo anterior), tracemos el rectángulo de altura unitaria; hallemos su diagonal, y con el compás haciendo centro en 0, transportemos sobre la recta la longitud de esta diagonal. Se observa que este ampliador cae sobre la recta numérica donde ya se había representado un ampliador: el duplicador.



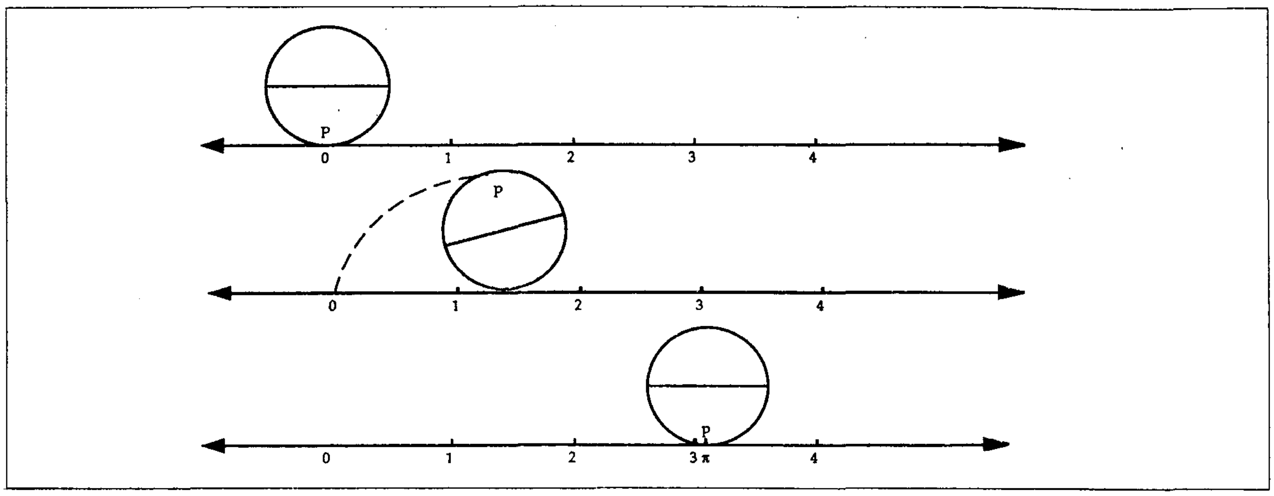
Y así sucesivamente seguimos marcando sobre la recta numérica la longitud de la diagonal de rectángulos de altura unitaria y base la longitud de la diagonal del rectángulo construido anteriormente.



De esta manera hemos representado sobre la recta algunas ampliaciones irracionales de la longitud unitaria.

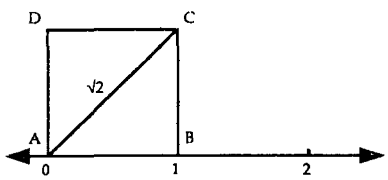
Representemos sobre la misma recta una longitud cuyo valor es π.

Tomemos una circunferencia cuyo **diámetro** sea lo mismo de largo que la **longitud unitaria.** La longitud de la circunferencia que bordea este círculo es igual a π.¿Por qué? Entonces para representar a π sobre la recta basta transportar sobre ella la longitud de la circunferenica mencionada. Marquemos con P un punto del borde del circulo y hagámos coincidir con el cero u origen de la recta. Hagamoslo rodar el círculo sobre la recta hasta que el punto P se encuentre otra vez con la recta. Ese nuevo punto se puede marcar con la letra π.

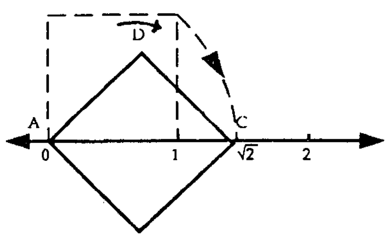


Veamos la ubicación en la recta de algunos reductores irracionales. Construyamos rectángulos semejantes a los anteriores cuya diagonal sea la longitud unitaria y transportemos sobre la recta numérica la longitud de uno de sus lados. Veamos cómo trazar los rectángulos semejantes más pequeños a partir del ya construido anteriormente. Empecemos por el cuadrado.

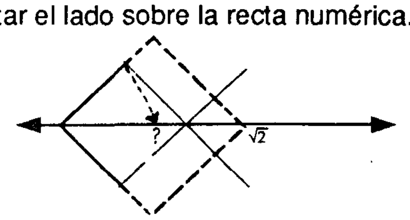
1. Trazar el cuadrado unitario y su diagonal.



2. Rotarlo 45° hasta que la diagonal quede sobre la recta numérica.



3. Construir el cuadrado de diagonal unitaria, y transportar el lado sobre la recta numérica.



¿Cómo vamos a llamar el punto que encontramos como extremo derecho de esa representación del lado menor?

Ese punto va a representar el reductor irracional que transforma la diagonal unitaria del cuadrado pequeño en el lado del mismo, que es el mismo operador reductor que pasa de la diagonal $\sqrt{2}$ al lado unitario del cuadrado original.

Podemos representar a este operador inverso de $\sqrt{2}$ como:

$$(\sqrt{2})^{\leftarrow},\ (\sqrt{2})^{-1},\ \text{o}\ \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Observando la gráfica, parece plausible que este reductor sea la mitad del ampliador $\sqrt{2}$:

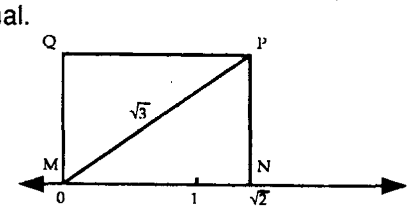
$$(\sqrt{2})^{\leftarrow} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Próximamente vamos a comprobar que efectivamente

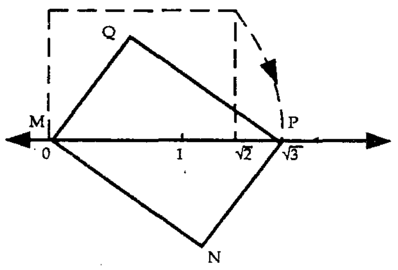
$$(\sqrt{2})^{\leftarrow} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Hagamos ahora un procedimiento parecido con el rectángulo de base $\sqrt{2}$ y altura unitaria, que tenía diagonal $\sqrt{3}$. Vamos a tratar de marcar el punto que represente el operador reductor inverso del ampliador $\sqrt{3}$.

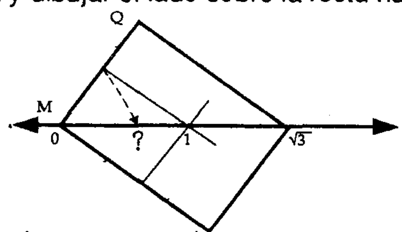
1. Trazar el rectángulo de altura unitaria y base $\sqrt{2}$ y su diagonal.



2. Rotarlo hasta que la diagonal quede sobre la recta numérica.



3. Construir el rectángulo semejante de diagonal unitaria y dibujar el lado sobre la recta numérica.



Para el rectángulo QPNM encontramos un punto entre el cero y el uno que corresponde al extremo derecho de la representación del lado menor del rectángulo de diagonal unitaria.

Este punto representa el reductor inverso del ampliador $\sqrt{3}$, y lo podemos notar como:

$$(\sqrt{3})^{\leftarrow},\ (\sqrt{3})^{-1},\ o\ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Aquí no es tan clara la gráfica, pero se puede conjeturar que podría ser la tercera parte de $\sqrt{3}$. Próximamente vamos a comprobar que efectivamente:

$$(\sqrt{3})^{\leftarrow} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

El procedimiento seguido se resume así:

1. Trazar uno de los rectángulos construídos anteriormente.

2. Rotarlo alrededor del origen en el sentido de las manecillas del reloj, hasta que la diagonal quede aplicada sobre la recta numérica.

Este paso también se puede lograr transportando la diagonal y los lados del rectángulo con el compás.

3. Mediante una homotecia con centro en el origen hallar el rectángulo de diagonal unitaria semejante al rectángulo trazado.

Para esto trazamos paralelas a los lados del rectángulo más grande, que pasen por el extremo de la diagonal fija.

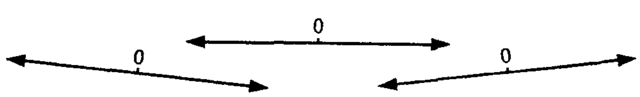
Una vez que tengamos ese rectángulo semejante, trazamos sobre la recta numérica el lado menor del rectángulo más pequeño.

Ese punto va a representar el reductor que pasa de la diagonal al lado menor de esa clase de rectángulos semejantes.

De esta manera hemos representado sobre la recta real operadores ampliadores racionales como: 2, $\frac{4}{3}$, etc, ampliadores irracionales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, etc. reductores racionales como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, etc., reductores irracionales como $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, etc. Conviene observar que ya estamos combinando operadores racionales como $\frac{1}{2}$ o 2 con los irracionales como $\sqrt{3}$ o $\sqrt{2}$. En los objetivos subsiguientes se encontrarán otras maneras de combinar operadores racionales e irracionales para obtener otros de ellos (que pueden o no tener expresiones más simples).

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Conviene hacer caer en la cuenta a los alumnos de que al elegir la recta sobre la cual se van a proyectar las ampliaciones y reducciones, esta puede estar en cualquier dirección:



Lo importante es "domesticarla", es decir, fijar el origen y determinar sobre ella una longitud unitaria.

Nótese que dicha longitud unitaria puede tomarse en cualquiera de los dos sentidos de la recta.

A través de este tema se van haciendo algunas construcciones geométricas empleando regla, escuadra y compás como hallar el punto medio de un segmento, trazar paralelas, dividir un segmento en partes iguales.

Como ejercicio pueden trabajar otros irracionales como $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $2\sqrt{3}$ etc.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

9 Utilizar el operador reflector para obtener más operadores racionales e irracionales.

10 Denominar números reales a los operadores racionales e irracionales cuando se prescinde de su carácter activo.

11 Repasar el sistema simbólico de las fracciones para los operadores racionales y proponer símbolos para algunos de los que no son racionales.

12 Expresar aquellos operadores en los que en el denominador hay un operador irracional cuadrático como la composición de un operador racional y un ampliador irracional.

CONTENIDOS BASICOS

OPERADOR REFLECTOR:

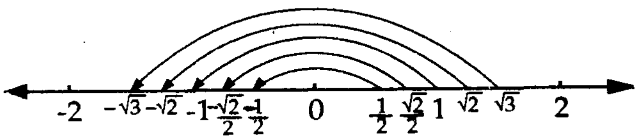
El efecto del operador reflector cuando es aplicado a un número en la recta numérica es cambiarle el sentido en que vá dirigido.

Este operador se simboliza así: –( )

Construcción de otros operadores reales:

Si a los operadores racionales e irracionales que obtuvimos anteriormente se les aplica el reflector obtenemos más operadores racionales e irracionales.

Veamos:



De esta manera obtenemos operadores racionales e irracionales como: $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, -2, -3, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$, etc. que llamamos reflectores ampliadores y como $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{2}{3}$, etc. que llamamos reflectores achicadores. Hay que tener cuidado con estos nombres, pues, que el resultado sea mayor o menor que el número original depende también del signo de ese número.

Si recopilamos los operadores ampliadores, los reductores, el idéntico, el anulador, el reflector, los reflectores-ampliadores y los reflectores-achicadores obtenemos los operadores reales.

El cerebro puede construir muchos operadores reales.

LOS NUMEROS REALES:

Si nos olvidamos conscientemente del carácter activo de estos operadores reales obtenemos un nuevo conjunto numérico llamado "números reales". Este conjunto se simboliza usualmente con la letra $\mathbb{R}$. Los números reales como conjunto ya pasivo serían el cadáver de los operadores reales una vez que se estabilizan como sistema con operaciones y relaciones. El conjunto $\mathbb{R}$ así construido es el de los reales que se trabaja en los cursos de matemáticas.

No se puede hacer una lista completa de números reales. ¿Por qué?

NOTA : En estudios más avanzados se amplía el conjunto de los números reales para incluir en él números infinitamente pequeños y números infinitamente grandes. El conjunto ampliado se conoce como el de los ***reales no estándar*** *y se simboliza con $\mathbb{R}^*$. En ese contexto, el conjunto $\mathbb{R}$ construido anteriormente se identifica como el de los números* ***reales estándar****. En la Básica Secundaria no se va a desarrollar este tema. Para quienes estén interesados en el tema, la bibliografía que se incluye al final de la unidad puede resultarles útil.*

Sistemas simbólicos para los números reales:

Los operadores racionales se expresan mediante varios sistemas simbólicos.

Uno de los más conocidos es el de las fracciones.

Las fracciones son expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, en las que a y b son enteros y b es diferente de cero.

$$\frac{a \longrightarrow \textit{numerador}}{b \longrightarrow \textit{denominador}}$$

Así el operador que reduce a la mitad se puede expresar mediante las siguientes fracciones:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8}, \textit{etc.}$$

De estas fracciones, por representar al mismo operador se dice que son equivalentes.

No todos los números reales se pueden representar en este sistema. Solo los racionales.

Para los irracionales existen símbolos como π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{p}$, donde p es primo, también $\sqrt{q}$ para q no cuadrado como $\sqrt{8}$, $\sqrt{6}$, etc. y todos los irracionales cuadráticos

En general la mayoría de los irracionales se expresan mediante los conocidos como "radicales" que son raíces indicadas como $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{18}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt[5]{5}$, etc., que no son expresables exactamente con fracciones ni con decimales finitos

Se puede extender la simbolización de los racionales a los reales como expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, en los que a y b no solo sean enteros sino también irracionales y además $b \neq 0$. De esta manera se obtendrían para algunos reales expresiones como $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, etc.

En realidad todas las medidas o cálculos, todos los usos prácticos de los números se hacen sólo con números racionales. Se puede decir que los números reales son un lujo teórico y que no se necesitan para ninguna aplicación.

Expresiones en las que en el denominador aparece un irracional pueden transformarse, convertirse en expresiones cuyo denominador sea entero. Veamos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

De esta manera el operador irracional $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se puede escribir como la composición del operador racional $\frac{1}{2}$ y el ampliador irracional $\sqrt{2}$.

Este procedimiento es el que en otros libros llaman "racionalizar el denominador de una fracción".

Una de las razones por las cuales conviene racionalizar el denominador de una fracción es que facilita la expresión decimal de la fracción. Si la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$ se ha de expresar aproximadamente mediante un decimal, puede trabajarse como $\frac{1}{1.4142}$ y esto exige dividir 1 entre 1.4142 cuyo cociente es 0.7071...

Otro procedimiento es transformar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2}$, lo que conduce a $\frac{1.4142}{2}$.

En esta forma es mucho más fácil comprobar que el resultado también es aproximadamente igual a 0.7071. Se puede concluir que al racionalizar el denominador, lo único que se hizo fue encontrar otra forma de expresar el mismo real.

La racionalización del denominador de una fracción exige la complificación de la misma. La pauta para encontrar la expresión que permita hacer la complificación la da el denominador. En los grados anteriores se trabajó con operadores como $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ y en general $\frac{n}{n}$ donde n representa un número natural diferente de cero. Para racionalizar, el operador será $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ y en general $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ donde n representa también un número natural diferente de cero.

Conviene recordar que la radicación es una de las operaciones inversas de la potenciación y que por definición pueden realizarse algunas operaciones como:

$$\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$$
$$\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3 \quad \textit{y en general} \quad \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$$

Para racionalizar el denominador de $\frac{3}{\sqrt{5}}$ es necesario aplicar a la fracción el operador $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ y ello exige aplicarle a 3 el operador $\sqrt{5}$ y a $\sqrt{5}$ aplicarle el mismo operador $\sqrt{5}$

así: $\frac{3}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3.\sqrt{5}}{\sqrt{5}.\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. Los estudiantes pueden discutir la forma de leer el resultado y de realizar otros ejercicios sobre el tema.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Conviene hacer caer en la cuenta sobre los sistemas concretos, los sistemas conceptuales y los sistemas simbólicos del sistema de los números reales. Un sistema concreto lo constituyen las longitudes.

El sistema conceptual básico lo constituyen las ampliaciones y reducciones de longitudes. Los sistemas simbólicos más conocidos son el de las fracciones y el de las expresiones decimales.

De acuerdo con la metodología constructivista propuesta para trabajar el programa de Matemáticas, conviene apoyarse en los sistemas concretos de longitudes para construir y manejar los operadores ampliadores y reductores y luego sí buscar expresiones y símbolos para representar esos operadores.

Es importante no confundir los números fraccionarios o racionales con sus expresiones, y caer en la cuenta de que hay un solo número fraccionario que corresponde a cada expresión en un contexto dado, pero que hay muchas expresiones diferentes que corresponden a un mismo número.

Una vez que se maneje el concepto de los números reales se pueden hacer algunos ejercicios para manejar los sistemas simbólicos como los siguientes:

- Hallar varias formas equivalentes para representar el operador $\frac{2}{3}\times$ o $\frac{2}{3}$
  A partir del 8º grado es mejor omitir el signo "x" ("veces", "de", "por").

- Expresar los siguientes operadores irracionales como la composición de un operador racional y un ampliador irracional.

$$\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{\sqrt{2}},\ \frac{5}{\sqrt{3}},\ \frac{3}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Se puede orientar a los alumnos para que ellos mismos busquen los procedimientos o algoritmos para hacer estas conversiones, después de hacer varios casos particulares.

La necesidad, la utilidad y la conveniencia de la racionalización puede constituir un tema de discusión para los alumnos. ¿Cuáles son las razones para considerar que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es una respuesta equivocada solamente porque no se racionalizó el denominador? ¿Para qué les sirve a los alumnos transformar a $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2}$ si no se ha analizado convenientemente el significado de estas dos expresiones?

También ellos mismos pueden buscar procedimientos para expresar en forma más simple o más complicada (o sea simplificar o complificar) una expresión irracional.

Ejemplos:

$\sqrt{3^2} = 3$	$\sqrt{18} = \sqrt{3^2.2} = 3\sqrt{2}$
$\sqrt[4]{3^4} = 3$	$\sqrt{12} = \sqrt{2^2.3} = 2\sqrt{3}$
$\sqrt{3^4} = 3^2$	$\sqrt{20} = \sqrt{2^2.5} = 2\sqrt{5}$
$\sqrt{3^6} = 3^3$	
$\sqrt{a^2} = a$	$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$
$\sqrt{a^4} = a^2$	$\sqrt{a^4 b} = a^2\sqrt{b}$
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[m]{a^m b} = a^{\frac{n}{m}}\sqrt[m]{b}$

con n múltiplo de m.

Es conveniente verificar con la calculadora que éstas transformaciones producen la misma expresión decimal a lado y lado de cada signo de igualdad.

Después de haber encontrado un procedimiento general para simplificar cualquier radical podrán aplicarlo simplificando radicales específicos como:

$\sqrt{200}$, $\sqrt{160}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{180}$, $\sqrt{360}$, etc.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

13 Repasar el sistema simbólico de las expresiones decimales para los operadores racionales y verificar que un operador racional puede representarse alternativamente mediante una fracción o una expresión decimal periódica.

14 Inferir de las características de la representación decimal de los operadores racionales, que la representación decimal de un operador irracional tiene que ser una expresión infinita no periódica.

15 Dada una recta graduada interpretar números reales como puntos de esa recta y viceversa.

CONTENIDOS BASICOS

Otro de los sistemas simbólicos para los reales es el de los decimales. Veamos:

Si de las fracciones tomamos aquellas cuyo denominador es potencia de 10 como $\frac{3}{10}$, $\frac{21}{100}$,y aquellas que tienen una fracción equivalente con denominador potencia de 10, obtenemos las fracciones decimales.

Las fracciones que son equivalentes con una fracción cuyo denominador es potencia de 10, son aquellas cuyos denominadores pueden expresarse como un producto cuyos factores son iguales a 2 o a 5:

$$\frac{1}{2}\quad \frac{3}{5}\quad \frac{7}{20}\quad \frac{11}{40}\quad \frac{1}{50}\quad \frac{113}{80}\quad \frac{211}{160}$$

Para convertirlas en fracciones decimales basta con complificar o simplificar la fracción por un factor adecuado para que el denominador sea potencia de 10, puede ser por 2 o 5 o alguna potencia de estos. Ejemplos:

$$\frac{7}{20} = \frac{7}{2^2.5} = \frac{7\times 5}{2^2.5.5} = \frac{35}{100}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times 2}{5\times 2} = \frac{6}{10}$$

Estas fracciones decimales se pueden representar mediante "expresiones decimales" o simplemente "decimales" siguiendo los pasos de nuestro sistema de numeración decimal, veamos:

$\frac{123}{10} = 12 + \frac{3}{10} = (1 \times 10) + (2 \times 10^{o}) + (3 \times \frac{1}{10}) = 10 + 2 + \frac{3}{10}$

$\frac{123}{10} = 12.3$ *punto decimal que separa la parte llamada "entera" de la parte "decimal".*

$\frac{18}{25} = \frac{18 \times 4}{25 \times 4} = \frac{72}{100} = 0 + \frac{70}{100} + \frac{2}{100} = 0 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} = 0.72$

Estas expresiones decimales también se pueden obtener dividiendo el numerador entre el denominador de una fracción. Si efectuamos esta división, con fracciones cuyo denominador es potencia de 10, o con otras, que tienen una fracción equivalente con denominador potencia de 10, obtenemos "decimales finitos".

Ejemplo:

$\frac{1}{2} = 0.5$; $\frac{2}{100} = 0.02$; $\frac{3}{4} = 0.75$; $\frac{1}{25} = 0.04$

No todos los operadores racionales se pueden expresar como decimales finitos: sólo aquellos que están representados por fracciones cuyo denominador es potencia de 10, o cuyo denominador tiene como factor a 2 o a 5.

Otras fracciones como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{14}$, etc. no tienen expresión decimal finita, pero podemos obtener alguna expresión aproximada de estas, efectuando la división entre el numerador y el denominador.

Veamos la aproximación de $\frac{3}{14}$

```
30   |_14_______
 20   0.2142857
  60
   40
   120
     80
     100
       2
```

Hemos obtenido 0.2142857 y en el proceso encontramos otra vez como residuo a 2 y a partir de aquí se vuelven a repetir los cocientes 142857 para producir la aproximación: 0.2142857142857.

En este momento el residuo vuelve a ser 2 y la secuencia volverá a repetirse indefinidamente, esto es $\frac{3}{14} = 0.2142857\ 142857\ \overline{142857}$, *en donde la barra encima de 142857 indica que 142857 se repite indefinidamente.*

Las expresiones decimales que tienen grupos de dígitos que se repiten sin fin, son llamadas decimales periódicos o decimales infinitos periódicos.

Otros ejemplos de decimales periódicos son:

$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ $\quad \frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$ $\quad \frac{14}{15} = 0.9\overline{3}$ $\quad \frac{26}{111} = 0.\overline{234}$

Así podemos concluir que todo operador racional puede expresarse mediante un decimal finito o mediante un decimal periódico.

Podemos considerar los decimales finitos como decimales periódicos si suponemos que el período es 0. Así $0.5 = 0.5000 = 0.5\overline{0}$

De acuerdo con esto, todo racional puede expresarse mediante un decimal periódico.

¿Existirá algún decimal no periódico e infinito? De ser así, ¿qué clase de números representaría?

Sí, existen expresiones decimales no periódicas e infinitas y también reglas para obtener algunas de ellas. Un ejemplo de este tipo de expresiones es el siguiente: 0.12112111211112..., en la que se aumenta un 1 en forma progresiva en cada grupo de numerales que siguen después de cada 2.

Esta expresión decimal infinita y no periódica representa un operador irracional.

Ya estamos familiarizados con estos operadores. Uno de estos es:

$\pi = 3.14159265358979...$

Otro es $\sqrt{2} = 1.414228...$

$\sqrt{3} = 1.7182...$

Es fácil encontrar los decimales para tantos números irracionales como deseemos. Todo lo que tenemos que hacer es evitar períodos que se repitan una y otra vez indefinidamente.

Por ejemplo: un número irracional está representado por el decimal 0.101001000100001...

¿Con qué regla se formaron los dígitos de la parte decimal?

¿Puede encontrar alguna pauta en el siguiente decimal? 0.12345678910111213141516171 8...

Teóricamente hablando, todos los números reales se podrían representar con expresiones decimales infinitas periódicas o no periódicas. No es muy correcto decir que los números reales son las expresiones decimales inifintas periódicas y no periódicas, pues eso sería confundir el sistema conceptual de los números reales con uno de sus sistemas simbólicos. Los griegos conocían y operaban con muchos números reales que son irracionales, y no conocían las expresiones decimales.

En general se puede decir que el sistema simbólico de las expresiones decimales sirve tanto para los fraccionarios $\mathbb{Q}$ como para los reales $\mathbb{R}$.

No se puede comprobar directamente que en las expresiones decimales que representa operadores irracionales, nunca se va a repetir un período. Pero se puede inferir o deducir que no se repite, porque si se repitiera, podríamos encontrar un operador racional que tuviera esa representación. (El procedimiento para encontrar una fracción equivalente a una expresión decimal periódica se verá próximamente).

Inferir o deducir es una operación lógica mental que permite hacer afirmaciones o negaciones que no aparecen explícitamente en la información disponible inicialmente. En este caso sabemos que todo operador racional se puede representar con una expresión decimal finita o infinita periódica. De esa información se puede extraer la conclusión de que para representar los operadores irracionales con expresiones decimales, no quedan sino las expresiones infinitas no periodicas.

Nótese que esta última afirmación no se puede verificar empíricamente, porque por más cifras que uno escriba para π, o para $\sqrt{2}$ sin encontrar la repetición de ningún período, no se sabría si más tarde se repite o no algún período. Pero por razones lógicas sí se puede estar seguro de que no se repetirá ningún período en la expresión decimal de π o de $\sqrt{2}$.

La estructura lógica de la siguiente frase es compleja, pero el cerebro puede analizarla y encontrarla plenamente satisfactoria sin necesidad de comprobaciones específicas.

"Si la representación decimal de todo operador racional es finita o infinita periódica, entonces la de cada operador irracional es infinita y no periódica".

Nótese el uso de los conectivos "si..., entonces...", "o", "y", de las negaciones "in-...", "ir-...", "no", y de los cuantificaciones "todo" y "cada".

Esta actividad mental de codificar y recodificar la información proporcionada por los cuantificadores, las negaciones y las conectivas binarias, es la más importante para desarrollar los sistemas lógicos conceptuales. La lógica simbólica o "logística" es el manejo de sistemas simbólicos para apoyar y desarrollar esos sistemas lógicos conceptuales. El lenguaje ordinario, los lenguajes científicos y los lenguajes matemáticos son los sistemas concretos correspondientes.

Para completar el panorama de las representaciones decimales de los racionales e irracionales, faltaría estudiar la manera de transformar una expresión decimal infinita periódica en una fracción que represente el mismo operador. Así quedaría demostrado que un operador representable por una expresión decimal infinita periódica tiene que ser racional.

Hay un algoritmo explícito para encontrar la fracción correspondiente a una expresión periódica dada. No es muy importante que los alumnos puedan utilizarlo en todos los casos, sino más bien que verifiquen en casos simples (períodos cortos, y períodos puros, esto es sin decimales intermedios entre el punto decimal y el período) que efectivamente esa expresión decimal periódica si corresponde a una fracción.

En las sugerencias metodológicas indicamos algunos de estos casos. La regla general es designar por una letra el operador, representado por la expresión periódica, por ejemplo: $a = 2.12\bar{3}$. Si no es pura, se multiplica por la potencia de 10, necesaria para obtener un período puro. En el ejemplo, $100\,a = 212.\bar{3}$

Se separa la parte entera y se trabaja con la parte decimal únicamente: $b = 0.\bar{3}$.

Para transformar la expresión periódica pura en fracción, basta escribir como numerador el período, y como denominador colocar tantos nueves como numerales tenga el período (en este caso uno). Se puede comprobar que $b = \frac{3}{9}$ directamente por división continuada, o mejor aún por una manipulación algebraica (que habría que justificar conceptualmente) consistente en multiplicar la expresión por la potencia mínima de 10 que traslada el período a la parte entera (en este caso basta la primera potencia) y restar finalmente las expresiones para eliminar los períodos):

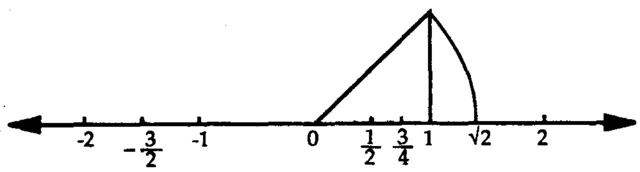
$$\begin{array}{r} 10\,b = 3.\bar{3} \\ -\,b = 0.\bar{3} \\ \hline 9\,b = 3.0 \\ b = \frac{3}{9} \end{array}$$

Por lo tanto $100a = 212 + \frac{3}{9}$ y $a = \frac{212}{100} + \frac{3}{900}$

Lo más importante en esta actividad es el proceso lógico de identificación de las expresiones decimales finitas e infinitas periódicas con representaciones de operadores racionales, y la transformación mental de esa información en la conclusión de que las representaciones decimales de los operadores irracionales tienen que ser infinitas no periódicas.

Es interesante preguntarse ahora si todos los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta. ¿Habrá en la recta un punto para cada número? ¿Y a la vez habrá un número para cada punto?

Sabemos representar muchísimos números reales tanto racionales como irracionales. Para todos es clara una situación como la siguiente:



— ¿Pero acaso nos hemos preguntado por las posibilidades de continuar representando indefinidamente cada vez más y más números reales sobre esta recta?

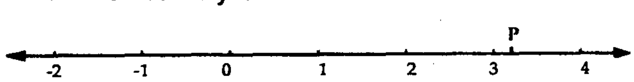
Trabajando con el conjunto ℝ y con una recta que se prolonga indefinidamente en ambos sentidos, es decir, con una recta doblemente infinita, se ha encontrado que para cada número real es posible encontrar un punto sobre la recta y a la vez que a cada punto de la recta le corresponde un número real.

Dicho de otra manera: puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta. Por eso se afirma que los números reales llenan la recta. ¿Qué relación tiene esto con la idea de que ℝ es un conjunto completo?

NOTA PARA EL PROFESOR: Los planteamientos anteriores corresponden al cálculo tradicional pero desde hace varios decenios se ha retomado la discusión sobre muchas de estas cuestiones. Algunas de ellas, como la de si hay puntos de la recta muy cerca del origen a los que no corresponde número real alguno de los construidos hasta ahora (los reales estándar), o si más bien hay números infinitesimales (o reales no-estándar) a los que no corresponde punto alguno de la recta real usual, son actualmente de interés para lógicos y matemáticos. Aun cuando no se desarrolle el tema con los alumnos conviene que los educadores lo estudien y analicen.

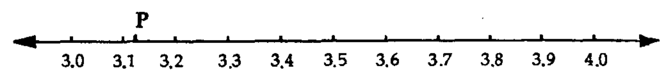
Veamos ahora cómo representar sobre la recta el valor de π cada vez con mayor exactitud.

Anteriormente habíamos representado sobre la recta el punto P correspondiente a π entre los puntos marcados con 3 y 4.



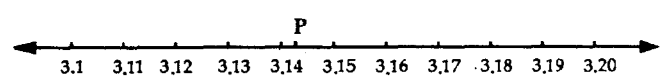
Supongamos que subdividimos cada uno de los intervalos entre los puntos marcados con enteros en diez intervalos congruentes más pequeños. Dibujemos solamente el segmento entre los puntos marcados 3 y 4 y denotemos los puntos fines de los intervalos de izquierda a derecha por 3.1 , 3.2, ... hasta 3.9 Para que nuestra notación sea consistente, reemplazamos a 3 y 4 por 3.0 y 4.0.

A estos puntos marcados con decimales con un dígito después del punto decimal los llamaremos puntos marca de la primera etapa. Los números correspondientes desde luego son racionales.

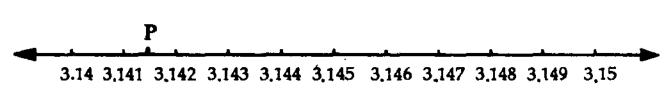


Continuamos con el proceso de subdivisión concentrándonos siempre en el intervalo que contenga al punto P. Cada paso es como si mirásemos la parte de la recta que contiene a P bajo una sucesión de lentes de microscopio en la que cada lente fuese diez veces mas poderoso que el anterior.

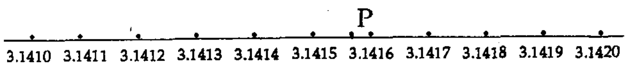
En la siguiente etapa vemos al intervalo entre 3.1 y 3.2 con un aumento de 10 veces. Lo hemos subdividido a su vez en 10 intervalos congruentes más pequeños. Ahora los puntos de la subdivisión tienen 2 dígitos en la parte decimal. Así señalamos los puntos marca de la segunda etapa. Una vez más se corresponden con números racionales.



Veamos ahora el intervalo entre 3.14 y 3.15. Con un aumento de 10 veces y tenemos la tercera etapa de los puntos marca. Esta vez la ampliación nos muestra que P está entre 3.141 y 3.142



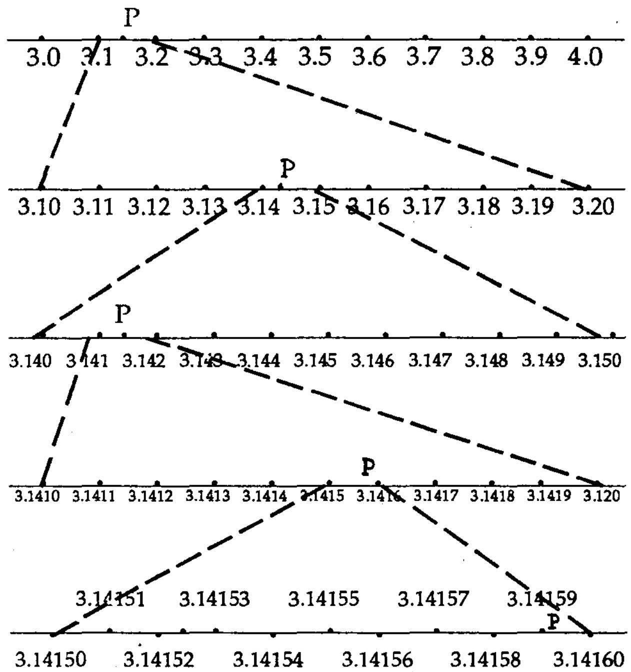
Veamos ahora el intervalo entre 3.141 y 3.142 con un aumento de 10 veces. Esta vez vemos que P está entre 3.1415 y 3.1416



Una ampliación más nos mostraría a P entre 3.14159 y 3.14160

De esta manera hemos obtenido una expansión decimal de π

El proceso seguido podemos resumirlo mediante el siguiente diagrama



SUGERENCIAS METODOLOGICAS

No debe confundirse el operador con sus símbolos. Los racionales no son los decimales periódicos y los irracionales no son los decimales infinitos no periódicos. Los decimales son representaciones de esos operadores. Cabe anotar que los griegos conocían muy bien los números reales sin conocer los decimales.

En cuanto a los sistemas simbólicos más usuales para los números reales hay que caer en la cuenta de que el de las fracciones y los radicales es el más preciso y el de las expresiones decimales es el más útil.

Una vez que se maneje bien la distinción entre el sistema conceptual y el sistema simbólico de los números reales, pueden hacer algunos ejercicios como los siguientes:

1 - Hallar decimales equivalentes con 0.7

2 - Hallar fracciones decimales equivalentes a cada una de las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{4} \quad , \quad \frac{12}{25} \quad , \quad \frac{5}{16} \quad , \quad \frac{4}{75}$$

3 - Expresar cada una de las siguientes fracciones como un decimal

$$\frac{3}{5} \, , \, \frac{1}{3} \, , \, \frac{4}{9} \, , \, \frac{2}{7} \, , \, \frac{3}{8} \, , \, \frac{5}{6} \, , \, \frac{1}{9} \, , \, \frac{3}{11} \, , \, \frac{5}{10}$$

4 - Con la ayuda de la calculadora hallar un valor aproximado para

$$\sqrt{5} \;,\; 3\sqrt{7} \;,\; 2\sqrt{17} \;,\; -3\sqrt{2} \;,\; \sqrt{6} \;,\; \sqrt{8} \;,\; \sqrt{13}$$

5 - Dar ejemplos de expresiones decimales infinitas no periódicas.

6 - Hallar expansiones decimales con 5 cifras decimales para: $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$

7 - Entre cuáles reales está ubicado en la recta numérica el real 0.1211211112...

8 - Obtener una fracción a partir de un decimal periódico. Veamos cómo hacerlo a través de un ejemplo:

Hallar la fracción equivalente a 0.272727... o $0.\overline{27}$

$$a = 0.2727...$$
$$100\,a = 27.27...$$

Restamos a de 100 a

$$\begin{array}{rcl} 100\,a & = & 27.27... \\ -\;a & = & 0.27... \\ \hline 99\,a & = & 27 \end{array}$$

$$a = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

¿Por qué multiplicamos por 100?

Hemos encontrado una fracción equivalente a $0.\overline{27}$
Ahora hallemos la fracción equivalente a $0.27\overline{34}$

Apliquemos el mismo procedimiento anterior algo modificado pues el grupo periódico de dígitos no empieza inmediatamente después del punto decimal.

$$n = 0.27343434...$$

Multipliquemos por 100:

$$100\,n = 27.343434...$$

De esta manera logramos que el período comience inmediatamente después del punto decimal. Ahora multipliquemos este número por 10^2 porque hay dos dígitos en el período y restamos

$$\begin{array}{rcl} 10000\,n & = & 2734.\overline{34} \\ 100\,n & = & 27.\overline{34} \\ \hline 9900\,n & = & 2707 \end{array}$$

$$n = \frac{2707}{9900}$$

y a la inversa podemos demostrar que

$$\frac{2707}{9900} = 0.27\overline{34}$$

De la misma manera encontrar fracciones equivalentes a cada uno de los siguientes decimales periódicos

$0.\overline{234}$, $0.5676767...$, $0.\overline{17}$, $0.4\overline{23}$, $3.\overline{1265}$.

9 - Seleccionar algunos subconjuntos del sistema conceptual poniendo condiciones en el sistema simbólico.

¿Cuáles son los elementos del sistema conceptual que pueden expresarse con decimales finitos?

¿Y cuáles los que pueden expresarse con decimales periódicos?

¿Cuáles los que pueden expresarse con decimales infinitos no periódicos?

¿Cuáles son los operadores que se pueden representar mediante expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, con a y b naturales y $b \neq 0$?

OBJETIVOS ESPECIFICOS

16 Extender el orden aditivo de los números racionales a los números reales.

17 Distinguir entre truncar y aproximar una expresión decimal.

18 Identificar la precisión en la que está escrita una expresión decimal y relacionarla con fracciones cuyo denominador es una potencia de 10, y con la notación científica.

19 Determinar la precisión conveniente para diferentes tipos de cálculos.

CONTENIDOS BASICOS

En el grado anterior vimos que el conjunto de los números racionales es un conjunto ordenado, es decir, que dados dos racionales cualesquiera diferentes, uno de ellos es menor que el otro. Una ordenación de los números reales debe corresponderse también con una ordenación de los puntos sobre la recta numérica y esa ordenación debe reflejarse en la notación decimal. Para verificarlo representamos en la recta numérica los dos racionales **a** y **b**. Si **a** está representado a la izquierda de **b** entonces **a** es menor que **b**, lo que se simboliza **a < b**. Si **a** está representando a la derecha de **b** entonces **a** es mayor que **b**, lo que se simboliza **a > b**.

La ordenación de los números decimales requiere una comparación entre ellos.

— Para comparar dos números positivos en expresión decimal se fija la atención en la parte entera de cada uno, y se decide cuál es el mayor, utilizando los conceptos y los procedimientos ya conocidos para los naturales y los enteros. Si la parte entera de **a** es mayor que la de **b**, ya no hace falta analizar la parte decimal para saber que **a > b**.

— Cuando los dos números tienen la misma parte entera, las reglas y procedimientos cambian drásticamente y es necesario estar alerta a la diferencia. En cierto sentido, el procedimiento para identificar el mayor número decimal con parte entera cero se parece más al procedimiento para ordenar palabras en orden alfabético que al procedimiento para ordenar naturales (a menos que las dos partes decimales tengan exactamente el mismo número de cifras a la derecha del punto decimal, pues en ese caso coinciden los dos tipos de procedimiento: el de los naturales y el del diccionario).

Ejemplos:

Si los números tienen distinta parte entera, para ordenarlos es suficiente comparar la parte entera. Se aplica el orden natural

$$20.352 < 21.352$$
$$20.98765 < 21.012$$

Si los números tienen la misma parte entera, entonces es necesario comparar las partes decimales.

Para esa comparación no sirve el orden natural. Se busca entonces el primer dígito en el cual difieren, como se explicó anteriormente.

$$20.212 < 20.22$$
$$0.45739876... < 0.45741245...$$

Para comparar dos decimales negativos se busca el primer dígito en el que las representaciones difieren. El número cuya representación tiene el mayor dígito en tal punto es el número menor:

$$-44.372... < -43.372...$$

— Siempre que estén haciendo cálculos con expresiones decimales infinitas se pueden obtener tantas cifras decimales como se quiera (otra cosa es que ello no tenga mucho sentido). En la mayoría de los cálculos y mediciones no se puede trabajar con un número infinito de cifras decimales y por tanto es necesario truncar o aproximar la expresión decimal.
—Truncar una expresión decimal es simplemente tomar un número determinado de sus primeras cifras (o dígitos) decimales y descartar las otras.

Ejemplo 3.1415926.... Si se desea truncar las cifras decimales en las centésimas se tendría 3.14; si se desea hacerlo en las diezmilésimas se tiene 3.1415.

Una expresión decimal también se puede aproximar, para lo cual se procede de la siguiente manera: De acuerdo con la situación se decide hasta que grado de precisión conviene aproximar (hasta las centésimas, o hasta las milésimas, etc.). Se busca la cifra respectiva y se mira la cifra que le sigue, y si esta cifra es 5 o mayor que 5, se le suma uno a la cifra que se especificó. Si dicha cifra es menor que 5, entonces se descartan esta cifra y todas las cifras que le siguen.

En 3.1415926... si se desea aproximar la cifra de las diezmilésimas, se encuentra que es 5 y que le sigue un 9. Entonces se toma 3.1416 por aproximación.

Ejemplos:

a) $20 \div 7 = 2.857142857...$

Si se desea dar el resultado con dos cifras decimales, se tendría 2.86, porque la cifra en la que se quiere aproximar es la de las centésimas (en este caso 5), y la cifra que le sigue a 5 es 7.

b) $11 \div 7 = 1.571428...$ Si se desea dar el resultado con tres cifras decimales se tiene 1.571, porque la cifra en la que se quiere aproximar es la de las milésimas (en este caso 1), y la cifra que le sigue a 1 es 4; como $4 < 5$, entonces se descarta el 4 y todas las cifras decimales que le siguen, y se tiene 1.571.

— Algunos números reales son muy grandes y otros son tan pequeños que es difícil leerlos o escribirlos.

c) El diámetro del sistema solar: 11800000000 km.

d) El diámetro de un átomo de plata: 0.00000000025 m.

La notación científica facilita la lectura y los cálculos con estos números.

La notación científica está basada en potencias de 10, positivas y negativas.

Un número está escrito en notación científica cuando se expresa como un producto de un número mayor o igual que 1, pero menor que 10, y una potencia entera de 10.

En el ejemplo c) $1\underbrace{1800000000}_{10\ \text{lugares}}\ \text{km} = 1.18 \times 10^{10}\ \text{km}.$

El punto decimal debe moverse 10 lugares a la izquierda para conseguir un número entre 1 y 10.

En el ejemplo d) $0.\underbrace{0000000002}_{10\ \text{lugares}}5\ \text{m} = 2.5 \times 10^{-10}\ \text{m}$

El punto decimal debe moverse 10 lugares a la derecha para conseguir un número entre 1 y 10.

Siempre que se realice una medición y se efectúen cálculos de longitudes, áreas, volúmenes, etc. es importante determinar la precisión más conveniente para cada cálculo. Se trata ante todo de desarrollar el "sentido de magnitud" o "sentido numérico": La habilidad para hacer una estimación perceptual ("a ojo") del rango en que se halla una magnitud concreta dada (la longitud de un camino, el área de una finca, el volumen de una caja, etc.), para hacer una rápida selección de las unidades más apropiadas para ese rango específico y para obtener un valor aproximado al menos del orden de magnitud que resultaría si se hiciera una medición más exacta.

e) La longitud de la carretera Bogotá - Tunja estaría en el mismo rango que la de la distancia del extremo norte de la Guajira a Leticia, rango en el que son útiles los kilómetros, pero en distinto orden de magnitud: una distancia es del orden de los centenares y la otra del orden de los miles de kilómetros. Como contraste, en este rango de longitudes no es apropiado utilizar el año de luz como unidad, ni tampoco el centímetro.

f) Si se está preparando o suministrando a un paciente un medicamento, la precisión en los miligramos de cada componente es muy importante, porque si en una dosis se cambia de 5 miligramos a 5 centigramos puede ser fatal para el paciente. Si se agregan 5 mg o 5 cg a una receta de cocina, esta no se alteraría notablemente: en el rango de masas y pesos apropiado para la culinaria no se usan los miligramos.

En esa receta médica los componentes están en el rango donde son útiles los miligramos. Así 0.5 mg y 50 mg están en el mismo rango pero tienen diferente orden de magnitud: en este rango es apropiado manejar esas cantidades utilizando los miligramos. En cambio, la precisión es mucho más importante, porque ya es el orden de magnitud, o sea que se tiene que recetar con precisión de 1 mg. ó1 microgramo o 1 gramo, un cambio en el orden de magnitud de 10 ó 100 veces, pueden ser fatales. Por eso se propone hacer la distinción entre **rango**, más por el tipo de unidad apropiada, y **precisión** ya con el orden de magnitud específico.

La precisión apropiada depende mucho de para qué se va a utilizar la medida; tiene que ver con la finalidad para la cual se usa.

La primera aproximación al llegar a un rango y al seleccionar una unidad es ver si la cantidad es pequeña, muy pequeña, grande o muy grande, y si se tiene cierto sentido numérico ya se sabe cuáles son las unidades apropiadas.

Ej: El centímetro es una unidad muy grande para medir una onda luminosa, tal vez sea más apropiada la Unidad Ångstrom para hacer esta medición, o mejor aún el nanómetro.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para estudiar el orden de los decimales es conveniente aprovechar la actividad del "microscopio de reales" que se desarrolló para los objetivos 13 a 15. A propósito del orden de los reales, puede desarrollarse parte de la unidad de matemática finita y sistemas relacionales (unidad 4).

El desarrollo de estos objetivos es una buena oportunidad para usar la calculadora. Se puede estudiar en esta cómo manejar la notación científica y cómo se hacen aproximaciones de decimales.
Recuérdese que es más importante la estimación aproximada hecha antes del cálculo más preciso, que el manejo de muchas cifras decimales, y que es más útil calcular con la aproximación adecuada al problema, que hacer largas operaciones con una precisión engañosamente refinada.

Se pueden resolver algunos ejercicios como los siguientes:

—Escriba cada uno de los siguientes números en notación científica y luego compare sus resultados con los de la calculadora.

a) 330000000 b) 902.050000000 c)0.000035
d) 0.00034 e) 1800000000000

— Hallar el resultado aproximándolo en la cifra de las centésimas:

a) $22 \div 7$ b) $\frac{10}{3} + \frac{10}{6}$ c) $\frac{7}{9} + \frac{1}{3}$ d) $\frac{0.345839 \times 5.931052}{2.10034}$

e) ¿Qué resulta en los ejemplos b) y c) si se aproximan los valores decimales de las fracciones antes de sumar? ¿Y en el ejemplo d) antes de efectuar las operaciones?

— Efectuar las operaciones y expresar en notación científica

a) $(3.12 \times 10^{27}) \times (2 \times 10^{9})$

b) $(3.16 \times 10^{4}) + (2.75 \times 10^{7})$

c) $\dfrac{(4.513 \times 10^{-3}) \times (3.21 \times 10^{-8})}{2.15 \times 10^{13}}$

— Determinar una unidad conveniente para expresar cada una de las siguientes mediciones.

a) La cantidad de agua que se gasta mensualmente en una casa.
b) La cantidad de leche que consume una persona diariamente.
c) La cantidad de sal que es conveniente que consuma diariamente una persona.
d) El peso adecuado para un adulto de 30 años de edad.
e) El perímetro del patio principal de un colegio.
f) El área aproximada de un municipio.

— Utilizar esas unidades para hacer una estimación de:

a) La cantidad de agua que se gasta en su casa en un mes.
b) La cantidad de leche y de sal que consume usted diariamente.
c) Su peso actual.
d) El perímetro del patio principal de su colegio.
e) El área de su municipio

(Si es posible hacer algunas de estas mediciones, o averiguar los valores que tienen, comparar su estimación con el resultado de cada medición).

OBJETIVO ESPECIFICO

20 Extender de los números racionales a los reales las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, y practicar algunos de sus algoritmos.

CONTENIDOS BASICOS

Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división en el conjunto de los números reales requieren trabajar tanto con los racionales como con los irracionales e indagar qué pasa con las propiedades y los procedimientos estudiados para las mismas operaciones en otros conjuntos numéricos como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.

El trabajo que la mente realiza para efectuar dichas operaciones puede expresarse mediante diferentes sistemas simbólicos. Uno de esos podría ser el de las expresiones decimales y otro el que emplea las expresiones algebraicas $\sqrt{3}$ y $\sqrt{n}$ directamente.

Si se elige el primero, el de las expresiones decimales, y se toma en términos rigurosos tendríamos que manejar decimales infinitos periódicos y decimales infinitos no periódicos. ¿Cuál sería un algoritmo para multiplicar, por ejemplo, decimales infinitos no periódicos? En cambio si se trabaja en términos prácticos, es decir aceptando las aproximaciones, resulta que tanto las operaciones como sus propiedades y sus algoritmos son ya conocidas por los estudiantes. Habíamos encontrado que irracionales como π y $\sqrt{2}$ son aproximadamente iguales a 3.1416 y a 1.4142 respectivamente. Entonces adiciones como $3+\pi$, $4+\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}+\pi$ pueden realizarse y expresarse con los conocimientos, previos, utilizando el símbolo "$\doteq$" para expresar "aproximadamente igual".

$3+\pi \doteq 3.0000 + 3.1416$; $\sqrt{2}+\pi \doteq 1.4142 + 3.1416$
$3+\pi \doteq 6.1416$ $\qquad$ $\sqrt{2}+\pi \doteq 2.5558$

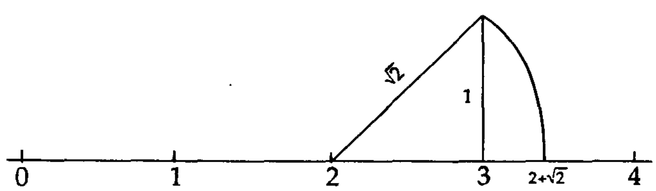
Si se elige el otro sistema simbólico, el de las expresiones algebraicas, habría que analizar algunos aspectos que no se habían presentado al estudiar otros sistemas numéricos.

Los resultados de las adiciones mencionadas anteriormente serían sencillamente $3+\pi$, $4+\sqrt{2}$, y $\sqrt{2}+\pi$

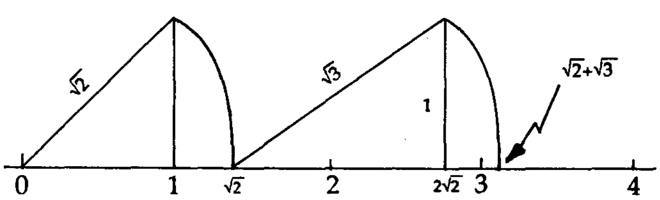
El estudiante necesita "descubrir" que dichas expresiones son nombres para los números reales obtenidos al efectuar la operación y que usualmente no se simplifican más.

La adición de reales puede introducirse como adición de longitudes.

¿Qué se obtiene al sumar longitudes cuyos valores son 2 y $\sqrt{2}$ o $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$? Una representación de las longitudes sobre una recta ayuda a entender la operación.



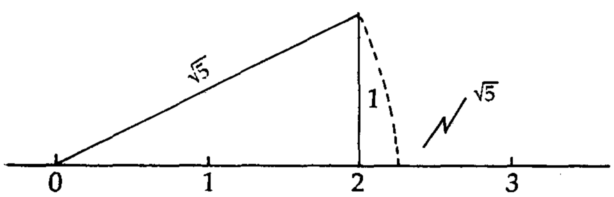
Se representa una longitud de dos unidades y a continuación una longitud igual $\sqrt{2}$



Se representa una longitud igual a $\sqrt{2}$ y a continuación otra igual a $\sqrt{3}$

¿Cómo se encuentra el punto que representa el real $2\sqrt{2}$?

Es bueno que los estudiantes se pregunten si $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es lo mismo que $\sqrt{5}$ y que lo analicen con ayudas como la de una gráfica, para verificar si
$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$, o no.

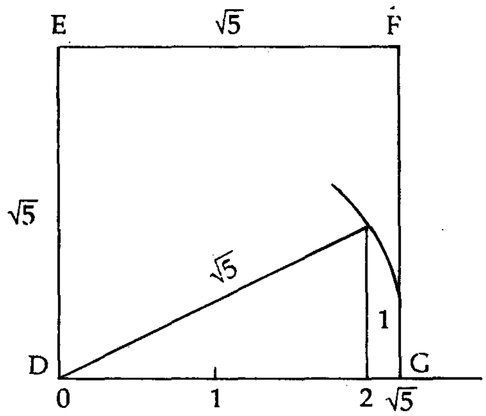


La comparación de esta gráfica y de la anterior muestra la diferencia de los resultados.

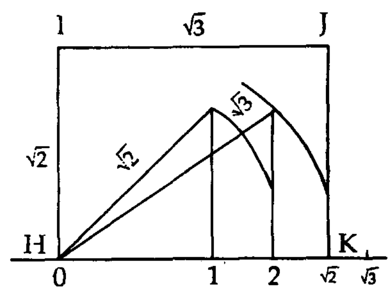
Pueden analizarse otros casos. ¿Será $\sqrt{9}+\sqrt{25}$ lo mismo que $\sqrt{34}$? Sabemos que $\sqrt{9}=3$ y $\sqrt{25}=5$, además $3+5=8$. Luego $\sqrt{9}+\sqrt{25}=8$. ¿Será lo mismo que $\sqrt{34}$? ¿Es fácil explicar la diferencia; verdad?

Los dos ejemplos permiten inferir que en la adición de longitudes irracionales no se pueden sumar las cantidades que están bajo radical.

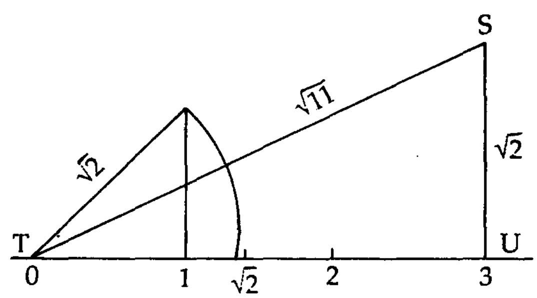
El trabajo con perímetros y áreas de ciertos polígonos requiere también operaciones con números reales. Veamos algunos:



Un cuadrado cuyo lado mide $\sqrt{5}$



Un rectángulo cuyos lados miden $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$.



Una escalera cuya longitud, altura y distancia a la pared son $\sqrt{11}$, $\sqrt{2}$ y 3 respectivamente.

Hallemos el perímetro del cuadrado DEFG. Como la longitud de cada lado es $\sqrt{5}$ y el perímetro de un polígono se obtiene sumando las longitudes de sus lados tenemos: perímetro del cuadrado

DEFG: $l+l+l+l=4l$

Perímetro de DEFG = $\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{5}$

Perímetro de DEFG = $4\sqrt{5}$

El símbolo $4\sqrt{5}$ se interpreta como cuatro veces la raíz de cinco. También como cuatro por la raíz de cinco.

En casos como esos el número que antecede al radical se identifica como el coeficiente del radical.

Encontremos ahora el perímetro del rectángulo HIJK

Perímetro de HIJK = $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Como para hallar el perímetro no hay un orden riguroso para escribir los sumandos, también puede escribirse:

Perímetro de HIJK = $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$.

Se pueden asociar los sumandos y tenemos:

Perímetro de HIJK = $(\sqrt{3} + \sqrt{3}) + (\sqrt{2} + \sqrt{2})$

Perímetro de HIJK = $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

El resultado final también podría expresarse como

$2(\sqrt{3} + \sqrt{2})$. ¿Por qué?

El perímetro del triángulo TSU correspondiente a la escalera sería:

Perímetro del triángulo TSU = $3 + \sqrt{2} + \sqrt{11}$

¿Es posible simplificar el resultado? Parece que en este sistema simbólico no se puede hacer simplificación alguna. Si se trabajan esas longitudes sobre una recta es fácil obtener un punto de la recta y por consiguiente un número para expresar el perímetro. Algo similar sucede si se trabaja con las expresiones decimales correspondientes a los sumandos.

Para la sustracción pueden trabajar también ejercicios sencillos con longitudes y analizar los efectos de la operación y las características de sus simbolizaciones.

A medida que los estudiantes van construyendo los conceptos correspondientes a la adición y a la sustracción van estando en capacidad de formular e interpretar generalizaciones como $a + \sqrt{b}$; $x - \sqrt{y}$.

Hallar las áreas de los polígonos DEFG, HIJK y TSU es una actividad que exige multiplicar números reales.

Como el cuadrado DFGH tiene sus lados de longitud igual a $\sqrt{5}$, su área será:

Area del cuadrado DFGH = $l \bullet l = \sqrt{5} \bullet \sqrt{5}$

Area de DFGH = 5; por definición de raíz cuadrada y de cuadrado de un número.

Para verificar ese resultado los alumnos pueden emplear una expresión aproximada de $\sqrt{5}$, multiplicarla por sí misma y analizar si el producto es 5 aproximadamente. Podrían también verificarlo sobre la gráfica del cuadrado. ¿Cómo? Necesitan tener en cuenta que la respuesta son 5 unidades de área y no de longitud. ¿Qué sucede si en cambio de aplicar la definición, el ejercicio se resuelve así:

$$\sqrt{5} \bullet \sqrt{5} = \sqrt{25} = 5$$

¿Qué operación se efectuó con las cantidades subradicales?

El área del rectángulo HIJK se puede estimar primero sobre la gráfica teniendo en cuenta la longitud unidad que es la pauta para la unidad del área. Después se puede hacer la operación manejando los valores de los lados.

Area del rectángulo HIJK = $\sqrt{3} \bullet \sqrt{2}$
Area de HIJK = $\sqrt{6}$; son unidades de área.

¿Podremos llegar a un resultado que de alguna manera permita verificar si el resultado $\sqrt{6}$ es correcto?

Multipliquemos $\sqrt{6} \bullet \sqrt{6} = 6$
¿Qué relación existe entre $\sqrt{6}$ y $\sqrt{2} \bullet \sqrt{3}$?

¿Cómo podríamos aplicar la definición de raíz cuadrada al número real simbolizado por $\sqrt{2} \bullet \sqrt{3}$?

Tenemos que multiplicar el número por sí mismo es decir $(\sqrt{2} \bullet \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} \bullet \sqrt{3})(\sqrt{2} \bullet \sqrt{3})$.

Si tenemos en cuenta las propiedades asociativa y conmutativa que conocemos podemos organizar la operación así: $(\sqrt{2} \bullet \sqrt{3})(\sqrt{2} \bullet \sqrt{3}) = (\sqrt{2} \bullet \sqrt{2})(\sqrt{3} \bullet \sqrt{3})$ y aplicando la definición de raíz cuadrada obtenemos $(\sqrt{2} \bullet \sqrt{2})(\sqrt{3} \bullet \sqrt{3}) = 2 \bullet 3 = 6$

Entonces, tanto $\sqrt{6}$ como $\sqrt{2} \bullet \sqrt{3}$ parecen ser símbolos para el mismo número real.

Hallar el área del triángulo rectángulo TSU cuya base es 3 y cuya altura es $\sqrt{2}$, exige la multiplicación de números reales.

Area del triángulo STU $= \dfrac{\text{distancia} \bullet \text{altura}}{2}$

Area del triángulo STU $= \dfrac{3 \bullet \sqrt{2}}{2}$ (unidades de área)

Area del triángulo STU $= \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (unidades de área)

Habrá alguna forma diferente de expresar ese resultado sin recurrir a las expresiones decimales?

Anteriormente se había trabajado con expresiones de este tipo como cuando se hizo la composición del operador reductor $\frac{1}{2}$ y el operador ampliador $\sqrt{2}$. Conviene darse cuenta de que $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, etc. son nombres para números reales y que si no hay una forma más sencilla de expresarlos se usan así.

Busquemos unos procedimientos para multiplicar a $4\sqrt{2}$ por 3 y encontremos razones para cada paso:

$4\sqrt{2}$ indica que cuatro se multiplica por $\sqrt{2}$ pero como la multiplicación es una suma abreviada tenemos:

$$4\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$$

entonces, $(4\sqrt{2}) \bullet 3 = (\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}) \bullet 3$

$$(4\sqrt{2}) \bullet 3 = 12 \text{ veces } \sqrt{2},$$

lo que nos permite inferir que se hubiera podido multiplicar el coeficiente 4 por el factor 3 y multiplicar luego ese resultado por $\sqrt{2}$.

Es decir que $(4\sqrt{2}) \bullet 3 = (3 \bullet 4)\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

Otro procedimiento consiste en asumir que se cumplen las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación aprendida para $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ y entonces:
$(4\sqrt{2}) \bullet 3 = 4 \bullet 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Una verificación del resultado puede ser:

$$4\,(1.4142)\,3 = 12\,(1.4142)$$

$$(5.6568)\,3 = 16.9704$$

$$16.9704 = 16.9704$$

Con base en el ejercicio anterior busquemos la forma de multiplicar $3\sqrt{2}$ por $2\sqrt{2}$.

$3\sqrt{2}$ se interpreta como 3 veces $\sqrt{2}$
$2\sqrt{2}$ se interpreta como 2 veces $\sqrt{2}$
y $(3\sqrt{2})(2\sqrt{2})$ se interpreta como $3\sqrt{2}$ veces $2\sqrt{2}$.

Se trata entonces de un producto de varios factores. Si asumimos las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación tenemos:

$$(3\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = (3 \bullet 2)(\sqrt{2} \bullet \sqrt{2})$$
$$(3\sqrt{2})(2\sqrt{2}) = 6 \bullet 2 = 12$$

Apoyándonos en este resultado podemos suponer que la operación puede efectuarse multiplicando los coeficientes entre sí y las cantidades subradicales también entre sí. ¿Se cumplirá en todos los casos?

¿Qué sucederá al verificar numéricamente el resultado?

$$[3\,(1.4142)]\ [2\,(1.4142)] \stackrel{?}{=} (3 \bullet 2)(\sqrt{2} \bullet \sqrt{2})$$

Es importante que los estudiantes analicen que la diferencia en los dos resultados es una prueba de que 1.4142 es solamente un valor aproximado de $\sqrt{2}$.

Como los estudiantes ya están familiarizados con el teorema de Pitágoras pueden aplicarlo al triángulo TSU.

Si el largo de la escalera, la altura y la distancia a la pared se simbolizan por l, a y d respectivamente tendremos: En TSU

$l^2 = a^2 + d^2$ y trabajando con los valores numéricos correspondientes sería:

$$(\sqrt{11})^2 = (\sqrt{2})^2 + 3^2$$

Si aplicamos las definiciones de cuadrado y de raíz cuadrada de un número, tenemos:

$$\sqrt{11} \bullet \sqrt{11} = (\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}) + (3 \bullet 3)$$
$$11 = 2 + 9$$
$$11 = 11$$

¿Cuál es la función del paréntesis ( ) acá?
¿A qué corresponde el valor 11?

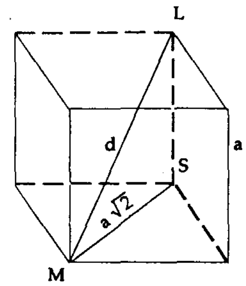
¿Se obtendrá el mismo resultado si en cada producto indicado multiplicamos las cantidades subradicales?

$$\sqrt{11} \bullet \sqrt{11} = (\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}) + (3 \bullet 3)$$
$$\sqrt{121} = \sqrt{4} + 9$$
$$11 = 2 + 9$$
$$11 = 11$$

En este caso por ambos procedimientos se llegó al mismo resultado.
¿Será que en la multiplicación de radicales se pueden multiplicar siempre las cantidades subradicales?
¿Podría aplicarse en casos como
$\sqrt{2} \bullet \sqrt{11}$; $\sqrt{3} \bullet \sqrt[3]{20}$? ¿Por qué?

El empleo de una calculadora, o en su defecto, de una tabla de raíces de los números facilita la confirmación o el rechazo de las conjeturas que se hagan.

En un objetivo anterior se sugirió como ejercicio el de encontrar la diagonal principal de un cubo cuando se conoce su arista.



Recuérdese que las caras del cubo son cuadradas y que la diagonal del cuadrado es igual al lado del cuadrado por raíz de dos. Si la longitud de la arista se simboliza con a la diagonal principal del cubo con d y la diagonal de una cara del cubo con $a\sqrt{2}$ tenemos que encontrar la hipotenusa del triángulo MSL.

Podemos aplicar nuevamente el teorema de Pitágoras:

$d^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$

$d^2 = a^2 + (a\sqrt{2})(a\sqrt{2})$, ¿Por qué?

$d^2 = a^2 + 2a^2$

$d^2 = a^2(1 + 2)$, ¿Por qué?

$d^2 = 3a^2$

$\sqrt{d^2} = \sqrt{3a^2}$ Aplicar raíz cuadrada a ambos miembros.

$d = a\sqrt{3}$ Extraer la raíz cuadrada a los cuadrados perfectos.

Luego la diagonal principal del cubo se encuentra aplicándole al valor de la arista el operador ampliador $\sqrt{3}$. Es decir, $d = a\sqrt{3}$.

El otro interrogante que se formuló en ese ejercicio fue el de expresar la arista del cubo en función de la diagonal. Partiendo del resultado anterior tenemos:

$$a = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Nota para el profesor: Hasta este punto se han trabajado las operaciones con los reales y sus propiedades en cuanto han sido necesarias para resolver algunos problemas que aparecen en los textos de matemáticas. Puede considerarse que es solo una introducción al tema. No se han estudiado exhaustivamente pues ello rebasa las necesidades y las posibilidades de este curso.
Pero dentro de la política de adecuación curricular el profesor puede avanzar tanto cuanto le sea posible de acuerdo con las características del medio y del grupo de alumnos. En particular, podría avanzar en relación con las leyes de los signos y con las leyes de las operaciones.

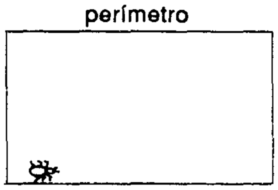
SUGERENCIAS METODOLOGICAS

— Es necesario aprovechar el ambiente de análisis y de construcción activa de los conocimientos para que los alumnos hagan conjeturas sobre las operaciones que están trabajando. Una discusión, por ejemplo, entre quienes opinan que $\sqrt{9} + \sqrt{25} = \sqrt{9 + 25}$ y quienes dudan o niegan esa idea les ayuda a "aprehender" una propiedad de la suma de radicales y desarrolla sus habilidades de argumentación. Evita también que se confundan cuando efectúen otras operaciones en las cuales se cumplan otras reglas, como sería la multiplicación de esos mismos radicales, caso en el cual se pueden multiplicar las cantidades subradicales.

— Inicialmente se trabaja con números ya determinados como
$1 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{5}$, $\pi + \sqrt{10}$, $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$, $\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$, etc.
Después se puede trabajar con números todavía no determinados como $1 + \sqrt{p}$, $a + \sqrt{p}$, $2 - \sqrt{p}$, $b - \sqrt{p}$, donde a, b, p, pueden ser enteros, racionales u otros reales que ya tengan símbolos, y p debe ser positivo.

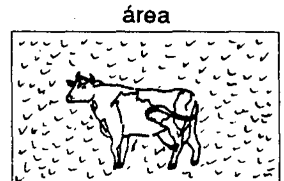
— Las nociones de geometría que se aplican son elementales pero básicas y es una oportunidad para que los estudiantes afiancen los conceptos correspondientes. En particular, pueden progresar en relación con la construcción activa de los conceptos de perímetro y de área. Para hallar el perímetro de un polígono, por ejemplo de un cuadrado, pueden considerar que se trata de encontrar la longitud del camino recorrido por una hormiguita que avanza por los bordes del polígono, que gira cuidadosamente en las esquinas o vértices y que como sus patas son tan pequeñitas no se sale de la línea. Para hallar el área pueden aplicar la idea siguiente: Se trata de hallar el área de un lote que está sembrado de pasto, asociándola con el espacio que tenga una vaca para comérselo.

Hacia el concepto de perímetro



La hormiga recorre el borde del rectángulo.

Hacia el concepto de área



La vaca tiene toda la superficie del rectángulo llena de pasto para comérselo

Se espera que estas comparaciones faciliten a los estudiantes la construcción de los conceptos de perímetro como medida de una longitud y de área como medida de una superficie.

— El desarrollo de operaciones como $(\sqrt{11})^2$ brindan una oportunidad para ejercitar la reversibilidad del pensamiento. Una interpretación de las formas de leer la expresión puede iniciar la reflexión: "Elevar al cuadrado la raíz cuadrada de once"; "La raíz de once elevada al cuadrado", etc. Cualquiera que sea (dentro de lo correcto) la forma de leer la expresión, incluye la potenciación y la radicación. Cuando los estudiantes las reconozcan como operaciones inversas y puedan mentalmente elevar 11 al cuadrado, obtener 121, sacar luego la raíz cuadrada a 121 y obtener nuevamente 11 van a incrementar su habilidad mental y a encontrar que sucede "lo mismo" que cuando se duplica y luego se saca la mitad, o cuando se suma un número y luego se resta ese mismo número. Una buena prueba del avance logrado sería que los estudiantes disfrutaran aplicando el concepto para hacer bromas y preguntas capciosas a otros compañeros y adultos que no se hayan apropiado de esa idea.

– Para hallar la diagonal principal del cubo es muy útil que cada alumno lo construya en cartón o cartulina, que trace las diagonales de las caras y que construya un triángulo, uno de cuyos lados tenga la misma longitud que la arista, otro una longitud igual al producto de la arista por $\sqrt{2}$ y el otro será el producto de la arista por $\sqrt{3}$.

— Conviene que los estudiantes empleen la regla y el compás para realizar las construcciones geométricas. Esas construcciones se explicaron anteriormente.

— A medida que vayan avanzando en el conocimiento de las operaciones y de los algoritmos pueden analizar que se pueden extender a este sistema numérico las mismas propiedades que se cumplen en los otros.

— Es conveniente que los alumnos formulen problemas en los cuales necesiten trabajar con números reales, que los analicen en grupo y que busquen soluciones adecuadas.

— Con ayuda de textos para la Educación Secundaria pueden realizar variados ejercicios sobre el tema.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

21 Extender las operaciones de potenciación, radicación y logaritmación de los números racionales a los reales y simbolizarlas apropiadamente.

22 Encontrar, con ayuda de la calculadora, los resultados aproximados de potenciaciones, radicaciones y logaritmaciones entre números reales.

CONTENIDOS BASICOS

A continuación resumimos lo que puede encontrarse en cualquier texto de matemáticas sobre las reglas y propiedades usuales de estas operaciones. Según el enfoque del programa, lo importante es que se recalque la relación entre los sistemas simbólicos y los conceptos que representan (o los sistemas conceptuales que están detrás de ellos) y que se haga notar que las operaciones en realidad se extienden de las anteriores para los racionales a unas operaciones en un sistema nuevo; así como las comprobaciones específicas en casos concretos con la calculadora para que no se caiga en las rutinas simbólicas usuales, por más que estas sean necesarias cuando se tiene claro lo que significan.

Exponenciación

En sexto grado vimos que si **a** y **n** son números naturales,

$$a^1 = a\ ,\ a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ veces},\ n>1}\ ,\ a^0 = 1$$

Veamos ahora la forma exponencial a^n, donde el exponente **n** es un entero y la base **a** es un número real.

— Para un entero n positivo: $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ factores } a,}$

incluyendo el caso $a^1 = a$

Ejemplo: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$

— Para $n=0$; $a^0 = 1$, $a \neq 0$ (0^0 no está definido)

En general para todos los enteros n $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

$$a^{-5} = \frac{1}{a^5}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{8}} = \frac{8}{27}$$

Propiedades de los exponentes (operaciones entre potencias)

Para m y n enteros y a y b números reales distintos de cero se cumplen las siguientes propiedades

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (Producto de potencias de igual base)

Ejemplos: $\left(\frac{4}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5+(-7)} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-2}$

$$a^8 \cdot a^{-5} = a^{+3}$$

$(a^n)^m = a^{n.m}$ (Potencia de una potencia)

Ejemplos: $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \frac{1}{\frac{1}{32}} = \frac{32}{1} = 32$

$(ab)^m = a^m b^m$ (Potencia de un producto)

La potenciación es distributiva con respecto al producto

$$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

$(ab)^3 = a^3 b^3$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, $b \neq 0$ (Potencia de un cociente)

La potenciación es distributiva con respecto a la división.

$$\left(\frac{8}{4}\right)^3 = \frac{8^3}{4^3}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a^4}{b^4}$$

$\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = \begin{cases} a^{m-n} \\ \frac{1}{a^{n-m}} \end{cases}$ $a \neq 0$ (División de potencias de igual base)

$\frac{3^8}{3^4} = 3^{8-4} = 3^4$ $\qquad \frac{3^4}{3^8} = \frac{1}{3^{8-4}} = \frac{1}{3^4}$

$\frac{a^3}{a^{-2}} = \frac{1}{a^{-2-3}} = \frac{1}{a^{-5}} = a^5$

Radicación

Una raíz cuadrada de un número b es un número r tal, que $r^2 = b$ y

Una raíz cúbica de un número b es un número r tal, que $r^3 = b$

2 es una raíz cuadrada de 4, ya que $2^2 = 4$

-2 es una raíz cuadrada de 4 ya que $(-2)^2 = 4$

En general, para un número natural n, r es una raíz enésima de b si $r^n = b$, esto se simboliza así: $\sqrt[n]{b} = r$

Ejemplos: Una raíz cuarta de 16 es 2, pues $2^4 = 16$
Otra raíz cuarta de 16 es -2, pues $(-2)^4 = 16$

Pero, ¿Cuántas raíces enésimas reales tiene un número real cualquiera?

Resumámoslo en el siguiente cuadro:

Número de raíces reales enésimas de un número real b.		
	n par	n impar
b positivo	2 raíces enésimas reales 2 y -2 son raíces cuartas de 16	Una raíz enésima real 2 es la única raíz cúbica de 8
b negativo	Ninguna raíz enésima real -4 no tiene raíz cuadrada real.	Una raíz enésima real -2 es la única raíz cúbica real de -8

Ejemplos: 7 tiene dos raíces cuadradas reales: $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$

7 tiene dos raíces cuartas reales y así sucesivamente: $\sqrt[4]{7}$, $-\sqrt[4]{7}$

10 tiene una raíz cúbica real, $\sqrt[3]{10}$

10 tiene una raíz quinta real y así sucesivamente: $\sqrt[5]{10}$

— 13 tiene una raíz cúbica real, una raíz quinta real, y así sucesivamente:

$$\sqrt[3]{-13}, \quad \sqrt[5]{-13}$$

— 8 no tiene raíces cuadradas reales, no tiene raíces cuartas reales y así sucesivamente.

Propiedades de la Radicación

— Para **m** y **n** números naturales mayores o iguales que 2; y **x, y** números reales positivos se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\sqrt[n]{x^n} = x \qquad \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8} = 2, \qquad \sqrt[3]{a^3} = a$

2. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} . \sqrt[n]{y}$ (Raíz de un producto)

La radicación es distributiva con respecto al producto:

$$\sqrt[3]{125 \times 1000} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{1000} = 5 \times 10 = 50$$
$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$

3. $\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}$ (Raíz de un cociente)

La radicación es distributiva con respecto al cociente

$$\sqrt[5]{\frac{81}{625}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}}$$

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$ (Raíz de una raíz)

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

Logaritmación

Si a y b son dos números reales, el logaritmo en base **a** de **b** ($\text{Log}_a b$) es otro número real x tal que

$$a^x = b$$

Es decir que el logaritmo es el exponente x al que hay que elevar a **a** para obtener **b**.

$\text{Log}_a b = x$ es equivalente a $a^x = b$

$\text{Log}_3 \left(\frac{1}{9}\right) = -2$ pues $3^{-2} = \frac{1}{9}$

El uso de la calculadora

Es importante recordar que la calculadora no puede reemplazar el pensamiento humano. Sirve para agilizar los cálculos, para ahorrar tiempo en ciertos tipos de problemas, y para practicar los algoritmos; pero deberá saberse cómo y cuándo utilizarla.

Cuando los alumnos ya han comprendido los conceptos de las operaciones potenciación, radicación y logaritmación, pueden utilizar la calculadora para hallar los resultados aproximados de estas operaciones entre números reales.

Ejemplo: Hallar mediante aproximaciones superiores e inferiores, $\text{Log}_2 1000$.

El $\text{Log}_2 1000$ es un real x tal que $2^x = 1000$

Se puede comenzar estimando a ojo entre qué y qué va a estar con la calculadora, usando la tecla x^y.

Hallamos $2^9 = 512$ y $2^{10} = 1024$, lo cual nos indica que el valor de x está entre 9 y 10.

Se aproxima más a 2^{10}.

Seguimos aproximando y hallamos:

$2^{9.8}$ y $2^{9.9}$

$$2^{9.8} = 891.4437767$$
$$2^{9.9} = 955.4257832$$

De estos dos valores el que más se aproxima es $2^{9.9}$.

Seguimos aproximando y hallamos $2^{9.98}$, $2^{9.97}$ y $2^{9.96}$.

El valor de x buscado, está entre 9.97 y 9.96

Seguimos aproximando y calculamos:

$$2^{9.965} = 999.4565229; \quad 2^{9.966} = 1000.14954$$

Ahora calculamos

$$2^{9.9657} = 999.9415799$$
$$2^{9.9658} = 1000.010893$$

Seguimos aproximando y hallamos

$$2^{9.96579} = 1000.003961$$
$$2^{9.96578} = 999.99703$$

Se puede elegir cómo el valor buscado de x más aproximado 9.96578

Según como vayan quedando los resultados, se pueden seguir haciendo cálculos para hallar un valor mucho más aproximado con 6, 7, 8, etc. cifras decimales.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Como en grados anteriores no se ha trabajado con bases y exponentes negativos, conviene que los mismos alumnos observen el comportamiento de bases negativas con exponentes pares e impares y saquen la conclusión respectiva. Lo mismo cuando el exponente es un entero negativo.

Conviene que los alumnos recuerden que la radicación y la logaritmación son las operaciones inversas de la potenciación y la razón por la cual resultan dos operaciones inversas.

Recordémoslo: La potenciación no es una operación conmutativa $3^2 \neq 2^3$, y en general $a^x \neq x^a$

Si se desconoce la base; esta se halla mediante la radicación $\square^3 = 8;\ \sqrt[3]{8} = 2$

luego $2^3 = 8$

Si se desconoce el exponente; éste se halla mediante la logaritmación.

$2^{\square} = 8;\ \log_2 8 = 3$ luego $2^3 = 8$

En una operación conmutativa (como la multiplicación) si se desconoce uno cualquiera de los términos (factores) solo se requiere de una operación inversa para hallarlo (la división).

$\square \times 5 = 20;\qquad \square = 20 \div 5$

$5 \times \square = 20;\qquad \square = 20 \div 5$

Teniendo en cuenta las operaciones inversas de la potenciación, pueden hacerse algunos ejercicios como estos:

— Hallar el valor de x

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{27}\qquad 8^x = \frac{1}{512}$

$(-5)^{-3} = x\qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^x = 4\qquad x^{-3} = \frac{1}{125}$

— Completar el siguiente cuadro, formando las dos igualdades que hacen falta, a partir de la igualdad dada. Guiarse por el ejemplo

POTENCIACION	RADICACION	LOGARITMACION
$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$	$\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$	$\text{Log}_{\frac{2}{3}} \left(\frac{27}{8}\right) = 3$
$(3)^3 = 27$		
	$\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$	
		$\text{Log}_{1/3} 9 = -2$

Es importante que los mismos alumnos orientados por el maestro descubran las propiedades de estas operaciones y las utilicen para agilizar los cálculos. También que las comparen con las propiedades de la adición y la multiplicación. Observarán por ejemplo, que la conmutativa se cumple para la adición y la multiplicación, pero no para la potenciación, la radicación y la logaritmación.

$3 \times 2 = 2 \times 3 = 6 \qquad 3^2 = 9 \qquad 3^2 \neq 2^3$

$$\sqrt{4} \neq \sqrt[4]{2}$$

$$\mathrm{Log}_3\ 9 \neq \mathrm{Log}_9\ 3$$

Conviene resaltar la utilidad de la distributiva de la potenciación y de la radicación con respecto a la multiplicación y a la división en los cálculos. Recuérdese que la potenciación y la radicación no distribuyen con respecto a la adición ni a la sustracción.

Pueden resolver otros ejercicios como los siguientes:

1. Decir si es falsa o verdadera cada una de las siguientes proposiciones y por qué.

a) $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

b) $\sqrt{a.b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

c) $a^3\, b^3 = (a.b)^3$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{b^5}$

e) $(a+b)^3 = a^3 + b^3$

f) $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

g) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[5]{a}$

h) $\sqrt[5]{a^5} = a$

i) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

j) $((a)^2)^3 \neq a^5$

2. Efectuar usando en las respuestas solo exponentes positivos.

a) $\dfrac{10^{-13} \bullet 10^{-4}}{10^{-21} \bullet 10^{3}}$ b) $\dfrac{18 \times 10^{12}}{6 \times 10^{-4}}$ c) $\dfrac{3^{-2} \bullet 4^{5} \bullet 7^{4} \bullet 10}{4^{-6} \bullet 7^{-2} \bullet 3^{8} \bullet 10^{-4}}$

3. Simplificar usando las propiedades de los exponentes y expresar las respuestas usando solo exponentes positivos.

a) $(3a^5)\ (2a^{-3})$ b) $\dfrac{6x^{-2}}{8x^{-5}}$

c) $(2a^{-3}b^2)^{-2}$ d) $\left(\dfrac{a^3}{b^5}\right)^{-2}$

e) $\dfrac{6m^{-2}n^3}{15m^{-1}n^{-2}}$ f) $\left(\dfrac{x^{-3}}{x^4y^{-4}}\right)^{-3}$

g) $\left[\left(\dfrac{4a^2}{2b^5}\right)^2\right]^{-1}$ h) $\dfrac{1}{(a-b)^{-2}}$

i) $\left(\dfrac{2^2x^22y^0}{8x^{-1}}\right)^{-2} \left(\dfrac{x^{-3}}{x^{-5}}\right)^3$

En cuanto al uso de la calculadora conviene tener en cuenta que independientemente del tipo de calculadora que posean los alumnos, es esencial que ellos lean el manual del usuario de sus calculadoras. Hay gran variedad en el mercado y cada una es ligeramente distinta de las otras. Conviene que el alumno lea solo aquellas secciones que se refieran a las operaciones que esté usando; no debe tratar de leer de seguido todas las cosas que la calculadora puede hacer, pues tenderá a confundirse.

— Pueden hallar los resultados aproximados de los siguientes cálculos, usando la calculadora:

$\sqrt[8]{0.070144}$	$\mathrm{Log}_3\ 1000$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$	$\mathrm{Log}_5\ 30000$
$\dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$	$\mathrm{Log}_{10}\ \sqrt[2]{1000}$

OBJETIVO ESPECIFICO

23 Analizar algunas propiedades de las operaciones con números reales y su utilización para el cálculo.

Los conceptos de conmutar, asociar, ser módulo y ser el inverso, se han venido construyendo y ampliando progresivamente desde los primeros grados de la Básica Primaria. En esos grados se consideró suficiente que los alumnos aplicaran, tanto en el cálculo mental como en el escrito, las propiedades y explicaran lo que sucede en cada caso. No se les pidió una definición ni una demostración de las mismas. Tampoco se les exigió el empleo de sustantivos abstractos como conmutatividad y asociatividad.

Là distributiva de la multiplicación con respecto a la adición se trabajó como propiedad básica para construir un algoritmo de la multiplicación.

En la Básica Secundaria se construyó el concepto de operaciones clausurativas. Al respecto se puede consultar el programa de séptimo grado.

En esta unidad que estamos desarrollando, al trabajar con números reales ya determinados (como 3, $\sqrt{2}$, π, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $5-\sqrt{2}$, etc.) las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división (con divisor diferente de cero), potenciación (con exponente entero) y radicación (con radicando positivo) se encontró que los números reales se comportan del mismo modo que si fueran números racionales. Por eso se consideró que dichas operaciones y sus propiedades se extienden de los sistemas en los cuales $\mathbb{Q}$ es el conjunto numérico a aquellos en los cuales el conjunto es $\mathbb{R}$.

Las características de los sistemas numéricos formados con $\mathbb{R}$ y las operaciones algebráicas mencionadas en el párrafo anterior, permiten avanzar en la comprensión y la aplicación de las propiedades conmutativa, asociativa, modulativa, invertiva y clausurativa de la adición, hacer conjeturas y verificar cuáles propiedades se cumplen y cuáles no en las operaciones sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación (El trabajo en este punto con la logaritmación como otra operación inversa de la potenciación es opcional. El grado de desarrollo de los estudiantes es una buena pauta para trabajarla o para posponerla).

De acuerdo con la metodología activa y el enfoque constructivista de los conocimientos es conveniente que los estudiantes:

— Realicen un análisis de los diferentes sistemas numéricos que han construido durante la Educación Básica: sistemas con $\mathbb{N}$, sistemas con $\mathbb{Z}$, sistemas con $\mathbb{Q}$. y sistemas con $\mathbb{R}$, para que tengan una visión general de cómo se han ido resolviendo unos problemas a medida que los sistemas son más completos y las operaciones gozan de más propiedades y también una idea de cómo han ido surgiendo nuevos problemas insolubles en esos sistemas, problemas para cuya solución se han creado nuevos sistemas, en donde se trabaja con nuevos números. Si el maestro lo considera pertinente, puede orientar a los alumnos para que consulten algunas nociones sobre la estructura de grupo del Sistema $\mathbb{Z}$ con la adición y la de grupo de $\mathbb{R}$ con la adición y de $\mathbb{R}^+$ (los reales positivos sin el cero) y de $\mathbb{R}-\{0\}$ con la multiplicación.

— Realicen ejercicios que les permitan encontrar y sorprenderse con hechos como el intentar hallar $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-64}$, $\sqrt{-1}$ y "descubrir" que en $\mathbb{R}$ no hay un número que sea una respuesta de esos ejercicios. Así les queda fácil inferir que la radicación no está totalmente definida en $\mathbb{R}$ y que por consiguiente no es clausurativa total. Esto motiva a los matemáticos a extender los sistemas numéricos para lograr resultados para operaciones que no se podrían efectuar en los sistemas anteriores.

Un paso más avanzado es el de aplicar esas y otras propiedades al trabajar con números reales todavía no determinados como $2+\sqrt{p}$, $a+b$, $5m-2y$, $x+y-z$, etc. donde las letras $p, a, b, m, y, x, z,$ representan cualquier número real.

La utilización de las propiedades en álgebra presenta aspectos novedosos: Partiendo de ejemplos concretos como $a=\sqrt{2}$, pueden interpretar expresiones como $a+a^2+a^3$ y entender por qué esa expresión algebráica no es igual ni a $3a$, ni a $3a^2$ y tampoco a $3a^3$.

También pueden inferir que aplicando la propiedad clausurativa de la adición es decir, que la suma de números reales es otro número real, lo que sí puede hacerse es reemplazar la expresión $a+a^2+a^3$ por una sola letra, por ejemplo d y tendremos: $a+a^2+a^3=d$.

En ejercicios que se desarrollan más adelante puede resultar útil esta sustitución ya que permite trabajar más ágilmente algunos pasos de ciertos problemas.

En relación con la misma propiedad clausurativa los alumnos pueden preguntarse si se cumple, por ejemplo en la adición y en la multiplicación de números irracionales. ¿La suma de dos irracionales es un irracional todas las veces? ¿Algunas veces? ¿Nunca? ¿Se puede decir que "una propiedad se cumple algunas veces?

En forma similar a la empleada para desarrollar en un objetivo anterior algunos ejercicios, pueden analizarse casos en los cuales es útil la aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la multiplicación.

Multiplicar $\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b}$ por $\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b^2}$

$(\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b})\ (\sqrt{a}\ \sqrt[3]{b}) = (\sqrt{a}\ \sqrt{a})\ (\sqrt[3]{b}\ \sqrt[3]{b^2})$

$(\sqrt{a \cdot a})\ (\sqrt[3]{b \cdot b^2}) = (\sqrt{a^2})\ (\sqrt[3]{b^3}) = ab$

El análisis de este procedimiento, además de verificar las propiedades mencionadas de la multiplicación, permite ejercitar la reversibilidad del pensamiento.
Esto porque el resultado de aplicar a un número real positivo sucesivamente operadores como el cuadrado y la raíz cuadrada positiva es el mismo número real.

A medida que los temas de álgebra se vayan desarrollando pueden trabajarse otras propiedades. Ejemplos:

— La distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y a la sustracción es útil para multiplicar expresiones como $4ab$ por $2a - 3b + 5$.

— La propiedad inversa de la anterior, es decir la recolectiva, se aplica cuando se desea factorizar expresiones como: $2x^2 - 4x^3 + 8x^4$.

— La distributiva de la potenciación con respecto a la multiplicación es necesaria para realizar ejercicios como el de elevar al cubo la expresión $3xy^2$.

— La distributiva de la radicación con respecto a la multiplicación se aplica cuando se realiza un ejercicio como $\sqrt[3]{x^3 y^6}$.

Es necesario y muy provechoso que los estudiantes se pregunten por ciertas posibles propiedades que no se han trabajado como la distributiva de la potenciación con respecto a la adición y a la sustracción y la distributiva de la radicación con respecto a las mismas operaciones. ¿Será $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 - c^2$?

Será $\sqrt[3]{x^3 + y^3 - z^3} = x + y - z$? ¿Por qué?

Las conjeturas que los estudiantes formulen, la actividad mental, los ejercicios que desarrollen y/o el manejo que hagan de la calculadora evitarán que extiendan las propiedades que han aprendido para unas operaciones, a otras en las cuales no se cumplen. En otras palabras, evitará que los alumnos hagan inferencias erróneas. Pero ante todo les facilitará herramientas mentales para analizar conjeturas y para verificarlas o refutarlas. Cuando se haya conseguido esto no será necesario hacer análisis exhaustivo de todas las propiedades de las operaciones en cada uno de los sistemas.

La aplicación y la utilidad de este tema será una realidad en el desarrollo de todos los temas del álgebra que nos ocupa y aún de otras álgebras como la de conjuntos y la de las proposiciones.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Los conceptos que han construido y aplicado los estudiantes sobre las leyes de las operaciones pueden servir como punto de partida para las discusiones. Algunas veces se emplean frases estereotipadas para expresar las propiedades como la que afirma que "el orden de los factores no altera el producto". La repetición mecánica es inútil y hasta contraproducente. Lo importante es que los estudiantes puedan explicar con sus palabras qué pasa con el resultado de las operaciones, qué puede hacerse y qué no.

Como base para responder las cuestiones que se sugieren en los contenidos básicos pueden trabajar con números reales ya determinados.

Operaciones como:

$$(\sqrt{3})\ (\sqrt{5}) = \sqrt{15} \text{ y } (\sqrt{7})\ (\sqrt{7}) = 7$$

permiten verificar que el resultado de multiplicar entre sí números irracionales puede ser racional o irracional y que por consiguiente esa operación no es clausurativa en los irracionales. No debe olvidarse que en $\mathbb{R}$ esa operación sí es clausurativa.

Si trabajan primero $\sqrt{2+3+4} = \sqrt{9} = 3$ y luego con ayuda de la memoria (ya conocen algunas aproximaciones) o de una tabla de raíces, o de una calculadora, hacen $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} = 5.146$ pueden concluir que los resultados son diferentes y que la radicación no es distributiva con respecto a la adición. Estos casos particulares son la base concreta para llegar a la conclusión general que pueden expresar simbólicamente así:

En general $\sqrt[3]{x^3 + y^3 - z^3} \neq \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{y^3} - \sqrt[3]{z^3}$

$\sqrt[3]{x^3 + y^3 - z^3} \neq x + y - z$

El signo $\neq$ se lee: "Es diferente de"; "no es igual".

¿Pueden ser iguales esas expresiones para algunos valores de x, y, z,?

Este tipo de experiencias da una claridad conceptual que no se puede suplir con la repetición mecánica de las propiedades.

En cuanto al concepto de grupo hay que tener en cuenta que en la unidad de geometría de este mismo grado se propone un procedimiento para facilitar su construcción.

Como preparación para ese trabajo los estudiantes pueden analizar sistemas como el de $\mathbb{N}$ con la adición y recordar de cuáles propiedades goza la operación.

Algo similar pueden hacer con $\mathbb{N}$ y la multiplicación, con $\mathbb{Z}$ y la adición, con $\mathbb{Z}$ y la multiplicación, con $\mathbb{R}$ y la adición y con $\mathbb{R}$ y la multiplicación. Una vez hecho ese análisis pueden buscar qué hay de común en $\mathbb{Z}$ con la adición, $\mathbb{R}$ con la adición y $\mathbb{R}$ con la multiplicación. Sin llegar a una definición rigurosa de grupo como estructura matemática, esos ejercicios dan herramientas mentales para construir ese concepto.

En la medida en que los estudiantes disfruten estos trabajos de indagación y hallazgo le encontrarán sentido y utilidad a las Matemáticas y, lo que es más importante, obtendrán beneficios para su desarrollo integral.

OBJETIVO ESPECIFICO

24 Formular y resolver problemas que requieran operaciones entre números reales para su solución.

CONTENIDOS BASICOS

En la resolución de problemas no se trata solo de intentar resolver los "problemas de palabras" o "problemas de historieta" usuales, que son más bien ejercicios que verdaderos problemas, sino de hacer el planteamiento y el análisis de problemas interesantes, abiertos, de respuestas múltiples, de proyección a familias de problemas.

Para el tema de los reales se pueden resolver algunos problemas como los siguientes:

— Si la masa de la tierra es aproximadamente de 6.1×10^{27}g ¿Cuál es la masa en toneladas? ¿Y en Kg.?

—¿Cuál es la varilla más larga que cabe en una caja cúbica de 1 m de arista?

—Si la luz recorre 300000 Km en 1 segundo. ¿Cuánto tiempo necesita para recorrer un alambre de 1 cm de largo? ¿Cuánto recorre en 1 micro segundo? ¿Cuánto en un nano segundo?

— Se tienen 3 tanques de agua en tres casas diferentes: uno es cúbico, otro esférico y otro cilíndrico. La capacidad de cada uno de los tres tanques es de 5000 litros.

¿Cuáles son las dimensiones de cada uno de los tanques? ¿Cuál es más económico?

— Una plaza cuadrada mide 120 m de lado. Si se atraviesa de una esquina a la opuesta, ¿cuántos metros se recorren atravesándola? ¿Cuántos metros se recorren atravesando de una esquina a la opuesta, una plaza rectangular cuyas dimensiones son 100 m y 70 m?

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

La resolución de problemas puede ser complementada con el uso de la calculadora. Cada alumno puede ver con cuántas cifras decimales trabaja su calculadora, ver lo de la precisión, etc. y efectuar algunas operaciones con ella como estas:

Cuánto da:

$10^{-5} \times 10^{-5}$

$10^{-6} \times 5550 \times 10^{-6}$

$10^{-5} \times 10^{-6} \times 5550$

También pueden realizar algunas experiencias como las siguientes: medir el diámetro de una rueda de bicicleta. Calcular la longitud de su circunferencia utilizando π y luego verificar su resultado midiendo con un metro.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

25 Interpretar listas de instrucciones, expresiones algebráicas y diagramas operacionales y de flujo, traducir de unos a otros y operar con cualquiera de ellos sobre números en expresión decimal.

CONTENIDOS BASICOS

El trabajo matemático debe contribuir a desarrollar en las personas habilidades que les ayuden a analizar y resolver problemas, procesar información y aprovechar óptimamente el tiempo y los recursos de las mentes, de las ciencias y de las tecnologías.

El empleo de recursos didácticos que permitan explicitar y valorar los procedimientos empleados en el desarrollo de las actividades, puede contribuir a resolver el problema de la sobrevaloración de los resultados y la subvaloración de los procesos que existe actualmente. La formulación de una secuencia de pasos necesarios para la solución de un problema o para la realización de una tarea, la construcción y empleo de diagramas operacionales y de flujo, y el seguimiento de instrucciones, son algunos de esos recursos.

La habilidad para elaborar e interpretar listas complejas de instrucciones (o algoritmos) es tan importante, que quien no la posea en un grado aceptable entenderá cada vez menos el mundo moderno, y aún correrá el riesgo de ir cayendo en un "analfabetismo funcional", aún cuando tenga certificado de un alto nivel de escolaridad. En clase pueden trabajarse muchos ejemplos tanto numéricos como no numéricos. El seguir las indicaciones para usar un aparato, armar un juguete, aprender un nuevo juego, encontrar una dirección, etc., preparan la mente para la interpretación y seguimiento de instrucciones de tipo matemático y viceversa. En este mismo programa hay numerosas listas de instrucciones para las construcciones geométricas que se han realizado. Dichas listas pueden aprovecharse para practicar los conceptos propuestos en este objetivo.

La interpretación de las expresiones algebráicas puede producir una lista de instrucciones que constituyen una secuencia, un programa de las operaciones en el orden que deben realizarse. Los estudiantes pueden traducir a instrucciones términos como

$\frac{3 \bullet \sqrt{2}}{2}$ y $\frac{3 \bullet \sqrt{p}}{2}$

Ejemplo 1

$\frac{3 \bullet \sqrt{2}}{2}$ puede interpretarse así:

- Extraer la raíz cuadrada positiva de 2.
- Multiplicar por 3 esa raíz.
- Dividir entre dos el producto obtenido.

Conviene preguntar si hay otro orden admisible para esas instrucciones.

Este es uno de los casos más sencillos, el de un término en donde los valores están ya determinados.

Ejemplo 2

$\frac{3\ \sqrt{p}}{2}$ puede interpretarse así:

- Extraer la raíz cuadrada del número representado por la letra p.
- Multiplicar por 3 ese resultado.
- Dividir entre 2 el producto encontrado al ejecutar la instrucción anterior.

En este caso el término tiene la letra p que representa un número todavía no determinado. Es importante encontrar el valor que toma el término para distintos valores enteros de p.

Un segundo tipo de expresiones son aquellas en las que hay un término compuesto a su vez por varios términos como: $a^3 + a^2 + a$.

Si se desea hallar el valor numérico reemplazando la a por un número dado tendríamos:

— Tomar el valor de a, elevarlo al cubo y guardarlo en la memoria (o anotarlo en la libreta).

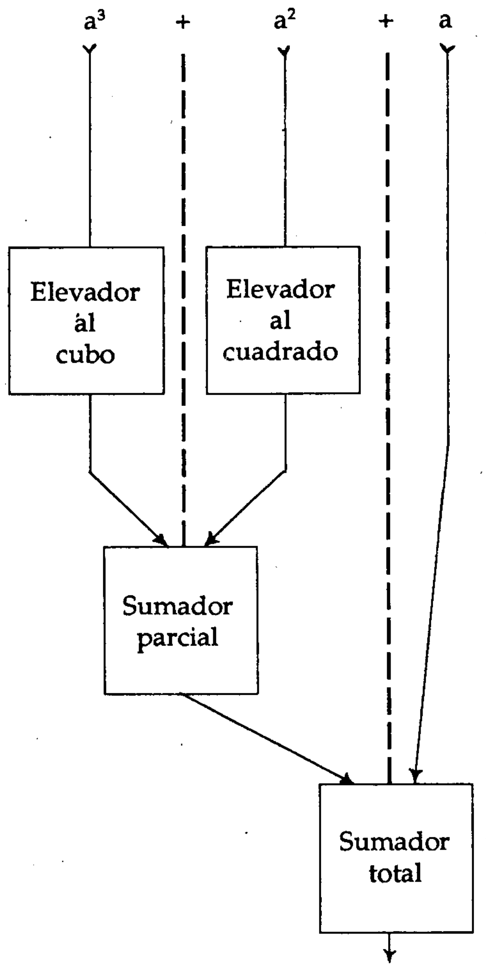
— Tomar nuevamente el valor de a, elevarlo al cuadrado y guardarlo en la memoria (o anotarlo).

— Sumar el valor del cubo con el cuadrado encontrados anteriormente.

— Sumar el valor de a, con el resultado de la adición efectuada en la instrucción anterior.

Es conveniente que se fomente la reflexión acerca del orden de las instrucciones, para analizar si ese orden puede tener algunas variaciones sin afectar el resultado final, o es completamente rígido. Para ello es conveniente ensayar distintos valores de a y distintos órdenes de ejecución.

Estas listas de instrucciones pueden complementarse con gráficos que permiten visualizar de otra manera la forma como se trabaja la expresión, y que vamos a llamar "diagramas operacionales".

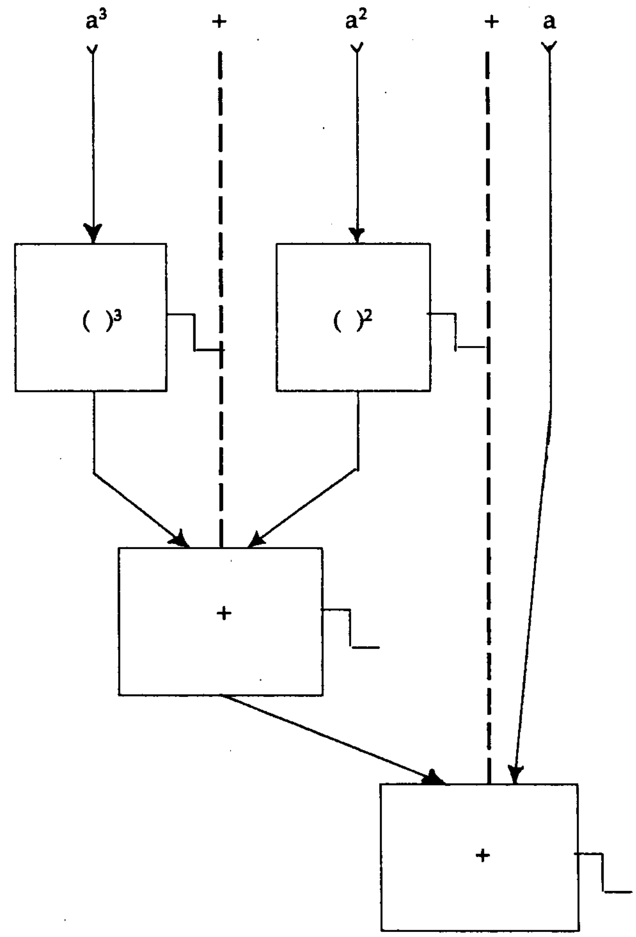


Este gráfico o diagrama de flujo de datos permite identificar los pasos del proceso que son conmutativos y los que no lo son.

Es un diagrama simple, puramente operacional y sin condicionales.

(El profesor David Perkins llamó muy acertadamente estos diagramas operacionales "molinos de moler números". Podemos considerar que en cada caja hay un operador que tiene su propia forma de trabajar ("moler") los números que le llegan. Para recalcar este carácter activo, podemos dibujar una pequeña manivela en la caja:)

El diagrama operacional anterior como molino de moler números quedará así:



Estas ideas pueden y deben ser ampliadas en la clase de acuerdo con el nivel, los intereses y la motivación de los estudiantes. Cualquier término algebráico por complejo que sea puede representarse como un molino de moler números.

Hay otros gráficos llamados "diagramas de flujo", que son los que se refieren a la forma como se va controlando el desarrollo de una tarea o la aplicación de un algoritmo, y a las decisiones que es necesario tomar en un momento dado para tomar uno u otro camino.

Estudiemos el proceso para averiguar el resultado de $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Sabemos en cada caso particular, qué número hay que reemplazar en vez de a, de b, y de c.

Una lista de instrucciones podría ser:

— Determinar los valores de a, b, c.

— Elevar b al cuadrado y anotar ese resultado.

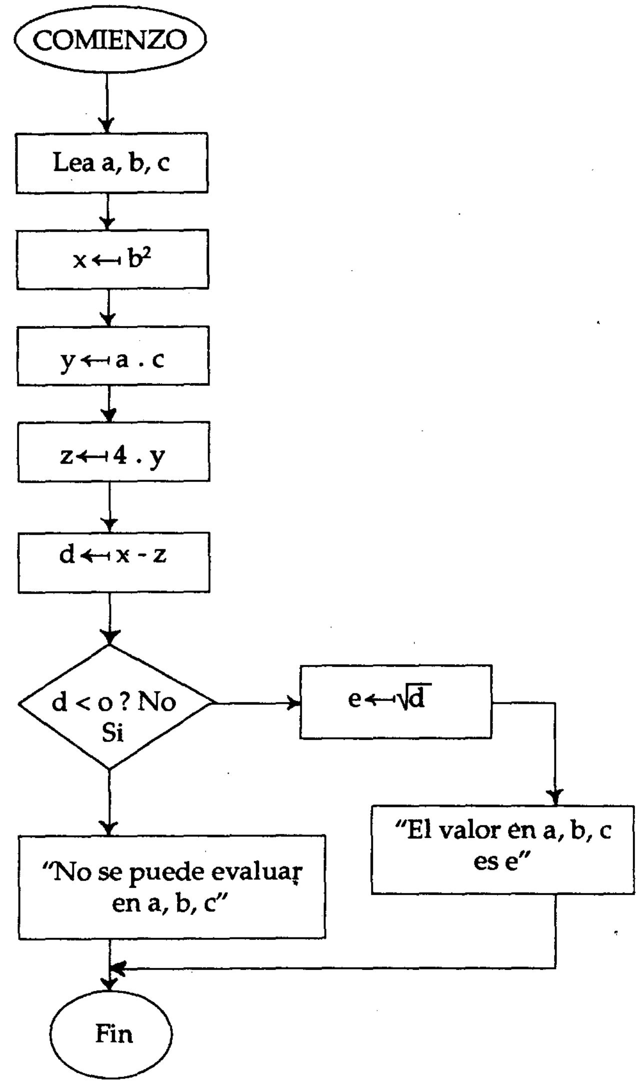
— Multiplicar a por c y anotar ese resultado.

— Cuadruplicar el producto encontrado en la instrucción anterior.

— Restar del cuadrado encontrado en la segunda instrucción, el resultado de efectuar la instrucción anterior, y llamarlo d.

— Preguntar si este resultado d es negativo, o no. Si es negativo, decir que el término no se puede evaluar con esos valores de a, b, c (a menos que ya se conozcan los números imaginarios).

— Si d no es negativo, sacarle la raíz cuadrada a d y decir que ese es el valor del término en a, b, c. Utilizando una flecha "⟵" para indicar "recibe el valor...", el diagrama de flujo correspondiente quedará así:



Nótese que los rombos se usan para indicar los puntos de decisión, y los rectángulos para las instrucciones puramente operacionales.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El desarrollo de este tema responde a intereses bastante generalizados entre los alumnos y en la sociedad, en relación con la iniciación en el conocimiento de la informática. Más aún, aprovechando esa motivación se puede salir al encuentro de una necesidad de los estudiantes: la de construir y apropiarse de estrategias para formular, interpretar, analizar, criticar y resolver problemas.

La elaboración de una lista de pasos para realizar una tarea determinada, requiere tener una visión completa de la tarea, y vislumbrar una o varias formas de hacer lo que ella exige. Ese tipo de gimnasia mental contribuye a que los estudiantes se interesen por un auténtico aprendizaje y no solamente por obtener la información de cuánto resulta o, a lo sumo, qué fórmula se aplica. Si el maestro, al evaluar, tiene en cuenta todo el proceso realizado por los alumnos, estará contribuyendo a que ellos también lo valoren y se habitúen a él.

Las primeras listas de instrucciones o programas, y los primeros diagramas de flujo pueden elaborarlos para indicar por ejemplo, las actividades que realizan desde cuando se despiertan hasta cuando llegan a la clase.

Si algunos alumnos están interesados, pueden consultar otros libros sobre diagramas de flujo un poco más exigentes porque implican preguntas dentro del proceso, toma de decisiones y procesos cíclicos (o "loops").

Tanto para los términos algebráicos como para los diagramas operacionales (molinos de moler números) y para los diagramas de flujo, es imprescindible ejercitarse en hacer pasar diferentes números por el respectivo diagrama para encontrar un resultado específico.

BIBLIOGRAFIA PARA LOS REALES NO ESTANDAR

ROBINSON A., ***Non - Standard Analysis, North Holland***, Amsterdam, 1966.

TAKEUCHI Y., ***Funciones No-Estándar y Teorías de Distribuciones, Revista Colombiana de Matemáticas***, Vol XVIII, Nos. 3-4, 1983.

TAKEUCHI Y., ***Teoría de Funciones No-Estándar***, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1983.

TAKEUCHI Y., ***Qué son los números No-Estándar. Matemática. Enseñanza Universitaria***, Bogotá.

VILLA D., ***Una Ojeada al Análisis No-Estándar, Matemática Enseñanza Universitaria***, No. 8, Noviembre, 1978.

VILLA D., ***Los Hiperreales como Ultrapotencia de R, Matemática, Enseñanza Universitaria***, No. 9. Febrero, 1979.

TELLEZ J. I., ***Modelo No Estándar de Funciones Generalizadas, Tesis de Magister en Matemáticas***. Universidad Nacional de Colombia, 1983.

Unidad II

FUNCIONES LINEALES Y CUADRATICAS Y ECUACIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO GRADO

Introducción

Con esta unidad pueden integrarse algunos de los temas propuestos en la unidad que se ha denominado Matemática finita (que aparece más adelante) pues en ella se trabajan tanto las relaciones funcionales como aquellas que no lo son. Desde la Básica Primaria se viene trabajando con operadores multiplicativos aunque su tratamiento como funciones lineales se explicitó en séptimo grado.

La intención en esta unidad es la de utilizar las funciones, las gráficas y las tablas para modelar situaciones de cambio relacionadas con la vida real. Así surgen modelos de puntos, líneas y modelos escalonados que son los que se estudian en la primera parte de esta unidad.

Después de trabajar con funciones lineales y de gráfica lineal particulares se llega a la expresión simbólica para todas la funciones de gráfica lineal: $f(x)=ax+b$. Aquí aparecen tres variables cuyo significado se debe interpretar. Las variables a y b son de un tipo de abstracción superior a x. Cuando se les da un valor son constantes en ese caso particular.

Es importante dentro de esta propuesta hacer la diferencia entre las funciones lineales y las de gráfica lineal. En ese sentido nos apartamos de la connotación que trae la mayoría de los textos al considerar como funciones lineales aquellas de la forma $f(x)= ax + b, b \neq 0$. Este tipo de funciones no cumplen las condiciones de linealidad.

Las funciones cuadráticas se trabajan partiendo de la función de área hasta llegar progresivamente a la construcción de la cuadrática general.

La expresión simbólica para las cuadráticas es $f(x)= ax^2+bx+c$. Esta expresión tiene cuatro variables; las variables a, b, c son de un tipo de abstracción superior a x. Una vez que se les da un valor se tiene la cuadrática específica.

Es importante que el docente amplíe esta unidad con problemas y ejercicios que exijan el manejo de los sistemas simbólicos como se hace tradicionalmente con el estudio "del álgebra". Este aspecto no ha sido ampliamente tratado ya que el interés de la propuesta es favorecer la construcción de los conceptos para superar el mero manejo mecanicista de los sistemas simbólicos carentes de sentido para un gran número de estudiantes.

El trabajo con los diagramas operacionales y con los diagramas de flujo, estudiados en la unidad anterior, se puede retomar para la interpretación de las expresiones algebráicas y para la elaboración de los programas de las operaciones correspondientes.

La lectura introductoria que viene a continuación amplía el enfoque del tema y es una propuesta para trabajar en forma diferente a la tradicional las ecuaciones de primero y segundo grado.

En cuanto a la factorización solo se tratarán los casos indispensables para trabajar cuadráticas. Para ello se recurre a la aplicación de la llamada propiedad distributiva recolectiva, es decir la que distribuye y también recoge. Así se ejercita también la reversibilidad. La factorización es una coordinación entre la multiplicación y la adición o entre la multiplicación y la potenciación.

La factorización se explicitará y ampliará en noveno grado.

LECTURA INTRODUCTORIA. Ecuaciones de primer grado y segundo grado: El manejo de expresiones algebraicas como símbolos de funciones*

1. ¿El álgebra o las álgebras?

La palabra "álgebra" se ha reducido equivocadamente a la manipulación de un código de letras y números, exponentes y radicales, igualdades y desigualdades, que se aprende como un requisito penoso e incomprensible durante los grados 8o. y 9o., y que hay que volverlo a aprender cuando verdaderamente se necesita para la física, la química, la geometría analítica, la trigonometría y el cálculo. Al llegar a la universidad la mayoría de los estudiantes deben volver a tomar el álgebra, así se le bautice con el nombre de "Introducción al Cálculo" o el más vistoso de "Precálculo". Algo debe estar pasando si se necesitan cuatro años y medio para dominar un simple juego simbólico.

En realidad cada rama de las matemáticas tiene su "álgebra": sus sistemas simbólicos que permiten encontrar resultados con la manipulación apropiada de los códigos, aumentando la rapidez y disminuyendo la posibilidad de equivocarse, o al menos facilitando la corrección de los errores. Hay pues un álgebra de la lógica, un álgebra de conjuntos, un álgebra lineal para la geometría, etc. El "álgebra" de que hablaba el primer libro árabe de ese nombre, "Al-gebr w'al Muqabala", que podría traducirse como "El Paso y el Arreglo", o "El Puente y el Encuentro", o "El Intercambio y el Manejo", trataba solo de problemas de aritmética, sin ningún símbolo formal distinto de la numeración arábiga o indo-arábiga, que se introduciría apenas en Europa en los s. XI y XII. Esta obra nos ha dejado tres palabras importantes: "álgebra" por el título del libro; y por el nombre de su autor, Al-Kowarismi, la palabra "algorismo", o "algoritmo" además de la ya poco común "guarismo". Los manuscritos medievales decían "algorismo", pero algunos eruditos que sabían griego pero no árabe, pensaron que la palabra debía venir del griego "arithmos", "número", y la cambiaron a "algoritmo", lo que hace confundir a los estudiantes con "logaritmo": "algoritmo" y "logaritmo" tienen las mismas letras, pero en desorden!

Sin embargo, las dos significan conceptos muy diferentes. El "logaritmo", o mejor "la logaritmación", es un artificio para reversar por la derecha la potenciación, mientras que "la raíz", o mejor "la radicación" sirve para reversarla por la izquierda:

Si tengo la operación $2^4 = 16$, puedo tapar con el dedo el dos de la izquierda y preguntar por la raiz cuarta de dieciséis, o tapar el cuatro de la derecha y preguntar por el logaritmo en base dos de dieciséis. A las operaciones activas mismas las llamamos radicación y logaritmación, y a sus resultados las raices (cuadradas, cúbicas, cuartas,...) o los logaritmos (en base dos, tres, cuatro,...).

En cambio un "algoritmo" es un procedimiento simbólico que me sirve para encontrar un símbolo del resultado por puro manejo mecánico del código: es una lista de instrucciones que me sirve para obtener resultados aun sin necesidad de pensar en lo que está pasando "por debajo de los símbolos". Para multiplicar un número entre 10 y 99 por 11, uno puede sumar las cifras y meter la suma en la mitad de las dos, sin saber por qué, ni qué está pasando, y obtener el resultado correcto. 34x11...3 y 4,7:374. Milagro! (Ojo si la suma es mayor que nueve! Escriba y memorice con más precisión el algoritmo para esos casos. Ahora trate de convencerse usted mismo de que este truco funciona todas las veces. ¿Puede extenderlo a tres cifras? ¿A cualquier número de cifras?)

Los algoritmos descargan la memoria, la atención disminuyen el tiempo que se necesita para obtener el resultado, permiten guardar un breve apunte del proceso, corregir los errores, y además pueden ser programados en un computador o calculadora programable para que funcionen automáticamente. Pero, para qué aprenderlos si no se necesitan, si no se sabe por qué funcionan, si no se sabe cuándo se deben usar? Ese es el problema del álgebra de bachillerato: se aprenden los algoritmos de un gran sistema simbólico, pero sin saber el sistema conceptual que están simbolizando. No tienen ningún apoyo para hacer estimaciones, para corregir algún desliz, para inventarse un paso más largo si se les olvidó el más corto, para reconstruir una fórmula en unos pocos segundos, y menos aún para inventar una nueva.

Un concepto importante es el de reversibilidad. El álgebra se desarrolló para reversar el camino de operaciones que se habían ejecutado primero "hacia adelante". Piense un momento en esta situación desafortunadamente demasiado frecuente: Al fin del mes pasado pagué la mitad de lo que debía;

*Por: Carlos E. Vasco U.
Universidad Nacional de Colombia

pero después tuve que pedir otro préstamo el doble de grande del primero; hoy apenas logré pagar $500 y todavía estoy debiendo $2000. ¿Cuánto debía antes del primer pago? Traté de pensar en esta situación sin apuntar nada, y de ver que es lo que va haciendo en la cabeza. Estas operaciones mentales y la capacidad de reversarlas, coordinarlas y mantenerlas en la memoria son más importantes que el manejo de los símbolos. Esa agilidad mental es la que motiva para que el alumno sienta la necesidad de un apoyo escrito para operar más fácilmente y con menos probabilidad de error. Los mismos alumnos pueden inventar algoritmos y trucos que abrevien las operaciones, y hasta inventar y aprender a manejar sus propios símbolos personales; en este último caso, ellos pueden tener razón en que esos símbolos tengan algunas ventajas, y deben convencerse por sí mismos de que el problema es que no pueden ser fácilmente compartidos por otros, y por eso es bueno conocer los simbolismos más usuales.

Esas operaciones mentales conforman lo que llamamos el álgebra mental, que puede a su vez ser expresada con palabras del lenguaje ordinario o con palabras del lenguaje matemático. Supongamos que estoy pensando en un número equis; le resto la mitad; luego duplico lo que tenía al principio, y a eso le resto 500; me resulta 2000. ¿Cuál era el número inicial?

Nótese que aún en este enunciado, que llamamos de álgebra verbal, en donde puede haber aparecido la equis y desaparecido el signo pesos, no aparecen palabras que correspondan al signo "x" ni al signo "=". Es importante caer en la cuenta de esto, pues para los alumnos duplicar o sacar la mitad no tienen nada que ver con el signo "x": simplemente vuelven a sumar lo mismo o tienen un procedimiento directo para duplicar, o dividen por dos o tienen un procedimiento directo para saber dónde queda la mitad del camino; por otra parte, el signo "=" lo suelen entender en forma activa: "me resulta, me da", y no como relación: "es igual a", y menos aún "igual" sin verbo ni preposición. Hay que oirlos hablar para ver si están relacionando los símbolos con las operaciones mentales, cómo las llaman, qué dificultades tienen en codificarlas con los símbolos usuales del álgebra de bachillerato, etc.

Un último punto importante es el de las conjeturas, las estimaciones, las acotaciones de posibles resultados. Antes se creía que adivinar resultados era un procedimiento equivocado en matemáticas, pero cada vez se ve con más claridad que estas conjeturas, hipótesis, adivinanzas, intuiciones o chispazos repentinos son los que producen mejores matemáticas y los que dan una gran satisfacción a los que los logran. Que traten de adivinar todo lo que puedan, que hagan todas las conjeturas que quieran, pero que las ensayen, las sustenten, las razonen, las verifiquen, las cambien, las descarten. Estas actividades de proponerse hipótesis y ponerlas a prueba son también muy importantes para las ciencias naturales y sociales.

2. La Metodología de la Renovación Curricular para la Enseñanza de las Algebras.

La metodología propuesta en el nuevo currículo es la de motivar primero al estudiante para que entre en el juego de resolver problemas de la vida real o problemas artificiales interesantes y divertidos, tratando de hacerlo "por el lado largo", "en la cabeza", "por aritmética" o como él quiera, para que así pueda apreciar la importancia de un código abreviado, y para que pueda explorar por sí mismo las posibles manipulaciones del código que le van a servir para formalizar más tarde los algoritmos.

Es bueno dejar que el estudiante cometa errores mientras va desarrollando estrategias que le permitan después corregirlos por sí mismo; el profesor logrará mejores resultados si no se adelanta a señalarle los errores, si no se apresura a explicarle cómo corregirlos, y mucho menos a dar la solución, sino más bien si muy discretamente pone en duda el resultado incorrecto para que el alumno piense en dónde puede estar el error, consulte con los compañeros y con los libros, busque estimaciones, haga conjeturas y desarrolle su inventiva y su recursividad. En esa forma, el aprendizaje de las álgebras y de los algoritmos puede llegar a ser un verdadero pasatiempo.

La mejor manera de saber si el curso está funcionando bien es por el interés que manifiestan los alumnos por formular y resolver problemas fuera de clase, por tratar de resolver los que salen en los periódicos, o por formar clubes de mátemáticas para participar en concursos u olimpiadas. El objetivo más importante es que les gusten las matemáticas para que las practiquen como diversión en sus ratos y días libres. Si lo hacen así, aprenderán muchas más matemáticas que las que les podamos enseñar en unas pocas horas de clase.

Recuérdese también que la metodología de las matemáticas en la renovación curricular pone especial importancia en los sistemas conceptuales y sus relaciones con los sistemas concretos. De estas situaciones reales estructuradas que son los sistemas concretos salen los conceptos operatorios que corresponden a acciones interiorizadas en códigos y modelos mentales, que se ejercitan hacia adelante y hacia atrás en la cabeza del alumno, y se coordinan entre sí, hasta que llegan a ser lo suficientemente complejas para requerir el desarrollo de sistemas simbólicos escritos, estén o no muy formalizados. Pero recuerde que para los alumnos de secundaria los sistemas concretos no son necesariamente materiales; con frecuencia pueden ser sistemas matemáticos con los cuales ya están tan familiarizados que les parecen concretos. Por ejemplo, los números enteros y los fraccionarios son sistemas muy abstractos, pero si ellos han aprendido bien las matemáticas de primaria, ya los conocen tan bien que les parecen viejos amigos: se les han vuelto concretos.

El álgebra de octavo grado es uno de varios sistemas simbólicos que utilizamos hoy para manejar las transformaciones sobre esos sistemas concretos que son los enteros y los fraccionarios. El concepto de transformación activa de los enteros en enteros o en fraccionarios, y de transformación activa de los fraccionarios en fraccionarios o en números reales, es el que hay que estar procurando construir, de tal manera que los alumnos puedan hacer esas transformaciones en la cabeza hacia adelante y hacia atrás y coordinarlas unas con otras. Cuando el profesor se da cuenta de que ellos manejan bien esas transformaciones sobre números relativamente pequeños, puede empezar a pedirles que busquen maneras de representarlas de tal manera que sirvan para números muy grandes, y ojalá para todos los números. Una de esas representaciones, y no la mejor para muchos casos, es la del álgebra literal que se inventó en la primera mitad del siglo XVII. Los babilonios, egipcios, griegos y árabes hicieron muchas matemáticas muy interesantes, lo mismo que los matemáticos del renacimiento europeo, de los siglos XIII a XVII, sin saber usar esta álgebra simbólica.

Si no se sabe de dónde vienen estos sistemas simbólicos, ni para qué se usan, ni que concepto representan, la manipulación de los símbolos del álgebra de bachillerato por dos largos años se convierte en una tortura y sirve sólo como un mero filtro para los estudiantes que están menos motivados para las matemáticas o que han sufrido traumas y fobias con las matemáticas de los grados anteriores. El profesor termina "dictando la clase" a los cinco o seis alumnos más entusiastas por las matemáticas y reprobando a la mayoría o dejándolos pasar por compasión o temor a presiones superiores.

Se sugiere enseguida una posible secuencia de actividades, que el profesor puede modificar, alargar, acortar, complementar o cambiar según su experiencia y su sentido de lo que están experimentando sus alumnos.

2.1 Adivinanzas

En realidad, las ecuaciones son adivinanzas y el álgebra es una manera de resolverlas más fácilmente. Hasta la ecuación $x=1$ es una adivinanza; lo que pasa es que es tan fácil como la de "blanco es, gallina lo pone, huevo se llama".

La idea general del álgebra es tratar de transformar la ecuación que le dan a uno, o sea la adivinanza difícil, en una adivinanza fácil, ojalá como la arriba, pero no necesariamente tan simple. Por ejemplo, cuando uno llega a la adivinanza: $2x=8$, ¿para qué la sigue transformando? Por eso es mejor empezar porque los alumnos adivinen números que usted está pensando, y luego que se pongan algunas adivinanzas cada vez más difíciles. Pronto verá usted que empiezan a escribir números en el papel y hacer operaciones complicadas, y luego le preguntan a uno cuál es el número que elevado al cuadrado tiene tres cifras y borrándole la de la mitad vuelve a quedar como estaba al principio. ¿Puede adivinarlo?

Trate de escribir una ecuación para escribir ese problema y verá que no es fácil. Si usted puede escribir la ecuación, sabe mucha álgebra; y más todavía si sabe resolver esa cuadrática con tres variables. Si no fuera porque arriba practicamos un truco algorítmico para cierto tipo de multiplicación, creo que sería difícil adivinarlo.

No vaya a ponerle estas adivinanzas tan difíciles a sus alumnos, sino cuando tengan práctica en ese tipo de juegos numéricos. Lo importante es que si ellos son los que hacen las operaciones "hacia adelante" les queda fácil inventar adivinanzas difíciles mientras que a los que tratan de adivinar les queda muy difícil hacer esas mismas operaciones en reversa.

Empiece por adivinanzas fáciles. Si uno multiplica un número por 9 y le da 72... Si multiplica otro número por 12 y le da 132... Si multiplica otro por 15 y le da 225... Si multiplica otro número por 19 y le da 152... Ya se va viendo la necesidad de escribir algo. Hay que inventarse una manera de apuntar ese número que no sabemos. ¿Cómo lo vamos a notar? Puede ser una "n" por aquello de número, o una "N" por aquello de "N.N."; o una "d" por ser desconocida, o una "x", o un cuadrito vacío, o una tapa redonda para adivinar qué hay debajo. Hace mil quinientos años los indúes inventaron un método que vale la pena volver a utilizar: Pensar en los números desconocidos como si tuvieran color y estuvieran muy borrosos: ¿Si un número verde es el doble de uno rojo y ambos suman 9 cuáles eran?

Trate de escribir. Fíjese que parece que necesitara una ecuación de dos variables, pero uno en la cabeza cambia el número verde por el doble del rojo o sea por dos rojos, y le quedan tres rojos, y resuelve la ecuación. ¡Esa es álgebra de la buena! y no hemos escrito ni un símbolo. Si en el mismo problema de los números verde y rojo yo hubiera dicho "diez" en vez de "nueve" la cosa sería más difícil. Ese tipo de problemas fueron los que llevaron a desarrollar en su totalidad el sistema de los números fraccionarios con sus operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación; note que la radicación lo saca a uno de los fraccionarios, y que la logaritmación, que formalmente parece tan obvia como la radicación no aparece hasta el siglo XIV, y será todavía muy imperfecta y limitada hasta el siglo XVII.

Pero ya desde hace cuatro o cinco mil años los babilonios y los egipcios aprendieron a manejar los recíprocos de los números naturales (que para ellos empezaban por el dos). Ellos utilizaban muy bien un concepto que nosotros confundimos con lo que hoy llamamos "fracciones de numerador uno", aunque en realidad los conceptos no tienen numerador.

Sólo algunos símbolos llamados fracciones tienen numerador. En la manera como los babilonios y egipcios escribían los símbolos para estos conceptos, tampoco tenían numerador. Es más importante manejar los conceptos que los símbolos, y las fracciones no son el único símbolo que tenemos para estos conceptos.

Así se fueron pues completando y perfeccionando los números fraccionarios: de las necesidades del comercio, la agrimensura, la construcción, resultan los primeros recíprocos de los naturales: la mitad y la cuarta parte son las más primitivas; luego viene la tercera parte (y muy raras veces las dos terceras partes o las tres cuartas partes); tal vez la quinta, la sexta, la décima, la doceava, la vigésima y la sesentava parte. De ahí sólo se pasa a completar los fraccionarios porque sirven para contestar adivinanzas sobre transformaciones aditivas y multiplicativas que no se podían contestar con los números naturales y esos pocos recíprocos conocidos. Nosotros también podríamos seguir un camino parecido, haciendo transformaciones mentales con esos números fraccionarios más sencillos, y luego los más complicados.

Primero podemos poner adivinanzas que se parezcan a aquellas con las que aparecieron los números fraccionarios positivos que achican a los naturales a uno de sus submúltiplos, como: adivíneme qué número cuando lo multiplico por doce me da tres. Después podemos poner adivinanzas que exijan el manejo de otros fraccionarios más complicados, pero todavía achicadores, como por ejemplo para resolver esta adivinanza: si triplico lo que dice la receta, tengo que echar dos tazas de harina; ¿Qué decía la receta? Más tarde, al tratar de echar reversa a estos achicadores más complicados, resultan todos los fraccionarios positivos. Por ejemplo: Si duplico lo que dice la receta, tengo que echar tres tazas de harina. ¿Qué decía la receta?

Son pues dos reversadas las que se necesitaron: una de bajada hacia los racionales mayores de cero y menores que uno, y luego otra de nuevo en subida hacia los racionales mayores que uno. El uno como racional es difícil de aceptar, pues no hace ningún daño: ni achica ni agranda. Pero vale la pena tenerlo ahí para cuando una achicada y una agrandada se compensen: El mes pasado logré pagar la mitad de lo que debía, pero al mes siguiente tuve que prestar el doble del saldo que había quedado debiendo; el primer préstamos fue de $2000; ¿de cuánto fue el segundo? El resultado esta relacionado con un fraccionario bastante especial, que por supuesto tampoco tiene numerador ni denominador: el operador fraccionario que podríamos llamar "lo mismo". Que uno a veces lo escriba 1.0, 1/1,2/2, n/n o el 100%, eso ya es otra cosa.

Cuando las adivinanzas se van poniendo más complicadas, se puede ver qué técnicas utilizan los alumnos para marcar los números, y luego se les ponen algunos de sus mismos ejemplos u otros que el profesor puede agregar, para que vean en qué se parecen todas esas adivinanzas:

$3n = 18$
$4N = 44$
$7x = 56\ldots$

Lo más importante en matemáticas es descubrir un esquema, un patrón, un arreglo, una configuración que permita decir: "Ah, eso es lo mismo!" Cuando un alumno se fija con atención en situaciones, conceptos o símbolos que son diferentes, y de pronto dice "Son la misma cosa!", "Se trata de lo mismo!", está haciendo matemáticas. Eso quiere decir que ya formó el concepto de lo que quiere simbolizar. Primero puede ser una frase completa, muy esquemática y descriptiva, como:

"Tantas veces el número da tanto".

Esa es el álgebra verbal o álgebra retórica, con la cual trabajaron los mejores matemáticos de la humanidad durante unos 3500 años. ¡Dejemos que los alumnos trabajen con ella siquiera unas pocas horas!

Cuando la cosa se pone difícil y hay que repetir muchos problemas parecidos, se empiezan a desarrollar abreviaturas. "Tantas veces el número da tanto" se puede abreviar como "T. veces N. da M."

Esa es el álgebra abreviada o sincopada, con la cual se trabajó muy eficazmente en la época que va aproximadamente desde el siglo XV hasta el siglo XVII. Cardano o Tartaglia habrían dicho algo así como "Un número de veces la cosa, da tal número", y hubieran tratado de abreviarlo; pero por temor de confundir los tres números hubieran escrito solo casos particulares con su notación sincopada: algo así como "2.co.ig.nu.", "3.co.ig.nu.", "4.co.ig.nu.", etc., pero todavía no se hubieran atrevido a escribir "a.co.ig.b". Faltaba todavía un siglo para que pudiéramos escribir "ax = b".

Sus alumnos tienen que recorrer todo el camino desde el álgebra verbal de los egipcios de hace tres o cuatro mil años, pasar por la de los árabes de los siglos VII a XII, la del renacimiento desde el S.XIII hasta el XVI, y volver a inventar con Vieta, Descartes y Girardi, una notación sumamente compleja y refinada. ¡Pero si saben para qué sirve!

2.2. El paso al cero.

Trate de poner adivinanzas parecidas a las anteriores, pero en las que al final no queda nada después de haber hecho las operaciones. Por ejemplo: ¿Qué número desaparece si lo multiplico por tres y le resto quince? ¿Qué número se anula si lo multiplico por tres y le quito cinco? Note que sus alumnos siempre empezarán con adivinanzas que tienen respuestas positivas. ¡Todavía en el siglo XVI los grandes algebristas del renacimiento no se atrevían a manejar soluciones negativas!

El concepto de encontrar todos los números que se anulan al aplicarles una serie de operaciones es importantísimo en todas las matemáticas modernas. En este caso de las ecuaciones estamos haciendo algo parecido, con solo escribir los problemas de antes con el cero a la derecha:

$3n - 18 = 0$
$7x - 56 = 0$
$ax - b = 0.$

Si se quiere que las respuestas puedan ser positivas o negativas, se puede ensayar a multiplicar y sumar para llegar a cero: o el número inicial era negativo, o el que se sumó era negativo. Los alumnos siempre van a creer que el negativo era el primero, pues "sumar un negativo" les queda un poco difícil de pensar; ellos creen que "menos b" es negativo, porque están pasando de los positivos a los negativos con la inversión hacia atrás, y aún no tienen bien coordinada la reversibilidad. Es difícil pensar que "menos b" puede ser positivo, aunque uno puede imaginarse que eso sucede cuando b es negativo; ese tipo de doble reversibilidad es muy importante para el desarrollo del pensamiento matemático, y no solo del matemático.

Hay mucho trecho desde las adivinanzas del álgebra verbal hasta llegar a la meta: poder resumir todas estas adivinanzas en donde todavía no entran ni el cuadrado ni el cubo con una solo máquina simbólica:

$ax + b = 0.$

La maquinita simbolizada por "ax" a veces es un amplificador o un achicador, a veces deja a todo el mundo quieto, a veces refleja lo negativo a lo positivo o lo positivo a negativo, a la vez que achica o agranda; en un caso muy importante es un puro reflector que ni achica ni agranda. El concepto, no el símbolo "ax", es una maquinita muy importante, llamada función lineal. Hay otras representaciones para estas funciones además de "ax".

La maquinita simbolizada por "x + b" es un deslizador hacia adelante, hacia atrás, y a veces ni siquiera desliza. El concepto, no el símbolo "x + b", es otra maquinita muy importante llamada traslación. Y la combinación de ambas maquinitas, la máquina simbolizada por "ax + b" es más importante todavía, porque comprende las dos anteriores como casos particulares (cuando a=1 o cuando b=0). Se llama la función afín, aunque los nombres no son tan importantes como el manejo mental de esas funciones. Para ayudarnos a manejarlas mejor es para lo que sirve el álgebra.

Podemos ejercitar la lectura de la ecuación "ax + b = 0" de muchas maneras. La idea de fondo es que se trata de adivinar qué número se anula cuando se le aplican las transformaciones simbolizadas en ella. Por ejemplo, se puede leer: ¿A quién aniquila la maquinita simbolizada "ax + b"? ¿Qué número se anula bajo ax + b? Nótese que cuando uno sabe que una cosa es el símbolo del sistema simbólico y otra el concepto, ya puede olvidarse de las comillas y de las precisiones, y hablar directamente del concepto a través del símbolo. Otra lectura de esta ecuación también puede hacerse enfatizando la forma dinámica: si multiplico por a un cierto número equis y le sumo b, me da cero. ¿Qué número era?

Ejercite también la lectura de las ecuaciones en forma de algoritmo, de tal manera que sirve para computar la respuesta, sea mentalmente, sea a mano, sea con calculadora, o sea con computador: Apunto el número que me dan en el sitio x, lo multiplico por a y le sumo b, y me da cero. En seguida se puede ver cuál es la secuencia de operaciones que se hacen en la cabeza para adivinar el número; de lo que se trata es de escribir eso mismo que se hace, qué reglas se siguen, qué dificultades puede haber, qué errores pueden resultar, etc. Esa es la verdadera álgebra. Por medio de ella se transforma la primera ecuación en otra más fácil: como ax y b tienen que tener signos opuestos, se puede poner de una vez:

$-ax = b$, o: $ax = -b$.

Esta segunda forma es más fácil si a era un número positivo. Si se selecciona esta segunda forma, la podemos interpretar como que al multiplicar a por x debe resultar -b.

No hace falta "demostrar" que esto se puede hacer, ni obligar a restar b a cada lado, pues los alumnos no piensan en la igualdad como una relación, sino como una notación activa para el resultado. Las calculadoras han acentuado esta impresión, pues tienen una tecla marcada "=" que hay que apretar para que salga el resultado. No hay problema con considerar la igualdad en esta forma activa, aunque se puede aprovechar alguna ocasión para insinuar que la igualdad también se puede considerar como el brazo horizontal de una balanza de brazos iguales. Pero las investigaciones de tipo piagetiano sobre alumnos de 13 y 14 años muestran que muchos de ellos no son capaces de equilibrar una balanza sino por ensayo y error. Entonces de poco les van a servir las explicaciones, aunque se podría argumentar que las explicaciones con la comparación de la balanza les van a servir para la física de décimo grado, y para balancear reacciones químicas.

Una vez que ya se sabe el juego, se sabe para qué sirve, cómo se puede jugar mentalmente o con algunos trucos, entonces sí se podrían enseñar todas las reglas del álgebra tradicional para resolver ecuaciones lineales; pero no hace falta ni siquiera enseñarlas, pues se puede poner como tarea para un fin de semana que las vuelvan a inventar.

El tiempo que parecía que se había perdido con tantas vueltas se recupera en una semana, y no hay que estar enseñando de nuevo la manipulación de los símbolos cada año hasta el segundo de la universidad.

Objetivos generales

—Apreciar la importancia de dominar códigos abreviados para resolver problemas que requerían demasiada carga de memoria y atención.

—Ejercitar la reversibilidad mental de las operaciones aritméticas y algebraicas.

—Construir los conceptos de función lineal y de gráfica lineal y reconocerlas como modelos de cambio.

—Construir a partir de situaciones reales algunas funciones y entre ellas algunas especiales que generen modelos escalonados.

—Encontrar las funciones que modelen situaciones relacionadas con: el índice de aumento del costo de la vida; el interés compuesto con acumulación anual, semestral, trimestral, mensual, semanal, diaria; el caso del 36% anual, 18% semestral, 9% trimestral, 3% mensual, 75% semanal, 1‰ diario (1 por mil diario).

—Reconocer cualitativa y analíticamente la pendiente de una recta.

—Dados dos puntos utilizar álgebra lineal para formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a y b para hallar la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos.

—Construir y reconocer las funciones cuadráticas y plantear situaciones en las que los cambios se describan apropiadamente con una función cuadrática.

—Interpretar el significado de a, b y c en la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$ y formular conjeturas del comportamiento de la gráfica cuando dichos valores varían.

—Formular y resolver problemas ingeniosos y prácticos por medio de la traducción de situaciones reales o imaginadas a ecuaciones de primero y segundo grado.

—Proponerse conjeturas, estimaciones y acotaciones de posibles soluciones a ecuaciones algebraícas, desarrollar maneras de ponerlas a prueba y de encontrar soluciones por inspección.

—Desarrollar destrezas de cálculo simbólico para la solución rigurosa y automatizada de ecuaciones de primero y segundo grado.

— Reconocer algunos casos de factorización, partiendo de la propiedad distributiva recolectiva, (Distribuye y recoge) indispensables para trabajar expresiones que representan funciones cuadráticas.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

26 Reconocer una función lineal como un operador multiplicativo.

27 Reconocer que todos los puntos de la gráfica de una función lineal están sobre una recta que pasa por el origen.

28 Identificar las funciones constantes y reconocer que tienen como gráficas rectas paralelas al eje horizontal (eje x).

29 Reconocer que no todas las funciones de gráfica lineal son funciones lineales.

30 Reconocer que toda función de gráfica lineal puede expresarse como la adición de una función lineal y una función constante.

31 Reconocer el efecto de algunas funciones especiales (escalonadas, parte entera, valor absoluto) sobre los números reales.

CONTENIDOS BASICOS

En la Unidad III de Séptimo Grado se inició el tema de las funciones lineales al desarrollar la proporcionalidad directa y sus aplicaciones. Recordemos algunos conceptos de dicha unidad. El efecto de aplicar un operador multiplicativo a una magnitud o a un número, que por no saber todavía cuál es, lo escribimos "x", puede ser:

—Aumentar (o ampliar) si el operador es de la forma $a(x)$ cuando $a>1$ o $\frac{a}{b}(x)$ cuando $a>b$

—Disminuir (o reducir) si el operador es de la forma $\frac{1}{b}(x)$ cuando $b>1$, o $\frac{a}{b}(x)$ cuando $0\ a\leq 1$

—Dejar como está, si el operador es de la forma $1(x)$ o $\frac{a}{a}(x)$ o $a(x)$ con $a=1$

—Anular, si el operador es de la forma $0(x)$ o $a(x)$ con $a=0$.

—Transformar cualquier número o magnitud en un mismo número fijo. Cada operador está determinado por ese número fijo k, y se expresa por c_k en donde $c_k(x) = k$.

Una función lineal puede considerarse como un operador multiplicativo que transforma una materia prima, como una magnitud o un número, en un producto determinado, que va a ser también una magnitud o un número.

Recordemos un ejemplo de magnitudes directamente proporcionales: si 5 metros de cinta valen 40 pesos, encontremos el precio de 4, 3, 2, 1, y en general de x metros de cinta. Es decir tenemos una función que vamos a llamar f, que transforma longitudes en metros (Longitud (m)) en precios en pesos (Precio ($)): cuyo efecto podemos visualizar en una tabla como la siguiente:

f: Longitud (m) ⟶ Precio ($)

f:

Longitud (m)	1	2	3	4	5	6	...x
Precio ($)	8	16	24	32	40	48	...8x

La función f envía a 1 en la imagen 8 : 8 (1) = 8
a 2 en la imagen16 : 8 (2) = 16
a 3 en la imagen 24 : 8 (3) = 24
. .
. .
. .
a x en la imagen 8 x : 8 (x) = 8x

Esta acción es producida por el operador 8 ( ) sobre los elementos 1, 2, 3, 4, 5, ...x

$1 \xmapsto{8(\ )} 8$

$2 \xmapsto{8(\ )} 16$

. .

. .

$x \xmapsto{8(\ )} 8x$

Al observar las parejas ordenadas (1, 8), (2, 16), (3, 24), (4, 32), (5, 40), vemos que la segunda componente es el resultado de aplicar el operador 8 ( ) a la primera. Es decir, que las parejas de valores de esta función son de la forma (x, 8x). El número 8 se denomina **coeficiente de la función lineal**.

En general, supongamos que se tiene una función lineal f de un conjunto de números o magnitudes A en otro B, f: A ⟶ B, que produce el efecto simbolizado por:

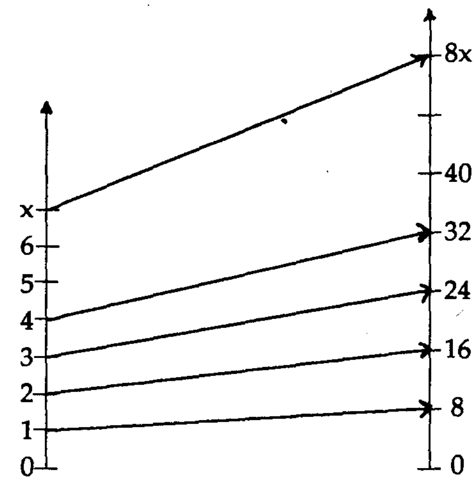
$$f: x \longmapsto a(x) = ax.$$

Ella toma un elemento como x, actúa sobre él y da como producto terminado el elemento ax; su acción es la misma que sobre x ejerce el operador a( ) para producir a(x) = ax.

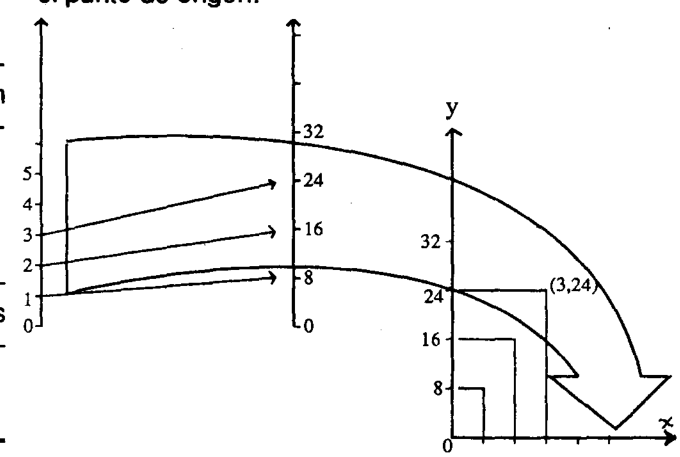
Una representación de la función es **la tabla de valores** como la realizada para este ejemplo. Otra forma de representación puede hacerse mediante **dos rectas paralelas verticales**. En cada una señalamos un punto de origen y un sentido positivo con una punta de flecha. Sobre la de la izquierda se señalan los puntos del dominio de la función y sobre la de la derecha las imágenes.

La acción de la función puede representarse mediante una flecha que parte de cada punto del dominio y señala la imagen respectiva.

A veces se usa el mismo tipo de flecha para indicar cuál es el conjunto de salida y el de llegada de la función (f: A ⟶ B) y para simbolizar el efecto que produce (f: x ⟼ ax). Es conveniente ser un poco más cuidadoso en la simbolización y utilizar las flechas con una barrita vertical a la salida para indicar el efecto. f: x ⟼ ax.



Otra forma muy utilizada de representar una función es en **el plano cartesiano,** en donde el dominio de la función se señala sobre el eje de las abscisas o eje x y las imágenes en el eje de las ordenadas o eje y. Podría pensarse que esta representación resulta de la anterior si se hace rotar la recta de la izquierda hasta quedar horizontal y se hacen coincidir las rectas en el punto de origen.



La acción de la función queda representada por las flechas que salen verticalmente de cada punto de dominio, y se doblan horizontalmente señalando la imagen. El punto en donde la flecha se "dobla" se identifica con el punto del plano cartesiano, que se nota como una pareja ordenada, en donde la primera componente corresponde al elemento del dominio de la función y la segunda componente a su imagen. Estos puntos pertenecen a una recta que pasa por el origen (0, 0).

Existen unas funciones, que notamos c_k, que al aplicárselas a cualquir número real lo transforman en un mismo número k: $c_k(x) = k$ para cada x real. Cada una de estas funciones se llama **función constante.**

Las parejas de estas funciones son de la forma (x, k) donde x es cualquier número real. La función que a cualquier número lo transforma en 1 es la función constante uno, c_1

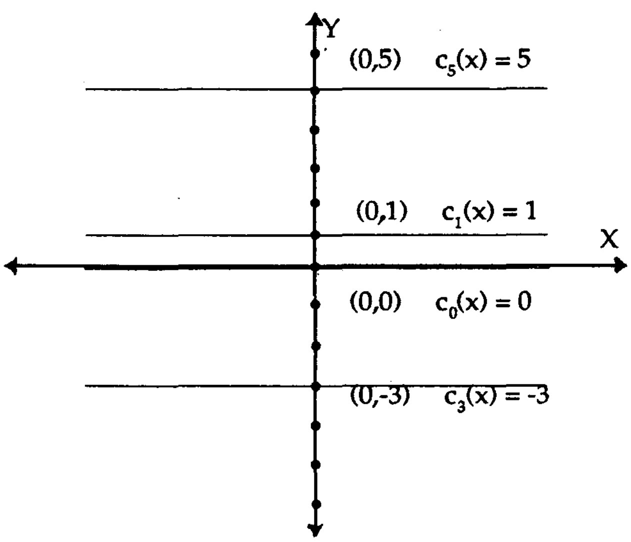
$$x \xmapsto{c_1} 1$$

Las parejas de esta función son de la (x,1) donde x es cualquier número real.

La gráfica de cada función constante c_k es una recta paralela al eje de las abscisas (o al eje x), en el plano cartesiano, que pasa por (0, k).

La función que al aplicársela a cualquier número real lo transforma siempre en cero:

$$x \xmapsto{c_0} 0$$



No todas las funciones de gráfica lineal son funciones lineales.

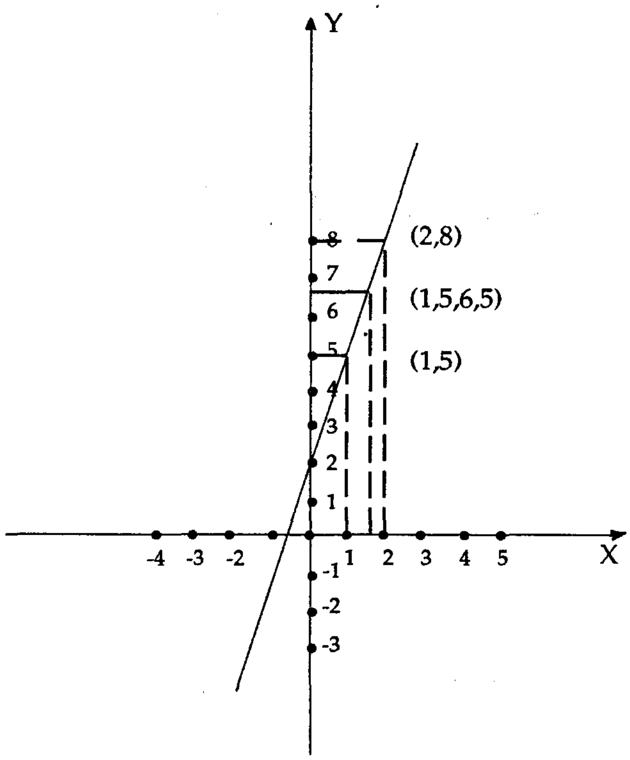
Supongamos que se tiene una función g cuya acción sobre cualquier número real es tripicarlo y sumarle dos, es decir.

$$g: x \longmapsto 3x + 2$$

El efecto de esta función, para algunos valores de x, lo podemos visualizar en una tabla como la siguiente:

x	0	1	1.5	2	2.5	-0.5	$-\frac{2}{3}$
g(x) = 3x + 2	2	5	6.5	8	9.5	0.5	0

La representación de la función g en el plano cartesiano es:



La gráfica de la función g es una recta cuyo intercepto con el eje vertical o de las ordenadas es el punto (0,2). En esta función se puede observar que para calcular el valor de esta en una suma de dos números a y b no da lo mismo sumar primero los números y aplicar la función a esta suma, que aplicar la función a cada número y luego sumar los resultados:

Ejemplo:

$g(a+b) \neq g(a) + g(b)$

$g(3+4) \neq g(3) + g(4)$

$g(3+4) = g(7) = 21 + 2 = 23$

$$\left.\begin{array}{l} g(3) = 9 + 2 = 11 \\ g(4) = 12 + 2 = 14 \end{array}\right\} \quad g(3) + g(4) = 11 + 14 = 25$$

De igual forma se puede observar que:

$$g\,(a \times b) \neq g\,(a) \times b \neq a \times g\,(b)$$

Ejemplo:

$g(3 \times 4) \neq g\,(3) \times 4 \neq 3 \times g\,(4)$

$$\left.\begin{array}{l} g\,(3 \times 4) = g\,(12) = 36 + 2 = 38 \\ g\,(3) \times 4 = 11 \times 4 = 44 \\ 3 \times g\,(4) = 3 \times 14 = 42 \end{array}\right\} 38 \neq 44 \neq 42$$

Si se compara la función $f\colon x \longmapsto 8\,x$ propuesta inicialmente, y la función g, es fácil constatar que la primera satisface las propiedades de la linealidad ya que este tipo de funciones son consideradas como operadores multiplicativos (ver programa 7º grado).

Las funciones de la forma $g\colon x \longmapsto ax + b, b \neq 0$ son de gráfica lineal pero no son funciones lineales.

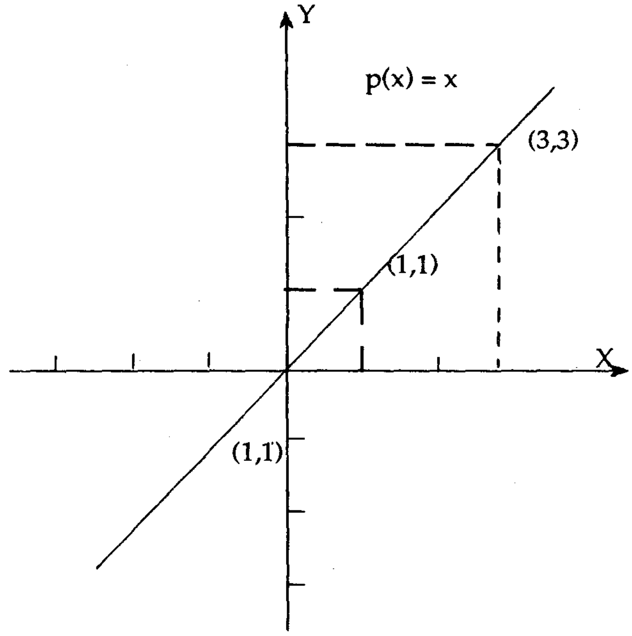
Entre las funciones constantes la única que es también lineal es, la función c_0 definida por $c_0\,(x) = 0$. La gráfica de esta función pasa por el origen $(0, 0)$. Las demás funciones constantes $c_k, k \neq 0$ tienen gráfica lineal pero no son funciones lineales porque $c_k\,(x + y) = k$ es diferente de $c_k\,(x) + c_k\,(y) = k + k = 2\,k$.

El operador multiplicativo que deja las cosas como están se puede asociar con la llamada función idéntica:

$$\begin{array}{ll} p\colon \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ p\colon x & \longmapsto p(x) = x \\ p\colon 3 & \longmapsto 3 \\ p\colon \pi & \longmapsto \pi \end{array}$$

Esta función que notamos "p" se suele también notar, "id", o a veces "$id_{\mathbb{R}}$" para diferenciarla de otras funciones idénticas sobre otros conjuntos, como $id_{\mathbb{N}}$, $id_{\mathbb{Z}}$, $id_{\mathbb{R}}$, etc.

La representación gráfica de p es una recta que pasa por el origen y es simétrica con respecto a este:



Esta función es lineal:

$$p\,(4 + 5) = p\,(4) + p\,(5)$$
$$p\,(9) = p\,(4) + p\,(5)$$
$$9 = 4 + 5$$
$$p\,(4 \times 5) = p\,(4) \times 5 = 4 \times p\,(5)$$
$$p\,(20) = 4 \times 5 = 4 \times 5$$
$$20 = 20 = 20$$

La forma de expresión más general de las funciones de gráfica lineal es;

$$f\,(x) = ax + b.$$

Cuando $b = 0$ se tiene la expresión de las funciones lineales. Si $a = 0$, se tienen las funciones constanstes.

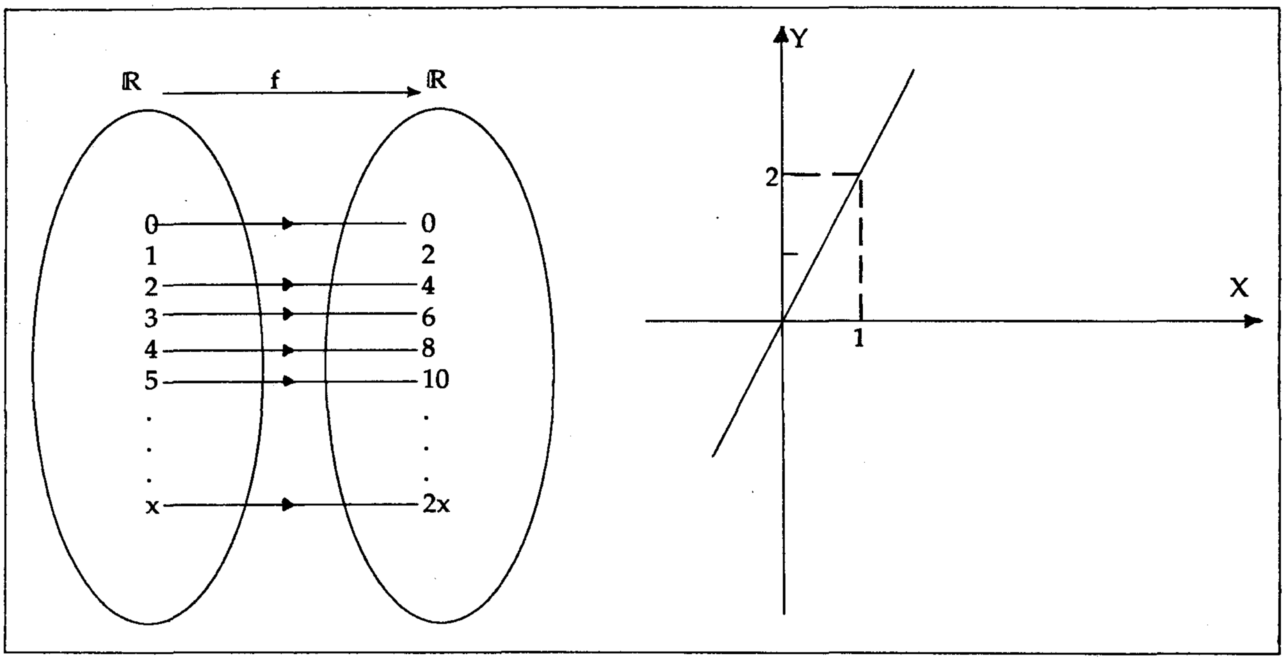
Las funciones parte entera y valor absoluto las abordamos en las sugerencias metodológicas. El profesor puede incluir el estudio de otras funciones que considere conveniente.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Se puede comenzar haciendo un repaso de lo que se estudió en 7o. grado sobre funciones lineales (3a. unidad) partiendo de ejemplos de proporcionalidad directa relacionados con el interés, el porcentaje, etc. En cada caso analizarán algunas parejas, el efecto del operador, la gráfica, la forma general de expresar la función y las condiciones de linealidad.

Ejemplo:

En el conjunto de los números reales analicemos la función que a cada número le asigna su doble.



La función se puede simbolizar de las siguientes maneras:

$x \longmapsto f(x)$ o $f: x \longmapsto 2x$ o $x \overset{f}{\longmapsto} 2x$

Y se expresa diciendo "f(x) es la imagen de x mediante f". "La imagen de x por f es 2x" o "bajo f", o "aplicándole f", etc.

Obsérvese que la imagen se puede notar de dos maneras: f(x) ó 2x. Así se obtiene la igualdad $f(x) = 2x$.

$$5 \overset{f}{\longmapsto} 10$$
$$5 \overset{f}{\longmapsto} f(5) = 10$$

La función "el doble" por ser un operador multiplicativo cumple con las condiciones de linealidad, así:

$$3 \overset{f}{\longmapsto} 6 \qquad f(3) = 6$$

$$5 \overset{f}{\longmapsto} 10 \qquad f(5) = 10$$

$f(3) + f(5) = 6 + 10 = 16$

Ahora veamos $f(3 + 5) = f(8) = 16$

Luego $f(3+5) = f(3) + f(5)$

También se puede constatar que no es cierto que $f(5x6) = f(5) \times f(6)$
pero si que:

$f(5x6) = f(5) \times 6 = 5 \times f(6)$, veamoslo:

$f(5) = 10, \qquad 10 \times 6 = 60$

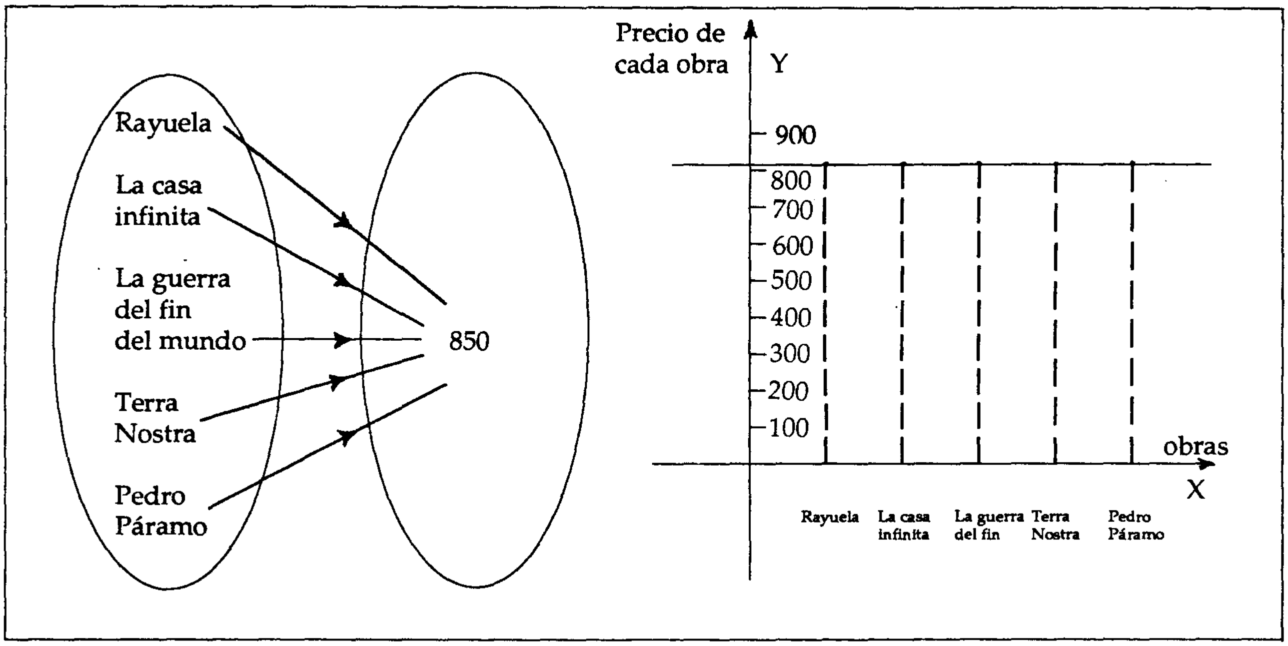
$f(6) = 12, 5 \times 12 = 60$
$f(5x6) = f(30) = 60$
$10 \times 12 = 120$, luego $f(5x6) \neq f(5) \times f(6)$
Pero $f(5x6) = 5 \times f(6) = f(5)x6$

La gráfica de esta función pasa por el origen.
Con otros ejemplos, el profesor puede orientar a los alumnos para que lleguen a las conclusiones que caracterizan una función lineal.

Para la función constante pueden proponerse ejemplos como el siguiente: en una librería hay una promoción de novelas de autores latinoamericanos, el valor de cada una de las obras es de $850 ¿La relación entre las obras y el precio es funcional?

La respuesta a esta pregunta permite revisar las condiciones para que una relación sea funcional.

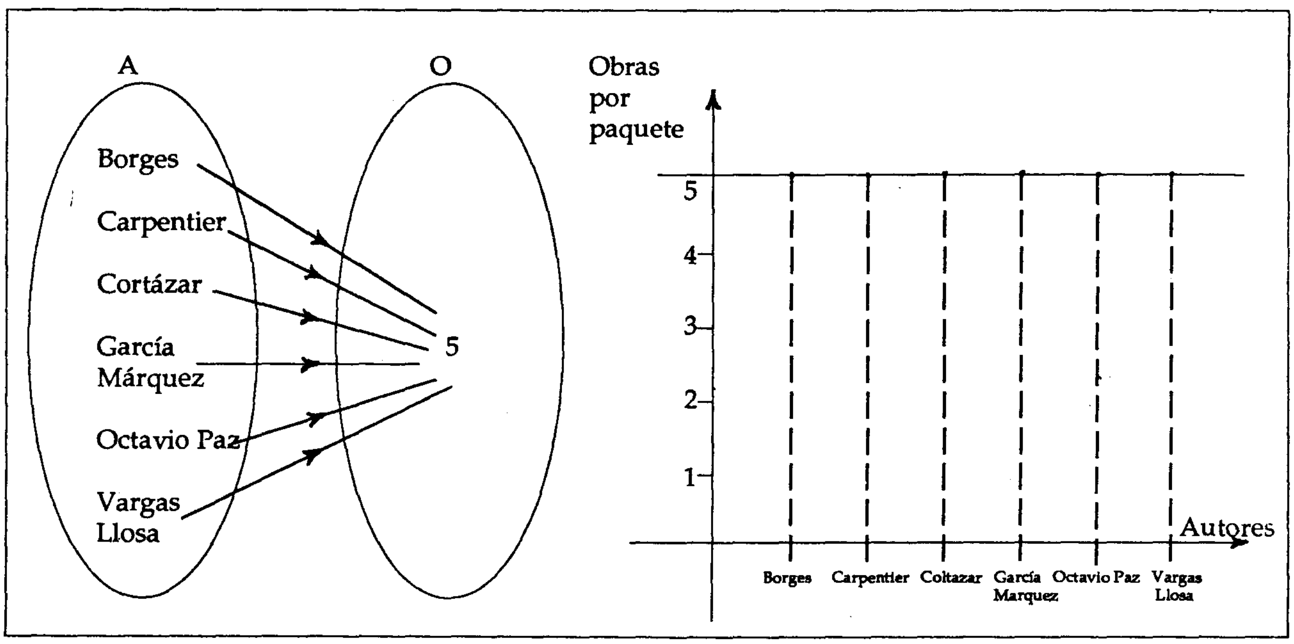
Para representar gráficamente esta función se puede hacer el diagrama sagital y el cartesiano. En este último utilizaremos el eje horizontal como escala nominal para los nombres de las obras y el vertical como escala de intervalo para el precio.



Las parejas de esta función, que podemos notar, C_{850} son de la forma (x, 850) donde x es una cualquiera de las obras

$$x \xmapsto{C_{850}} 850$$

Dentro de este mismo contexto podría considerarse que las obras no se venden sueltas sino por paquetes de a 5 obras de cada autor y considerar que los autores son: Gabriel García Márquez, Jorge Luis Borges, Julio Cortázar, Mario Vargas Llosa, Octavio Paz y Alejo Carpentier.



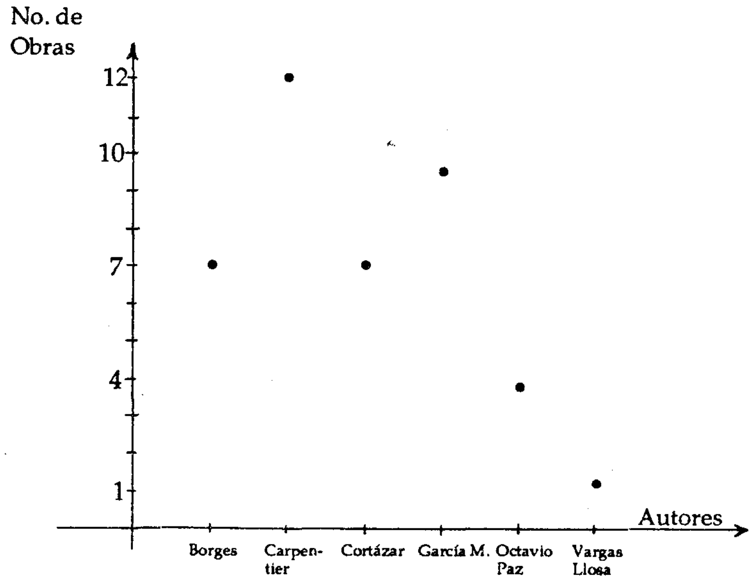
Las consideraciones que se hicieron para el caso anterior son válidas para este, solo que ahora las parejas son de la forma (x,5) donde x es uno cualquiera de los autores.

$$x \xmapsto{C_5} 5$$

Es posible que algún alumno proponga un cambio de la situación así:

Si las obras no se venden por paquetes sino sueltas y al final de las ventas del día se tiene un balance de ventas como:

AUTORES	No. de Obras
Borges	7
Carpentier	12
Cortázar	7
García Márquez	10
Octavio Paz	4
Vargas Llosa	1



En este caso lo primero que conviene aclarar es si estamos o no en presencia de una función y comparar esta nueva situación con las dos anteriores. La representación gráfica son algunos puntos del plano que no están alineados.

Después de estos ejemplos se presentan otros en los cuales las funciones transformen cualquier número real en un mismo número k.

$$f_k : \mathbb{R} \longmapsto k$$

$$f_3 : x \longmapsto 3$$

En estos casos la representación gráfica será una recta paralela al eje x que pasa por el punto (0, k). Los puntos que pertenecen a esta recta tienen como ordenada k.

Con base en los ejemplos propuestos en los contenidos básicos se pueden trabajar otras funciones referidas a situaciones concretas, a historietas o a juegos. Dichas funciones serán de la forma

$$f: x \longmapsto ax + b$$

En cada uno de los ejemplos se orienta el análisis para que los alumnos relacionen estas funciones con la adición de una función lineal y una función constante.

Se espera que sean los mismos alumnos quienes constaten que este tipo de funciones no cumplen las condiciones de linealidad y por consiguiente no son funciones lineales, a pesar de que su representación gráfica es una recta (que no pasa por el origen).

El docente puede enriquecer esta propuesta con ejercicios interesantes, tal vez más interesantes que los aquí presentados.

—Los puntos (1, 3) y (2, 5) pertenecen a la representación gráfica lineal de una función ¿Cuál es la expresión de esta función?

Solución: La acción de esta función sobre los números 1 y 2 la podemos expresar así:

$1 \longmapsto 3$ a su vez $3 = ax_1 + b$ es decir $3 = 1 \cdot a + b$

$2 \longmapsto 5$ de la misma forma $5 = ax_2 + b$; $5 = 2 \cdot a + b$

Tenemos ahora dos ecuaciones en las cuales no se conoce ni el valor de a ni el valor de b.

$$\begin{array}{l} 3 = a + b \longmapsto 3 - a = b \\ 5 = 2a + b \longmapsto \left\{ \begin{array}{l} 5 = 2a + (3 - a) \\ 5 - 3 = a = 2 \end{array} \right. \end{array} \longrightarrow 3 - 2 = b = 1$$

Queda a opción del profesor utilizar otros métodos para hallar los valores desconocidos.

Una vez hallados los valores de a y b se puede escribir la expresión de la función:

$f: x \longmapsto 2x + 1$. Así la imagen de cualquier número real por medio de la función, se puede notar, $f(x) = 2x + 1$

—Dadas las funciones

$f: x \longmapsto -2x + 7$; $g: x \longmapsto 4x - 8$
$p: x \longmapsto 4 - \frac{5}{2} x$; $h: x \longmapsto 9$

explicar en lenguaje natural, que le hace cada función a cualquier número real y hallar los interceptos, de la representación gráfica de cada una de ellas, con el eje x, y con el eje y.

Solución: Se van a encontrar los siguientes puntos:

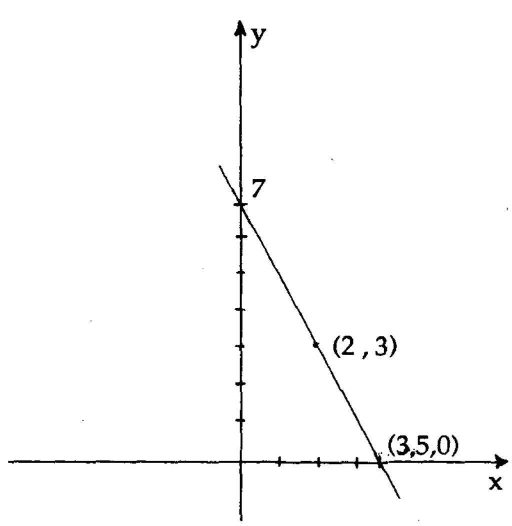
— Para la función f $(0, f(0))$; $(x, 0)$
— Para la función g $(0, g(0))$; $(x, 0)$
— Para la función p $(0, p(0))$; $(x, 0)$
— Para la función h $(0, h(0))$; $(x, 0)$

Caso de f: $y = -2x + 7$
$0 = -2x + 7$ entonces $x = 3.5$
$y = -2 \cdot 0 + 7$ entonces $y = 7$

Los puntos buscados son (0, 7) ; (3.5,0)

Esto quiere decir que la recta corta al eje y en 7 y al eje x en 3.5.

Para mayor comprensión del ejercicio puede hacerse la representación gráfica:



En la gráfica se puede observar que el punto (2,3) pertenece a la recta. ¿Es 3 el transformado de 2 a través de la función f?

$f(2) = -2(2) + 7$
$f(2) = -4 + 7 = 3$

Con base en la misma recta ¿Cuál es la imagen de 1 y de -1?

Caso de g: $y = 4x - 8$
$0 = 4x - 8$ entonces $x=2$
$y = 4 \cdot 0 - 8$ entonces $y = -8$

Los puntos buscados son (0, -8); (2, 0). La recta que representa a la función g corta al eje y en -8 y al eje x en 2.

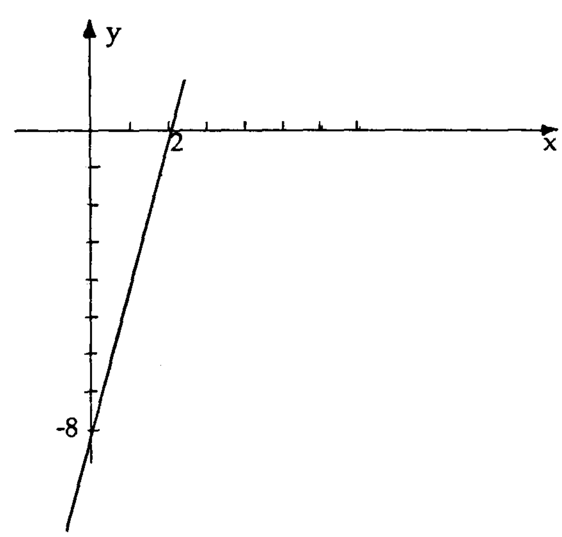
También se puede hacer la representación gráfica de la función g y formular preguntas que ayuden a una mayor compresión y análisis de dicha función.

Otro tipo de preguntas podrían ser:

¿Qué pasa con el valor de la imagen cuando el de la pre-imagen aumenta?

¿Qué pasa con el valor de la imagen cuando el de la pre-imagen disminuye?

Quedan para resolver los casos de las funciones p y h



Conviene además que los alumnos trabajen otro tipo de funciones que no sean de gráfica lineal. A manera de ejemplo propondremos algunas funciones que pueden aportarle información al profesor y eventualmente trabajarse en clubes de matemáticas. La primera de ellas es totalmente opcional.

—La función del "taxista": es posible que este ejemplo tenga más significación para los alumnos que viven en ciudades donde se utiliza el taxímetro, como Bogotá . Para aquellos sitios donde la tarifa es por "carreras" se puede estudiar la citada función por mera curiosidad. En los sitios donde se utilizada el taxímetro conviene:

a. Investigar cómo están las tarifas para que los datos sean los vigentes (lo más probable es que en las ciudades pequeñas solo haya una o dos tarifas de "carrera").

b. Tener en cuenta que hay una dificultad con los minutos de espera.

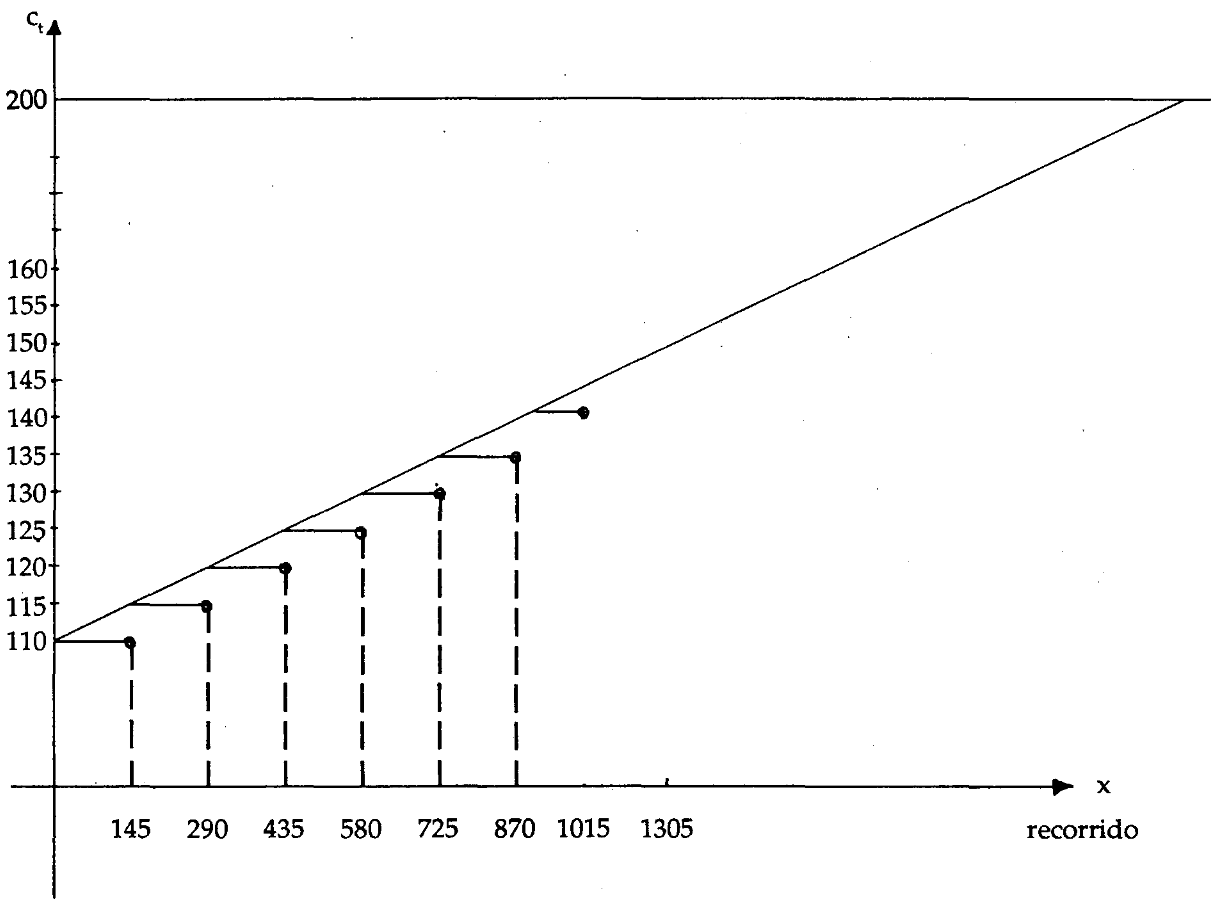
En Bogotá (1988): \$5 por cada $1\frac{1}{2}$ minutos.

c. Tomar solo el banderazo y el costo del recorrido. En Bogotá (1988) el banderazo es \$110 y el costo del recorrido \$5 por cada 145 m.

d. Caer en la cuenta de que se toman los puntos cada 145 m parece que la gráfica fuera lineal pero en realidad es escalonada.

e. Tener en cuenta que puede haber una carrera mínima de costo mayor que el banderazo. En Bogotá (1988) este costo era de \$200.

Vamos a hacer la representación gráfica de la función (sin esperas) que al recorrido (x) le asigna el costo total correspondiente (c_t)



$C_t = \$110 + \$5\,(xm/145m)$

A continuación se proponen otras funciones interesantes:

I) La función "la parte entera"

Veamos cuál es el entero menor más próximo o igual a algunos números reales:

$3.5 \mapsto 3$	$-4 \mapsto -4$	$\frac{-\sqrt{2}}{2} \mapsto -1$
$8 \mapsto 8$	$-2.15 \mapsto -3$	$\pi \mapsto 3$
$9.9 \mapsto 9$	$0 \mapsto 0$	$-\pi \mapsto -4$
$0.3 \mapsto 0$	$\sqrt{2} \mapsto 1$	
$-0.3 \mapsto -1$	$-\sqrt{2} \mapsto 2$	

Cada uno de los números enteros que hemos hallado es la parte entera del número real respectivo. Para significar que se trata de la parte entera de un real x, se utiliza la notación: [x] ó [[x]]

$[\![3.5]\!] = 3$	$[\![-4]\!] = -4$	
$[\![8]\!] = 8$	$[\![-215]\!] = -3$	$\left[\!\!\left[\frac{-\sqrt{2}}{2}\right]\!\!\right] = -1$
$[\![9.9]\!] = 9$	$[\![0]\!] = 0$	
$[\![0.3]\!] = 0$	$[\![\sqrt{2}]\!] = 1$	$[\![\pi]\!] = 3$
$[\![-0.3]\!] = -1$	$[\![-\sqrt{2}]\!] = -2$	

Pensemos ahora en la función que transforma a un número real en su parte entera:

$$x \xrightarrow{f} [\![x]\!]$$

$$-\pi \longrightarrow [\![-\pi]\!] = -4$$

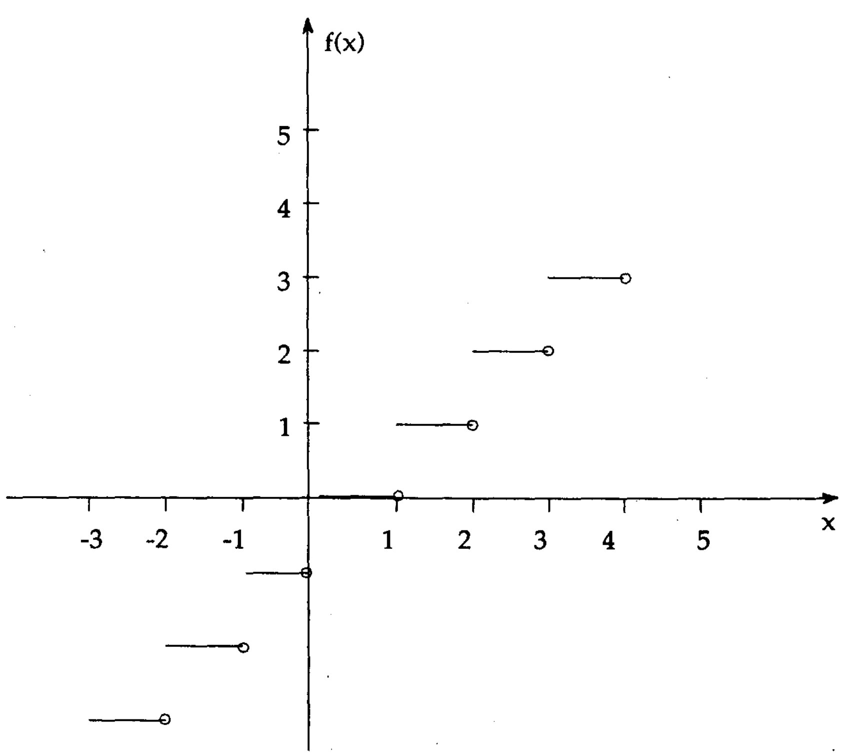
¿Cuál es el dominio de esta nueva función? ¿Cuál es el recorrido o conjunto de las imágenes?

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

Si hablamos de conjunto de llegada, este puede ser $\mathbb{R}$.

Esta función es el operador "la parte entera de".

Hagamos la representación gráfica de f.



Para x en el intervalo	La imagen de x es
.	.
.	.
.	.
[-5, -4)	-5
[-4, -3)	-4
.	.
.	.
.	.
[-1, 0)	-1
[0, 1)	0
[1, 2)	1
[2, 3)	2
.	.
.	.
.	.

La gráfica permite observar que para cada valor entero de x hay un salto, desconexión o ruptura en la gráfica;entre valores enteros de x no la hay.

De manera muy intuitiva y con base en la gráfica se puede comentar que este tipo de funciones en cuya gráfica se presenta una ruptura en cierto punto, se denominan funciones discontinuas en ese punto.

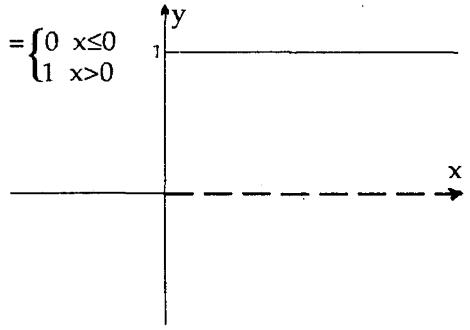
Pero debe dejarse claro que esta aproximación intuitiva a la continuidad puede ser engañosa.

Con base en otro ejemplo (una función de gráfica lineal) se puede comentar igualmente que si la gráfica no tiene ruptura, salto o desconexión en un punto se dice que la función es continua en ese punto. Una función es continua sobre un intervalo si su gráfica es continua sobre cada punto del intervalo.

Así se ve que la función de la parte entera es discontinua en cada entero, pero es continua en cada intervalo que no contiene un entero.

2) La llamada "función de Heaviside" definida así:

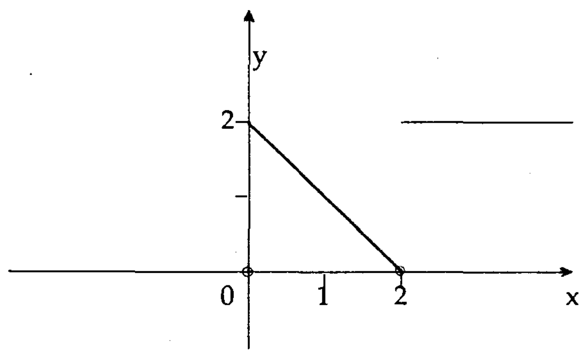
$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



3) Consideremos ahora la función definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ para } x < 0 \\ -x + 2 \text{ para } 0 \leq x < 2 \\ 2 \text{ para } x \geq 2 \end{cases}$$

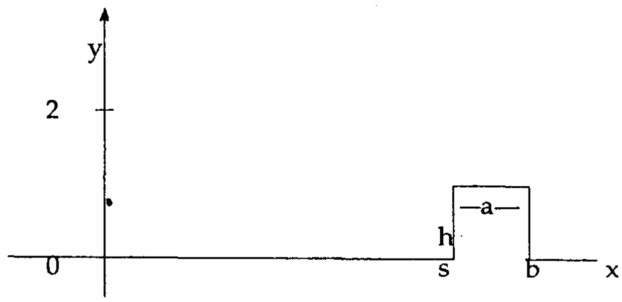
Hagamos la representación gráfica de f y hallemos los puntos de desconexión o discontinuidad.



4)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq s \\ h & s < x \leq b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

s: subida o iniciación del pulso
a: ancho o duración del pulso
h: altura o amplitud del pulso
b: bajada o terminación del pulso



5)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in Q \\ 1 & x \in R - Q \end{cases}$$

OBJETIVOS ESPECIFICOS

32 Reconocer cualitativamente la pendiente de una recta.

33 Calcular el valor númerico de la pendiente de una recta dada.

34 Relacionar el valor numérico de la pendiente con el coeficiente de la función lineal

35 Relacionar el valor numérico de la pendiente con el coeficiente de las funciones de gráfica lineal.

36 Reconocer que la pendiente de una recta es la misma independientemente del segmento que se emplee para medirla.

CONTENIDOS BASICOS

La pendiente es una característica de las rectas, una vez que se ha fijado una línea horizontal de base. En particular es una característica de las gráficas de las funciones lineales y de las de gráfica lineal, cuando se fija el eje de las x (abscisas) como horizontal.

El efecto de las funciones de gráfica lineal cuando actúan sobre un argumento x se simboliza así:

$$f: x \longmapsto ax + b \qquad \text{o así :}$$

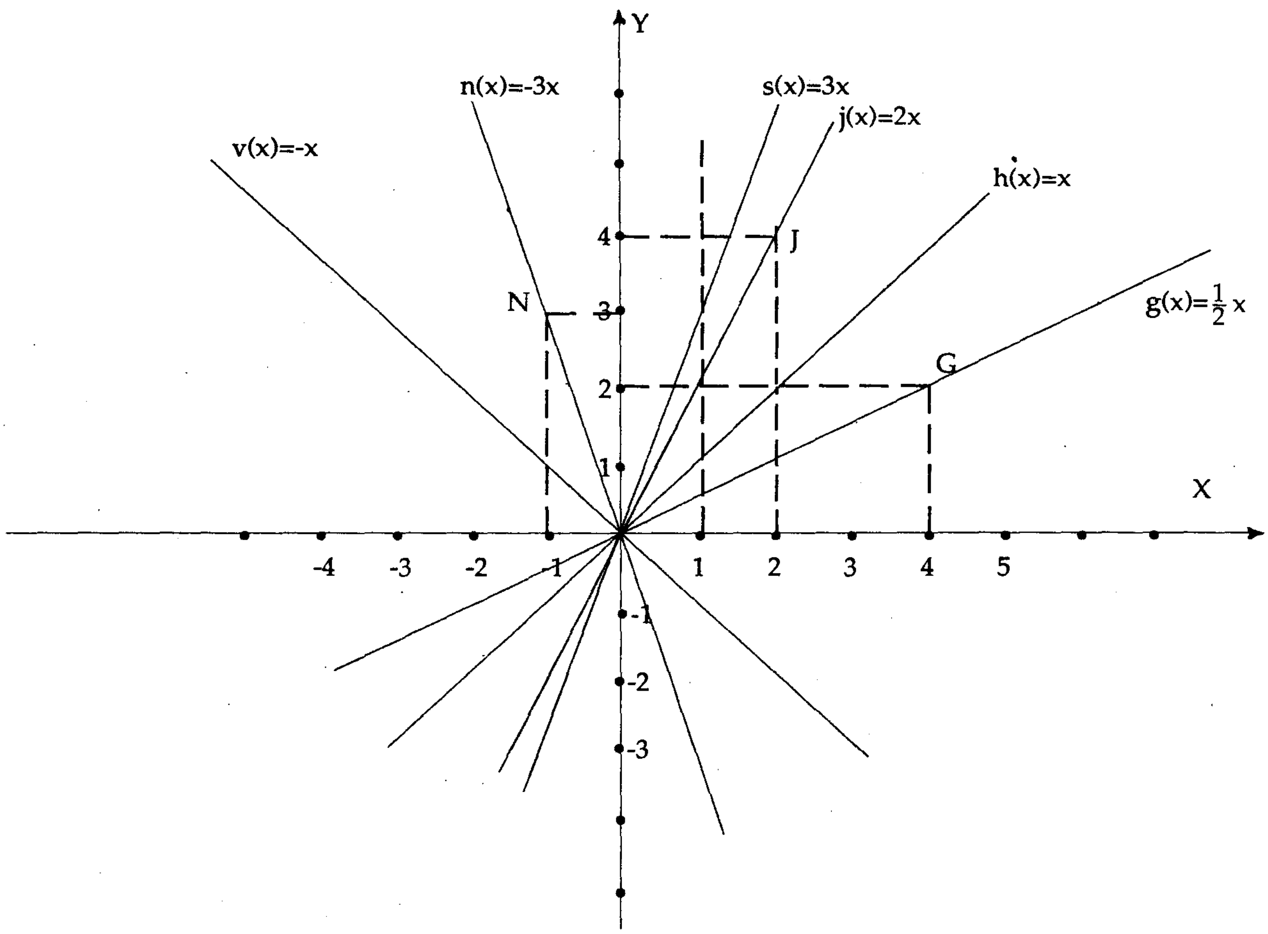
$$x \overset{f}{\longmapsto} ax + b$$

Cuando b = 0, se tiene la expresión correspondiente a las funciones lineales:

$$g: x \longmapsto ax \qquad \text{o} \qquad x \overset{g}{\longmapsto} ax$$

Comparemos la representación gráfica de varias funciones lineales, cuyas ecuaciones se indican en el cuadro siguiente:

Ecuación asociada a la función lineal	$g(x) = \frac{1}{2}x$	$h(x) = x$	$j(x) = 2x$	$s(x) = 3x$	$v(x) = -x$	$n(x) = -3x$
Reslutados para $x = 0$	0	0	0	0	0	0
$x = 1$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	-1	-3



Tomemos el eje de las x (abscisas) como la horizontal. Las otras rectas aparecen como "subidas" o "bajadas" más o menos pendientes con respecto a la horizontal que no sube ni baja.

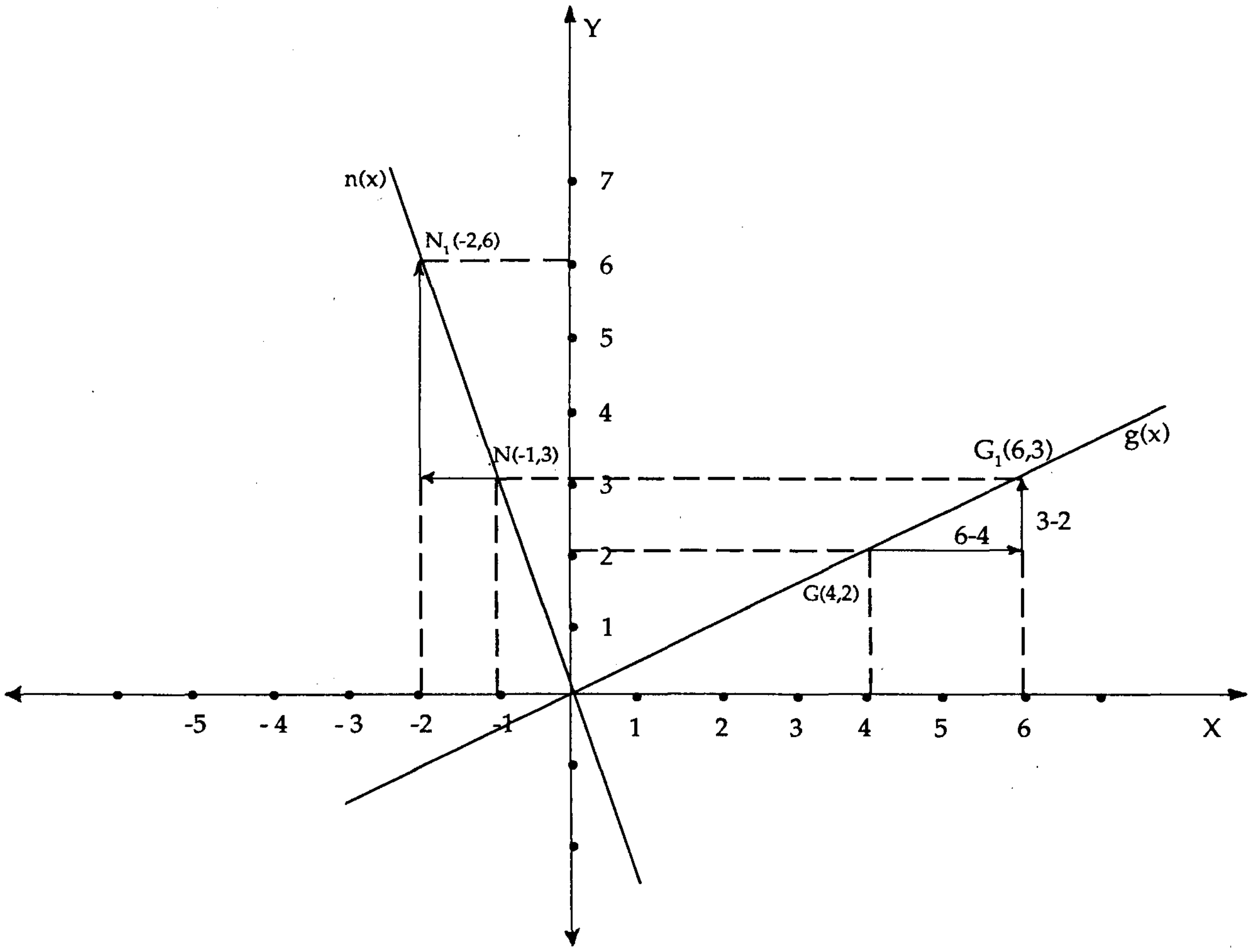
Para cada una de las rectas se puede calcular cuánto se sube por cada unidad que se avance sobre la horizontal. Si en la recta que presenta a g(x) se escoge la posición alcanzada en el punto designado por la letra G partiendo del origen, es fácil observar que por 2 unidades que se subieron sobre la vertical, se avanzaron 4 sobre la horizontal es decir se subió la mitad de lo que se avanzó. Entonces la razón entre lo que se sube y lo que se avanza se puede hallar así: $2 \div 4 = 0.5 = 1/2$

Si partiendo del origen escogemos la posición alcanzada en el punto J, se observa que por 4 unidades que se subieron, se avanzaron 2, es decir se subió el doble de lo que se avanzó: $4/2 = 2$

Un análisis similar puede hacerse para la posición en el punto N, cuando se parte del origen, con la diferencia de que en este caso se avanzó en el sentido opuesto al señalado sobre el eje horizontal. Entonces por 3 unidades que se subieron se avanzó 1 en sentido opuesto al indicado:

$3/-(1) = 3/-1 = -3$

El operador -() aplicado al 1 indica que la unidad de longitud se retrocedió, o sea que el uno se tomó en sentido opuesto al del avance usual a la dirección horizontal con sentido hacia la derecha. La razón entre lo que se sube y lo que se avanza también se puede calcular escogiendo como punto de partida cualquier punto diferente del origen. Por ejemplo, los puntos G y N de las rectas que representan a g (x) y a n(x) respectivamente. Consideremos sobre estas mismas rectas los puntos G_1 y N_1 y hallemos la razón entre lo que se subió y lo que se avanzó cuando se pasó de G a G_1 y de N a N_1:



- De G a G_1

$$\frac{\text{Lo que se subió}}{\text{Lo que se avanzó}} = \frac{\text{Diferencia entre las ordenadas}}{\text{Diferencia entre las abscisas}} = \frac{3-2}{6-4} = \frac{1}{2}$$

- De N a N_1

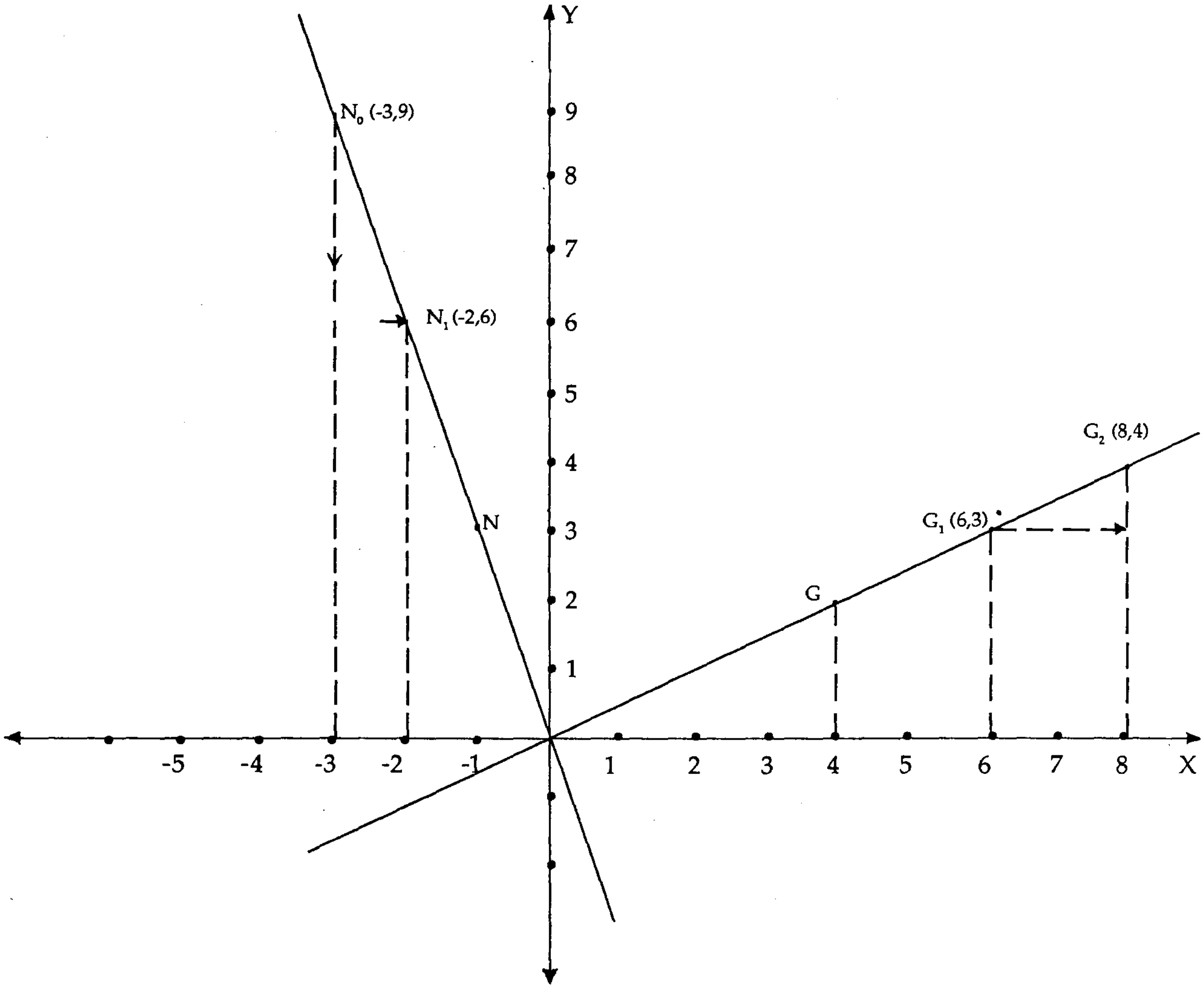
$$\frac{\text{Lo que se subió}}{\text{Lo que se avanzó (en sentido opuesto)}} = \frac{6-3}{(-2)-(-1)} = \frac{3}{-(1)} = \frac{3}{-1} = -3$$

El operador -( ) aplicado al 1 indica que la unidad de longitud se retrocedió, o sea que lo que se avanzó se tomó en sentido opuesto al avance usual hacia la derecha.

En estos dos casos, lo mismo que en el de las otras funciones se puede constatar que la razón entre lo que se sube (verticalmente) y lo que se avanza (horizontalmente) esta dada por el coeficiente de la función lineal. A este número se le llama pendiente de la recta y se le simboliza con la letra "eme" minúscula: m

Así la ecuación asociada a una función lineal cualquiera puede expresarse como:
$f(x) = mx$ o también $y = mx$

Tomemos otro punto G_2 y N_0 cuyas coordenadas sean (8,4) y (-3,9) respectivamente y hallemos la pendiente considerando en un caso el segmento $\overline{G_1G_2}$ y en el otro el segmento $\overline{N_0N_1}$.



- en $\overline{G_1 G_2}$

$$\frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}} = \frac{4-3}{8-6} = \frac{1}{2}$$

Es el mismo valor que obtuvimos cuando hicimos el cálculo tomando como referencia el segmento $\overline{GG_1}$

- en $\overline{N_0 N_1}$

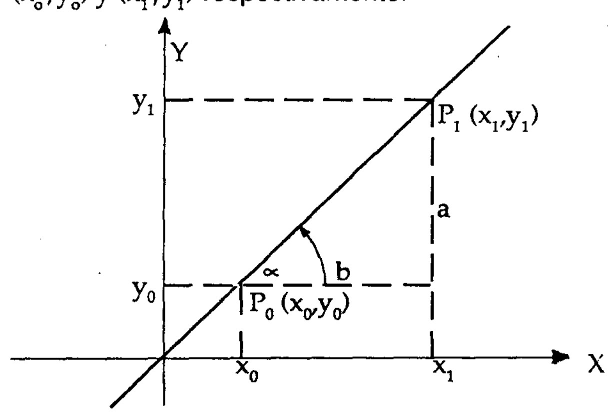
$$\frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}} = \frac{6-9}{(-2)-(-3)} = \frac{-3}{-2+3} = \frac{-3}{1} = -3$$

Es el mismo valor que obtuvimos cuando hicimos el cálculo tomando como referencia el segmento $\overline{NN_1}$ a pesar de que ahora avanzamos en sentido contrario al de antes.

Ensaye a calcular la pendiente avanzando de G_1 hacia G y de N_1 hacia N_0.

Si tiene cuidado con los signos, obtendrá el mismo valor de la pendiente: ese valor es independiente del segmento de la recta que se use para calcularla y del sentido en que se recorra.

Consideramos ahora una recta cualquiera que representa una función lineal g. En ella seleccionamos dos puntos al azar, P_0 y P_1 cuyas coordenadas sean (x_o, y_o) y (x_1, y_1) respectivamente.



La pendiente se puede calcular fácilmente:

$$m = \frac{a}{b} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Otra forma de asignarle un número a la pendiente de la recta es la de considerar la amplitud del ángulo comprendido entre la horizontal (paralela al eje x) que pasa por P_0 y la recta cuya pendiente se quiere medir.

Si se sube lo mismo que se avanza, ese ángulo tiene una amplitud de 45°, y podríamos decir que la pendiente es de 45°. (También se llama "pendiente del 100%").

Se puede también utilizar cualquier función de ese ángulo que vaya aumentando cuando ese ángulo aumenta de 0° a 90°. La que más se usa es la función tangente, que aumenta de 0 a 1 entre 0° y 45° y sigue aumentando sin límite cuando el ángulo aumenta de 45° hacia 90°.

Para calcular el valor de la función tangente del ángulo α, se toma un segmento de una unidad de longitud sobre la recta horizontal y se calcula cuanto se sube si se avanza de izquierda a derecha, o se toma cualquier segmento sobre la recta inclinada y se calcula cuanto se sube sobre la vertical dividido por lo que se avanza sobre la horizontal.

¿Por qué da lo mismo calcular de estas dos maneras?

$$m = \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$m = \tan \alpha = a \quad \text{cuando} \quad b = 1$$

Consideramos nuevamente la función que duplica: $j(x) = 2x$ para obtener a partir de ella tres nuevas funciones:

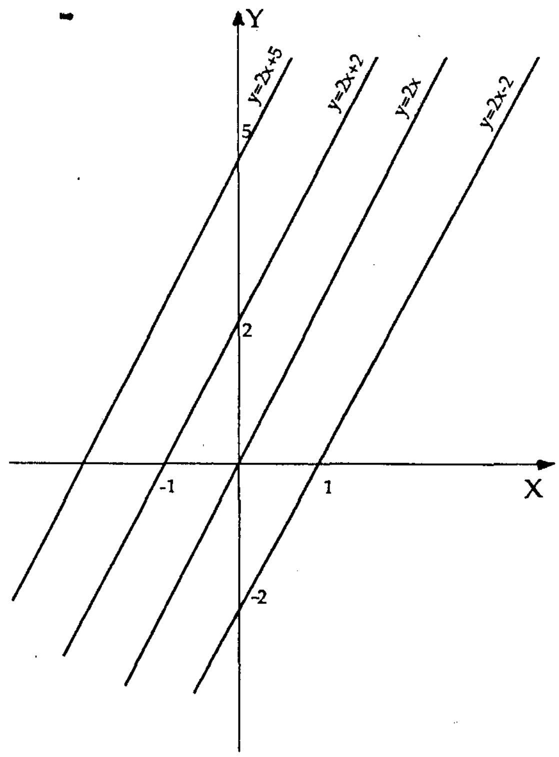
- la que duplica y adiciona 2 : $x \longmapsto 2x + 2$
- la que duplica y adiciona 5 : $x \longmapsto 2x + 5$
- la que duplica y resta 2 : $x \longmapsto 2x - 2$

Antes de hacer las gráficas pueden hacerse algunas predicciones acerca del comportamiento de estas nuevas funciones comparándolo con el de la función que duplica, $j(x)$, y con el de su gráfica respectiva.

Así en el primero caso ($x \longmapsto 2x + 2$) se espera que el valor de las imágenes además de ser el duplo de la pre-imagen, se incrementa en dos unidades entonces la recta sube dos en el eje de las ordenadas; como este incremento sería para todas las imágenes que se obtuvieron mediante $j(x)$, la gráfica de $x \longmapsto 2x+2$ resulta ser una recta paralela a la de $j(x)$. Es como si todos los puntos se trasladaran dos unidades en la misma dirección y sentido. Para la función $x \longmapsto 2x + 5$, a las imágenes obtenidas mediante $j(x)$ se les suma 5, entonces la representación de esta nueva función es una recta que también es paralela a las dos anteriores.

Con respecto a la función $x \longmapsto 2x - 2$ ¿qué se puede esperar si se compara con la función $j(x)$?

La representación gráfica de las cuatro funciones permite constatar, ampliar, modificar y hasta rechazar, si fuere necesario, las predicciones.



Conviene observar de una vez en estas gráficas el intercepto de cada recta con el eje de las ordenadas y relacionarlo con la constante.

Las funciones de gráfica lineal que obtuvimos a partir de la función lineal que duplica se denominan funciones afines de esta.

A cada una de las funciones lineales anteriores se le puede asociar la ecuación correspondiente, cuya solución da el cero de la función. Así se obtienen las siguientes ecuaciones:

$2x = 0 \qquad 2x + 5 = 0$

$2x + 2 = 0 \qquad 2x - 2 = 0$

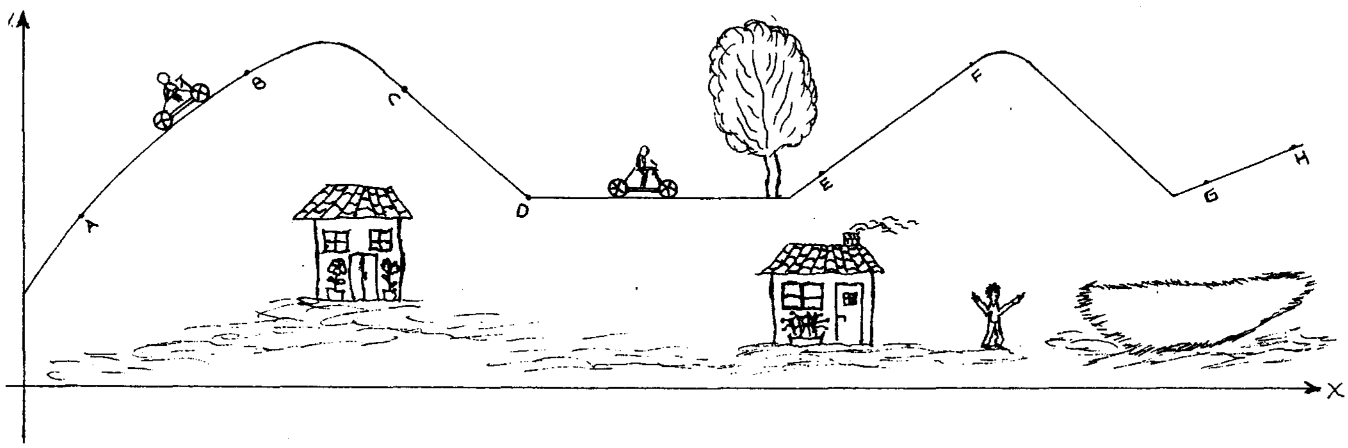
En la gráfica anterior se puede observar que la solución para cada ecuación es el intercepto de la recta con el eje de las abscisas es decir que el número representado en dicho eje, es el valor de x que "se anula cuando se le aplican las transformaciones simbolizadas en la ecuación".

La lectura anexa a la introducción de esta unidad amplía el tratamiento que puede dársele a este tema, lo mismo que al de las ecuaciones cuadráticas.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para que los alumnos construyan en forma significativa y dinámica el concepto de pendiente, conviene que lo asocien con las experiencias de subir y bajar montañas, carreteras, terrenos ondulados, etc., de manera que expliciten el mayor o menor esfuerzo que hacen para avanzar y subir al mismo tiempo o para frenar y no acelerar demasiado si vienen descendiendo. Se espera que la intensidad de tales esfuerzos la relacionen con la mayor o menor "inclinación" o "pendiente" del trayecto recorrido.

Un ejemplo conocido por los alumnos puede ser el de considerar un tramo de la ruta seguida en "La vuelta a Colombia".



Si la y es la altura sobre el nivel del mar y se fija un sentido para la horizontal, se pueden formular preguntas como:

¿Qué pasa con el valor de y, cuando va aumentando el de x?

Si el ciclista, que avanza en el sentido indicado, tiene que hacer fuerza para avanzar y subir al mismo tiempo como ocurre en el tramo AB, el valor de y aumenta. Pero si el ciclista tiene que hacer fuerza para no acelerar demasiado porque viene en bajada, como ocurre en el tramo CD, entonces el valor de y disminuye.

En el primer caso se dice que la pendiente es positiva y en el segundo que es negativa.

Obsérvese que el signo y la ordenación de las pendientes son casi inmediatas desde el punto de vista dinámico; cuantificar la pendiente de una recta requiere de una mayor elaboración. Para asignarle un número a la pendiente se pueden proponer ejercicios como los presentados en los contenidos básicos. Al finalizarlos se relacionan los valores hallados con el coeficiente de la función lineal.

En los contenidos básicos todos los ejemplos son de funciones lineales (la gráfica pasa por el origen), conviene estudiar otros de funciones de gráfica lineal que no sean funciones lineales, es decir aquellas de la forma.

$$f: x \longmapsto ax + b,\ a \neq 0 \text{ y } b \neq 0$$

Ejemplos:

$$y = \frac{2}{3}x + 5$$

Se puede optar por hallar dos puntos de la recta y trazarla. Dichos puntos podrían ser, entre otros, los interceptos con los ejes coordenados, es decir

$P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ donde

$x_1 = 0 \quad , \quad y_1 = 5$

Para $x_1 = 0$, $y_1 = 5$

Veamos cuál debe ser el valor de x para que el de y sea cero.

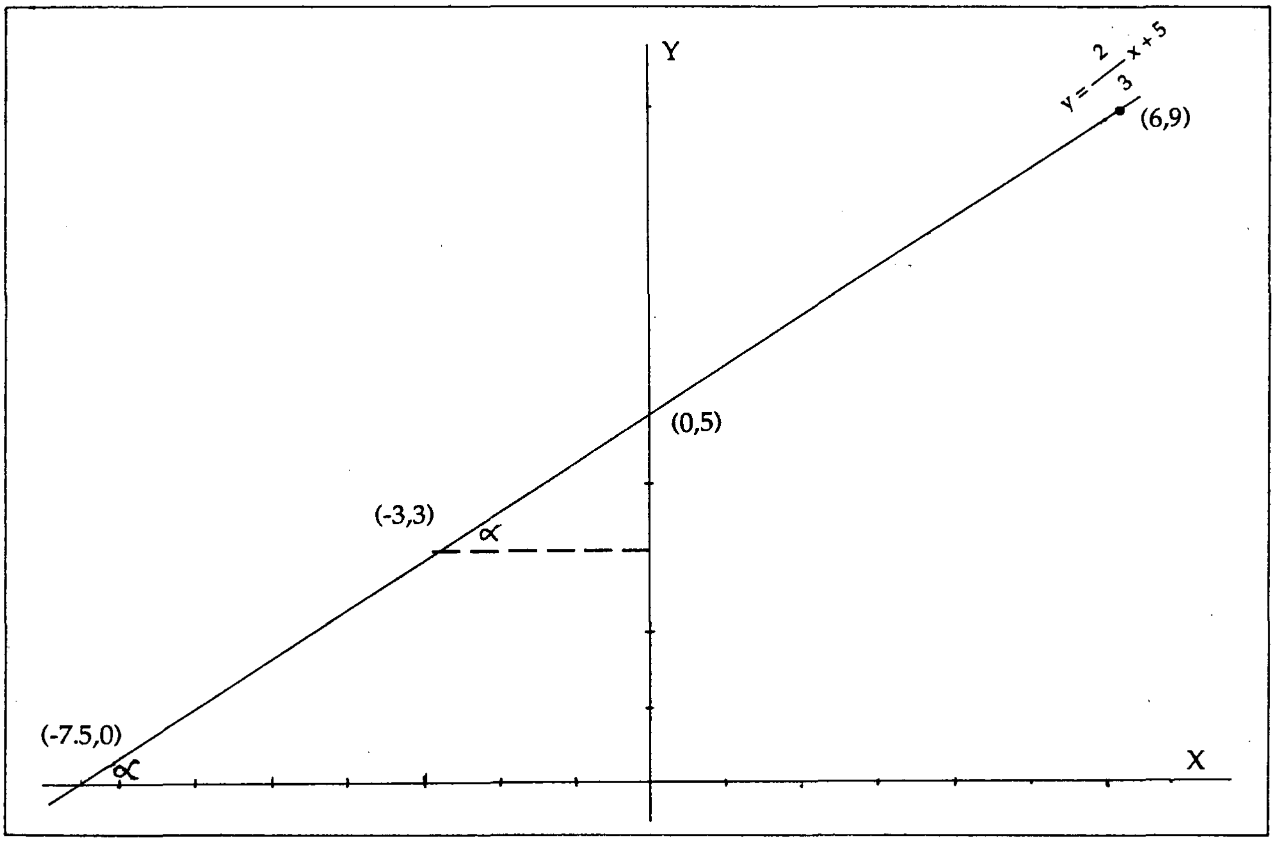
$0 = \frac{2}{3} x_2 + 5$ entonces $-\frac{2}{3} x_2 = 5$

$$x_2 = -\frac{5 \times 3}{2} = -7.5$$

Entonces tenemos perfectamente determinados los puntos P_1 y P_2

P_1 (0,5) ; P_2 (-7.5 , 0)

Ahora se puede trazar la gráfica de la función:



En la gráfica se ve que por 5 unidades que se suban, se avanzan 7.5 en el mismo sentido que se fijó para la horizontal. La razón entre estos dos valores es:

$$\frac{5}{7.5} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

También se pueden tomar otros dos puntos de la recta, por ejemplo (-3,3) — y (6,9):

$$\frac{9-3}{6-(-3)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Se observa así que la pendiente de la recta (tangente del ángulo α es igual al coeficiente de x.

Como ejercicio puede hallarse la pendiente de la representación gráfica de la función.

$$f \longmapsto \frac{2}{3} x$$

para observar que la pendiente es la misma y que la recta es paralela a la anterior.

De igual manera puede variarse la constante 5, hacer las gráficas correspondientes y relacionar: el intercepto de la recta y el eje de las ordenadas (y) con la constante; las pendientes de las rectas y la posición de una con respecto a las otras.

Para este tipo de funciones ¿qué pasa con el valor de las imágenes (ordenadas) cuándo el valor de las preimágenes (abscisas) aumenta? ¿y cuándo disminuye?

Veamos otro ejemplo:

$$y = -\frac{2}{3}x + 5$$

—¿Cuál es la diferencia entre esta función y la que trabajamos inicialmente ($y = 2x + 5$)?

—¿Qué puedes predecir en relación con la gráfica de esta función?

—¿Haz la gráfica y fíjate si ella te facilita la comprobación de algunas de tus predicciones.

—¿Qué pasa con los valores de y cuando aumentan (o disminuyen) los de x?

—¿Cómo será la representación gráfica de la función asociada a la ecuación:

$$y = -\frac{2}{3}x \quad ?$$

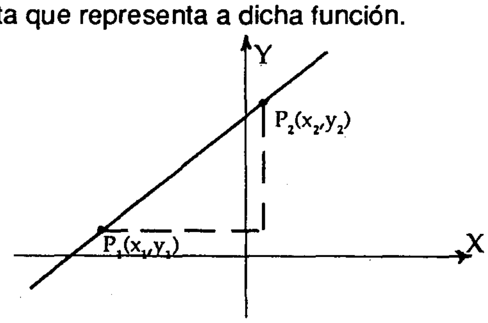
—Da ejemplos de funciones cuyas gráficas sean rectas paralelas a la función anterior.

—Cuando se avanza en un terreno plano, por ejemplo en un tramo de carretera en la costa. ¿Qué podría decirse de la pendiente de dicha carretera?

—Un caracol sube por la pared de un pozo (que tiene forma de cilindro recto) para alcanzar el borde superior de la salida de este ¿Cuál es la pendiente del camino que sigue este animalito? ¡Explica!

Una vez analizados los ejemplos se puede llegar a una síntesis que relacione el crecimiento o decrecimiento de una función con el valor de la pendiente de la recta que representa a dicha función.

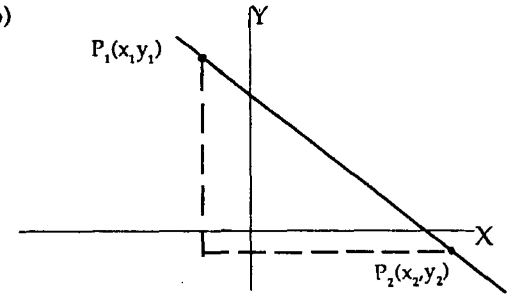
a)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} > 0$$

Función creciente

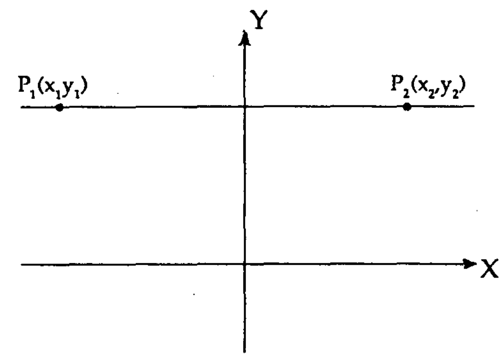
b)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} < 0$$

Función decreciente

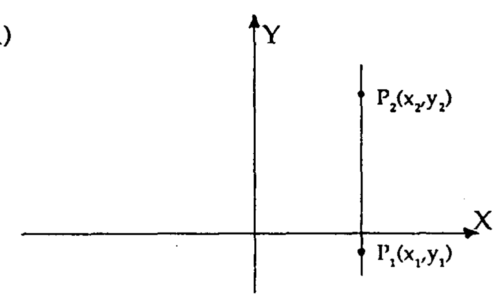
c)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$$

Función constante

d)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ no está definido}$$

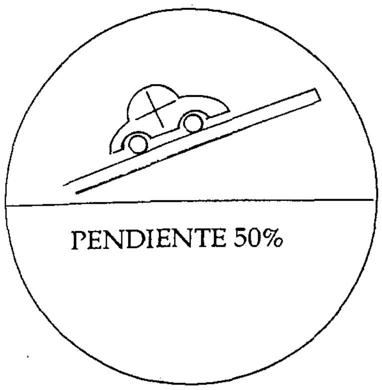
La gráfica no es de una función

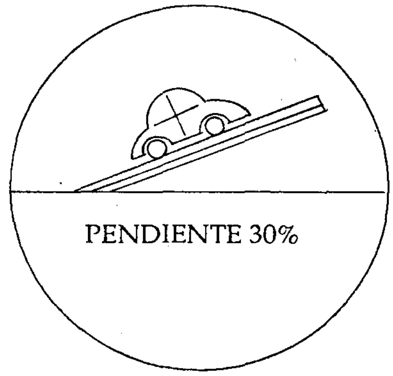
Obsérvese que cuando se fija la dirección y sentido de la horizontal y se recupera dinámicamente el concepto de pendiente es fácil saber si ésta es positiva, negativa o nula.

Otros ejercicios:

¿Qué puede significar una expresión como: "la pendiente de esta carretera es del 10%"?

Estos dos avisos se encuentran en dos caminos que conducen a un mismo sitio:





¿Cuál de los dos escogerías? ¿Por qué?

OBJETIVOS ESPECIFICOS

37 Reconocer las funciones cuadráticas.

38 Reconocer que toda función cuadrática puede expresarse como la adición de una función de área, una función lineal y una función constante.

39 Representar gráficamente funciones cuadráticas.

40 Relacionar ecuaciones cuadráticas con funciones cuadráticas.

41 Resolver ecuaciones cuadráticas.

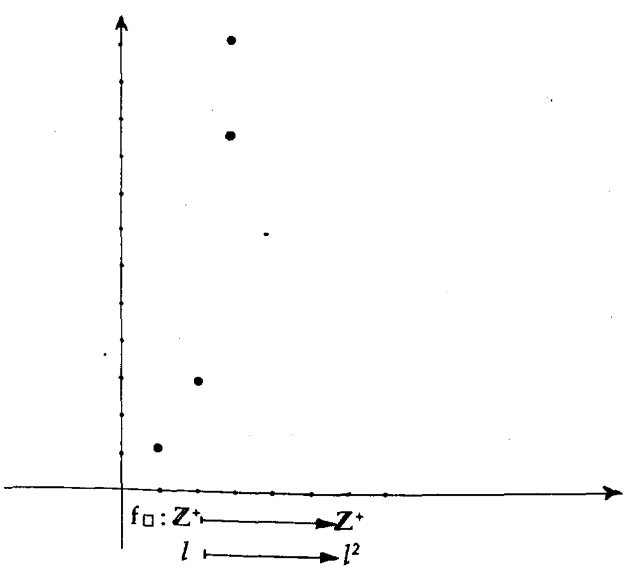
42 Hallar aproximaciones por exceso y por defecto a raíces cuadradas.

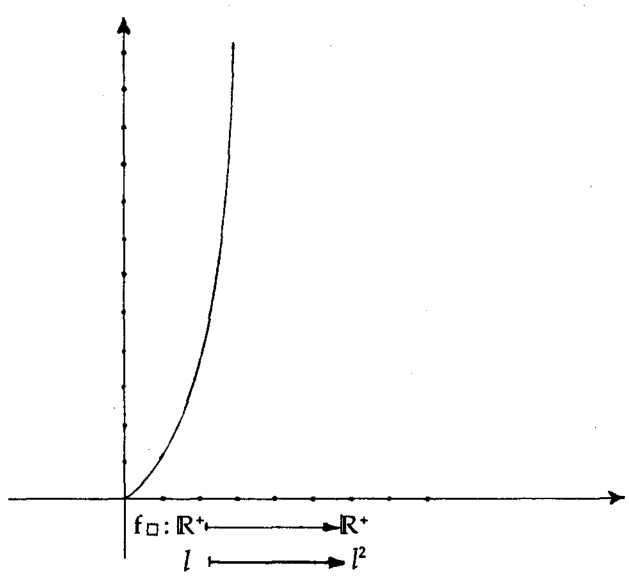
43 Plantear situaciones en las que los cambios se describan apropiadamente con una función cuadrática.

44 Resolver y formular problemas relacionados con funciones cuadráticas.

CONTENIDOS BASICOS

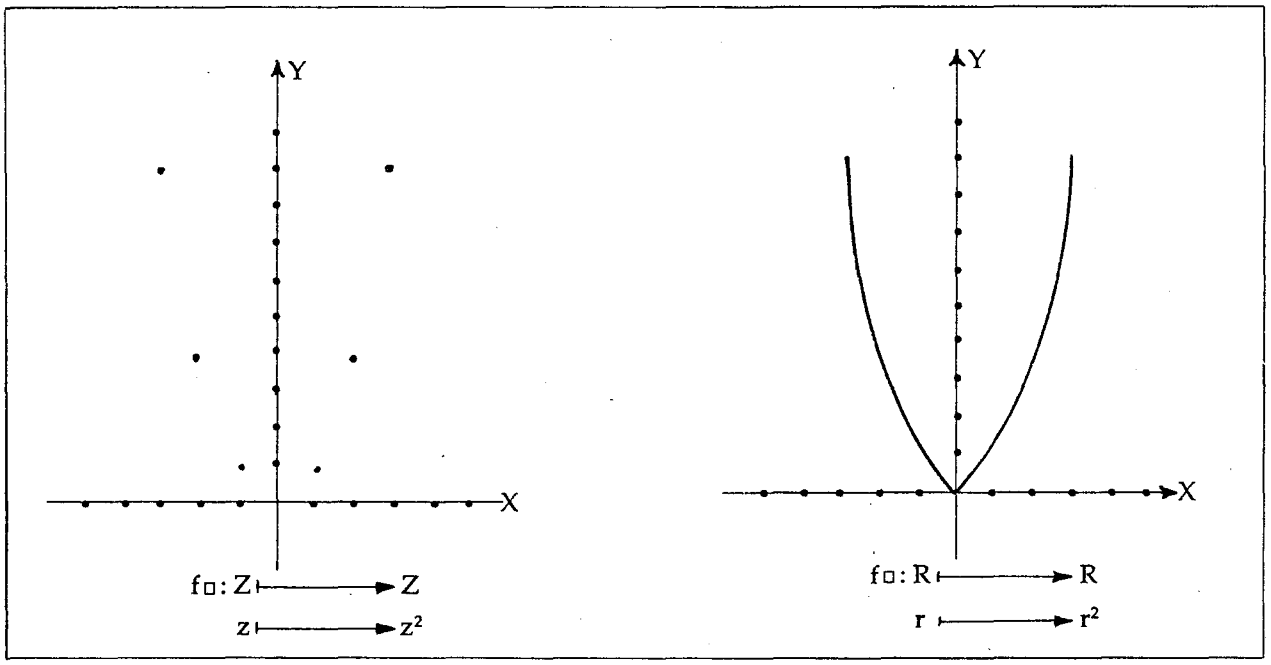
El estudio de la función cuadrática puede iniciarse en forma sencilla con la función de área. El área de un cuadrado de lado se halla multiplicando lado por lado, o sea elevando l al cuadrado. Si los valores que toma el lado l son enteros positivos se tendrá una función definida de $\mathbb{Z}^+$ en $\mathbb{Z}^+$ y la gráfica correspondiente estará constituída por la representación de puntos de la forma (l, l^2) en el plano cartesiano. Si l toma valores reales positivos, la función estará definida de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y la gráfica resultará una línea contínua formada por la representación de los puntos (l, l^2).





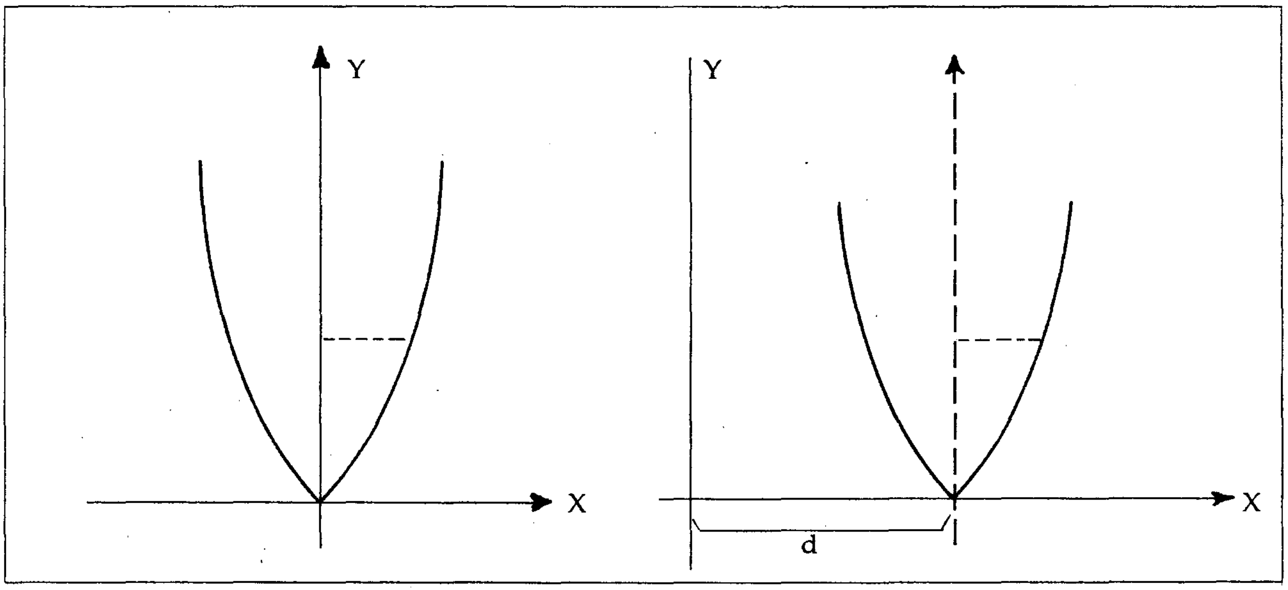
Para expresar la imagen de cualquier elemento del conjunto de partida se utiliza la notación $f(l) = l^2$; así la imagen de 2 se nota $f(2) = 4$ y la imagen de 0.5 se nota $f(\ 0.5) = 0.25$. También se puede utilizar solo $f(l)$, o solo l^2.

La función que a cada número entero z positivo o negativo o cero lo envía en su cuadrado, permitirá avanzar en el estudio de las funciones cuadráticas y hacer la gráfica correspondiente. Esta resultará ser una gráfica de puntos discretos de la forma (z, z^2). Si se define la misma función en los números reales, la gráfica correspondiente a los puntos (r, r^2) resultará ser una curva continua.



Es claro que en la representación gráfica se toman solamente algunos valores que permiten hacerse una idea de la gráfica de la función. Es interesante tomar entre estos valores el cero y analizar el hecho de que al tomar cada vez valores mayores que cero o valores menores que cero del dominio de la función, las imágenes correspondientes, en cada caso, son valores cada vez mayores, lo que hace que las ramas de la curva crezcan positivamente y simétricamente con respecto al eje y.

Ahora se puede tratar de encontrar la función representada por la gráfica de la misma curva pero que se encuentra desplazada una distancia d hacia la derecha del eje y.



Se observa que el punto mínimo de la curva original es el punto (0,0) y el de la curva desplazada es el punto (d,0), o sea que el valor de la función en los dos casos es el mismo: 0. Se analiza que para cada punto de la gráfica desplazada, el valor de x se incrementa en d, pero el valor de la función es en cada caso el mismo. Parecería que se deba utilizar la expresión $(x+d)^2$, pero si se ensaya la gráfica de $x \longmapsto (x+d)^2$, se observa que la curva aparece corrida hacia atrás. Este hecho permite escribir la función representada por la gráfica desplazada como:

$$
\begin{aligned}
f_{\square}\vec{d}: \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}\\
x &\longmapsto (x-d)^2
\end{aligned}
$$

O sea la imagen de cualquier elemento del dominio se escribe como

$$f_{\square}, \vec{d}\,(x) = (x-d)^2$$

o como:

$$f_{\square}, \vec{d}\,(x) = x^2 - 2dx + d^2$$

Si la gráfica se desplaza hacia la izquierda del eje y, una distancia d, la función representada por ella será aquella que a cada elemento del dominio lo envía en la imagen $(x+d)^2$ o sea:

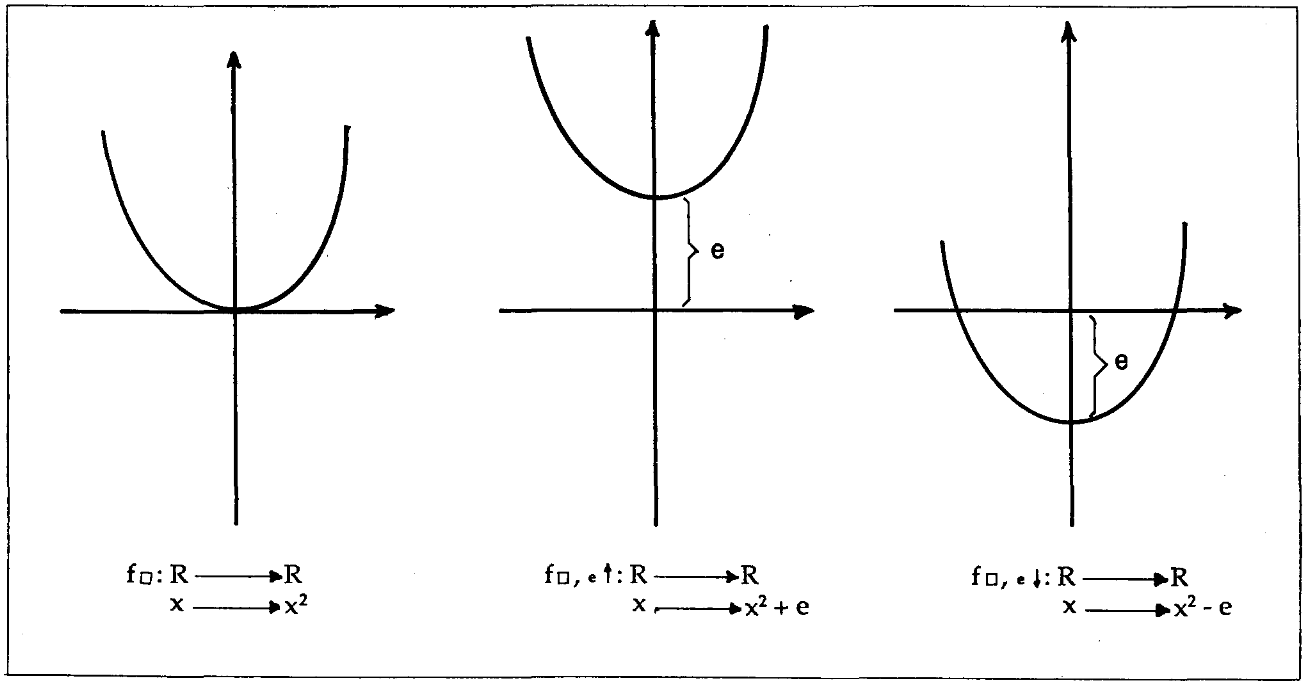
$$f_{\square}, \vec{d}\,(x) = (x+d)^2$$

$$f_{\square}, \vec{d}\,(x) = x^2 + 2dx + d^2$$

Pero si no se sabe de antemano si d es un número positivo o negativo, siempre se puede emplear la expresión $(x-d)^2$

También es interesante encontrar la función representada por la gráfica desplazada una distancia e sobre el eje y.

En la gráfica desplazada una distancia e sobre el eje y, la imagen de cero es e, o sea, el punto mínimo de la curva es el punto (o,e). Así todos los puntos de la gráfica se trasladan una distancia e y cada imagen de un elemento x del dominio toma el valor $x^2 + e$.



Si la gráfica se desplaza una distancia e hacia abajo, cada punto de la gráfica se traslada hacia abajo una distancia e, y cada imagen de un elemento x del dominio toma el valor $x^2 - e$

$$f_{\square}, e\!\downarrow(x) = x^2 - e$$

Pero si no se sabe de antemano si e es un número positivo o negativo, siempre se puede emplear la expresión $x^2 + e$.

Se ha analizado la función que a cada número real lo envía en su cuadrado, y la gráfica que la representa; después se ha desplazado esta gráfica sobre el eje x una distancia fija y se ha encontrado la función por ella representada; el mismo procedimiento se ha seguido al desplazar la gráfica sobre el eje y. Para completar este análisis es conveniente encontrar la función representada por la gráfica trasladada tanto con respecto al x como con respecto al eje y.

La función original es aquella que envía un elemento x del dominio en la imagen x^2.

$$
\begin{aligned}
f_{\square} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto x^2
\end{aligned}
$$

La función representada por la gráfica desplazada a la derecha, una distancia d sobre el eje x envía un elemento x del dominio en la imagen $(x - d)^2$

$$
\begin{aligned}
f_{\square\, \vec{d}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto (x-d)^2
\end{aligned}
$$

Si se toma esta gráfica desplazada sobre el eje x, y se desplaza sobre el y una distancia e, la función representada por la nueva gráfica será aquella que envíe un elemento x del dominio en la imagen $(x-d)^2 + e$.

$$
\begin{aligned}
f_{\square\, \vec{d}, \vec{e}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto (x-d)^2 + e
\end{aligned}
$$

O sea una imagen de esta función será:

$$
\begin{aligned}
f_{\vec{d}, \vec{e}} :&= (x-d)^2 + e \\
&= X^2 - 2dx + d^2 + e
\end{aligned}
$$

Se puede considerar esta última expresión como si estuviera compuesta por tres términos:

$$x^2, -2dx, d^2 + e$$

El primero de ellos corresponde al cuadrado de la variable x, el segundo está compuesto por la variable multiplicada por el coeficiente -2d y el tercero es una constante formada por la adición de $d^2 + e$.

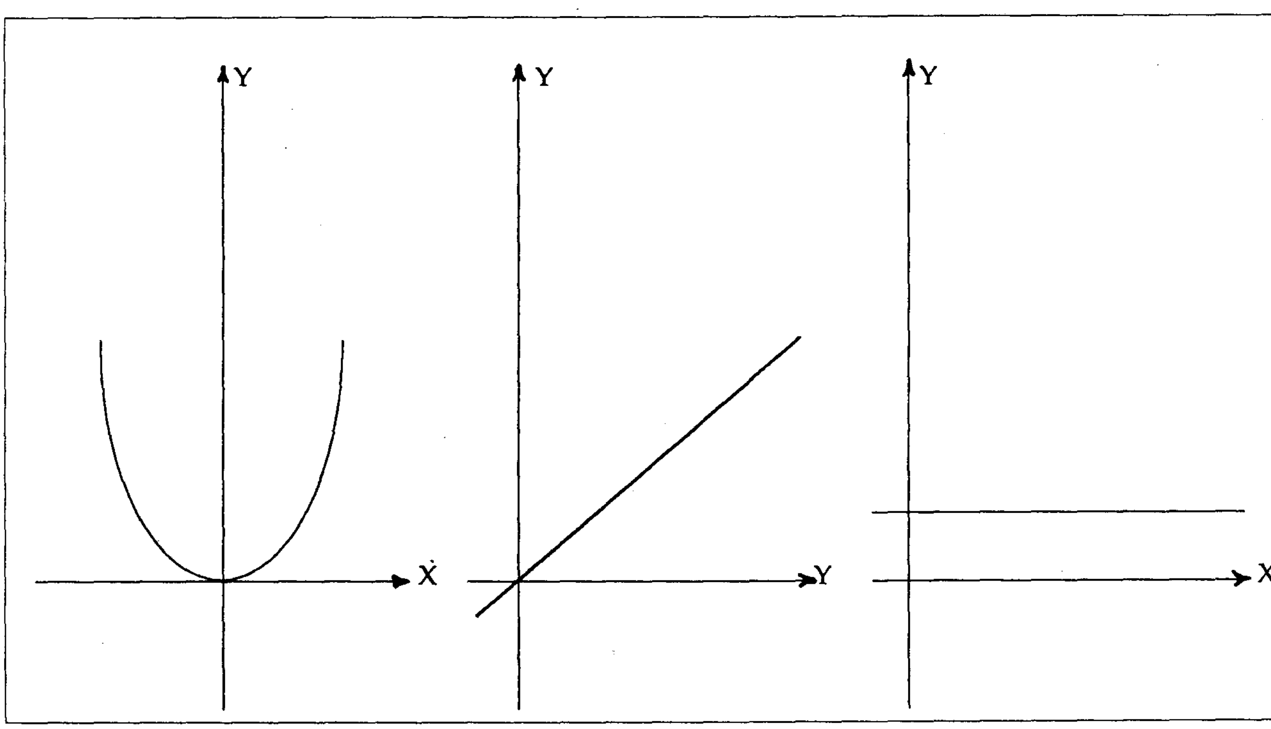
Si se desea simplificar esta expresión se puede usar una letra para el coeficiente de x y otra para la constante sumada; la expresión para una imagen de esta función tiene la forma:

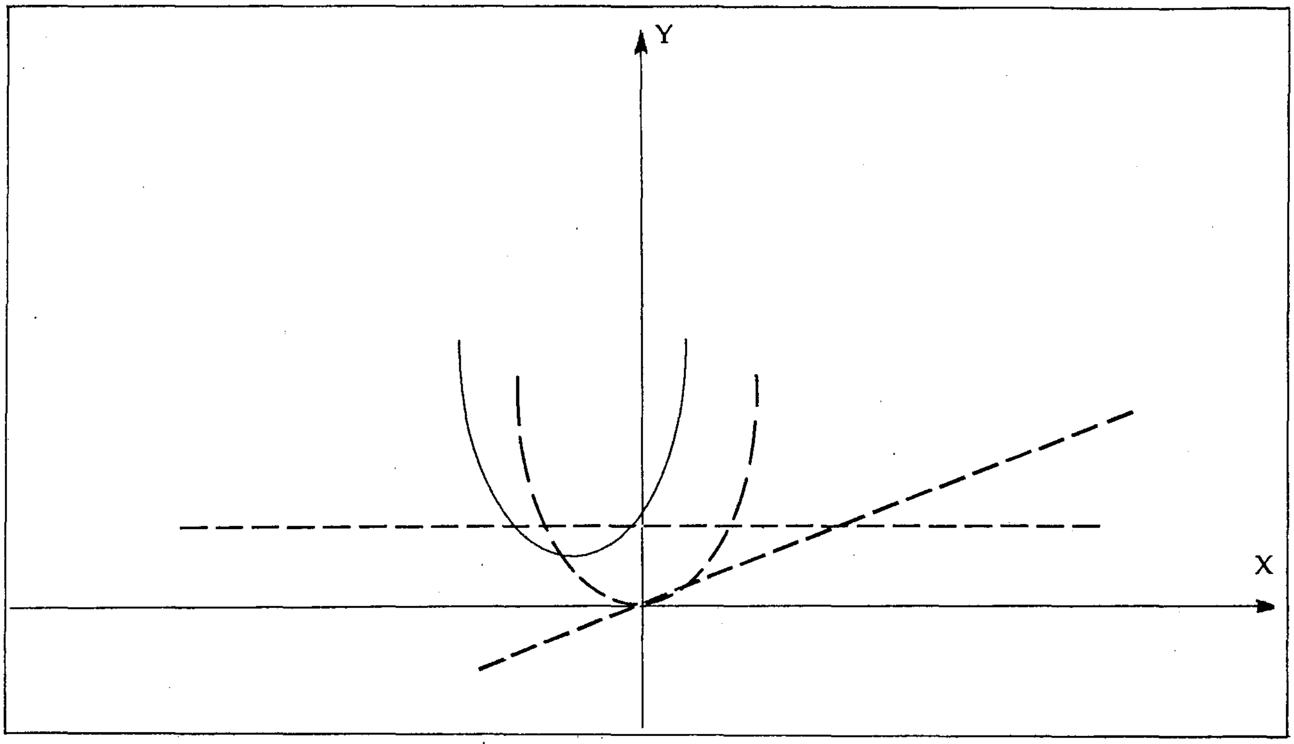
$$f(x) = x^2 + bx + c \text{ donde } b= -2d \text{ y } c= d^2 + e.$$

Si se observa en detalle esta expresión, el término x^2 es la imagen de x a través de la función cuadrada, el término bx es la imagen de x a través de una función lineal, y el término c puede considerarse como la imagen de x a través de una función constante.

Este hecho sugiere que la función f que a un elemento x del dominio lo envía en la imagen $x^2 + bx + c$ es la suma de las funciones: cuadrada, que a x^2 envía en x; lineal, que a x envía en bx, y constante, que a x envía en c.

Mediante las gráficas que representan estas funciones se visualiza esta afirmación.





Para la construcción de la gráfica que representa la función f, se suman las ordenadas de las funciones f_1, f_2, y f_3 correspondientes a una misma abscisa. Esto se puede hacer en dos pasos: hallando primero las ordenadas de $f_1 + f_2$, es decir $x^2 + bx$ y realizando la gráfica correspondiente; por último $(f_1 + f_2) + f_3$ que en este caso traslada verticalmente la curva (hacia arriba o hacia abajo a lo largo del eje de simetría) tantas unidades como lo indique la función constante f_3

Cuando se hizo la gráfica de la función $f_□$ que a x envía en x^2, se observó cómo la función $f_□$ envía dos valores diferentes de x a la misma imagen.

$$x \xmapsto{f_\square} x^2$$
$$-x \xmapsto{f_\square} x^2$$

Este hecho hace que la gráfica resulte una curva con dos ramas simétricas alrededor del eje vertical. Cuando se trasladó esta curva una distancia d a lo largo de x, y una distancia e a lo largo de y, se vió que la gráfica resultante representa la función que a x envía en la imagen $x^2 + bx + c$. Podemos afirmar que toda función cuadrática tiene como gráfica una curva abierta de dos ramas, simétricas a una recta o eje de simetría. Esta curva se llama parábola (Sin embargo, no todas las parábolas representan funciones cuadráticas de este tipo).

El eje de simetría de la parábola que representa la función

$f: x \longmapsto x^2 + bx + c$ es una recta paralela al eje y. Vamos a encontrar a qué distancia del eje y se encuentra ese eje de simetría. Cuando se trasladó la gráfica de la función $f: x \longmapsto x^2$ una distancia d sobre el eje x, se vió que la función representada por la nueva gráfica era tal que $f: x \longmapsto x^2 - 2dx + d^2$, en la cual el coeficiente de x o sea $-2d$, permita conocer por dónde pasaba el eje de simetría de la curva. Como $b = -2d$, entonces

$$d = -\frac{b}{2}$$

Conocido este valor de x, puede hallarse su imagen por la función y así obtener el punto más bajo de la curva, o sea aquel a partir del cual las ramas de la parábola "voltean".

En el análisis del comportamiento de la función cuadrática es interesante encontrar los llamados "ceros de la función" que como su nombre lo indica no es otra cosa que encontrar los valores x del dominio que son enviados a la imagen cero. Y es claro que en la gráfica estos puntos corresponden a los interceptos de la curva con el eje x, porque todos los puntos de este eje son de la forma (x,0).

En este caso la condición que tienen que cumplir los "ceros" es:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 + bx + c = 0$$

Esta expresión es una ecuación; en nuestro caso una ecuación de segundo grado por el hecho de que la variable independiente aparece a la segunda potencia (elevada al cuadrado).

Encontrar los valores de x que hacen verdadera la igualdad significa resolver la ecuación.

No siempre es inmediato encontrar estas soluciones, por lo cual se hará un análisis a partir de las formas más sencillas que toma la ecuación de segundo grado.

Si la función f es tal que envía a x en la imagen x^2, la ecuación asociada será:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 = 0$$

Solucionar esta ecuación significa encontrar los valores reales de x, tales que $x \cdot x = 0$. El único real que satisface esta igualdad es $x = 0$.

Consideramos ahora la función f que a x lo envía en $x^2 + c$ con $c \neq 0$; la ecuación asociada es de la forma:

$$f(x)=0$$
$$x^2 + c = 0$$

para hallar los valores de x que hacen verdadera la igualdad analizamos que

$$x^2 = -c$$

$$x \cdot x = -c$$

x debe ser un número real tal que x multiplicado por si mismo sea - c.

Si c es un real positivo no hay ningún real que multiplicado por sí mismo dé como resultado -c. Si c es un real negativo -c es un real positivo que podemos llamar k ; x será entonces un real tal que multiplicado por sí mismo dé -c, además -x también será solución porque $-x \bullet -x = x^2$ o sea en este caso se tienen dos soluciones que vamos a llamar x_1, y x_2 :

$$x_1 = +\sqrt{k} \quad = +\sqrt{-c}$$
$$x_2 = -\sqrt{k} \quad = -\sqrt{-c}$$

También podemos decir que el conjunto de soluciones de $x^2 + c = 0$ para $c < 0$ es $\{x_1, x_2\} = \{+\sqrt{-c}, -\sqrt{-c}\}$. Veamos unos ejemplos numéricos:

$$\text{Si } f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2 - 4$$

la ecuación correspondiente será:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$

Sumando el inverso aditivo de -4 a cada miembro de la igualdad se tiene:

$$x^2 - 4 + 4 = 0 + 4$$
$$x^2 = 4$$

x debe ser tal que $x \cdot x = 4$. Hay dos reales que satisfacen esta igualdad: 2 y -2, ya que

$$2 \cdot 2 = 4 \text{ y } (-2)(-2) = 4$$

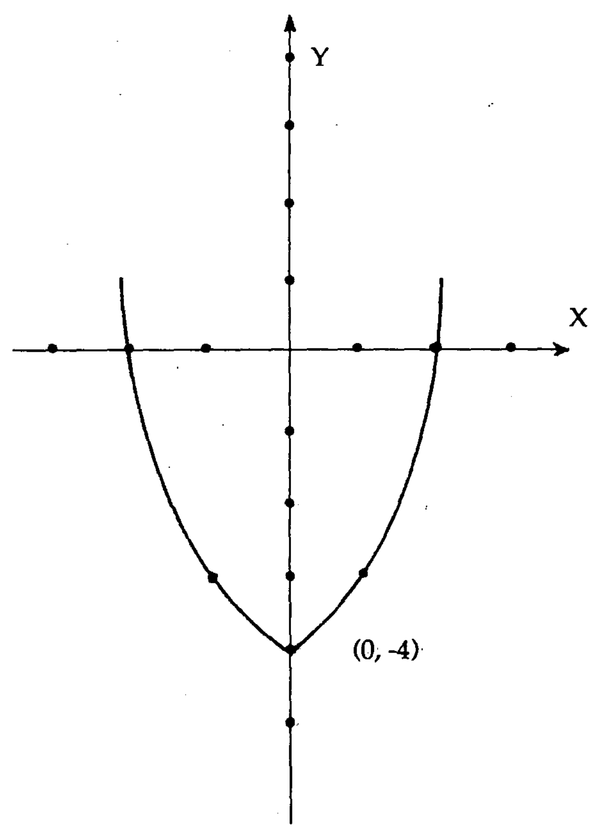
Así las soluciones son:

$$x_1 = +\sqrt{4} = 2$$

$$x_2 = -\sqrt{4} = 2$$

Es interesante representar gráficamente la función para constatar como los interceptos con el eje x son los puntos (2,0) y (-2,0).

X	0	±1	±2	±3	...
Y	-4	-3	0	5	...



Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2 + 1$

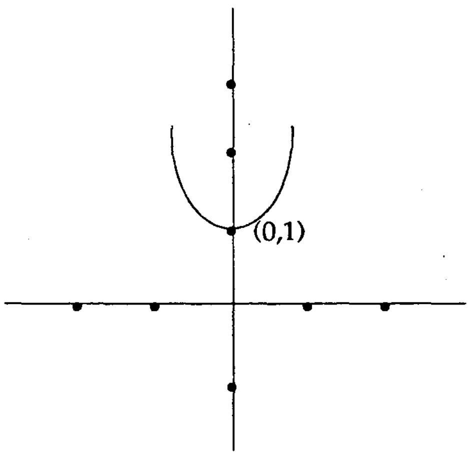
Se tiene la ecuación:

$$f(x) = 0$$
$$x^2 + 1 = 0$$

Sumando el inverso aditivo de 1 a los dos miembros de la igualdad se obtiene:

$$x^2 = -1$$

Se ve claramente que no hay un real que multiplicado por sí mismo dé como resultado - 1. Al hacer la gráfica de la función se observa que la curva obtenida no corta el eje de las x.



Ahora analicemos la función f que a x la envía en $x^2 + bx$; la ecuación para $f(x) = 0$ es $x^2 + bx = 0$ que por la propiedad distributiva del producto respecto a la adición podemos factorizar así:

$$x(x+b) = 0$$

Para que este producto sea cero, uno de los factores debe ser cero, de donde se tiene que:

$$x = 0$$
$$0x + b = 0$$

Si x es 0, entonces una solución es $x_1 = 0$

Si $x + b$ es 0, entonces $x_2 = -b$ es la otra solución.

De esta manera se obtienen dos soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = -b$

Veamos un ejemplo:

$$f: r \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^2 + 3x$$

la ecuación correspondiente es $x^2 + 3x = 0$

que en forma de factores podemos escribir como:

$$x(x + 3) = 0$$

la cual se satisface para $x_1 = 0$ y para $x_2 = -3$

Se puede verificar como estos dos valores hacen cierta la igualdad

$$0^2 + 3.0 = 0$$
$$(-3)^2 + 3 \bullet (-3) = 0$$
$$9 - 9 = 0$$

Si se representa gráficamente la función, se verifica que los interceptos de la curva con el eje x son los puntos (0,0) y (-3, 0).

Cuando f es la función que a x hace corresponder la imagen:

$x^2 + bx + c$ tenemos varios casos para la ecuación asociada.

El más afortunado es cuando la ecuación:

$$x^2 + bx + c = 0$$

Se puede escribir como:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2}\right) = \quad \text{o también} \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = 0$$

Suponiendo que

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c \quad \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 2\left(x \bullet \frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$= x^2 + bx + c$$

En este caso los dos factores son iguales, y se deduce que para hacer verdadera la igualdad

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{basta que}$$

$$x + \frac{b}{2} = 0,$$

o sea que $x = -\dfrac{b}{2}$

Puede decirse que hay una solución, o que hay dos soluciones y que ambas soluciones son iguales:

$$x_1 = \frac{b}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{b}{2}$$

Si se observa la gráfica de la función se nota que el intercepto de la curva con el eje es el punto

$$\left(-\frac{b}{2}, 0\right)$$

Los alumnos deberán ejercitarse para observar rápidamente cuando

$c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ y encontrar fácilmente la solución de este tipo de ecuaciones.

Si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ no es factorizable en forma de cuadrado de una suma o de una diferencia como en el caso anterior, se puede tratar de completar ese cuadrado sumando en los dos miembros de la igualdad un término apropiado de manera que no se altere la igualdad.

Se tiene : $x^2 + bx + c = 0$

sumando a cada miembro $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ obtenemos:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\text{ó}: \quad x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

A la izquierda de esta ecuación tenemos tres términos que se pueden factorizar y corresponden al cuadrado de una suma:

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

Para tratar de hallar el valor de x que aparece en el término de la izquierda en el paréntesis elevado al cuadrado, debemos extraer la raíz cuadrada en los dos miembros de la igualdad, y como se había observado antes se obtienen dos soluciones: el valor positivo y el valor negativo de la raíz del número representado en el miembro de la derecha.

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$y, \quad x + \frac{b}{2} = -\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

O sea que los valores de x que son soluciones de la ecuación original serán:

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

$$x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Veamos un ejemplo númerico:

Si la ecuación que tenemos es: $x^2 + 6x + 5 = 0$

Sumamos $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ a cada miembro de la igualdad

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$$

$$x^2 + 6x + 9 + 5 = 9$$
$$x^2 + 6x + 9 = 9 - 5$$
$$(x + 3)^2 = 4$$

$x + 3 = \sqrt{4}$ y
$x + 3 = -\sqrt{4}$ entonces

$x_1 = -3 + 2 \qquad x_1 = -1$
$x_2 = -3 - 2 \qquad x_2 = -5$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = -1$ y $x_2 = -5$ que se pueden verificar en la ecuación dada:

$$(-1)^2 + 6 \bullet (-1) + 5 = \square$$

$$1 - 6 + 5 = 0$$

$$(-5)^2 + 6 \bullet (-5) + 5 = \square$$

$$25 - 30 + 5 = 0$$

No siempre el coeficiente de x^2 en una ecuación cuadrática es 1, sino que puede ser cualquier otro número real diferente de 0. Así la ecuación que tenemos para resolver es.

$$a x^2 + bx + c = 0$$

en donde a, b, c, son números reales y a es diferente de 0. Esta ecuación puede escribirse como una de las anteriores si dividimos los dos miembros de la ecuación por a, obteniendo:

$$x^2+\frac{b}{a}\ x\ +\frac{c}{a}=0$$

Si en este caso c es igual a $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, esto nos permite factorizar la expresión como antes. Si no son inguales, empleamos el procedimiento de completar dicho cuadro sumando los dos miembros de la igualdad el término

$$\frac{b}{2a}:$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

Al extraer la raíz cuadrada a los dos miembros de la igualdad se tiene:

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}\ ,$$

y las dos soluciones para x son:

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}}$$

Las cuadráticas puras.

Se puede pasar inmediatamente a las adivinanzas cuadráticas. Las situaciones en que se presenta una superficie cuadrada, o fácilmente descomponible en cuadrados, y que hay que pintar, o embaldosinar, o comprar, o sembrar, o fumigar, pueden exigir el cálculo del área. No crea que es inmediato aquello de que el área es la base por la altura, o lado al cuadrado. Eso se aprende como una fórmula sin saber por qué ni cuándo se puede utilizar. Tomar una calculadora y ver cómo se van elevando al cuadrado algunos números fraccionarios de dos para abajo, y entre uno y cero le ha hecho dar una sorpresa a algunos estudiantes aún en la universidad. Los matemáticos antiguos tuvieron mucha dificultad en desprenderse de la idea de que las cantidades al cuadrado tenían que ser áreas, y en superar el bloqueo de no poder mezclar números lineales con números cuadrados. Contar cuadraditos en papel cuadriculado o milimetrado puede ser una forma de familiarizarse con la manera como va aumentando el cuadrado cuando el número va pasando de cero a uno, a dos, etc.

La primera adivinanza cuadrática pura es pues la de adivinar cuánto tiene de largo el lado de un cuadrado de tantas unidades de área. Note que esto es álgebra verbal o retórica. Si sé el área, puedo saber cuánto tiene de largo el lado. Lo importante es entender de qué se trata el asunto, y hasta hacerlo en la cabeza. En un primer momento los alumnos solo pensarán en la raiz positiva, pues todos los cuadrados parecen tener lados de longitud positiva. Solo el cerebro puede pensar en longitudes negativas, y aun así, el área sale positiva. Es un buen momento para repasar los enteros, las operaciones con números negativos, el valor absoluto como distancia al origen, la diferencia entre distancias que son positivas y coordenadas que pueden ser negativas, etc. No vale la pena enseñar a sacar raíces cuadradas con lápiz y papel, pero sí a estimar más o menos cuánto va a tener de largo el lado si se sabe el área. La conversión de unidades de área es muy apropiada en este momento. También se puede tratar de descubrir la construcción de la raiz cuadrada por regla y compás.

Una vez que el alumno ya puede resolver la adivinanza en la cabeza en casos fáciles, puede pasarse al sistema simbólico que estamos estudiando. Vuelvo a leer la adivinanza en álgebra verbal. Esto lo puedo escribir:

$x^2=q$

Si quiero utilizar el cero, puedo escribir: $x^2-q=0$.

Si no sé el signo de q, puedo también escribir:

$x^2+q=0$

Pero, ¿qué puede significar "$x^2+q=0$"? De nuevo viene el problema de creer que "+q" significa que q es un número positivo. Así lo creyeron los matemáticos desde Babilonia hasta finales del siglo XVI, y por eso nunca utilizaron nada comparable a la ecuación que nosotros escribimos:

$x^2+q=0$.

Un caso interesante es $x^2 = q^2$, o $x^2 - q^2 = 0$.

Se puede explorar un cuadrado dividido en rectángulos y cuadrados, y analizar los posibles casos de los llamados "productos notables":

$a^2 - b^2$, $a^2 + b^2$, $(a-b)^2$ y $(a + b)^2$.

El otro tipo de adivinanzas cuadráticas puras es el de adivinar números que se aniquilen si uno los eleva al cuadrado y les suma tantas veces el mismo número. Pensándolo bien, esto parece imposible, y lo es si el número es mayor que cero y se le suma un número positivo de veces el número dado. El caso del cero es interesante:

¿Qué puede significar "$x^2+px=0$"? Si excluímos los números negativos, esta adivinanza solo puede tener una solución: el cero. Pero si aceptamos la posibilidad de que p o x sean negativos, tenemos otra solución que es fácil de hallar por inspección:

x^2 es lo mismo que xx, y si $xx = px$, la adivinanza es fácil. Es bueno explorar estos casos con la ayuda del sistema simbólico, y entonces tienen sentido escribir:

$x^2 = px$
$x^2 - px = 0$. Si no sabemos el signo de p, podemos escribir:
$x^2 + px = 0$.

Se puede hacer notar que la maquinita que notamos "x^2" es la que eleva al cuadrado, y que estas tres ecuaciones representan combinaciones de esa transformación que eleva al cuadrado, con las transformaciones lineales, que notamos "ax" o "px".

La cudrática completa.

Los ejemplos de la vida real para este caso son muy pocos, y generalmente muy artificiales. Pero ahora podemos tener mucha más flexibilidad para las adivinanzas. Un posible proyecto puede empezar por explorar el caso de "cuadrar lotes" en un terreno; por ejemplo, si se trata de obtener las dimensiones de un lote cuadrado que sea igual en área a una franja rectangular del mismo largo y de anchura fija, más un lote fijo, este problema puede llevar a la forma:

$x^2 = px + q$.

Cuando no sabemos el signo de los coeficientes, escribimos:

$x^2 + px = q$
$x^2 + q = px$
$x^2 + px + q = 0$.

Esta es la llamada "forma mónica" de la ecuación cuadrática, porque el coeficiente del monomio inicial es uno. Las formas mónicas son importantes en la teoría de anillo, en particular para introducir los llamados "enteros algebráicos" que generalizan los números enteros.

De nuevo, al encontrarse con la ecuación $x^2 + px + q = 0$, es difícil ver cómo sumando áreas se pueda llegar a cero. Es una convención muy artificial, pero que permite escribir todas las ecuaciones de este tipo con un formato común, utilizando coeficientes positivos o negativos.

Si el precio del metro cuadrado es a pesos / m^2, el coeficiente a puede aparecer an la forma:

$ax^2 + apx + aq = t$,
en donde t es el precio total del terreno. Esta ecuación puede fácilmente ser transformada a la forma usual:

$ax^2 + bx + c = 0$.

Pero puede ser más conveniente dividir por a todos los términos, y utilizar siempre la forma mónica.

Hay otras maneras de introducir los coeficientes usuales a, b, c. Es posible que los lotes no sean cuadrados, pero que se puedan dividir en cuadrados del mismo lado. Utilizando el coeficiente a para contar el número de cuadrados, tendríamos:

$ax^2 = c$
$ax^2 - c = 0$. Si no sabemos el signo de c, podemos escribir:
$ax^2 + c = 0$.

Si el número de cuadrados es igual a una tira del mismo lado de esos cuadrados y de ancho fijo, podemos escribir:

$ax^2 = bx$
$ax^2 - bx = 0$. Si aceptamos coeficientes de cualquier signo:
$ax^2 + bx = 0$
Otras combinaciones nos darían:
$ax^2 + bx = c$
$ax^2 + c = bx$
$ax^2 = bx + c$
$ax^2 + bx + c = 0$.
Esta es de nuevo la forma usual. Que esta última fórmula resuma todas las anteriores es toda una maravilla del arte de codificar de manera apretada y eficiente una serie de procedimientos y de problemas que entretuvieron a muchas personas durante muchos siglos.

Los mejores algebristas del renacimiento, como Paciolo, Tartaglia, Cardano, Ferrari, y Del Ferro consideraron solo coeficientes y soluciones positivas, y por eso creyeron que las ecuaciones cuadráticas que nosotros escribiríamos:

$x^2 = rx + n$

$x^2 + rx = n$

$x^2 + n = rx$,

eran todas diferentes, y se inventaron una formulita mnemotécnica para resolver cada una de ellas. No podían ponerle coeficiente al término "R", o "Re", o "C", o "Co" que representaba la incógnita, o cosa desconocida, o simplemente la cosa (que en latín se decía "res" y en italiano "cossa"), ni tampoco podían ponerle coeficiente al término "Qu" o "Ce" que representaba el número al cuadrado (que en latín se decía "Quadratus" y en italiano "Censo"). Solo podían escribir en general el término independiente, que ellos llamaban "N" o "Nu" para abreviar "Número".

Las tres ecuaciones de arriba se escribían en el siglo XVI con esas abreviaturas, además de "p" para "plus" ("más"); y "aeq" para "aequalis est" ("es igual a") en alguna de las formas siguientes:

Qu, R N, que se llamaba "Quema": Qu. aeq. R. p. N : $x^2 = rx + n$

Nu, Qu R, que se llamaba "Nuquer": Nu. aeq. Qu. p. R: $n = x^2 + rx$

Re, Qu N, que se llamaba "Requan": Re. aeq. Qu. p. N: $rx = x^2 + n$.

•Más aún, no existían todavía los exponentes, pues se consideraba que el cuadrado y el cubo eran áreas y volúmenes, y que la naturaleza no permitía ir más allá del cubo en la potenciación, a menos que se tratara de repetir la elevación al cuadrado para obtener una bicuadrática. A fines del siglo XVI Bombelli inventa los exponentes, y pasa la barrera del tres/cuatro.

Hace pues apenas cuatrocientos años desde que empezamos a escribir ecuaciones de cuarto, quinto y sexto, ... enésimo grado. Procure que sus alumnos exploren estas adivinanzas, encuentren las distintas combinaciones, se asombren de que no todos los números tienen que ser positivos, inventen maneras de resolver las adivinanzas, de ver qué significan geométricamente, de tratar de completar un cuadrado; de formular problemas en los que las ecuaciones modelen lo que se hace en la realidad, etc.

El procedimiento simbólico para resolver la cuadrática general.

Algunas personas pueden creer que hay solo una manera de resolver las ecuaciones cuadráticas: la fórmula usual que todos aprendimos de memoria. Usted se aprendió la fórmula como quien recuerda una figura, o más probablemente como una sarta de palabras sin sentido: menos be más menos raiz cuadrada de be dos menos cuatro a ce sobre dos a. Pura memoria. Lo importante es que si uno sabe cómo interpretar esta fórmula mágica y hace bien las sustituciones y las operaciones, le resultan uno o dos números que satisfacen la ecuación. Pero como en toda fórmula mágica, no se puede uno equivocar en nada, y si se le olvida aunque sea una letra, no puede salir de la caverna encantada en donde lo metió el profesor al ponerle una ecuación cuadrática en un examen. En ninguna otra esfera de la realidad se le van a presentar ecuaciones cuadráticas al 99% de sus alumnos: solo en los exámenes de matemáticas.

Es pues mucho más importante divertirse unos días explorando las adivinanzas, ensayando transformaciones, trucos y técnicas, que aprenderse de memoria la fórmula. Si uno llega a inventar la fórmula por si mismo, no se le va a olvidar; y aunque no la vuelva a inventar, si ha llegado a fórmulas parecidas, o a procedimientos que sirven algunas veces aunque fallen en otras, le quedara fácil aprenderse la fórmula y darle sentido.

Una posible exploración es la de escribir una lista de cuadrados, escribiendo en columna a la izquierda 1, 4, 9, 16, etc. y en seguida diez columnas con los valores respectivos de n, 2n, 3n,... 9n y 10n. Así lo hicieron los escribas de Mesopotamia hace más de cuatro mil años, y si usted quiere practicar un poco de combinatoria, ensaye a contar cuántas ecuaciones se pueden resolver con un cuadro de veinte líneas y once columnas: son muchísimas! compare con los ejercicios de los libros de álgebra, y verá que después de dividir por el coeficiente a, la mayoría de estas ecuaciones se pueden resolver por inspección si uno tiene paciencia para mirar en el cuadro.

Otra exploración útil es la de inventar ecuaciones, poniendo dos números r, s que sean las soluciones o raíces, y buscando la ecuación que se obtiene de multiplicar $(x - r)(x - s)$ e igualar el resultado a cero. Los alumnos se darán cuenta pronto de que el segundo término de la ecuación es la suma de las raíces (con el signo cambiado), y el término independiente es el producto de las raíces. Con esta técnica es posible resolver muchísimas ecuaciones sin necesidad de fórmula: adivine dos númeres que sumados den el coeficiente intermedio y multiplicados den el término independiente. ¡Piense en un número verde y un número rojo!

También se darán cuenta los alumnos de que si uno de los dos números es cero, la ecuación se simplifica a una forma sin término independiente, y la solución es el coeficiente de x con el signo apropiado. Así no se pondrán a aplicar la fórmula de la cuadrática cuando en física, química o matemáticas necesiten resolver ecuaciones como:

$x^2 = rx$, o: $x^2 - rx = 0$, u otras variantes simbólicas.

También se puede hacer la exploración de comparar los resultados de multiplicar $(x - r)(x - s)$, $(x - r)(x + s)$, o de elevar al cuadrado expresiones como $(x - b - s)$, $(x - b + s)$, o de multiplicar estas dos expresiones entre sí, para ver si se llega al sistema de completar el cuadrado y derivar la fórmular usual.

APENDICE 1

Completar el cuadrado geométricamente. Por Carlos E. Vasco (Universidad Nacional)

Escribamos los tres tipos de ecuaciones cuadráticas así:

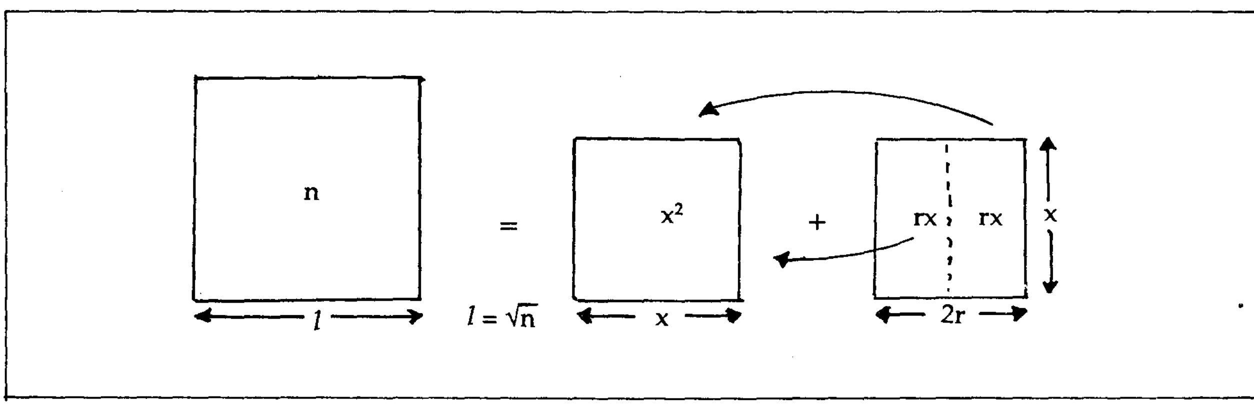
1. Querna: $x^2 = 2rx + n$

2. Nuquer: $n = x^2 + 2rx$

3. Requan: $2rx = x^2 + n$.

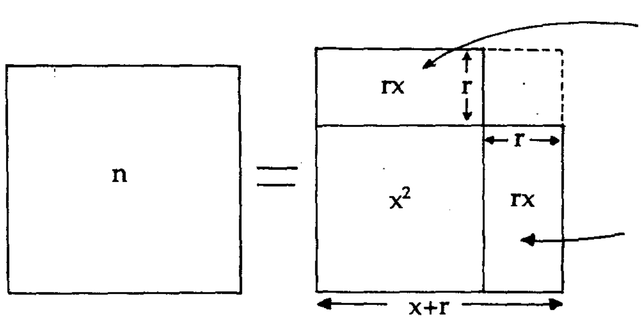
Pensemos en el problema de las fincas, y en la necesidad de comparar las áreas de las dos fincas que se van a intercambiar. Tenemos tres lotes: el cuadrado de lado x, una banda del mismo lado x pero de anchura 2r, y un pedazo de tierra de área fija, n, que podemos pintar como un cuadrado de lado igual a la raiz cuadrada de n, o en otra forma. El ancho de la faja de terreno lo escribimos 2r para que se vea fácilmente que si la dividimos a lo largo para que conserve el mismo lado x, el ancho de cada una de las dos bandas de la misma área que obtenemos va a ser r, y el área de cada una va a ser rx.

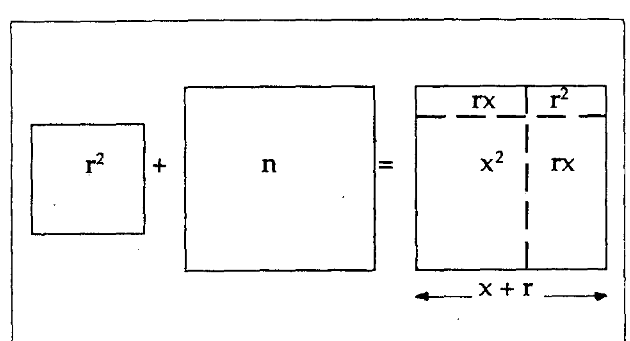
a) Empecemos por el segundo caso, Nuquer, que es un poco más claro. Tenemos un lote de área n, y lo queremos cambiar por un lote cuadrado de lado x más una banda del mismo lado x pero de ancho 2r:



Dividimos la banda de lado x y ancho 2r en dos banditas del mismo lado y de ancho r, y las pegamos una arriba y otra a la derecha del cuadrado de lado x; nos queda faltando un pedazo cuadrado de lado r para COMPLETAR EL CUADRADO de la derecha, que nos quedaría de lado (x + r):

Si cada uno de los dos vecinos nos presta por un momento un cuadrito de área r^2, vemos que el cuadro de área n, más un cuadrito de área r^2, va a tener la misma área que el cuadrado de lado $(x + r)$:





Por lo tanto, la ecuación original $n = x^2 + 2rx$ quedará satisfecha si se tiene la ecuación:

$$\begin{aligned} r^2 + n &= (x + r)^2 \\ &= x^2 + 2xr + r^2 \\ &= x^2 + 2rx + r^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lado $(x + r)$ será la raiz cuadrada de $r^2 + n$:
$x + r = \sqrt{r^2 + n}$, o sea que una solución es:

$x = -r + \sqrt{r^2 + n}.$

Ahora es solo un ejercicio simbólico interesante volver a escribir la ecuación Nuquer, pasar todos los términos al mismo lado, y obtener:

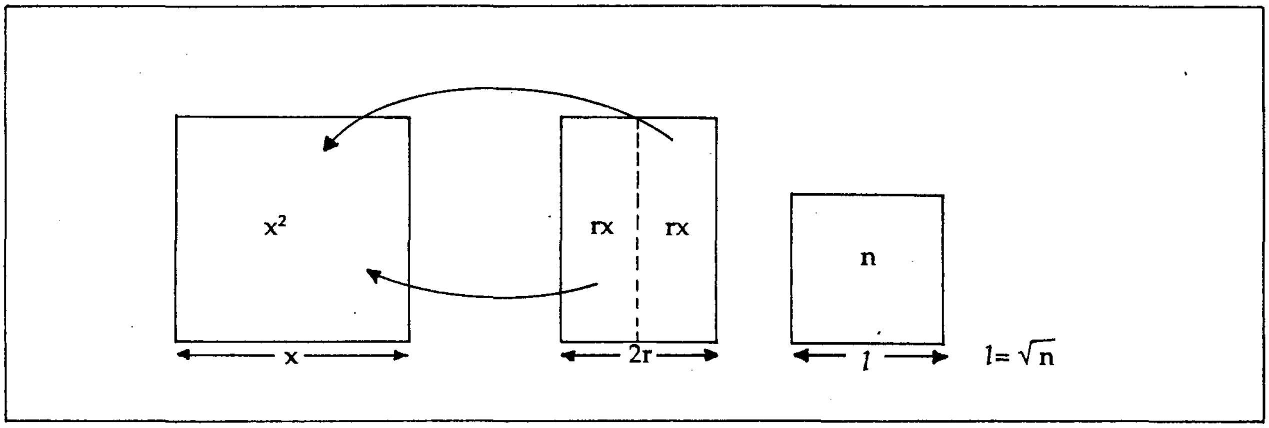
$x^2 + 2rx - n = 0$, y comparar con $ax^2 + bx + c = 0$. La solución que encontramos arriba podría entonces volverse a escribir para $a = 1$:

$x = -(b/2) + \sqrt{(b/2)^2 - c}.$

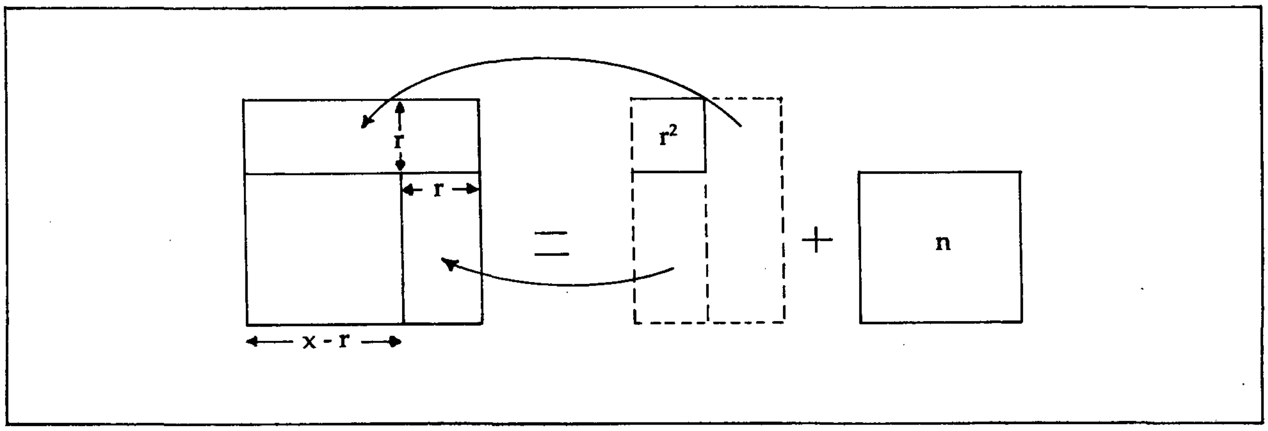
Para casos en que a sea un número distinto de uno:

$x = -(b/2a) + \sqrt{(b/2a)^2 - (c/a)}.$

b) Ensayemos ahora el primer caso, Querna. Tenemos un cuadrado de lado x, y queremos que tenga la misma área que la banda del mismo lado x pero de ancho 2r, más la del lote fijo de área n:



Ensayemos de nuevo a dividir la banda en dos banditas delgadas de ancho r, y compesarlas quitándoselas al cuadrado de la izquierda para que quede igual al de la derecha. Pero al tratar de tapar los lados, nos damos cuenta de que las bandas se recubren en una esquina, y por eso nos sobra un cuadrito de lado r, que recortamos para que no se repita:



Volvemos a tapar el cuadrado de lado x con las dos bandas, y vemos que el cuadrado de lado $(x - r)$ debe quedar igual al cuadrito de lado r más el de área n para que se cumpla la ecuación Querna:

Si $(x - r)^2 = r^2 + n$, entonces:

$x^2 - 2xr + r^2 = r^2 + n$, y:

$x^2 + r^2 = 2rx + n + r^2$, que era la ecuación Querna si se cancelan los r^2.

Por lo tanto, el lado del cuadrado pequeño, $(x - r)$, tiene que ser la raíz cuadrada de $r^2 + n$:

$x - r = \sqrt{r^2 + n}$, y así tenemos una solución:

$x = r + \sqrt{r^2 + n}.$

De nuevo hacemos el ejercicio simbólico de volver a escribir la ecuación Querna con todos los términos a la izquierda, y compararla con la usual:

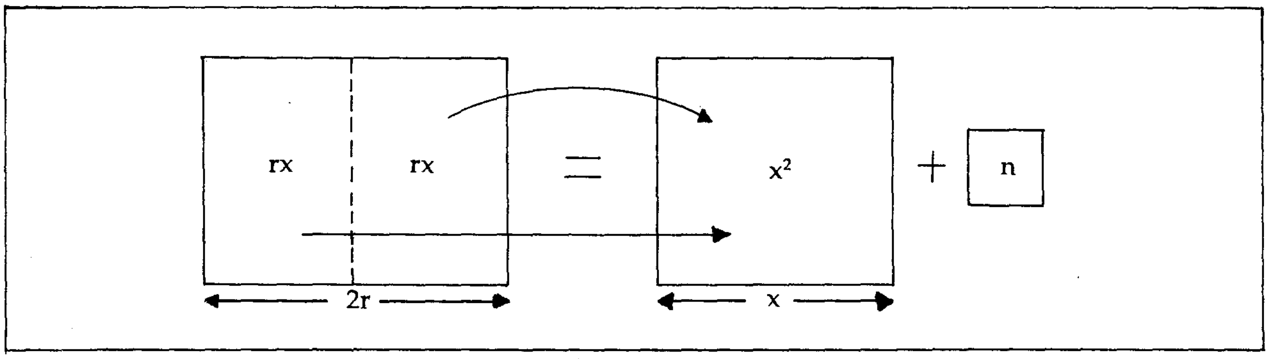
$x^2 - 2rx - n = 0$, comparada con: $ax^2 + bx + c = 0$, nos indica que para el caso en que $a = 1$:

$x = -(b/2) + \sqrt{(b/2)^2 - c}$.

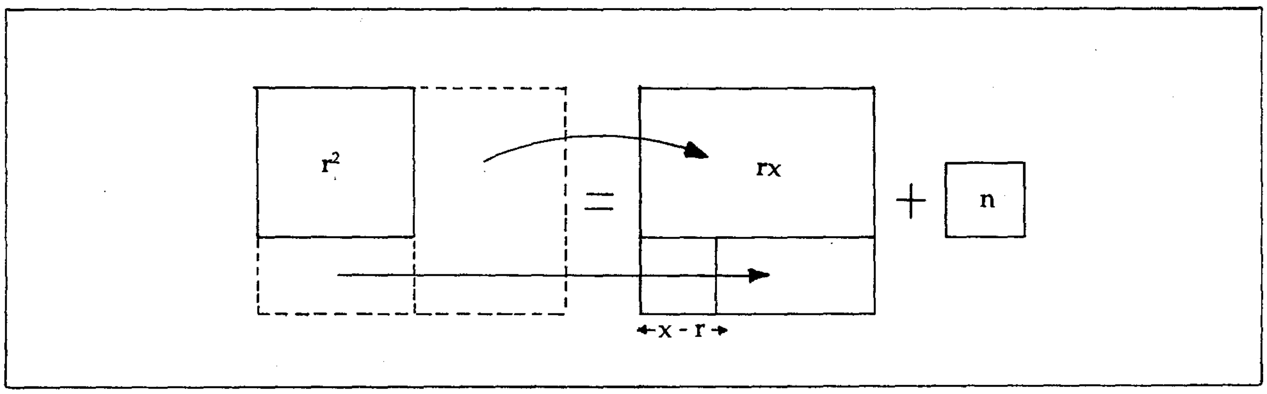
En general, cuando a es otro número distinto de uno

$x = -(b/2a) + \sqrt{(b/2a)^2 - (c/a)}$.

c) En el tercer caso, Requan, tenemos que lograr que la banda de lado x y ancho 2r tenga la misma área que el lote cuadrado de lado x, más el lote fijo de área n:



Ensayemos otra vez el truco de compensar el área del cuadro de la derecha tapándolo con las franjas de ancho r; como ya sabemos que se superponen en una esquina, recortamos el cuadrito de lado r para que no se repita:



Vemos que el cuadrito de lado r que quedó a la izquierda, debe tener la misma área que el cuadrito de lado $(x - r)$ más el de área n:

$r^2 = (x - r)^2 + n$, para que resulte:

$r^2 = x^2 - 2xr + r^2 + n$, o sea:

$2rx = x^2 + n$, que era la ecuación Requan.

Por lo tanto, $(x - r)^2 = r^2 - n$.

Así entendemos por qué no puede haber ninguna solución en áreas físicas y reales cuando el cuadro de área n es más grande que el cuadrito de lado r, pues por más pequeño que hagamos el cuadro de lado $(x - r)$ no podremos lograr que el área del cuadrito de la izquierda sea la misma que el de la derecha.

Para el caso Requan tenemos pues que garantizar que el cuadrito de lado r tenga área mayor que n, o sea que debemos tener:

$r^2 \geq n$, o lo que es lo mismo:

$r^2 - n \geq 0$.

En ese caso, es claro que la ecuación $(x - r)^2 = r^2 - n$ nos garantiza que el lado del cuadrado que necesitamos es la raiz cuadrada del área de la derecha:

$x - r = \sqrt{r^2 - n}$, y una solución es:

$x = r + \sqrt{r^2 - n}$.

Comparando la ecuación
$x^2 - 2rx + n = 0$, con $ax^2 + bx + c = 0$, vemos que para el caso en que $a = 1$:

$x = -(b/2) + \sqrt{(b/2)^2 - c}.$

En general, cuando a es otro número diferente de uno:

$x = -(b/2a) + \sqrt{(b/2a)^2 - (c/a)}.$

La solución es posible en áreas físicas y reales cuando

$(b/2a)^2 \geq (c/a)$, o lo que es lo mismo, cuando:

$(b/2a)^2 - (c/a) \geq 0$, o sea cuando:

$$\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4a^2c}{4a^3} \geq 0$$

que se simplifica a:

$b^2 - 4ac \geq 0.$

A esta expresión la llamamos el **discriminante** de la ecuación cuadrática general, pues discrimina cuándo se puede encontrar una solución física y real en áreas (cuando es positivo o cero), y cuando no (cuando es negativo). En este último caso, habría que ejercitar la imaginación para inventar otros números imaginarios que permitan "sacarle la raíz cuadrada" a los números negativos. Ni los babilonios, ni los egipcios, ni los árabes, ni los algebristas del renacimiento italiano se atrevieron a imaginar qué podría significar "sacarle la raíz cuadrada" a un número negativo. Solo al final del siglo XVI Bombelli se decidió a utilizar lo que él llamó cuatro clases de números:

"piú" o sea la unidad de los números positivos,
"meno" o sea la unidad de los números negativos,
"piú di meno", o sea la raíz cuadrada "positiva" de "meno", y
"meno di meno", o sea la raíz cuadrada "negativa" de "meno".

Esta ingeniosa idea equivale a lo que nosotros escribimos hoy día:

$+1, -1, +i, -i$, con las reglas:

$(+1)^2 = +1, (-1)^2 = +1, (+i)^2 = -1, (-i)^2 = -1.$

Así Bombelli podía utilizar solo coeficientes positivos para expresar todas las soluciones de los tres tipos de ecuaciones cuadráticas, aun en los casos que no tenían solución en áreas físicas y reales. Pero había que esperar hasta que Vieta, Descartes y Girardi popularizarán la notación de variables y coeficientes, para poner las tres ecuaciones en una sola fórmula:

$ax^2 + bx + c = 0,$

y todas las soluciones en la forma abreviada no rigurosa:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

APENDICE 2

Por Carlos E. Vasco (Universidad Nacional)

El método de partir, cuadrar y restar.

En 1971 una alumna de primer semestre de cierta universidad de Bogotá, al hacer el repaso de álgebra, inventó un procedimiento para resolver ecuaciones de segundo grado que es parecido al de Cardano, pero mucho más potente: el método de partir-cuadrar-y-restar.

Supongamos que nos dan la ecuación $x^2 - 6x + 5 = 0$. Se escribe la ecuación en el centro del papel, dejando un espacio encima para escribir un número. Se saca la mitad del número central (de aquí viene el nombre del método, que empieza con "partir", pues se parte en dos el número central) y se escribe esa mitad debajo del número central, pero con el signo cambiado:

$$\begin{array}{l} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \quad\ \ +3 \end{array}$$

Ese número se eleva al cuadrado y se escribe encima del tercero, o sea del término independiente. (A esta subida en diagonal del número que está en el centro hasta escribir su cuadrado encima del término independiente es a lo que se refiere la segunda palabra del nombre del método: "cuadrar"):

$$\begin{array}{l} \qquad\quad\ \ 9 \\ x^2 - 6x + 5 = 0 \\ \quad\ \ +3 \end{array}$$

Se resta el tercer coeficiente, o sea el término independiente, de ese número al cuadrado: se traza una raya debajo del término independiente y se excribe el resultado en la forma usual de la resta:

$$\begin{array}{rcl} & 9 & \\ x^2 - 6x + & \underline{5} & = 0 \\ 3 & 4 & \end{array}$$

Finalmente se coloca el signo de la raíz cuadrada o radical, y se escribe el poco preciso pero útil símbolo "±", que permite escribir dos expresiones en una sola línea. Así queda terminado el problema:

$$\begin{array}{rcl} & 9 & \\ x^2 - 6x + & \underline{5} & = 0 \\ 3 & \pm\sqrt{4}. & \end{array}$$

Con un poco de práctica en escribir estos números y símbolo, la solución es prácticamente inmediata: lo único que aparece escrito son las tres líneas que aparecen antes de este párrafo, pues las demás expresiones eran únicamente ayudas para indicar el procedimiento. Si el coeficiente intermedio es par, en cuatro o cinco segundos está resuelta la ecuación; si es impar, utilice la expansión:

$$(n + 1/2)^2 = n^2 + n + 1/4$$

para desarrollar un método muy rápido que sirve para elevar al cuadrado la mitad de un número impar, método que puede resumirse así: ene punto cinco al cuadrado es ene cuadrado más ene punto veinticinco. En cinco o seis segundos estará resuelta la ecuación, sin necesidad de papel borrador, de recordar la fórmula, de indentificar los coeficientes, de pensar en los cambios de signos, de calcular el discriminante, de dividir por dos al final, etc.

Las dificultades que pueden presentarse son:

1) Cuando el término independiente tiene signo menos, puede olvidarse que para restar -q hay que sumar q. Antes es más fácil: basta sumar en vez de restar.

2) Cuando el término independiente es mayor que el cuadrado que se escribió encima de la línea, puede olvidarse que el resultado es la diferencia del grande menos el pequeño, con signo negativo, y que las soluciones van a ser dos complejos conjungados.

3) Es posible olvidarse de escribir el símbolo de la raíz cuadrada.

Estas dificultades son muchísimo menores que las encontradas por los alumnos al sustituir en la fórmula usual.

ESste es un típico algoritmo, que uno puede aprender a utilizar con gran eficiencia, sin saber por qué funcionan ni qué es lo que está pasando. Pero lo interesante es que lo encontró una persona normal, sin dotes especiales para las matemáticas. Es fácil fijarse que "partir" es equivalente a escribir $-b/2$, y que "cuadrar y restar" son una forma de calcular la mitad del discriminante. Y así encontrar la relación de este método con el de la fórmula usual cuando $a = 1$.

De todas maneras, ni este ni ningún otro método se debería enseñar sin que los alumnos hayan tenido la oportunidad de explorar, variar, inventar algún método propio, comparar con los de los demás, etc.

Ojalá sus alumnos puedan inventar estos y otros procedimientos simbólicos para resolver las ecuaciones sin necesidad de enseñárselos, y se diviertan mucho en el proceso!

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Estan dadas en la lectura introductoria de esta unidad, en el desarrollo de los contenidos básicos y en los dos últimos apéndices.

Unidad III

GEOMETRIA

Introducción

En la propuesta del Ministerio de Educación la geometría intenta ser ante todo una exploración activa del espacio, de las maneras de representarlo en la imaginación y de plasmarlo en modelos tridimensionales y dibujos bidimensionales. Se trata de proceder a través de actividades que impliquen movimientos, imágenes y conceptos.

"La geometría es una exploración del espacio. La mejor manera de explorar este espacio consiste en desplazarse dentro de él y observar lo que sucede a los objetos de este espacio cuando se efectúa un cambio. Por cambio entendemos absolutamente cualquier tipo de transformación"*.

Sin embargo, la geometría en esta propuesta no se limita a una "geometría de las transformaciones" al estilo abstracto, comenzando por las reflexiones y por el concepto de grupo de transformaciones.

Comenzamos por juegos de deslizamientos y rotaciones de figuras recortadas en papel o cartulina, para llegar al concepto de composición de transformaciones a través de la aplicación sucesiva de ellas a una figura dada.

Se analiza la noción intuitiva de "figura simétrica" para llegar al concepto de simetría activa de una figura.

En esta unidad se introducen las simetrías activas y se retoman los conjuntos de traslaciones, de rotaciones, de reflexiones y de homotecias para analizar en cada uno de estos conjuntos las propiedades que cumple la operación de composición.

Con esto se espera que a medida que los alumnos vayan trabajando con diferentes sistemas geométricos, puedan identificar las semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que les permitan abstraer conceptos, hacer generalizaciones, como es el caso del concepto de grupo.

Se estudian las características de los polígonos regulares y se buscan procedimientos para hallar el perímetro y el área de cada uno de ellos.

Es conveniente tener en cuenta que los contenidos básicos se incluyen con el propósito de facilitarle al docente el repaso de los mismos, pero no para que se los exija a los alumnos con el mismo grado de profundidad y de simbolización, ni mucho menos de memoria. Se trata de aprovechar la abundancia de sugerencias para recrearse con la exploración sistemática del espacio, las figuras y las decoraciones geométricas y a través de esa geometría recreativa, recrear los conceptos más importantes de la geometría clásica y moderna.

Objetivos generales

— Reconocer las propiedades que cumple la composición de traslaciones en un mismo plano.

— Reconocer las propiedades que cumple la composición de rotaciones en un mismo plano y con un mismo centro.

*DIENES, Z.P. y GOLDING E.W. La Geometría a través de las transformaciones (Vol 1). Topología, Geometría Proyectiva y afín, pág. 47.

— Reconocer las propiedades que cumple la composición de reflexiones en un mismo plano.

— Reconocer simetrías activas.

— Reconocer las propiedades que cumple la composición de simetrías activas.

— Reconocer las propiedades que cumple la composición de homotecias en un mismo plano y con un mismo centro.

— Caracterizar algunos polígonos regulares.

— Hallar perímetros y áreas de polígonos.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

En un mismo plano:

45 Verificar que para cada traslación aplicada a figuras hay por lo menos una traslación que regresa dichas figuras a su posición inicial.

46 Verificar que si se acepta que hay una traslación neutra o idéntica, la composición de dos traslaciones es siempre una traslación.

47 Comprobar que la composición de traslaciones cumple la propiedad asociativa.

48 Verificar que al efectuar la composición de dos traslaciones da lo mismo hacer una primero y después la otra que hacerlas en el otro orden.

CONTENIDOS BASICOS

Una traslación de una figura en el plano es un deslizamiento que consiste en empujarla simplemente desde una posición a otra sin dejarla girar al mismo tiempo.

Una traslación está determinada por tres elementos: la magnitud, la dirección y el sentido. Estos elementos se pueden representar mediante un segmento orientado, provisto de punta de flecha, llamado a veces "vector", porque este tipo de flechas sirve para representar operadores y magnitudes vectoriales (que son los verdaderos vectores).

Si se traza una flecha o "vector" para representar una traslación esa flecha establece:

a) La dirección de la traslación, con la de la recta a la cual pertenece.

b) El sentido de la traslación con la punta de la flecha.

c) La magnitud de la traslación, con la longitud del segmento flechado.

Cuando a una figura plana, por ejemplo a un polígono se le aplican dos o más traslaciones sucesivas, se dice que se le ha efectuado una composición de traslaciones.

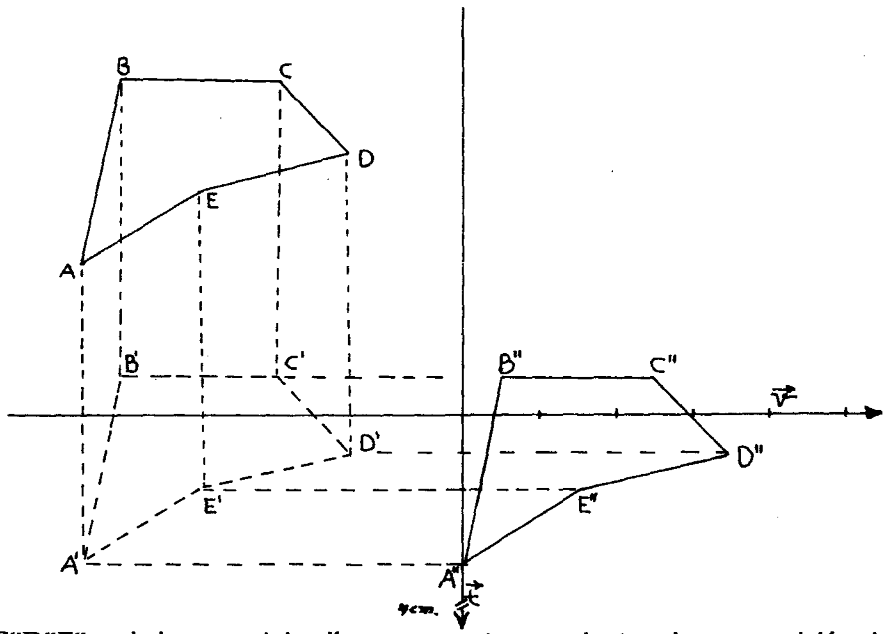
Veamos:

Consideramos el polígono ABCDE y las traslaciones T y V definidas como sigue:

T: Traslación determinada por el vector $\vec{t}$

V: Traslación determinada por el vector $\vec{v}$

Apliquemos al polígono ABCDE primero la traslación T y luego la traslación V.



El polígono A″B″C″D″E″ es la imagen del polígono ABCDE mediante la composición de las traslaciones T y V. Se le aplicó V después de aplicar T, lo cual se simboliza así:

V (T (ABCDE)) = A″B″C″D″E″ o así
(V ∘ T) (ABCDE) = A″B″C″D″E″

El signo "∘" indica la composición y se lee "después de" o "compuesta con"; esto significa que se aplica V después de T; el orden de ejecución es el opuesto al orden de escritura: se escribe V ∘ T pero se efectúa primero T y después V.

$$(V \underset{\text{después de}}{\underset{\uparrow}{\circ}} T)\ (ABCDE) = V\,(\underbrace{T(ABCDE)}_{\text{primero T}}) = \underbrace{V\,(A'B'C'D'E')}_{\text{y después V}}$$

= A″B″C″D″E″

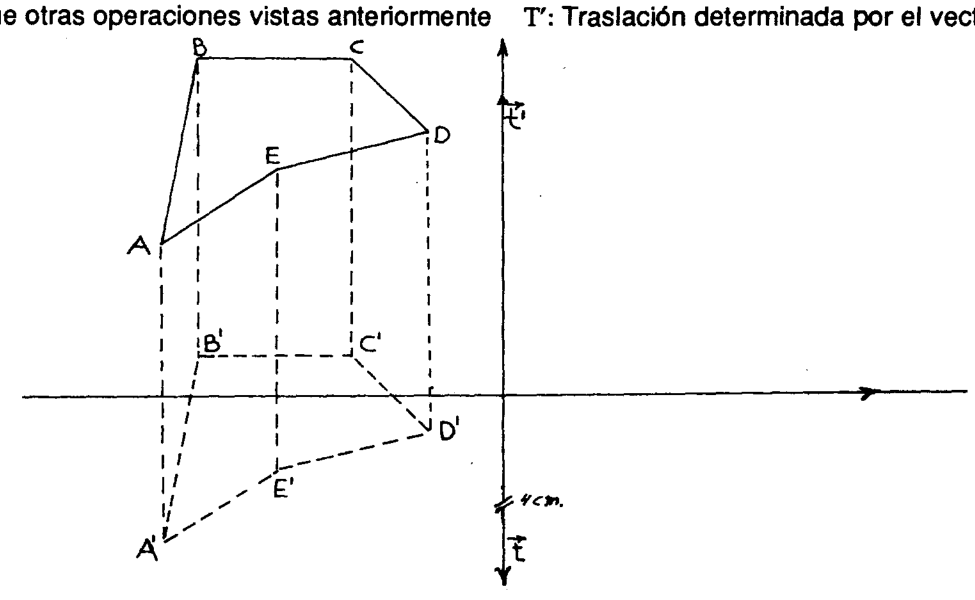
Al igual que otras operaciones vistas anteriormente en otros conjuntos, la composición de traslaciones cumple algunas propiedades. Veámoslas.

— Existencia de una traslación inversa a una traslación dada:

(Propiedad invertiva de la composición de traslaciones). Cuando a un polígono se le aplica una traslación, siempre existe otra traslación que la devuelve a su posición inicial. A dicha traslación la llamamos "Traslación inversa".

Al polígono ABCDE se le aplicó la traslación T. Para devolverlo a su posición inicial le aplicamos una traslación que tiene la misma magnitud y dirección de T pero con sentido contrario de T. Llamemos T′ a esta traslación.

T′: Traslación determinada por el vector $\vec{t'}$



$\vec{t'}$ es el vector inverso del vector $\vec{t}$. También se llama el vector opuesto a $\vec{t}$, $\vec{t'}$ u op $(\vec{t})$, o el negativo de $\vec{t}$, $-\vec{t}$

T (ABCDE) = A'B'C'D'E'

T' (A'B'C'D'E') = ABCDE

es decir

T' (T (ABCDE)) = ABCDE

(T' ∘ T) (ABCDE) = ABCDE

T' es la traslación inversa de T, o sea la traslación opuesta a T.
¿Cuál será la traslación opuesta a T'?

— Existencia de una "traslación neutra" o "idéntica": **Propiedad Modulativa de la composición de traslaciones, o propiedad idéntica**.

Después de aplicar a un polígono la composición de una traslación y su inversa se obtiene que el polígono vuelve a su posición inicial.

Si nos fijamos solo en la posición inicial y en la posición final del polígono después de la composición de las dos traslaciones, el polígono conserva la posición inicial, es decir parece que no se hubiera movido; podemos, pues, inventar una traslación, que no cambia de posición al polígono, que llamamos "traslación idéntica" o "traslación neutra".

Simbólicemos con I esta "traslación" que no hace nada:

I (ABCDE) = ABCDE

— Existencia de una traslación única que produce el mismo efecto que aplicar sucesivamente dos traslaciones dadas: **Propiedad Clausurativa de la composición de traslaciones.**

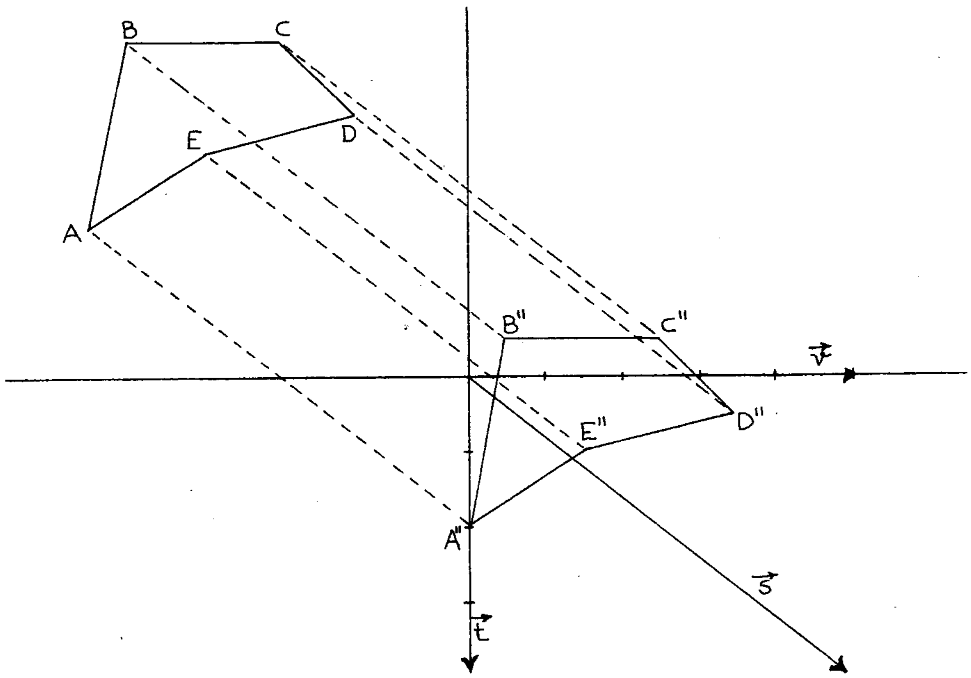
La composición de dos traslaciones siempre da como resultado otra traslación.

El polígono A"B"C"D"E" es la imagen del polígono ABCDE mediante la composición de las traslaciones T y V.

(T ∘ V) (ABCDE) = A"B"C"D"E"

El polígono A"B"C"D"E" también se puede obtener como imagen de ABCDE mediante una sola traslación.

¿Cuál es esa traslación?



Es la traslación S determinada por el vector $\vec{s}$

S (ABCDE) = A"B"C"D"E"

Es decir (T ∘ V) (ABCDE) = S (ABCDE)

¿Cuál es la traslación que resulta de la composición de la traslación T' después de V?

¿Cuál es la traslación que resulta de aplicar sucesivamente dos veces la traslación T'?

¿Cuál es la traslación que resulta de aplicar sucesivamente dos veces la traslación V?

¿Cuál es la traslación que resulta de aplicar primero la traslación T y luego T′?

¿Cuál es la traslación que resulta de aplicar primero la traslación V′ y después V?

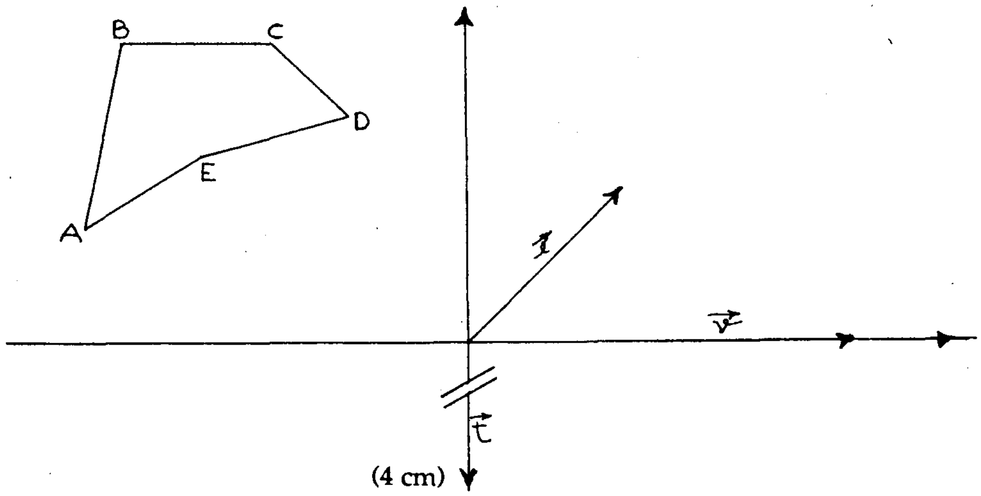
— Posibilidad de efectuar la composición de tres traslaciones con dos procedimientos diferentes;

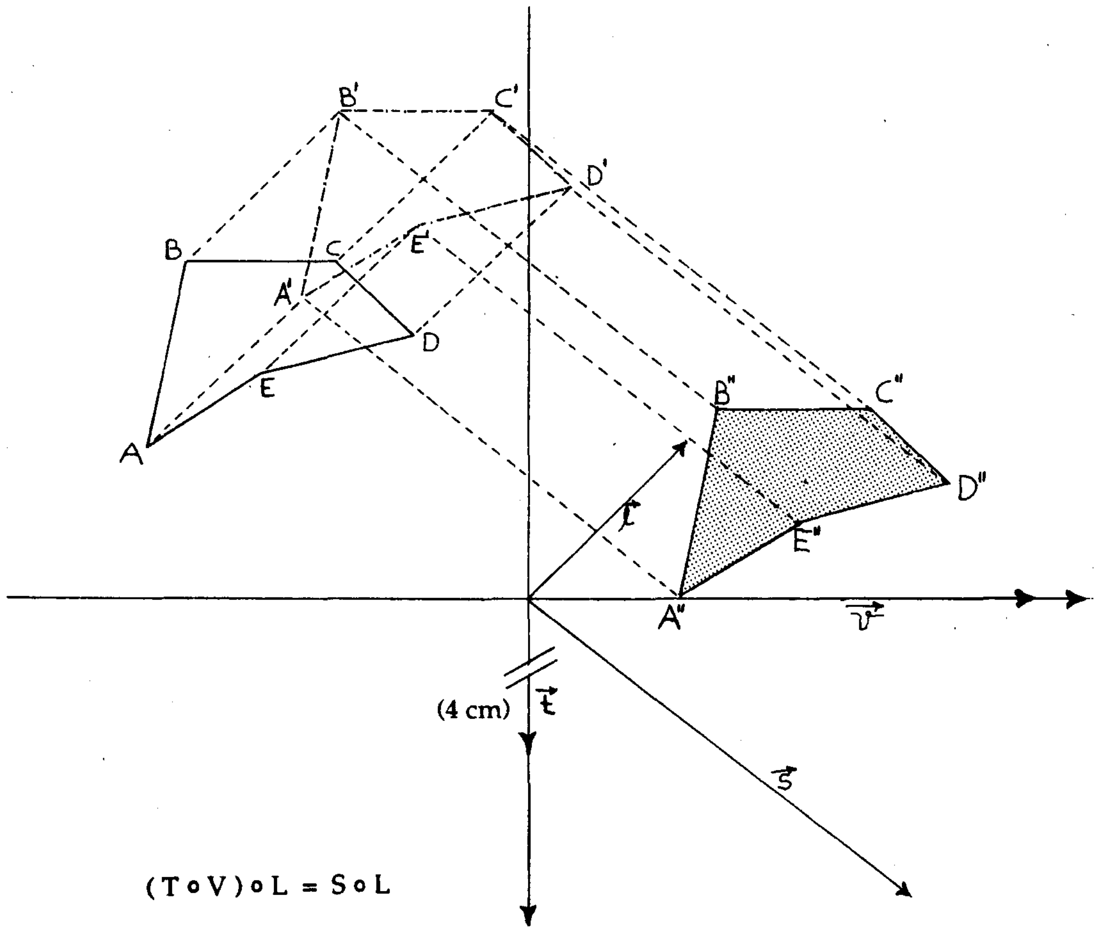
Propiedad Asociativa de la composición de traslaciones.

De la composición de tres traslaciones se obtiene el mismo resultado de maneras diferentes.

Veamos primero un ejemplo:

Consideremos las traslaciones T y V definidas anteriormente y además la traslación L (determinada por el vector $\vec{l}$)





(T o V) o L = S o L

Apliquemos al polígono ABCDE estas tres traslaciones así:

Primero la traslación L, luego la V y después la T. ¿Qué pasa?

El resultado se puede hallar de dos maneras:

a) Aplicar $T \circ V$ después de aplicar L, es decir primero L y después la traslación $S = T \circ V$ que ya habíamos encontrado:

$$S \circ L = (T \circ V) \circ L$$

Esta agrupación equivale a hacer un cálculo premeditado para reducir esas tres traslaciones a dos operaciones.

Calculamos premeditadamente el resultado de $T \circ V$ y lo aplicamos después de L.

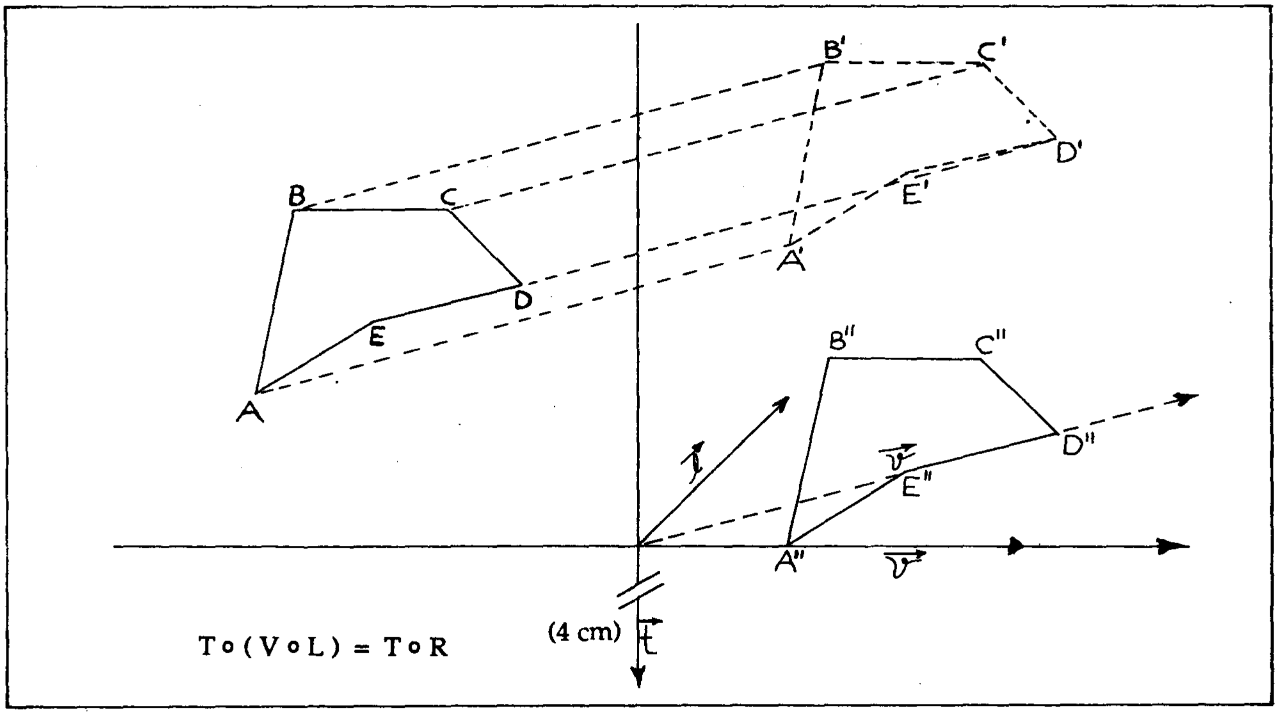
Así tenemos:

$[(T \circ V) \circ L]$ (ABCDE) = $T \circ V$ [L (ABCDE)] = $(T \circ V)$ (A'B'C'D'E') = A"B"C"D"E"

(Se puede comparar con $S \circ L$ (ABCDE), en donde $S = (T \circ V)$)

b) Aplicar T después de aplicar $(V \circ L)$ es decir $T \circ (V \circ L)$

En este caso calculamos premeditamente el resultado de $V \circ L$, lo aplicamos y luego aplicamos T.



Así tenemos $[T \circ (V \circ L)]$ (ABCDE) = T $[(V \circ L)]$ (ABCDE) = T [A'B'C'D'E'] = A"B"C"D"E"

(Si llamamos R a $V \circ L$, estaríamos aplicando $T \circ R$ y así podríamos comparar $S \circ L$ con $T \circ R$).

De las dos maneras se obtuvo el mismo resultado es decir, el mismo polígono A"B"C"D"E". Esto nos permite escribir la siguiente igualdad:

$$(T \circ V) \circ L = T \circ (V \circ L)$$
$$S \circ L = T \circ R, \text{ con } S = T \circ V \text{ y } R = V \circ L.$$

Pues en general, si se aplican sucesivamente tres traslaciones P, S y T, de primera la P, después de segunda la S y luego de tercera la T, se obtiene el mismo resultado si se aplica primero la P y luego el resultado $A = T \circ S$, o si se aplica primero el resultado $B = S \circ P$ y luego la T: $(T \circ S) \circ P = T \circ (S \circ P)$.

La composición en el conjunto de las traslaciones en un mismo plano cumple las propiedades invertiva, clausurativa, idéntica y asociativa. Por esta razón se dice que "el conjunto de las traslaciones en un mismo plano con la operación composición tiene estructura de grupo". Además de estas propiedades, también se verifica que el efectuar la composición de dos traslaciones siempre se obtiene el mismo resultado aunque se tomen las traslaciones en distinto orden. Esta propiedad es conocida como la propiedad conmutativa.

Si M y N son dos traslaciones cualesquiera, siempre se cumple que M ∘ N = N ∘ M
Verifica esta propiedad para las traslaciones T y V definidas anteriormente.

Por cumplir la propiedad conmutativa, además de las propiedades anteriores se dice que el grupo de traslaciones con la composición es un **grupo conmutativo o abeliano.** Pero no todo grupo es conmutativo.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El tema de los deslizamientos ha venido tratándose en 6º y 7º grados. Conviene consultar estos programas para ver la secuencia que se desea seguir, y para recordar temas tales como: las características de una traslación, como hallar una traslación conociendo un polígono y su imagen, y otros que se supone deben conocer los alumnos para continuar con lo propuesto en este grado.

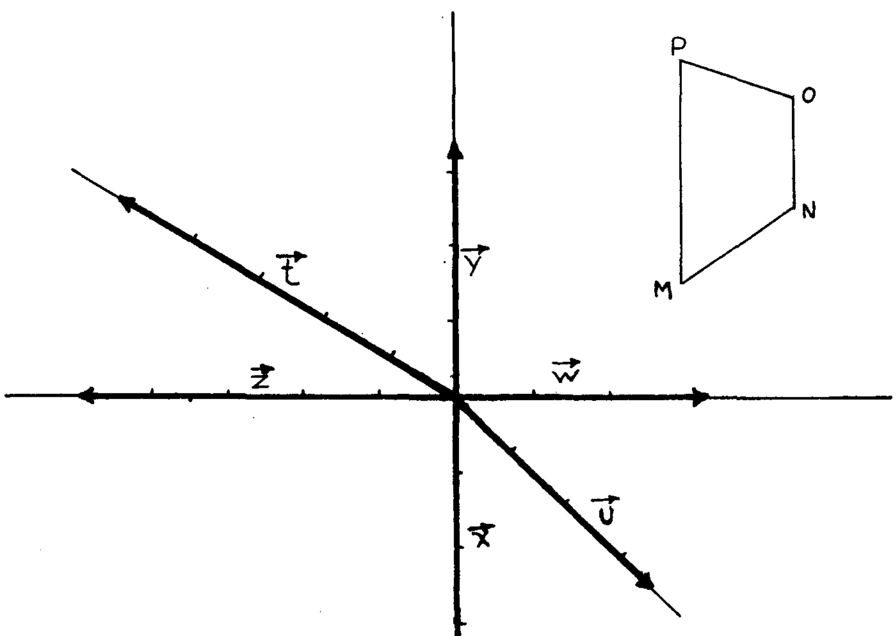
Con estos objetivos se pretende que los alumnos vayan descubriendo a través de la práctica las propiedades de la composición de traslaciones y así mismo vayan descubriendo también la estructura de grupo. No se desea presentar en una forma terminada y formalizada el concepto de estructura de grupo.

"Se entiende que la estructura de grupo no se obtiene a partir de la experiencia por una simple abstracción a partir del objeto, sino que se la descubre en el transcurso de las experiencias, es decir de las acciones ejercidas sobre el objeto, pero por abstracción constructiva a partir de las coordinaciones de la acción". (Tomado de: Introducción a la Epistemología Genética1. El pensamiento matemático Jean Piaget. Editorial Paidos. Pág. 180).

Conviene realizar un número suficiente de ejercicios para descubrir cada propiedad hasta que los mismos alumnos sean los que la enuncien.

Para verificar que la composición de dos traslaciones es una traslación conviene hacer variados ejercicios, como los siguientes:

— Dado el polígono MNOP y las traslaciones X, U, W, T, Y y Z determinadas respectivamente por los vectores $\vec{x}, \vec{u}, \vec{w}, \vec{t}, \vec{y}$, y $\vec{z}$.



Para cada uno de los siguientes ejercicios:

a) Hallar la traslación que reemplazaría la composición de las dos traslaciones dadas.

1. (W∘W)
2. (W∘Z)
3. (Y∘Y)
4. (X∘Y)
5. (W∘X)
6. (Y∘Z)
7. (Z∘T)
8. (U∘X)
9. (T∘U)
10. (Z∘U)

b). Para cada uno de los casos anteriores:

Conociendo los dos vectores que determinan las dos traslaciones entre las cuales se ha efectuado la composición, ¿Cómo se puede encontrar el vector que determina la traslación resultante?

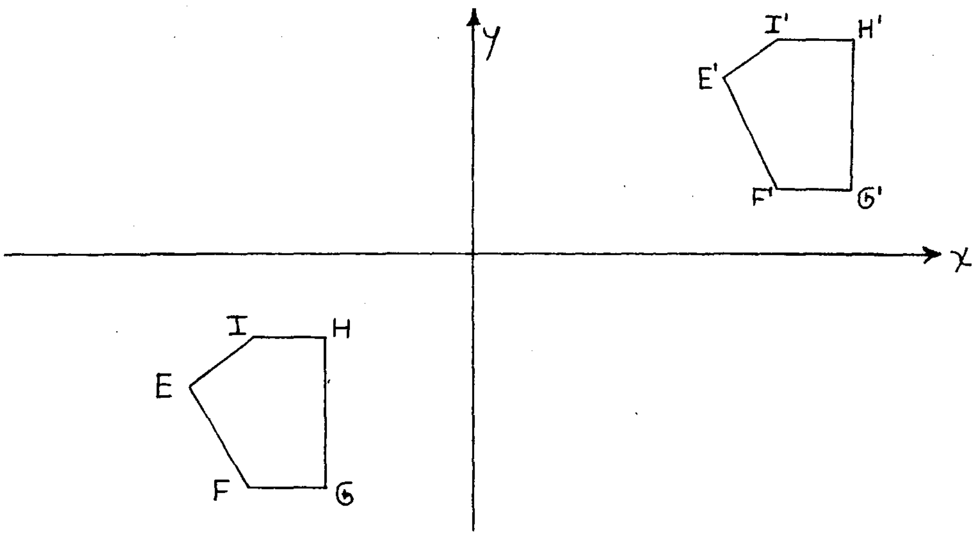
c) Hallar (Y∘W∘X), (Z∘X∘T), (W∘X∘Y) de tres maneras diferentes.

d) Hallar la traslación inversa de cada una de las traslaciones dadas.

¿Qué relación hay entre un vector que determina una traslación y el vector que determina la traslación inversa?

Mencione dos traslaciones tales que al componerlas dé la traslación idéntica.

e) Observe el siguiente dibujo.



El polígono E'F'G'H'I' es la imagen del polígono EFGHI mediante la composición de dos traslaciones. ¿Cuáles son esas traslaciones? ¿Son únicas esas dos traslaciones?

OBJETIVOS ESPECIFICOS

En un mismo plano y con un mismo centro:

49 Verificar que para cada rotación aplicada a figuras, hay por lo menos otra rotación que regresa dichas figuras a su posición inicial.

50 Verificar que si se acepta que hay una rotación idéntica o neutra, la composición de dos rotaciones es siempre una rotación.

51 Comprobar que la composición de rotaciones cumple la propiedad asociativa.

52 Verificar que al efectuar la composición de dos rotaciones, da lo mismo hacer una primero y después la otra, que hacerlas en el otro orden.

CONTENIDOS BASICOS

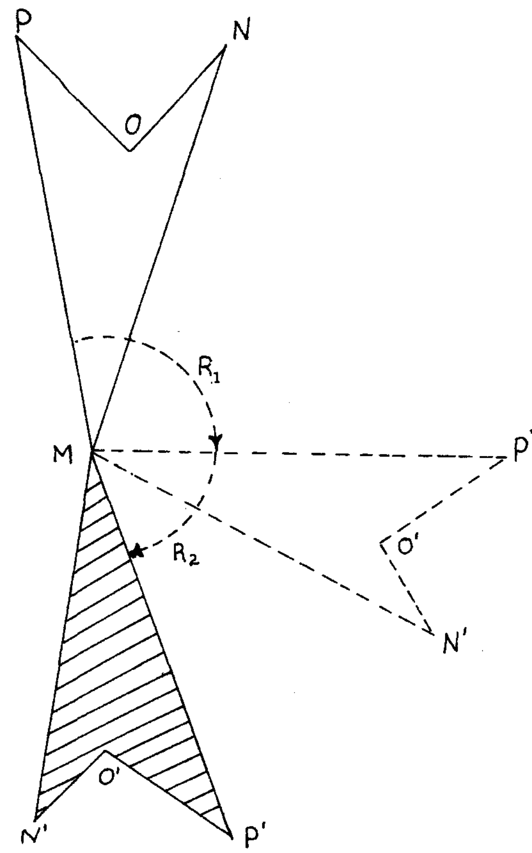
Una rotación de una figura en el plano es un tipo de deslizamiento que consiste en girar la figura alrededor de un punto fijo que se llama "centro o eje de rotación". El centro de rotación puede estar dentro, en el borde o fuera de la figura.

Cuando se hacen varias rotaciones sucesivas a un mismo polígono se dice que se ha hecho una composición de rotaciones.

Apliquemos al polígono MNOP primero la rotación R_1 y luego la rotación R_2

R_1: Rotación de 100° en el sentido de las manecillas del reloj con centro de rotación en M.

R_2: Rotación de 70° en el sentido de las manecillas del reloj con centro de rotación en M.



El polígono MN″O″P″ es la imagen del polígono MNOP mediante la composición de dos rotaciones. Se le aplicó R_2 después de aplicar R_1, lo cual se simboliza así:

$R_2 (R_1 (MNOP)) = MN''O''P''$ o así: $(R_2 \circ R_1)\ (MNOP) = MN''O''P''$

El signo "o" indica la composición y se lee "R_2 después de R_1" o "R_2 compuesta con R_1", y significa que se aplica R_2 después de aplicar R_1, o que se aplica primero R_1 y luego R_2. (El orden de ejecución es el opuesto al orden de escritura).

$(R_2 \underset{\uparrow}{\circ} R_1)\ (MNOP) = R_2 (R_1\ (MNOP) = MN''O''P''$

después de

— Cuando a un polígono se le aplica una rotación, siempre existe una rotación que lo devuelve a su posición inicial. A dicha rotación la llamamos rotación inversa u opuesta.

Al polígono MNOP se le aplicó la rotación R_1. Para devolverlo a su posición inicial, le aplicamos la rotación R'_1 que tiene el mismo centro de la rotación R_1 y la misma amplitud, pero con sentido contrario al de R_1

R'_1 : Rotación de 100° con centro en M en sentido contrario a las manecillas del reloj.

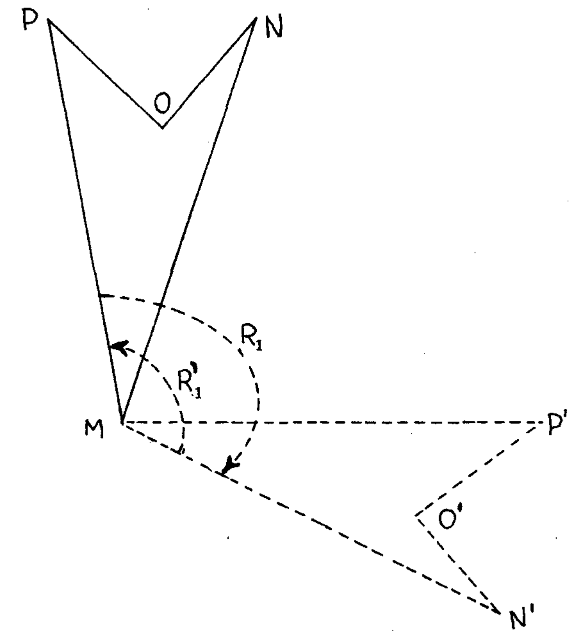
$R_1\ (MNOP) = MN'O'P'$
$R'_1\ (MN'O'P') = MNOP$

Es decir, $R'_1\ (R_1\ (MNOP)\ ) = MNOP$
$(R'_1 \circ R_1)\ (MNOP) = MNOP$

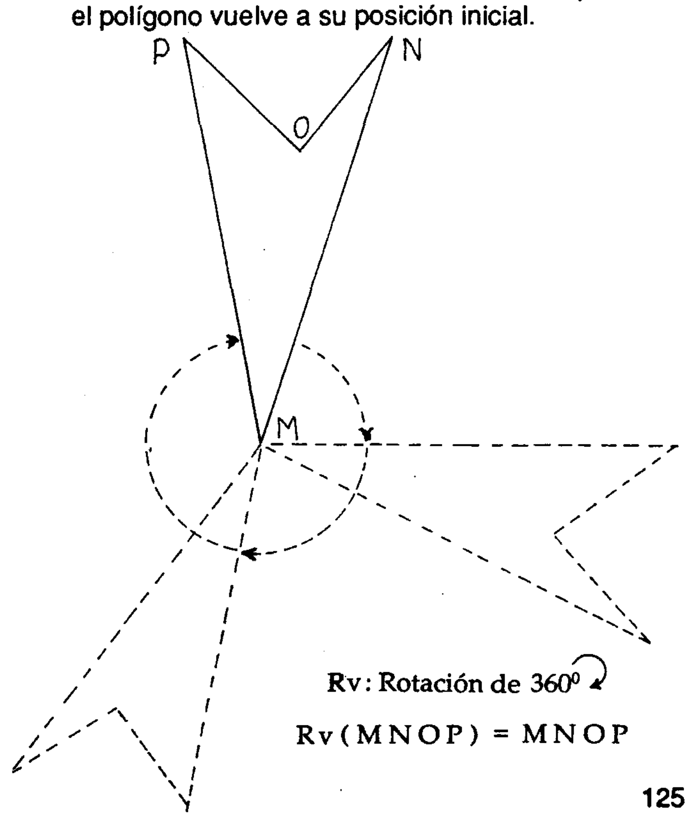
R'_1 es la rotación inversa de R_1, también se llama la rotación opuesta a R_1.

Después de aplicar a un polígono la composición de una rotación y su inversa se obtiene que el polígono vuelve a su posición inicial.

Cuando a un polígono se le aplica una rotación de 360° en el sentido de las manecillas del reloj también el polígono vuelve a su posición inicial.



$(R'_1 \circ R_1)\ \ (MNOP) = MNOP$



Rv: Rotación de 360°

$Rv(MNOP) = MNOP$

Lo mismo sucede si se la aplica una rotación de 360° en el sentido contrario a las manecillas del reloj. R_u: Rotación de 360° R_u (MNOP) = MNOP

Lo mismo sucede si inventamos una "rotación de o°" que no rota el polígono R_o : Rotación de 0°. R_o, (MNOP) = MNOP

Si en los casos anteriores nos olvidamos de la parte activa y solo nos fijamos en la posición inicial y en la final después de la rotación, o de la composición de las dos rotaciones opuestas, se observa que el polígono no se ha movido, es decir, que se conserva la posición inicial del polígono.

Consideremos como equivalentes todas las rotaciones que produzcan el mismo efecto en los polígonos u otras figuras.

Vamos a llamar rotación idéntica aquella rotación que no cambia de posición a un polígono. La notaremos Ro sin fijarnos en las posiciones intermedias, sino en el hecho de que al fin de cuentas no se altera la posición del polígono.

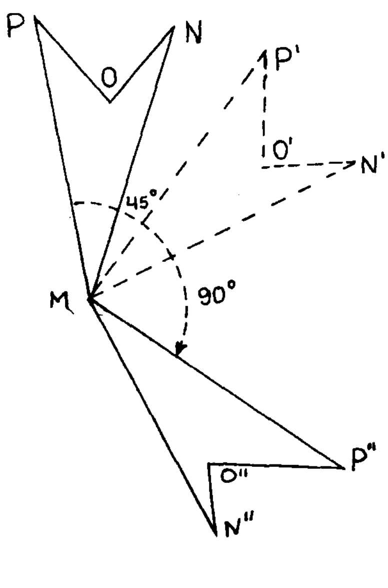
— La composición de dos rotaciones con un mismo centro y en un mismo plano siempre se puede reemplazar por una sola rotación.

Veamos: sean R y S dos rotaciones definidas como sigue:

R: Rotación de 45° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en M.

S: Rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en M.

Apliquemos al polígono MNOP la rotación R después de la rotación S, o sea R o S.



(RoS) (MNOP) = MN"O"P"

Se ha obtenido el polígono MN"O"P" como resultado de haber aplicado la composición de dos rotaciones al polígono MNOP.

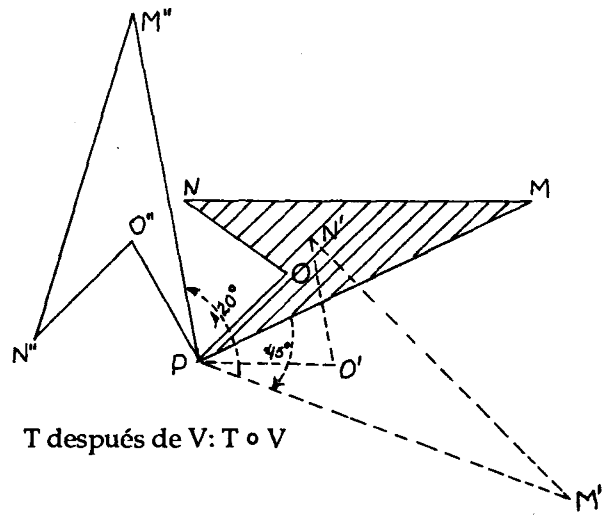
El mismo polígono MN"O"P" también se puede obtener como el resultado de aplicar una sola rotación a MNOP. ¿Cuál rotación?

Apliquemos ahora el polígono MNOP la composición de las siguientes dos rotaciones:

T: Rotación de 120° en sentido contrario a las manecillas del reloj con centro en P.

V: Rotación de 45° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en P.

Apliquemos T o V



T después de V: T o V

(ToV) (MNOP) = T (V(MNOP)) =
T (M'N'O'P') = M"N"O"P"

Este polígono se puede obtener aplicándole una sola rotación a MNOP. ¿Cuál es esa rotación?

Consideremos de nuevo solo rotaciones con un mismo centro y en el mismo plano:

— Veamos ahora cómo efectuar la composición de tres rotaciones. Consideremos el polígono MNOP y R*, S* y T* tres rotaciones definidas de la siguiente manera:

R*: Rotación de 70° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en M.

S*: Rotación de 30° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en M.

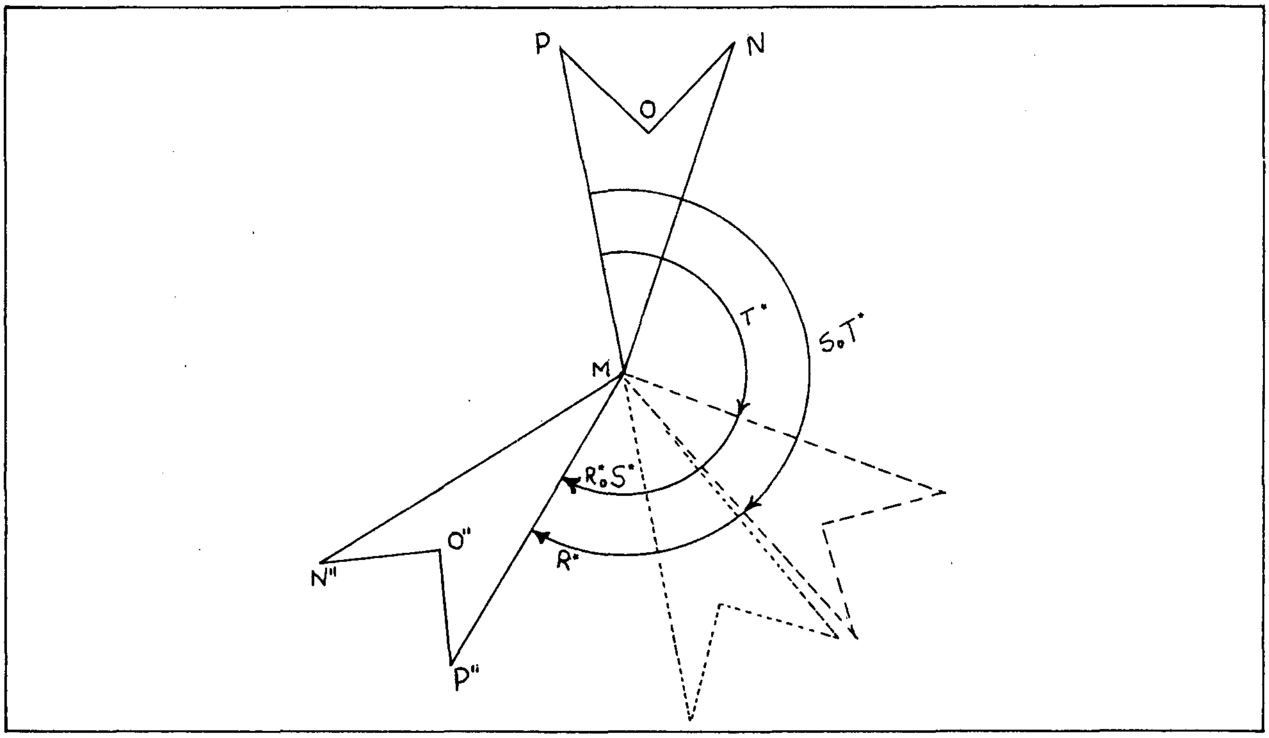
T^*: Rotación de 120° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en M.

Apliquemos $R^* \circ S^* \circ T^*$. Para hallar el resultado se puede efectuar $R^* \circ S^*$ después de T^*, o sea aplicar $(R^* \circ S^*) \circ T^*$ o aplicar R^* después de $S^* \circ T^*$ o sea $R^* \circ (S^* \circ T^*)$.

En cada caso la agrupación equivale a hacer un cálculo premeditado de la composición de dos de ellas para reducir la aplicación de las tres rotaciones a efectuar solo dos operaciones.

Si llamamos A^* al resultado $R^* \circ S^*$ y B^* al resultado $S^* \circ T^*$, podemos comprobar que $A^* \circ T^* = R^* \circ B^*$, o sea:

$(R^* \circ S^* \circ T^*)$ (MNOP) = [$(R^* \circ S^*) \circ T^*$] (MNOP) = [$R^* \circ (S^* \circ T^*)$] (MNOP)



De dos maneras diferentes se llegó al mismo resultado, al que se había llegado por la aplicación sucesiva de las tres rotaciones. Esto nos permite escribir la siguiente igualdad para cualquier terna de rotaciones:

$$(R^* \circ S^*) \circ T^* = R^* \circ (S^* \circ T^*)$$

En general, si se aplican sucesivamente tres rotaciones P, S y T, de primera la P, después de segunda la S y luego de tercera la T, se obtiene el mismo resultado si se aplica primero la P y luego el resultado de $A = T \circ S$, o si se aplica primero el resultado $B = S \circ P$ y luego la T: $(T \circ S) \circ P = T \circ (S \circ P)$.

Esta es conocida como la propiedad asociativa de la composición de rotaciones con un mismo centro y en un mismo plano.

La composición de dos rotaciones también cumple la propiedad conmutativa.
Esta propiedad dice que el resultado de efectuar la composición de dos rotaciones siempre es el mismo, aunque se tomen las rotaciones en distinto orden.

Si R y S son dos rotaciones con el mismo centro y en el mismo plano siempre se cumple que:

$$R \circ S = S \circ R$$

Verifica esta propiedad para las rotaciones S^* y T^* dadas anteriormente.

La composición en el conjunto de las rotaciones en un mismo plano y con un mismo centro cumple las propiedades invertiva, clausurativa, idéntica y asociativa. Por esta razón se dice que este conjunto con la operación "composición" tiene "estructura de grupo".

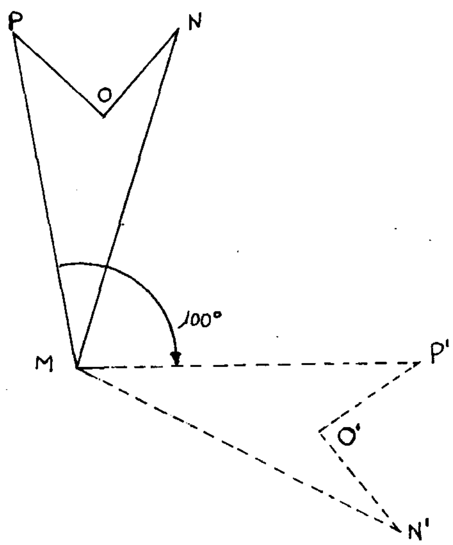
Además de estas propiedades, también se cumple la conmutativa. Por esto se dice que cada uno de esos grupos de rotaciones con la composición es un grupo conmutativo o abeliano. Pero no todo grupo es conmutativo. Ensáyase con rotaciones en el espacio tridimensional.

Con estos objetivos se pretende que los alumnos descubran las propiedades de la composición de rotaciones a través de las acciones ejercidas sobre los polígonos y mediante la abstracción constructiva a partir de las coordinaciones de estas acciones. Por esto es conveniente que recorten en cartulina los polígonos y les apliquen las rotaciones respectivas.

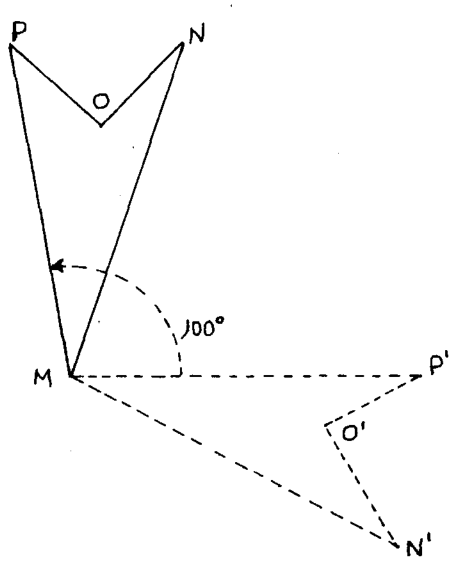
Con estas actividades el alumno tendrá otro sistema concreto que posteriormente va a ayudarle a formar el concepto de estructura de grupo. En este y en otros sistemas concretos el alumno irá buscando lo común en su funcionamiento y es entonces cuando construirá el concepto de grupo.

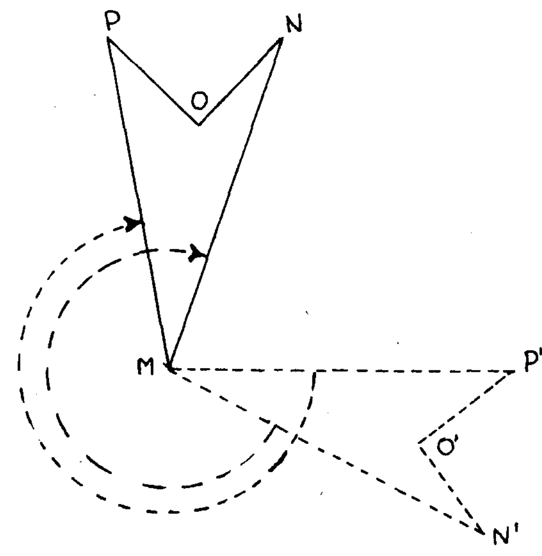
En el desarrollo de las actividades conviene tener en cuenta las siguientes observaciones:

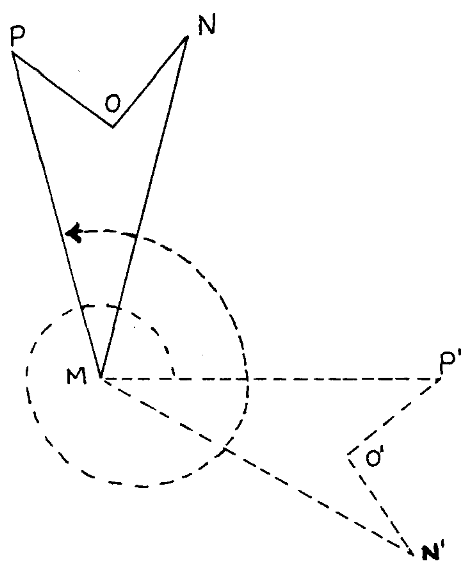
— Al buscar la rotación inversa de una rotación dada es posible que los alumnos encuentren varias, pues se trata de buscar aquella rotación que devuelva al polígono a su posición inicial. Veámoslo. ¿Qué rotación coloca al polígono MN'O'P' en su posición inicial?

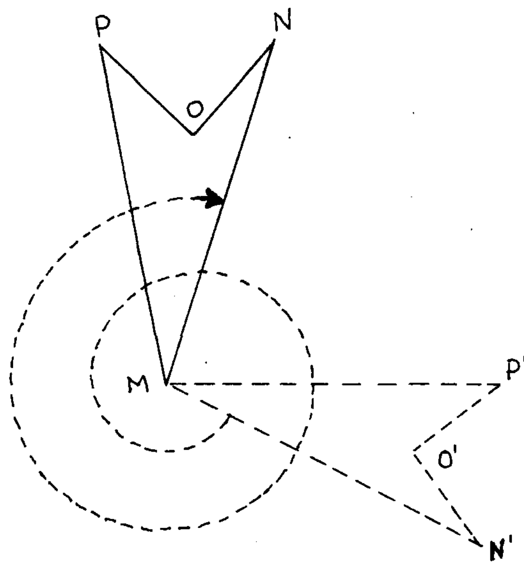


Pueden encontrar algunas como las siguientes:









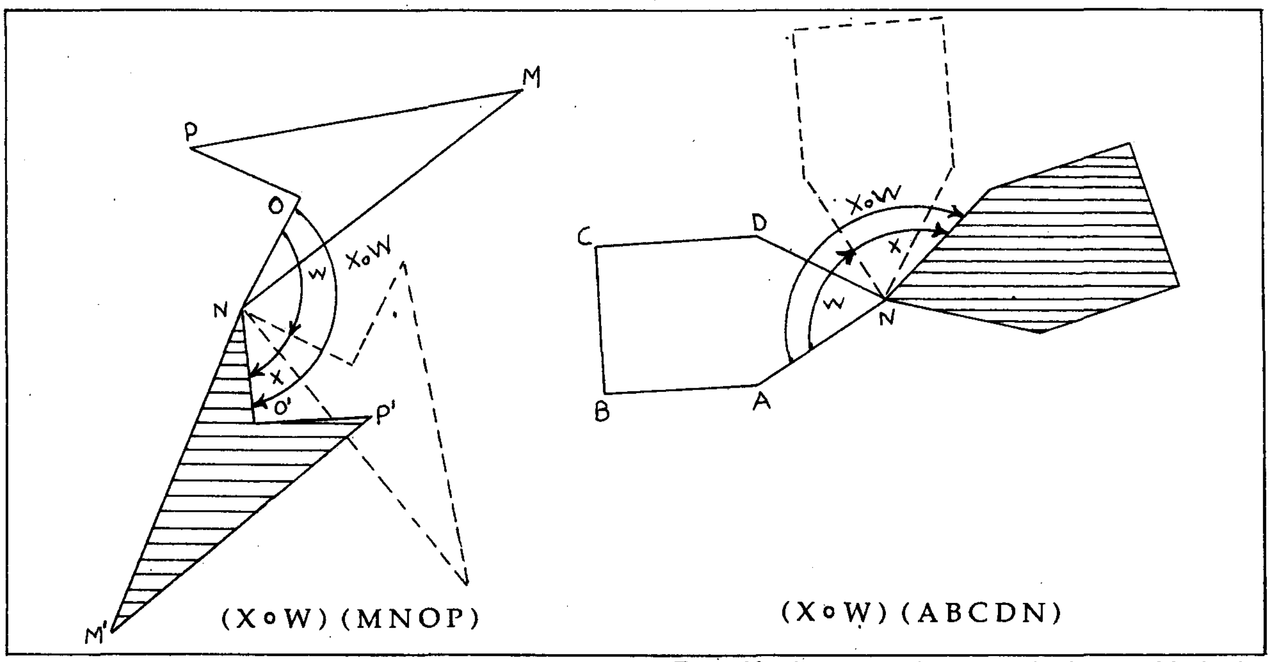
Los alumnos elegirán cuál es la más conveniente.

Al efectuar la composición de dos rotaciones y encontrar la rotación que reemplazaría esas dos rotaciones es conveniente que los alumnos apliquen la misma composición de rotaciones a polígonos diferentes para que caigan en la cuenta de que la composición de dos rotaciones cualesquiera es realmente equivalente a una sola rotación. La posibilidad de sustitución de dos rotaciones mediante una sola es independiente de los polígonos sobre los que estas rotaciones actúan.

Ejemplo:

Dados los polígonos ABCDN y MNOP, y las dos rotaciones siguientes:
X: Rotación de 60° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en N.
W: Rotación de 90° en el sentido de las manecillas del reloj con centro en N.

Vamos a aplicarle (X o W) al polígono MNOP y al polígono ABCDN ¿Qué rotación reemplazaría la composición de las dos rotaciones en cada caso?



Se pueden resolver algunos ejercicios como los siguientes:

1. Dado un conjunto de cuatro rotaciones I, D, M y S definidas como sigue:

I: Rotación de una vuelta en cualquier sentido (o dejar quietas las figuras).

D: Rotación de 1/4 de vuelta en el sentido de las manecillas del reloj (o de 3/4 de vuelta en sentido opuesto).

M: Rotación de media vuelta en cualquier sentido.

S: Rotación de 1/4 de vuelta en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (o de 3/4 de vuelta en el sentido de las manecillas del reloj).

Tome un polígono y elija un punto cualquiera como un único centro para cada una de las rotaciones anteriores:

a) Halle la imagen del polígono mediante la aplicación de cada una de las rotaciones I, D, M y S.

b) Llene la siguiente tabla, efectuando cada vez la composición de dos rotaciones (la rotación indicada en la columna después de la rotación indicada en la fila) y hallando la rotación que resulta de esta composición (Fíjese únicamente en la manera como queda el polígono al final sin preocuparse por las posiciones intermedias).

o	I	D	M	S
I				
D			D o M	
M				
S				

Coloque aquí la rotación que resulta de aplicar D después de M al polígono.

c) ¿En este conjunto de rotaciones se cumplen las propiedades estudiadas para las rotaciones? (Invertiva, Idéntica, Clausurativa, Asociativa y Conmutativa)

2. Mencione dos rotaciones tales que al componerlas dé la rotación idéntica.

3. ¿Qué rotación resulta de componer dos rotaciones con igual sentido?

¿Qué rotación resulta de componer dos rotaciones con diferente sentido?

OBJETIVOS ESPECIFICOS

En un mismo plano:

53 Verificar que para cada reflexión aplicada a figuras, hay por lo menos otra reflexión que regresa la figura a su posición inicial.

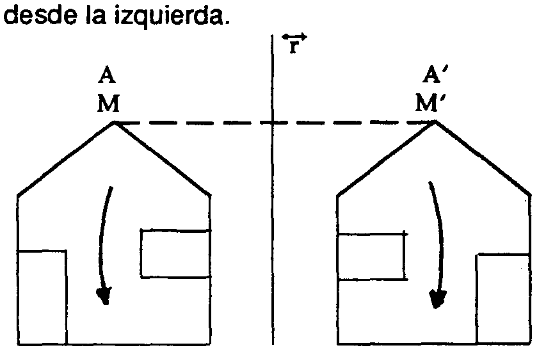
54 Verificar que aunque se acepte que hay una reflexión neutra o idéntica, la composición de dos reflexiones no siempre es una reflexión.

55 Verificar si la composición de reflexiones cumple la propiedad asociativa.

56 Verificar que al efectuar la composición de dos reflexiones no da lo mismo hacer una primero y después la otra, que hacerlas en el otro orden.

CONTENIDOS BASICOS

Dada la figura A y la recta $\overleftrightarrow{r}$ podemos considerar que $\overleftrightarrow{r}$ es como el borde de un espejo en donde se refleja la figura A, y podemos dibujar la imagen A' que se vería desde la izquierda.



La figura A' es la imagen de la figura A mediante una **reflexión**: la reflexión que tiene como eje o línea de reflexión la recta $\overleftrightarrow{r}$.

En una reflexión:

— El segmento que une un punto con su imagen, es perpendicular al eje de reflexión así:

$$\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{r}$$

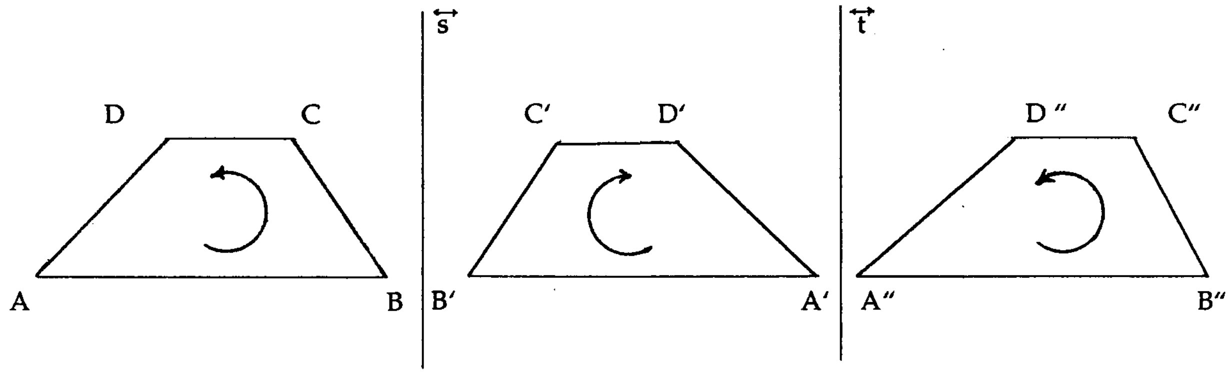
— Un punto cualquiera y su imagen correspondiente están a la misma distancia del eje de reflexión así:

$$d(M,P) = d(P,M')$$

— Al ser aplicada una reflexión a un polígono se le cambia el sentido del recorrido de los vértices y lados.

Cuando a un polígono se le aplican dos o más reflexiones sucesivas, se dice que se le ha efectuado una composición de reflexiones.

Ejèmplo: Dado el polígono ABCD hallar su imagen por reflexión en la recta s y luego hallar su imagen por reflexión en la recta $\overleftrightarrow{t}$



Llamamos $E_{\overleftrightarrow{s}}$ a la reflexión en la recta $\overleftrightarrow{s}$ y
$E_{\overleftrightarrow{t}}$ a la reflexión en la recta $\overleftrightarrow{t}$

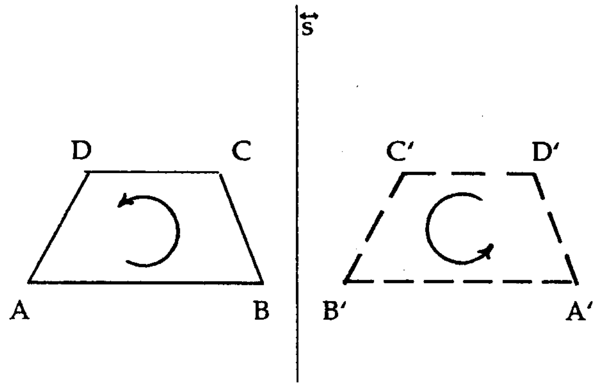
Hemos aplicado $E_{\overleftrightarrow{t}}$ después de aplicar $E_{\overleftrightarrow{s}}$

$E_{\overleftrightarrow{t}}(E_{\overleftrightarrow{s}}(ABCD)) = E_{\overleftrightarrow{t}}(B'A'D'C') = A''B''C''D''$
$(E_{\overleftrightarrow{t}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}})\ (ABCD) = A''B''C''D''$

El polígono A″B″C″D″ es la imagen del polígono ABCD mediante la composición de dos reflexiones. Veamos si la composición de reflexiones cumple las mismas propiedades de la composición de traslaciones y de la composición de rotaciones.

Propiedad Invertiva: Si a un polígono se le aplica una reflexión siempre hay otra reflexión que lo devuelve a su posición inicial. A dicha reflexión la llamamos "Reflexión Inversa".

Al polígono ABCD se le aplicó la reflexión $E_{\overleftrightarrow{s}}$. Para devolverlo a su posición inicial le aplicamos la reflexión $E_{\overleftrightarrow{s}}$ que tiene como eje de reflexión la misma recta s pero ahora el borde o superficie del espejo refleja la figura A′B′C′D′ hacia la izquierda.



$$\left.\begin{array}{l} E_{\overleftrightarrow{s}}(ABCD) = B'A'D'C' \\ E_{\overleftrightarrow{s}}(B'A'D'C') = ABCD \end{array}\right\}$$

$E_{\overleftrightarrow{s}}(E_{\overleftrightarrow{s}}(ABCD)) = E_{\overleftrightarrow{s}}(B'A'D'C') = ABCD$

$(E_{\overleftrightarrow{s}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}})\ (ABCD) = ABCD$

$E_{\overleftrightarrow{s}}$ es la reflexión inversa de $E_{\overleftrightarrow{s}}$

— Si nos fijamos solo en la posición inicial y en la final del polígono después de la composición de las dos reflexiones, el polígono conserva la posición inicial, es decir parece que no se hubiera movido. Podemos pues inventar una reflexión que no cambia de posición al polígono que vamos a llamar "reflexión idéntica o reflexión neutra", que notamos "I"

$$I(ABCD) = ABCD$$

— ¿La composición de reflexiones cumplirá la propiedad clausurativa? es decir, ¿La composición de dos reflexiones será una reflexión? Veámoslo.

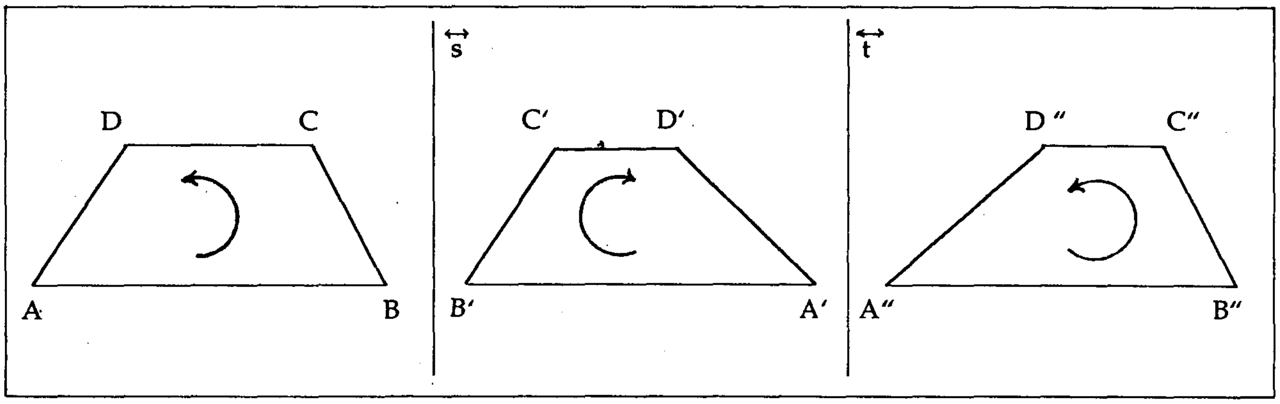
Consideremos dos casos:

a) Dos reflexiones cuyos ejes sean paralelos, es decir no se corten.

b) Dos reflexiones cuyos ejes se corten.

a) Sean $E_{\overleftrightarrow{s}}$ y $E_{\overleftrightarrow{t}}$ las reflexiones cuyos ejes no se cortan.

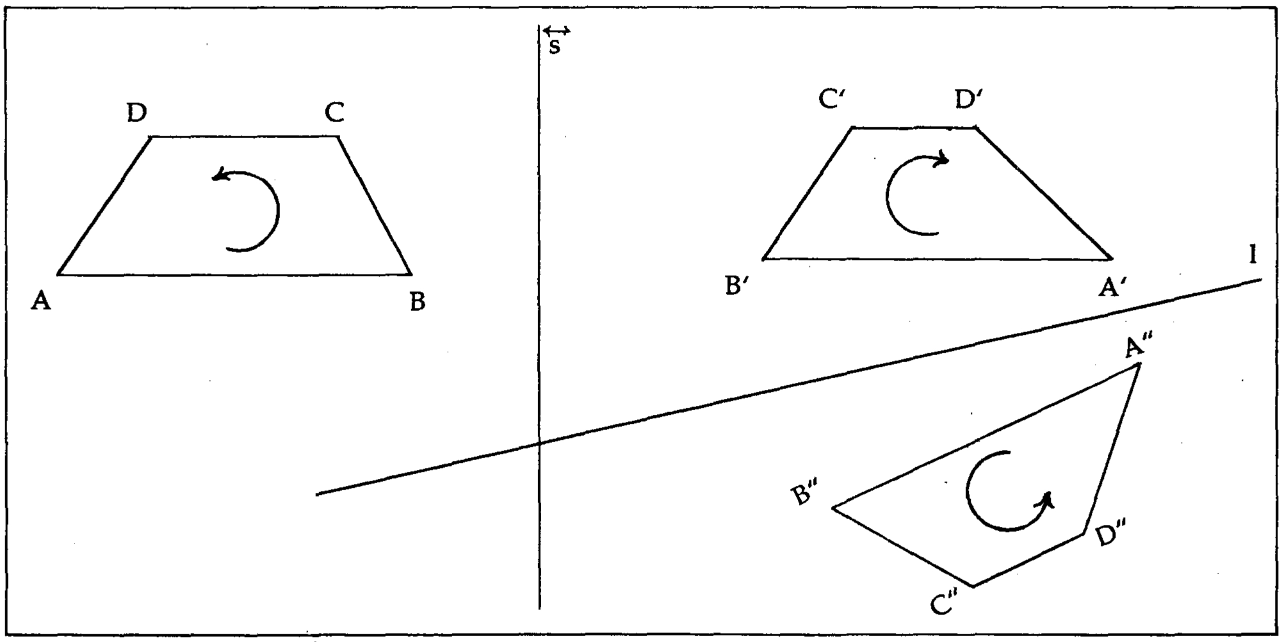
Apliquemos $E_{\overleftrightarrow{t}}$ después de $E_{\overleftrightarrow{s}}$ al polígono ABCD.



$(E_{\overleftrightarrow{t}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}})$ (ABCD) = A"B"C"D"

¿Se podrá obtener el polígono A"B"C"D" aplicándole solo una reflexión al polígono ABCD?

b) Sean $E_{\overleftrightarrow{s}}$ y $E_{\overleftrightarrow{t}}$ las reflexiones cuyos ejes se cortan. Apliquemos $E_{\overleftrightarrow{t}}$ después de aplicar $E_{\overleftrightarrow{s}}$ al polígono ABCD



$E_{\overleftrightarrow{l}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}}$(ABCD) = A"B"C"D"

¿Se podrá obtener el polígono A"B"C"D" aplicándole una sola reflexión a ABCD?

De lo anterior se puede concluir:

• La composición de dos reflexiones con ejes paralelos dá como resultado una traslación ¿Cuáles son las características de esa traslación?

• La composición de dos reflexiones con ejes que se cortan dá como resultado una rotación.

¿Cuáles son las características de esa rotación?

• Aunque se tenga la reflexión idéntica, la composición de dos reflexiones no es siempre una reflexión. Por lo tanto la composición de reflexiones no cumple la propiedad clausurativa.

— Veamos ahora si la composición de reflexiones cumple la propiedad asociativa.

Vamos a considerar tres casos:

a) Tres reflexiones cuyos ejes sean paralelos.

b) Tres reflexiones cuyos ejes se corten.

c) Tres reflexiones con dos ejes paralelos y uno que se corta con estos.

Analicemos cada uno de los casos:

a) Tres ejes paralelos

Consideremos las reflexiones $E_{\overleftrightarrow{s}}$, $E_{\overleftrightarrow{t}}$, $E_{\overleftrightarrow{u}}$

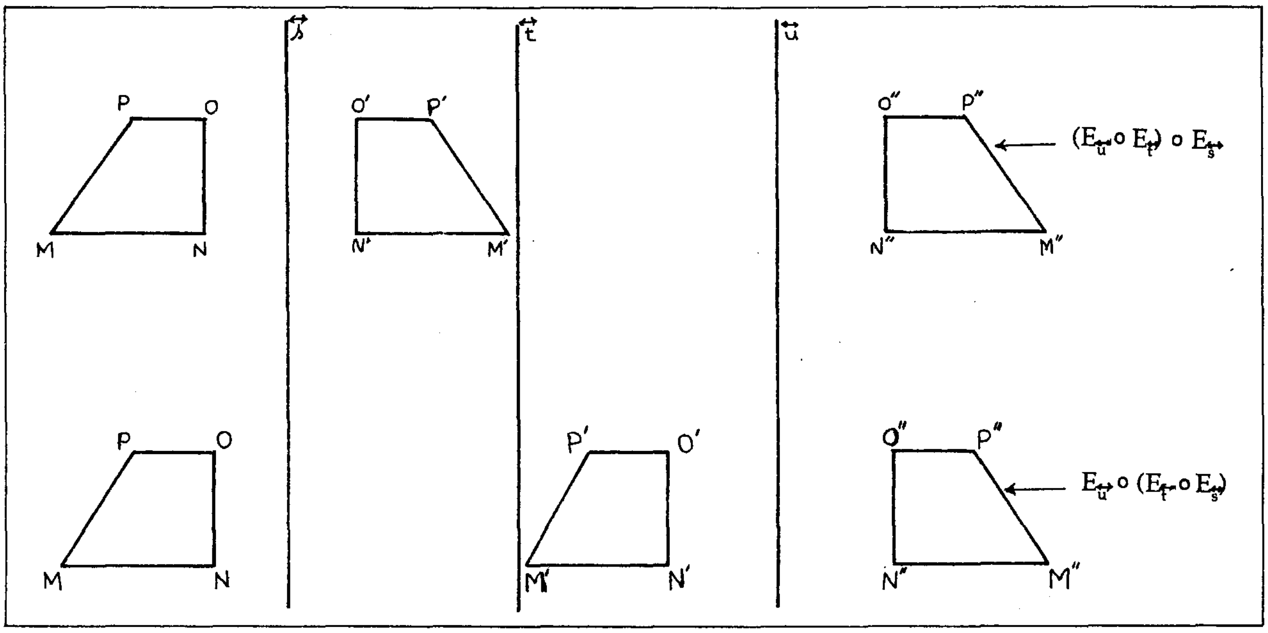
Apliquemos al polígono MNOP primero la reflexión $E_{\overleftrightarrow{s}}$ y luego la $E_{\overleftrightarrow{t}}$ y después la $E_{\overleftrightarrow{u}}$ ¿Qué pasa?

El resultado se puede hallar de dos maneras diferentes:

i) Aplicar $(E_{\overleftrightarrow{u}} \circ E_{\overleftrightarrow{t}})$ después de aplicar $E_{\overleftrightarrow{s}}$ o sea aplicar $(E_{\overleftrightarrow{u}} \circ E_{\overleftrightarrow{t}}) \circ E_{\overleftrightarrow{s}}$

ii) Aplicar $E_{\overleftrightarrow{u}}$ después de aplicar $E_{\overleftrightarrow{t}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}}$, es decir, aplicar $E_{\overleftrightarrow{u}} \circ (E_{\overleftrightarrow{t}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}})$

Veamos los resultados:



De las dos maneras el resultado es el mismo.
Da una reflexión aunque al hacer la composición de dos reflexiones, no dé una reflexión, se salga del conjunto de las reflexiones y haya que introducir traslaciones intermedias.

Esto nos permite escribir la siguiente igualdad:

$(E_{\overleftrightarrow{u}} \circ E_{\overleftrightarrow{t}}) \circ E_{\overleftrightarrow{s}} = E_{\overleftrightarrow{u}} \circ (E_{\overleftrightarrow{t}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}})$

b) Tres ejes que se corten
Consideremos las reflexiones $E_{\overleftrightarrow{m}}$, $E_{\overleftrightarrow{n}}$ y $E_{\overleftrightarrow{p}}$.

Apliquemos primero la reflexión $E_{\overleftrightarrow{m}}$, luego la $E_{\overleftrightarrow{n}}$ y después la $E_{\overleftrightarrow{p}}$

¿Qué pasa?

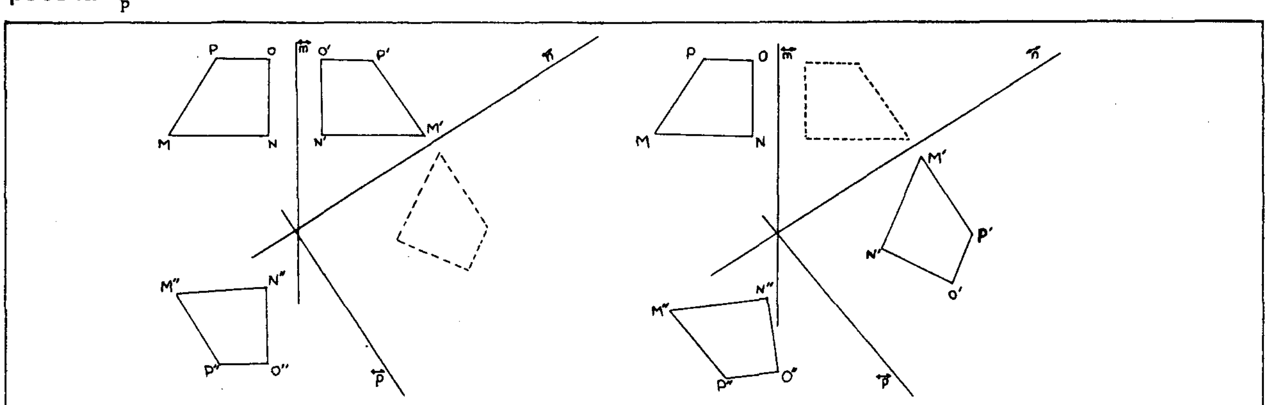
El resultado se puede hallar de dos maneras diferentes:

i) Aplicar primero $(E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}})$ y después $E_{\overleftrightarrow{p}}$, es decir aplicar:

$$E_{\overleftrightarrow{p}} (E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}}),$$

ii) Aplicar primero $E_{\overleftrightarrow{m}}$ y después $(E_{\overleftrightarrow{p}} \circ E_{\overleftrightarrow{n}})$ es decir aplicar $(E_{\overleftrightarrow{p}} \circ E_{\overleftrightarrow{n}}) = E_{\overleftrightarrow{m}}$

Veamos los resultados:



[$(E_{\overleftrightarrow{p}} \circ E_{\overleftrightarrow{n}}) \circ E_{\overleftrightarrow{m}}$] (MNOP) = M″N″O″P″

[$E_{\overleftrightarrow{p}} \circ (E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}})$] (MNOP) = M″N″O″P″

De las dos maneras se obtiene el mismo resultado, el polígono M"N"O"P".
Dá una reflexión aunque al hacer la composición de dos se salga del conjunto de reflexiones y haya que introducir rotaciones intermedias.

Esto nos permite escribir la siguiente igualdad:

$(E_{\overleftrightarrow{p}} \circ E_{\overleftrightarrow{n}}) \circ E_{\overleftrightarrow{m}} = E_{\overleftrightarrow{p}} \circ (E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}})$

c) Dos ejes paralelos y uno que se corta

Consideremos las reflexiones $E_{\overleftrightarrow{s}}$, $E_{\overleftrightarrow{r}}$ y $E_{\overleftrightarrow{v}}$

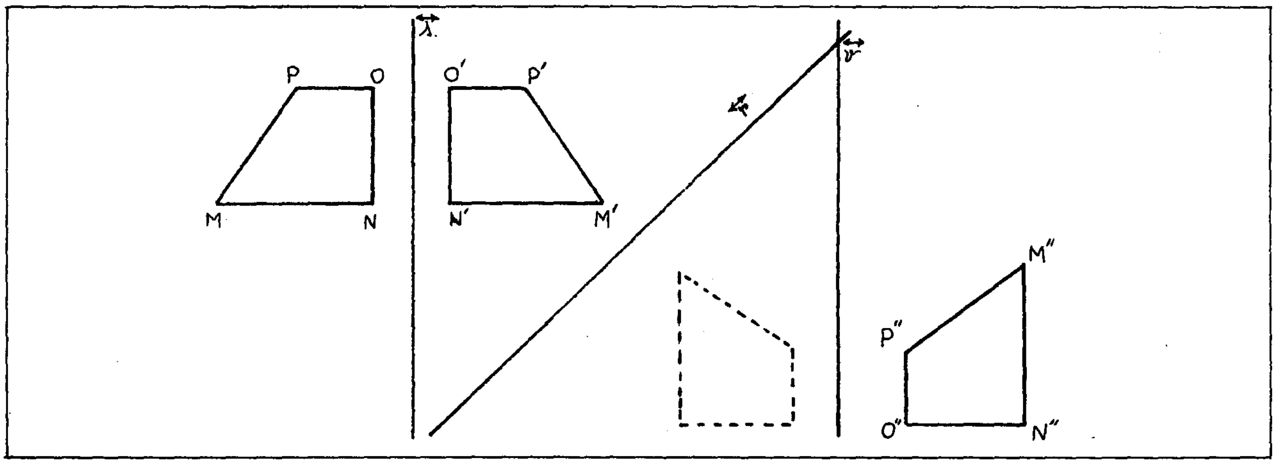
Apliquemos al polígono MNOP, primero la reflexión $E_{\overleftrightarrow{s}}$ luego la $E_{\overleftrightarrow{r}}$ y después la $E_{\overleftrightarrow{v}}$ ¿Qué pasa?

El resultado se puede obtener de dos maneras diferentes:

i) Aplicar $(E_{\overleftrightarrow{v}} \circ E_{\overleftrightarrow{r}})$ después de aplicar $E_{\overleftrightarrow{s}}$ es decir aplicar $(E_{\overleftrightarrow{v}} \circ E_{\overleftrightarrow{r}}) \circ E_{\overleftrightarrow{s}}$

ii) Aplicar $E_{\overleftrightarrow{v}}$ después de aplicar $(E_{\overleftrightarrow{r}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}})$ es decir aplicar $E_{\overleftrightarrow{v}} \circ (E_{\overleftrightarrow{r}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}})$

Veamos los resultados:



$E_{\overleftrightarrow{v}} \circ (E_{\overleftrightarrow{r}} \, E_{\overleftrightarrow{s}})$
$(E_{\overleftrightarrow{v}} \circ E_{\overleftrightarrow{r}}) \circ E_{\overleftrightarrow{s}}$

De las dos maneras el resultado es el mismo. La composición no da reflexión. Caso en el que el resultado se sale del conjunto de reflexiones, y el resultado es otro tipo de deslizamiento: los deslizamientos con reflexión.

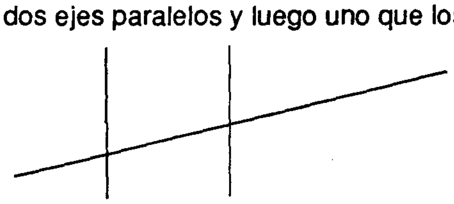
Esto nos permite escribir la siguiente igualdad

$E_{\overleftrightarrow{v}} \circ (E_{\overleftrightarrow{r}} \circ E_{\overleftrightarrow{s}}) = (E_{\overleftrightarrow{v}} \circ E_{\overleftrightarrow{r}}) \circ E_{\overleftrightarrow{s}}$

En general si se aplican sucesivamente tres reflexiones $E_{\overleftrightarrow{l}}$, $E_{\overleftrightarrow{m}}$ y $E_{\overleftrightarrow{n}}$ de primera la $E_{\overleftrightarrow{l}}$ después de segunda la $E_{\overleftrightarrow{m}}$ y luego de tercera la $E_{\overleftrightarrow{n}}$, se obtiene el mismo resultado si se aplica primero la $E_{\overleftrightarrow{l}}$ y luego el resultado de $(E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}})$ o si se aplica primero el resultado de $(E_{\overleftrightarrow{m}} \circ E_{\overleftrightarrow{l}})$ y luego $E_{\overleftrightarrow{n}}$ es decir,

$(E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}}) \circ E_{\overleftrightarrow{l}} = E_{\overleftrightarrow{n}} \circ (E_{\overleftrightarrow{m}} \circ E_{\overleftrightarrow{l}})$

Ejercicio: Efectúe la composición de tres reflexiones con dos ejes paralelos y luego uno que los corte

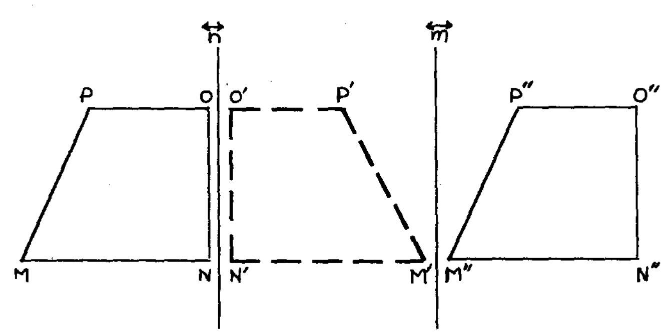


El conjunto de las reflexiones con la composición no tiene estructura de grupo pues no se cumple la propiedad clausurativa, aunque las demás propiedades, se cumplan.

Veamos el resultado de efectuar la composición de dos reflexiones cuando se cambia el orden.

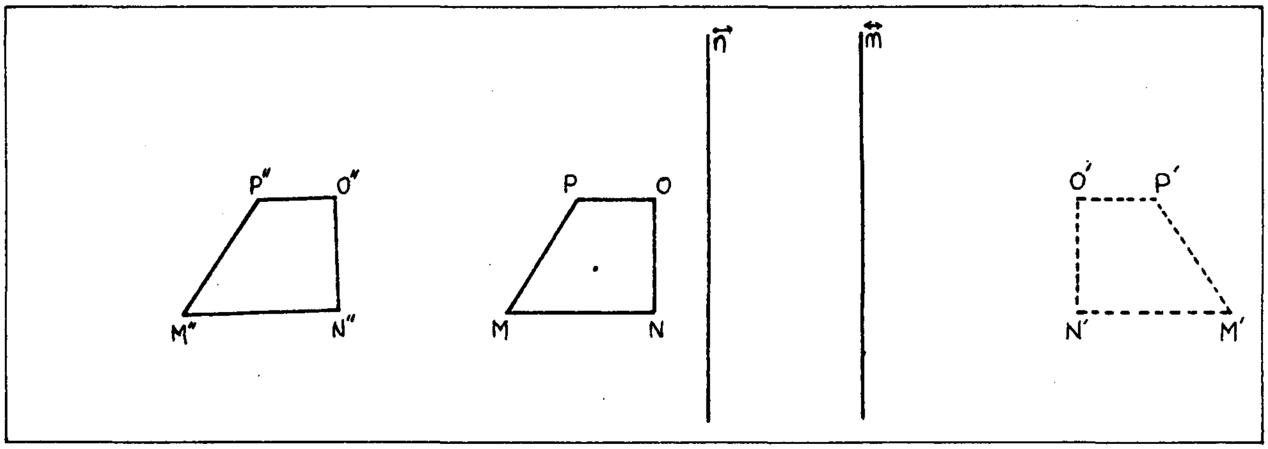
Dado el polígono MNOP y las reflexiones $E_{\overleftrightarrow{m}}$ y $E_{\overleftrightarrow{n}}$

a) Apliquemos al polígono $(E_{\overleftrightarrow{m}} \circ E_{\overleftrightarrow{n}})$



$(E_{\overleftrightarrow{m}} \circ E_{\overleftrightarrow{n}})$ (MNOP) = M"N"O"P"

b) Apliquemos al polígono $(E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}})$, es decir primero $E_{\overleftrightarrow{m}}$ y luego $E_{\overleftrightarrow{n}}$



$(E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}})$ (MNOP) $= E_{\overleftrightarrow{n}}(E_{\overleftrightarrow{m}}(\text{MNOP})) = E_{\overleftrightarrow{n}}(\text{M'N'O'P'})$

$= \text{M''N''O''P''}$

$(E_{\overleftrightarrow{m}} \circ E_{\overleftrightarrow{n}}) \neq (E_{\overleftrightarrow{n}} \circ E_{\overleftrightarrow{m}})$

El resultado no es el mismo lo cual significa que la composición de reflexiones no cumple la propiedad conmutativa.

Verifícalo para otros casos, por ejemplo cuando los ejes de reflexión se cortan.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Conviene recordar cómo se efectúa la reflexión de un polígono utilizando escuadra y compás para lo cual se pueden consultar los programas de 6º y 7º Grado.

Los mismos alumnos a través de un buen número de ejercicios, descubrirán qué propiedades de las estudiadas en los movimientos, se cumplen y qué propiedades no se cumplen en la reflexión. Ellos mismos serán quienes descubrirán el movimiento que resulta de la composición de dos reflexiones cuyos ejes son paralelos y de dos cuyos ejes se cortan.

Para verificar si se cumple o no la asociativa conviene tomar casos variados: tres reflexiones con ejes paralelos, tres reflexiones con ejes que se cortan y tres reflexiones con 2 ejes paralelos y uno que se corte con los otros dos, se obtendrán resultados muy interesantes.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

57 Reconocer aquellas rotaciones en el plano, con centro o eje en una figura, que hacen que la posición de ésta, después de la rotación, coincida exactamente con la posición inicial de la figura.

58 Determinar aquellas reflexiones en el plano que hacen que la posición de una figura después de la reflexión coincida exactamente con la posición inicial de la figura.

59 Reconocer como simetrías activas las rotaciones y las reflexiones que hacen que una figura caiga exactamente sobre la figura en su posición inicial.

60 Hallar el punto, eje (o plano) de simetría de una figura y denominarlo punto, eje (o plano) de la simetría activa.

61 Reconocer cuándo una figura es simétrica.

62 Determinar cuándo dos figuras son simétricas entre sí, qué tipo de simetría y con respecto a qué punto, eje (o plano) lo son.

Recorta en cartulina algunas figuras como las siguientes:

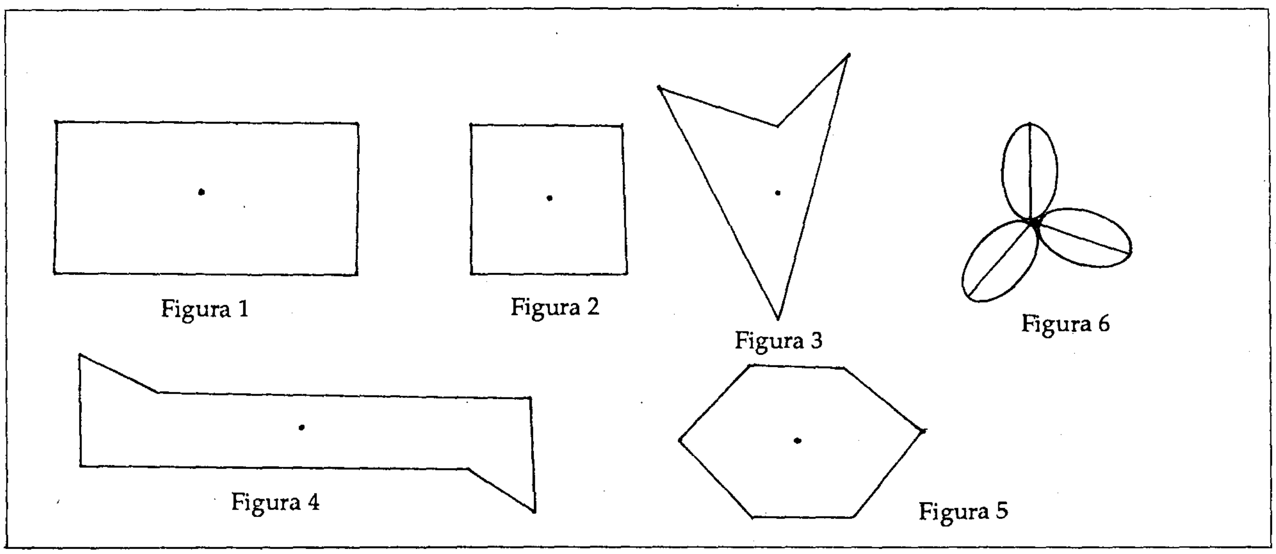
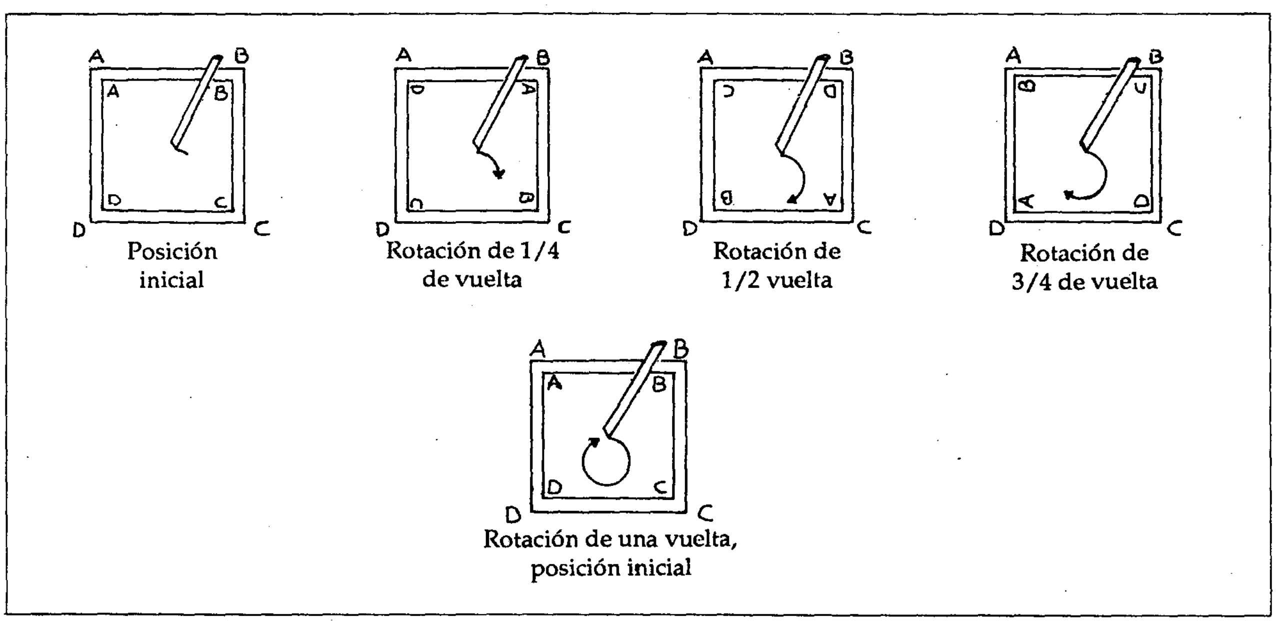


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 6 Figura 4 Figura 5

Sobre una hoja en blanco vamos a dibujar la frontera de cada una de las figuras, y luego alrededor del centro de la figura vamos a rotar la figura de cartón observando cuidadosamente si en algún momento la figura en cartón cubre exactamente la frontera dibujada en el papel.

Cuando esto ocurra medimos la magnitud del ángulo de giro en grados o en vueltas. Continuamos rotando y observando en qué momento se vuelve a presentar la coincidencia, y así se continúa hasta completar una vuelta, hallando en cada caso la magnitud del ángulo de la rotación respectiva.

Veamos los resultados si la figura es un cuadrado



Posición inicial — Rotación de 1/4 de vuelta — Rotación de 1/2 vuelta — Rotación de 3/4 de vuelta — Rotación de una vuelta, posición inicial

El cuadrado de cartón cubre exactamente tres veces el cuadrado dibujado antes de dar la vuelta completa. Es decir, además de la rotación que hace que el polígono vuelva a su posición inicial (o rotación trivial), hay tres rotaciones que hacen que el cuadrado caiga exactamente en una posición análoga a la inicial. Observemos también como han girado los vértices del polígono recortado.

Estas rotaciones se hacen hacia la derecha (o hacia la izquierda) alrededor del centro y la amplitud de cada una de ellas es:

$\frac{1}{4}$ de vuelta, $\frac{1}{2}$ vuelta y $\frac{3}{4}$ de vuelta, o lo que es lo mismo:

90° 180° 270°

¿Cuáles fueron los resultados para el rectángulo?

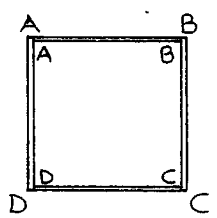
¿Cuáles son las rotaciones que hacen que el trébol caiga exactamente en una posición análoga a la inicial?

¿Cuáles fueron los resultados para cada una de las figuras recortadas?

Ahora busquemos para cada una de las figuras dadas, las rotaciones en el espacio y las reflexiones que hacen que esa figura vuelva a ocupar una posición análoga inicial. Para esto, podemos rotar la figura recortada sobre otros ejes, hacer dobleces en la figura o emplear un espejo.

a) Tratemos de lograr otras posiciones análogas cambiando la posición de la ficha recortada. Para ello le damos media vuelta a la ficha alrededor de uno de los cuatro ejes de simetría que están en el mismo plano de la figura. Obtenemos cuatro rotaciones en el espacio, haciendo girar la figura de forma cuadrada, sobre una cualquiera de sus dos diagonales, o de las dos líneas que unen los puntos medios de dos de sus lados paralelos.

Para hacerlo dibujamos primero en un papel el contorno de la figura, y nombramos con letras, números o colores los respectivos vértices. De la misma manera nombramos por las dos caras los vértices de la figura hecha en cartulina. Colocamos la figura recortada en cartulina sobre el cuadrado dibujado en el papel teniendo cuidado de que coincidan las letras de los vértices.



Si volvemos a girar otra media vuelta sobre el mismo eje, la figura recortada vuelve a su posición inicial. Pero si giramos otra media vuelta alrededor de otro de los cuatros ejes, tal vez nos llevamos una sorpresa. ¿A qué rotación es equivalente girar dos medias vueltas sobre dos de los cuatro ejes que están en el plano de la figura recortada?

Este procedimiento de girar la figura recortada sobre un eje de simetría situado en su propio plano produce otro tipo de movimientos activos y de transformaciones de la figura distintos de los giros sobre el eje perpendicular al centro. Algunos libros llaman "rotaciones" a las que se hacen sobre el eje perpendicular al centro, y "reflexiones" a las que se hacen sobre ejes que están en el mismo plano de la figura.

Pero estas últimas también son rotaciones.

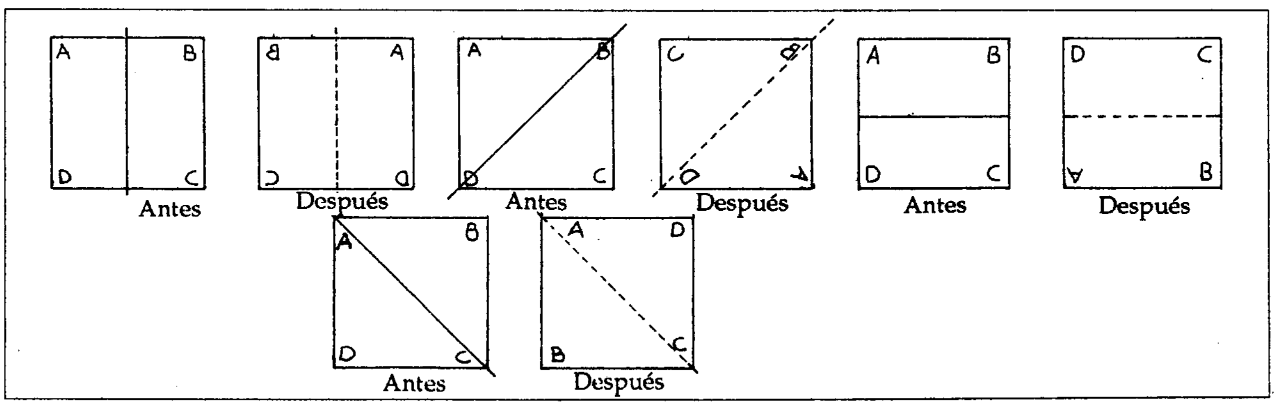
Las verdaderas reflexiones no cambian la cara de la figura que se ve por encima, y no pueden realizarse físicamente con una figura de cartulina: se realizan en el cerebro, suponiendo que la figura se refleja en un espejo muy delgado y que refleja por lado y lado.

Para ayudar a formar esa transformación mental que se llama "reflexión" puede también ayudar al alumno ponerse a hacer dobleces por las líneas punteadas que representan ejes de simetría de la figura recortada.

b) Si se hacen dobleces, estos deben ser por una línea que haga que una parte de la figura coincida exactamente con la otra parte, o en otras palabras que una mitad caiga exactamente sobre la otra mitad.

c) Si se utiliza el espejo, este se debe colocar verticalmente sobre la figura de tal manera que el borde inferior coincida con los dobleces anteriores y una mitad se refleje en el espejo completando la figura, y suponiendo que la mitad de atrás se viene por el espejo hacia el lado por donde uno mira.

Para el cuadrado tenemos las siguientes reflexiones:



¿Cuáles son las reflexiones para el trébol? ¿Para el rectángulo? ¿Para el hexágono?

Hemos encontrado reflexiones y rotaciones que hacen que una figura caiga exactamente sobre la figura en la posición inicial o en una posición análoga a la inicial.

A estas rotaciones y reflexiones las llamamos "simetrías activas".

Si consideramos solo las rotaciones, en el caso del cuadrado existen ocho simetrías activas, a saber:

Cuatro rotaciones alrededor del centro:

Rotación de $\frac{1}{4}$ de vuelta

Rotación de $\frac{1}{2}$ vuelta

Rotación de $\frac{3}{4}$ de vuelta

Rotación de una vuelta (esta es la simetría trivial o simetría que deja a la figura como estaba antes).

Cuatro rotaciones de media vuelta alrededor de cada uno de los siguientes ejes:

Las dos diagonales.

Las dos rectas que unen los puntos medios de los lados paralelos.

Estas ocho rotaciones tiene la peculiaridad de que si uno aplica una de ellas y después otra cualquiera, el resultado de esa composición o aplicación sucesiva a una figura dada es una posición de esa figura que hubiera podido obtenerse con una sola de esas ocho.

Además, cualquiera de las siete simetrías no triviales tiene otra (o ella misma) que devuelve la figura a la posición original.

Este grupo de simetrías activas puede explorarse con la figura de cartulina y con movimientos físicamente realizables.

Pero no es conveniente llamar "reflexiones" a movimientos que en realidad son rotaciones.

Si se quieren considerar las verdaderas reflexiones es mejor no hacerlas con rotaciones de una figura de cartulina sino pintando la posición inicial ("antes") y al lado la posición final ("después"), ayudándose de dobleces y de un espejo, hasta que puedan hacerse en la cabeza sin necesidad de esas ayudas.

Las verdaderas reflexiones no cambian la cara que se ve por encima en la figura que se refleja.

Las rotaciones de media vuelta sobre un eje en el plano de la figura sí cambian la cara que se ve por encima.

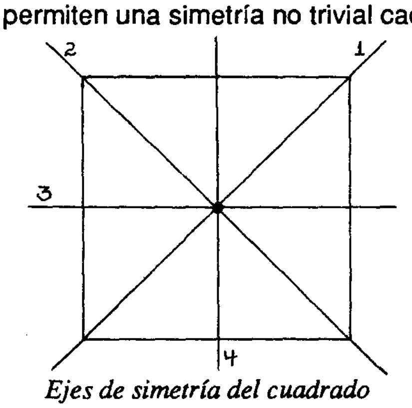
Nótese además que dos reflexiones aplicadas una después de otra no dan una reflexión, sino que son equivalentes a una de las cuatro rotaciones sobre el eje perpendicular al plano de la figura recortada.

Observemos con respecto a qué se han efectuado las simetrías activas en los casos anteriores:

- Con respecto a un punto: el centro del cuadrado. (también puede pensarse en un eje perpendicular al plano de la figura que pasa por ese punto).
- Con respecto a un eje situado en el plano de la figura que se rota sacándola de su plano.
- Con respecto a un plano que pasa por uno de los ejes situados en el plano de la figura, plano que se considera perpendicular al plano de la figura y como un espejo ideal que permite reflejar las dos mitades de la figura, por eso a los puntos, ejes o planos, sobre los cuales se puede efectuar una simetría activa se llaman puntos, ejes o planos de simetría de la figura.

Para el cuadrado tenemos 5 ejes de simetría a saber:

- Un eje perpendicular al plano de la hoja que permite 3 simetrías no triviales (las de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de vuelta). Este eje está representado por el punto del centro.
- Cuatro ejes que se pueden pintar en el cuaderno y que permiten una simetría no trivial cada uno.



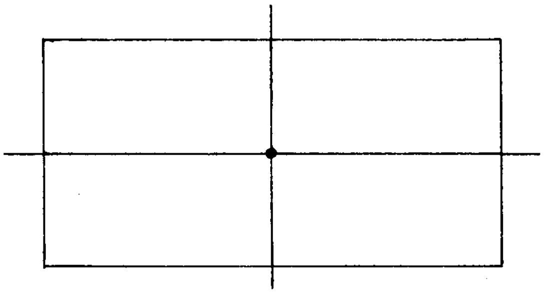
Ejes de simetría del cuadrado

- Cuando una figura tiene por lo menos un eje de simetría que permita simetrías no triviales se llama "Figura simétrica". Por lo tanto el cuadrado es una figura simétrica pues tiene 5 ejes de simetría.

– Un rectángulo no cuadrado es una figura simétrica pues tiene 3 ejes de simetría que son:

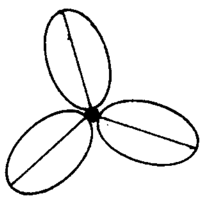
- Un eje perpendicular a la hoja (o al plano) que pasa por el centro de la figura y que permite una simetría no trivial (la de $\frac{1}{2}$ de vuelta). Además de la que coloca a la figura en su posición inicial.

- Dos ejes que se pueden pintar en el cuaderno: uno paralelo a los lados más largos y otro paralelo a los lados más cortos.



Ejes de simetría del rectángulo no cuadrado

El trébol es una figura simétrica pues tiene 4 ejes de simetría:



- Uno perpendicular al plano que permite 2 simetrías no triviales (de $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$ de vuelta) además de la simetría trivial que la regresa a su posición inicial (una vuelta)

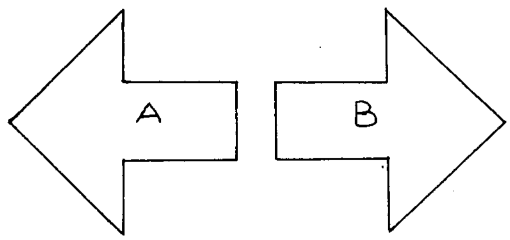
- Tres ejes que se pueden pintar en el cuaderno.

La figura 3 de las que aparecen en los contenidos básicos no es simétrica pues solo después de la simetría trivial (de una vuelta) la figura vuelve a su posición inicial.

La figura 4 es una figura simétrica pues tiene un eje de simetría perpendicular al plano que permite una simetría no trivial (de $\frac{1}{4}$ de vuelta).

Hasta ahora se ha hablado de una sola figura. ¿Podríamos decir que dos figuras son simétricas entre sí?

Digamos que dos figuras son simétricas entre sí, cuando una se puede obtener como el resultado de haber aplicado una simetría activa a la otra.



La figura A es simétrica con la figura B.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Es conveniente que se tengan en cuenta las diferentes acepciones que existen para la palabra "simetría". Veamos:

Simetría como propiedad o predicado de un puesto (intra-figural).

Ejemplos:

"...tiene mucha simetría", "...es muy simétrico".

Simetría como relación o predicado de dos puestos (inter-figural).

Ejemplo:

"...tiene simetría con...".

"... y ... son simétricos entre sí".

Simetría como transformación biyectiva, isométrica de una figura en sí misma (de tal manera que cualquier punto interior va a uno interior, cualquier punto de una cara va a uno de una cara, cualquier punto de un borde va a uno de un borde, y cualquier vértice va a un vértice) (intra-figural, pero ya activa; potencialmente inter-figural si la imagen se considera distinta aunque congruente con la pre-imagen).

Ejemplo:

"Esta simetría de esta figura es una reflexión".

Simetría como transformación de una figura en otra diferente (inter-figural y activa; potencialmente trans-figural si se fija la atención en el espacio ambiente).

Ejemplo:

"Busquemos una simetría que transforme la curva logarítmica en la exponencial".

Simetría como transformación de todo el espacio, haya o no haya figuras; en caso de que las haya, las arrastra consigo y genera familias de transformaciones y de figuras (trans-figural).

Ejemplo:

"La conjugación es una simetría del plano complejo".

"Consideremos el grupo de todas las simetrías del plano".*

No podemos olvidar que nuestro mismo cuerpo, nuestros ojos, nuestro cerebro, tienen una disposición simétrica con respecto a un plano central, y se colocan en cierta posición simétrica con respecto a un plano intermedio entre nosotros y los objetos que nos parecen simétricos.

La terminología "nuestro cuerpo es simétrico", "esta hoja de papel es simétrica", etc. confirma la importancia de lo intra-figural: por más que sean las transformaciones que le hace nuestro cerebro a las imágenes las que permitan determinar que "hay simetría", nos queda muy difícil salirnos del magnetismo de la figura misma. Por eso todos preferimos decir que el objeto tiene simetría, o que es simétrico, más bien que pensar en que la simetría es una transformación.

No es que "esté mal" decir que el objeto tiene simetría, sino que hay que partir de allí, de esa primera acepción intra-figural de la palabra "simetría" para dirigir la atención a los modelos simplificados del objeto que se hace nuestro cerebro, y a la agilidad con que los transforma, para empezar a llamar "simetrías activas" a esas transformaciones que se aplican a una figura tridimensional, o a una simplificación bidimensional, y producen otra figura congruente con la inicial que cae exactamente sobre la primera. Hay que decir "otra figura" para referirse al resultado, y hay que decir "cae exactamente sobre la primera" para referirse a la nueva posición de la figura ya transformada, pues de lo contrario, como toda figura es congruente consigo misma y las simetrías activas son isometrías, todas las figuras serían (trivialmente) simétricas.

No basta, pues, la congruencia, sino que hay que referirse a la nueva posición de la figura transformada y volver a la terminología de Euclides, que declaraba dos figuras "iguales" si la una caía exactamente sobre la otra. En esa definición de una relación estaba implícita la transformación isométrica que traía una figura de un sitio a otro del plano para ver si caía exactamente sobre la otra. Para la simetría hay que eliminar esa transformación implícita, y exigir que la transformación explícita de una vez produzca una figura que, en la nueva posición y sin más transformaciones, caiga exactamente sobre la original en la antigua posición. Si "caer" le parece demasiado intuitivo, puede decir "coincide", que suena más elegante; como los alumnos no saben latín, no entienden que "coincidere" en latín también viene de "caer".*

En los contenidos se han presentado de una forma simplificada las simetrías de algunas figuras, a manera de ejemplo. Conviene que los alumnos busquen todas las simetrías activas hasta que ellos mismos lleguen a decidir cuáles figuras son simétricas y cuáles no.

En cuanto a las reflexiones, conviene recordar la comparación ente las dos maneras de hallarlas, una por verdaderas reflexiones en el plano y la otra simulándolas a través de rotaciones en el espacio, y establecer la conveniencia o inconveniencia de cada una de ellas según el progreso de los alumnos. En general, es aconsejable empezar primero con las ocho rotaciones, y posteriormente trabajar las verdaderas reflexiones.

Pueden realizar algunos ejercicios como los siguientes:

- Hallar los ejes de simetría de algunos polígonos regulares.

- Dibujar figuras planas o modelar figuras sólidas que tengan:

a) Un solo eje de simetría (¿Será posible una figura plana con un solo eje de simetría?).

b) Dos ejes de simetría

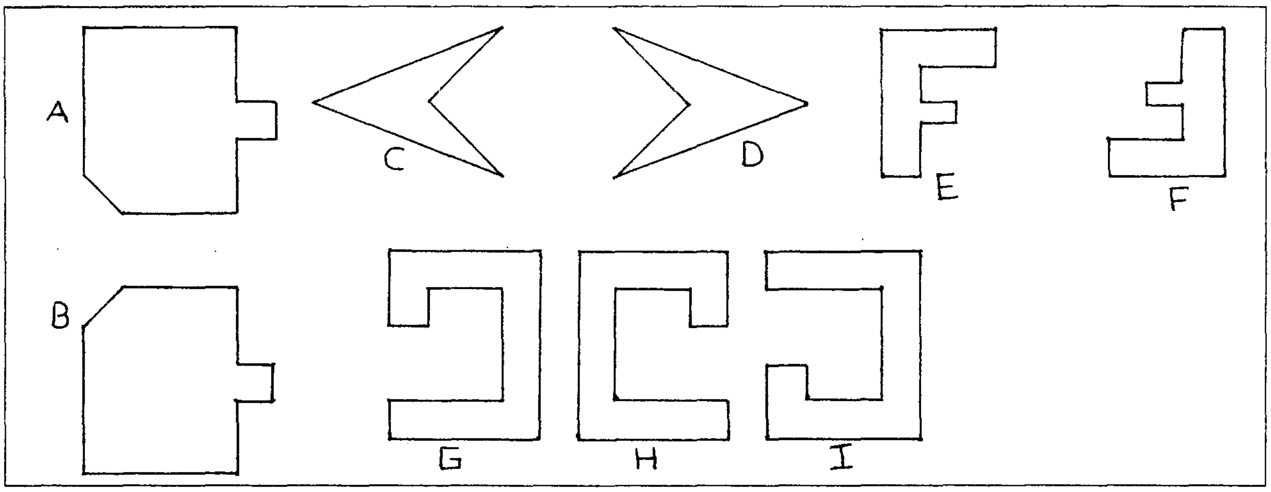
c) Tres ejes de simetría.

d) 4, 5, 6,... ejes de simetría.

- Observar la figura de tres ejes de simetría dibujada anteriormente en el ejercicio c) y tratar de añadir algo o quitarle algo para que aparezcan 4 ejes de simetría. A esa misma figura añada o quite algo para que desaparezca un eje de simetría y sólo queden 2.

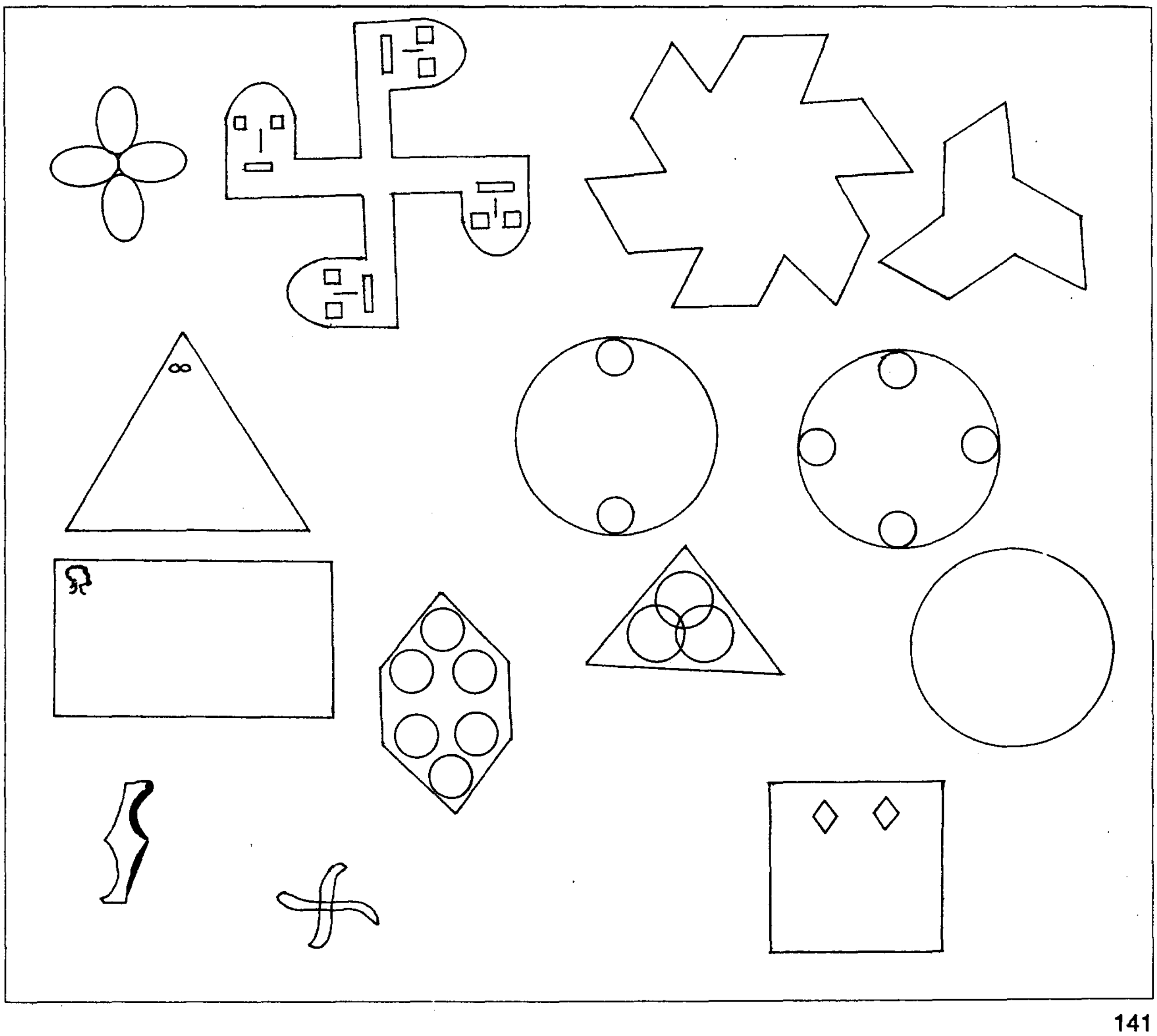
/Tomado de: VASCO, Carlos E. "Constructivismo Genético" Universidad Nacional. Bogotá, 1987.

– Determinar si cada par de figuras son simétricas entre sí.



Decir qué simetría activa tuvo que aplicar mentalmente para hacer que la línea cayera exactamente sobre la otra.

Para cada una de las siguientes figuras, determinar cuáles son simétricas, cuáles son los ejes de simetría y cuáles son las simetrías activas.



– Se pueden tomar algunos objetos como pocillos, platos, ollas, jarras, etc., mirar si son simétricos y buscar los ejes de simetría, para ver la diferencia con los dibujos en el plano de esos mismos objetos.

Por ejemplo:

Este pocillo  es un objeto simétrico pero su dibujo en el plano no es una figura simétrica.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

63. Verificar que para cada simetría activa aplicada a una figura dada, existe por lo menos otra simetría activa que la regrese a su posición inicial.

64. Verificar que si se acepta que hay una simetría idéntica (o neutra), la composición de simetrías activas de una figura, es siempre una simetría.

65. Comprobar que la composición de simetrías activas de una figura es asociativa.

66. Verificar que al efectuar la composición de dos simetrías de una figura, no siempre da lo mismo hacer una primero y después la otra que hacerlas en el otro orden.

CONTENIDOS BASICOS

Para desarrollar estos objetivos se pueden seguir las orientaciones dadas tanto en los contenidos básicos como en las sugerencias metodológicas que corresponden a los objetivos que analizaron estas mismas propiedades en las rotaciones, en las traslaciones y en las reflexiones. Sin embargo, vamos a desarrollar estos objetivos con las ocho simetrías activas del cuadrado, que vimos en los objetivos anteriores, estas simetrías son:

– Cuatro rotaciones alrededor del centro, que vamos a llamar I, C, M, T.

I: Rotación de una vuelta (o cero vueltas)

C: Rotación de $\frac{1}{4}$ de vuelta

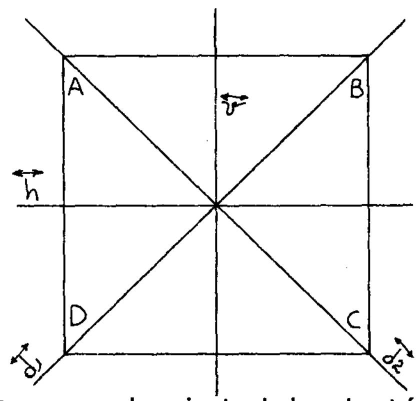
M: Rotación de $\frac{1}{2}$ de vuelta

T: Rotación de $\frac{3}{4}$ de vuelta

Estas rotaciones pueden ir en uno cualquiera de los dos sentidos ↷ o ↺ . Para este caso vamos a tomar el sentido ↺ .

– Cuatro reflexiones (o rotaciones de media vuelta en el espacio) con respecto a los ejes que llamamos $\overleftrightarrow{d_1}$, $\overleftrightarrow{d_2}$, $\overleftrightarrow{h}$ y $\overleftrightarrow{v}$

que llamamos $E_{\overleftrightarrow{d_1}}$, $E_{\overleftrightarrow{d_2}}$, $E_{\overleftrightarrow{h}}$ y $E_{\overleftrightarrow{v}}$



De esta manera el conjunto de las simetrías activas del cuadrado es:

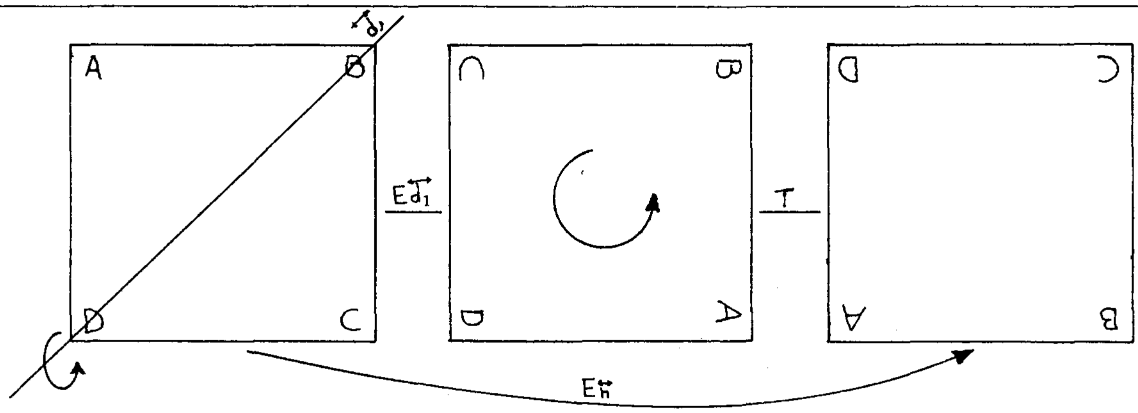
$\{I, C, M, T, E_{\overleftrightarrow{v}}, E_{\overleftrightarrow{h}}, E_{\overleftrightarrow{d_1}}, E_{\overleftrightarrow{d_2}}\}$

Efectuamos la composición de dos cualesquiera de estas simetrías y coloquemos los resultados en la siguiente tabla (ver tabla 1).

Para llenar la tabla se aplica la simetría indicada en la columna izquierda después de la simetría indicada en la fila superior. (El símbolo "∘" se puede leer "después de").

Por ejemplo:

Para hallar la simetría que resulta de aplicar T después de $E_{\overleftrightarrow{d1}}$ ($T \circ E_{\overleftrightarrow{d1}}$) se le aplica al cuadrado primero una reflexión con respecto a la diagonal y luego una rotación de $\frac{3}{4}$ de vuelta, así:



Como se observa, la misma posición del cuadrado se puede obtener con una reflexión alrededor del eje.

En la misma forma podemos llenar los otros 63 cuadros de la tabla.

Columna izquierda: aquí se lee la simetría que se aplica de segunda.
El Símbolo de composición se lee "después de"

FILA

Fila superior: aquí se lee la simetría que se aplica de primera.

o	I	C	M	T	E_v	E_h	E_{d2}	E_{d1}
I	I	C	M	T	E_v	E_h	E_{d2}	E_{d1}
C	C	M	T	I	E_{d2}	E_{d1}	E_h	E_v
M	M	T	I	C	E_h	E_v	E_{d1}	E_{d2}
T	T	I	C	M	E_{d1}	E_{d2}	E_v	E_{h1}
E_v	E_{d1}	E_{d1}	E_h	E_{d2}	I	M	T	C
E_h	E_h	E_{d2}	E_v	E_{d1}	M	I	C	T
E_{d2}	E_{d2}	E_v	E_{d1}	E_h	C	T	I	M
E_{d1}	E_{d1}	E_h	E_{d2}	E_v	T	C	M	I

Aquí se lee la simetría que resulta de aplicar T después de E_{d1} (T o E_{d1})

TABLA 1: Composición de simetrías del cuadrado

Veamos ahora sólo un ejemplo de cómo verificar si se cumplen o no las propiedades enunciadas en los objetivos:

PROPIEDAD INVERTIVA:

Si al cuadrado le aplicamos la rotación C, o sea $\frac{1}{4}$ de vuelta, se observa que la rotación T de $\frac{3}{4}$ de vuelta, lo devuelve a su posición inicial.

Esto significa que la simetría T es la inversa de la simetría C.

¿Cuál será la simetría inversa de E_h? de I ? y de M ?

PROPIEDAD MODULATIVA:

Al aplicar al cuadrado una simetría cualquiera y luego la simetría inversa, se obtiene que el cuadrado vuelve a su posición inicial. Esta simetría que deja al cuadrado en su posición inicial, como si no se hubiera movido, se llama simetría idéntica o neutra, que simbolizamos con I.

$$\left.\begin{array}{l} I\,(ABCD) = ABCD \\ (T \circ C)\,(ABCD) = ABCD \end{array}\right\} T \circ C = I$$

PROPIEDAD CLAUSURATIVA:

La composición de dos simetrías del cuadrado se puede reemplazar por una sola simetría; veamos:

La posición del cuadrado que se obtiene de aplicarle $(T \circ E_{\overleftrightarrow{d1}})$ o sea T después de $E_{\overleftrightarrow{d1}}$, se obtiene aplicándole solo $E_{\overleftrightarrow{h}}$.

Esto quiere decir que $(T \circ E_{\overleftrightarrow{d1}})\,(ABCD) = E_{\overleftrightarrow{h}}(ABCD)$

¿Qué simetría produce el mismo efecto de aplicar E_h después de M ? de aplicar $M \circ T$? y de aplicar $(E_{\overleftrightarrow{d1}} \circ E_{\overleftrightarrow{v}})$.

Con el ejemplo anterior, $T \circ C = I$, podemos ver por qué se necesita aceptar la simetría idéntica o neutra como simetría activa para que se cumpla la propiedad clausurativa.

PROPIEDAD ASOCIATIVA:

Veamos cómo efectuar la composición de tres simetrías al cuadrado.

Apliquémosle $C \circ E_{\overleftrightarrow{h}} \circ E_{\overleftrightarrow{d2}}$

Se puede efectuar $C \circ E_{\overleftrightarrow{h}}$ después de haber aplicado $E_{\overleftrightarrow{d2}}$, o sea aplicar $(C \circ E_{\overleftrightarrow{h}}) \circ E_{\overleftrightarrow{d2}}$. También se puede aplicar C después de $(E_{\overleftrightarrow{h}} \circ E_{\overleftrightarrow{d2}})$ o sea aplicar $C \circ (E_{\overleftrightarrow{h}} \circ E_{\overleftrightarrow{d2}})$. La propiedad asociativa nos dice que los dos procedimientos siempre dan el mismo resultado.

Verifiquémoslo en este caso:

$[(C \circ E_{\overleftrightarrow{h}}) \circ E_{\overleftrightarrow{d2}}]\,(ABCD) = (E_{\overleftrightarrow{d1}} \circ E_{\overleftrightarrow{d2}})\,(ABCD) = M\,(ABCD)$

$[C \circ (E_{\overleftrightarrow{h}} \circ E_{\overleftrightarrow{d2}})]\,(ABCD) = (C \circ C)\,(ABCD) = M(ABCD).$

Se observa que de las dos maneras se obtiene el mismo resultado, lo que nos permite concluir que

$C \circ (E_{\overleftrightarrow{h}} \circ E_{\overleftrightarrow{d2}}) = (C \circ E_{\overleftrightarrow{h}}) \circ E_{\overleftrightarrow{d2}}$

¿Se cumple esta propiedad para tres simetrías cualesquiera del cuadrado? ¿Cuántas ternas habría que ensayar?

PROPIEDAD CONMUTATIVA:

Veamos el resultado de efectuar la composición de dos simetrías del cuadrado cuando se cambia el orden de aplicación.

¿Qué simetría produce el mismo efecto de aplicar $(E_{\overleftrightarrow{v}} \circ M)$?

¿Qué simetría produce el mismo efecto de aplicar $(M \circ E_{\overleftrightarrow{v}})$?

¿Es la misma simetría para los dos casos?

Se observa que en este caso el resultado no es el mismo lo cual significa que
$M \circ E_{\overleftrightarrow{v}} \neq E_{\overleftrightarrow{v}} \circ M$

Verifíquelo para otros casos, como $M \circ T$ y $T \circ M$, $T \circ E_{\overleftrightarrow{v}}$ y $E_{\overleftrightarrow{v}} \circ T$.

Con un solo caso en que no se cumpla la conmutativa, ya podemos decir que la composición de simetrías del cuadrado no cumple la propiedad conmutativa, pues para que esta se cumpla, se tiene que cumplir en todos los casos.

De estas experiencias se puede concluir que el conjunto de las simetrías del cuadrado con la composición de simetrías tiene estructura de grupo, pero que ese grupo no es un grupo conmutativo.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para hallar las simetrías de una figura, y los resultados de la composición de estas simetrías conviene que el alumno recorte en cartulina cada figura y ejecute todos los movimientos hasta que logre internalizarlos en forma de esquemas activos en la imaginación, y después pueda efectuarlos sin necesidad de transformar algo material.

Conviene que el alumno llene la tabla de las composición de las 8 simetrías activas del cuadrado, y al mismo tiempo vaya descubriendo o comprobando las propiedades.

Pueden resolver otros ejercicios como los siguientes:

- De las simetrías del cuadrado tomar las siguientes simetrías: I, M, $E_{\overleftrightarrow{v}}$ y $E_{\overleftrightarrow{h}}$.

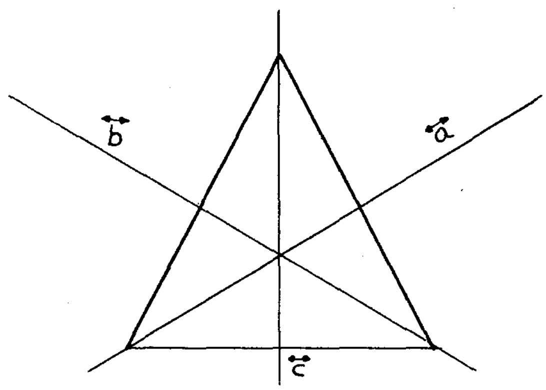
  Llenar la tabla de la composición y verificar que estas 4 simetrías con la operación composición forma un grupo. Dicho grupo es conocido como el grupo de Klein o “grupo cuatro”.

o	I	M	$E_{\overleftrightarrow{h}}$	$E_{\overleftrightarrow{v}}$
I				
M				
$E_{\overleftrightarrow{h}}$				
$E_{\overleftrightarrow{v}}$				

- Ensaye estas cuatro simetrías sobre un rectángulo no cuadrado y compruebe que también forman un "grupo cuatro" o de Klein. ¿Es conmutativo este grupo?

- Tomar las 4 rotaciones del cuadrado I, C, M y T y verificar que con la composición forman un grupo conmutativo. A este grupo se le conoce como **grupo cíclico de orden cuatro.**

- Llenar la tabla de composición de las simetrías activas del siguiente triángulo equilátero.



Recuérdese que las simetrías activas del triángulo equilátero son seis:

Tres rotaciones alrededor de su centro:

T: $\frac{1}{3}$de vuelta

D: $\frac{2}{3}$de vuelta

I: Una vuelta completa (o no hacer nada).

o	I	T	D	$E_{\overleftrightarrow{a}}$	$E_{\overleftrightarrow{b}}$	$E_{\overleftrightarrow{c}}$
I						
T						
D						
$E_{\overleftrightarrow{a}}$						
$E_{\overleftrightarrow{b}}$						
$E_{\overleftrightarrow{c}}$						

Tres reflexiones (o rotaciones en el espacio) tomando como eje las medianas $\overleftrightarrow{a}, \overleftrightarrow{b}, \overleftrightarrow{c}$:

$E_{\overleftrightarrow{a}}$, $E_{\overleftrightarrow{b}}$, $E_{\overleftrightarrow{c}}$.

Comprobar que tiene estructura de grupo.
¿Es un grupo conmutativo?

- Hallar el conjunto de las simetrías activas de un pentágono regular y comprobar que con la composición forman un grupo.

Nótese que a propósito de las propiedades de la composición de simetrías, se pueden lograr objetivos importantes de los sistemas lógicos, como la utilización apropiada de los cuantificadores, y las maneras de comprobar y refutar hipótesis.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

En un mismo plano y con un mismo centro

67 Verificar que para cada homotecia aplicada a figuras, hay por lo menos otra homotecia que regresa dichas figuras a su posición inicial.

68 Verificar que si se acepta que hay una homotecia idéntica (o neutra) la composición de homotecias es siempre una homotecia.

69 Comprobar que la composición de homotecias es asociativa.

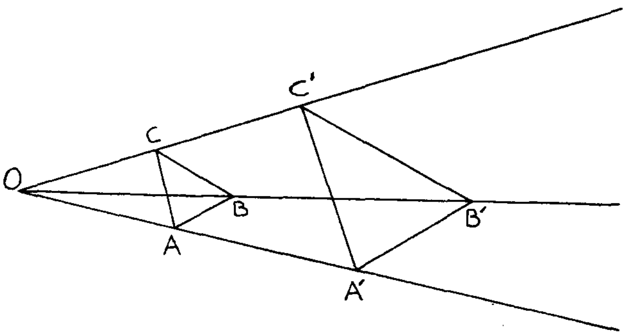
70 Verificar que al efectuar la composición de dos homotecias da lo mismo hacer una primero y después la otra, que hacerlas en el otro orden.

A las transformaciones que producen ampliaciones o reducciones "conservando la forma", o sea, manteniendo las proporciones entre parejas de segmentos correspondientes, se les conoce con el nombre de "homotecias".

- Cuando a un polígono se le aplica una homotecia siempre hay una homotecia que lo devuelve a su posición inicial. A dicha homotecia se le llama "homotecia inversa u opuesta".

  Al triángulo ABC se le aplicó la homotecia H_1 con centro en 0 y factor de conversión 2.

  Para devolverlo a su posición inicial, le aplicamos la homotecia H'_1 con el mismo centro y factor de conversión $\frac{1}{2}$



$H_1\,(ABC) = A'B'C'$

$H'_1\,(A'B'C') = ABC$

$(H'_1 \circ H_1)\,(ABC) = ABC$

H'_1 *es la inversa de* H_1.

¿Qué relación hay entre el factor de conversión de H_1 y el H'_1?

¿Cuál es el factor de conversión de la inversa de una homotecia cuyo factor de conversión es $\frac{2}{3}$?

En general si $v \in \mathbb{R}$, $v \neq 0$, es el factor de conversión de una homotecia H, ¿Cuál es el factor de conversión de la homotecia inversa de H?

- Después de aplicar a una figura la composición de una homotecia y su inversa se obtiene que la figura vuelve a su posición inicial, lo mismo sucede si se le aplica a la figura una homotecia con factor de conversión 1: queda en su posición inicial, es decir no se transforma. Esta es pues una homotecia especial.

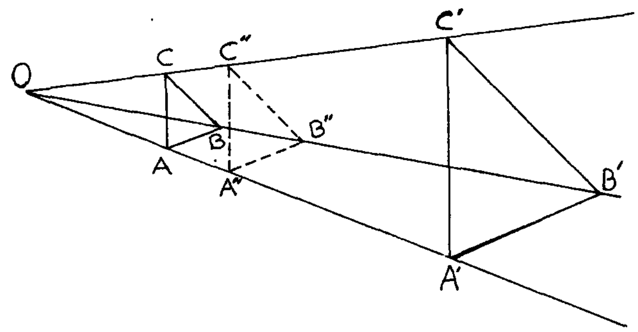
Si nos olvidamos de la parte activa y solo nos fijamos en la posición inicial y en la final de la figura después de esta homotecia especial, o de la composición de las dos homotecias inversas, se observa que la figura no se ha movido, es decir que conserva la posición inicial. Vamos a llamar "homotecia idéntica" a aquella homotecia que no cambia de posición a una figura o polígono.

La notaremos, y como homotecia su factor de conversión es 1.

- La composición de dos homotecias con un mismo centro y en un mismo plano siempre se puede reemplazar por una sola homotecia.

  Considèremos las homotecias H_2 y H_3.
  H_3: centro en 0 y factor de conversión 3.
  H_2: centro en 0 y factor de conversión $\frac{1}{2}$

Apliquemos al triángulo ABC, H_2 después de aplicar H_3 o sea $(H_2 \circ H_3)$



$H_3\,(ABC) = A'B'C'$
$H_2\,(A'B'C') = A''B''C''$
$H_2\,(H_3(ABC)) = H_2\,(A'B'C') = A''B''C''$

El triángulo A"B"C" también se puede obtener como el resultado de aplicar una solo homotecia a ABC.

¿Cuál es esa homotecia?

Sean H_4 y H_5 dos homotecias con el mismo centro y en un mismo plano, si el factor de conversión de H_4 es v y el factor de conversión de H_5 es s, $v \in \mathbb{R}$ y $s \in \mathbb{R}$, ¿Cuál es el factor de conversión de la homotecia que produce el mismo efecto que la composición de H_4 y H_5.

- Veamos ahora cómo efectuar la composición de tres homotecias.

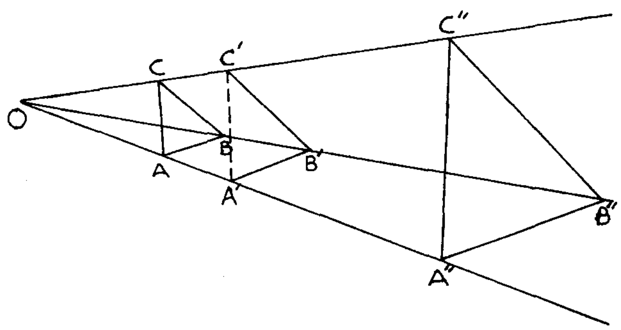
Consideremos nuevamente el triángulo ABC y las homotecias H_1, H_2 y H_3 definidas anteriormente.

Apliquemos $H_1 \circ H_2 \circ H_3$.

Para hallar el resultado podemos aplicar $H_1 \circ H_2$ después de H_3, o sea, $(H_1 \circ H_2) \circ H_3$ o aplicar H_1 después de $(H_2 \circ H_3)$ o sea $H_1 \circ (H_2 \circ H_3)$.

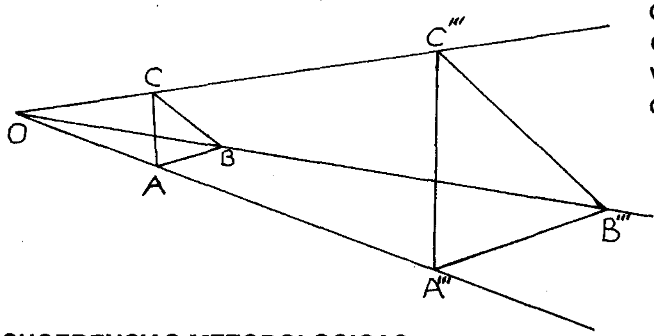
En cada caso la agrupación equivale a hacer un cálculo premeditado de la composición de dos de las homotecias para reducir la aplicación de las tres homotecias, a efectuar solo dos operaciones. De esta manera podemos comprobar que
$(H_1 \circ H_2 \circ H_3)(ABC) = [(H_1 \circ H_2) \circ H_3](ABC) =$
$[H_1 \circ (H_2 \circ H_3)](ABC)$

Veamos. Efectuemos $H_1 \circ (H_2 \circ H_3)$.



$$\left.\begin{array}{l}(H_2 \circ H_3)(ABC) = A'B'C' \\ H_1(ABC) = A''B''C''\end{array}\right\} H_1 \circ (H_2 \circ H_3)(ABC) = A''B''C''$$

Ahora efectúemos: $(H_1 \circ H_2) \circ H_3$



$H_3(ABC) = A'''B'''C'''$
$(H_1 \circ H_2)(A'''B'''C''') = A'''B'''C'''$, pues $H_1 \circ H_2$ era la identica I

De dos maneras diferentes se llegó al mismo resultado: A"B"C" = A'''B'''C''' lo mismo sucede con cualquier terna de homotecias (aunque no lo podamos verificar caso por caso, porque hay un número infinito de casos). Esto nos permite escribir las siguiente igualdad para cualquier terna de homotecias:
$(H_1 \circ H_2) \circ H_3 = H_1 \circ (H_2 \circ H_3)$

Esta es la propiedad asociativa de la composición de homotecias.

La composición de homotecias también cumple la propiedad conmutativa.

Si Hm y Hn son dos homotecias cualesquiera siempre se cumple que:

$$H_m \circ H_n = H_n \circ H_m$$

Verifique esta propiedad para las homotecias H_1 y H_3 dadas anteriormente.

En conclusión, la composición de homotecias en un mismo plano y con un mismo centro cumple las propiedades invertiva, clausurativa, idéntica (o modulativa) y asociativa.
Por esta razón se dice que este sistema formado por el conjunto de estas homotecias con la operación de composición tiene estructura de grupo. Además de estas propiedades, también se cumple la conmutativa, por esto se dice que además este es un grupo conmutativo.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para desarrollar estos objetivos conviene tener en cuenta lo siguiente:

- Hacer un repaso de lo propuesto en 7º Grado sobre homotecias: cuáles son sus características, cómo efectuarlas en el plano, cómo hallar la homotecia que se aplicó cuando se tiene una figura y su imagen, etc. antes de comenzar a verificar las propiedades de la composición de homotecias.

- En los contenidos básicos se verificaron las propiedades solo para un ejemplo. Como el conjunto de las homotecias es infinito, conviene que el alumno verifique cada una de ellas para el mayor número posible de ejemplos. Estas actividades se pueden aprovechar para que los alumnos formulen y refuten hipótesis, para introducirlos en las demostraciones, y para que acumulen experiencias que les permitan hacer generalizaciones.

Pueden resolver algunos ejercicios como los siguientes:

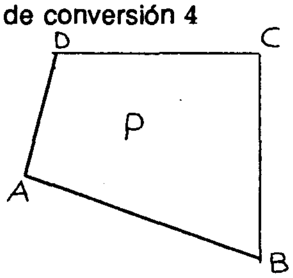
— Llenar la siguiente tabla de doble entrada colocando en cada casilla "si" o "no" según si se cumple o no la propiedad de la operación respectiva.

En los casos en que no se cumpla una propiedad dar un ejemplo para mostrar que no se cumple ("contra-ejemplo").

Propiedad / Operación	Clausurativa	Modulativa	Invertiva	Asociativa	Conmutativa
Rotación					
Trasalación					
Reflexión					
Simetría					
Homotecia					

—Dado el polígono ABCD y las siguientes homotecias con centro en P.

H_1: factor de conversión 2/3
H_2: factor de conversión 1/3
H_3: factor de conversión 4



• Verificar en el plano la propiedad asociativa para todas las posibles ternas de homotecias en orden de aplicación.

• Verificar la conmutativa para todos los posibles pares de homotecias.

• ¿Cuáles son las homotecias inversas de cada una de estas homotecias?

OBJETIVOS ESPECIFICOS

71 Clasificar los polígonos según sus simetrías en regulares e irregulares.

72 Caracterizar los polígonos regulares teniendo en cuenta: lados, vértices, ángulos, ejes de simetría, líneas notables.

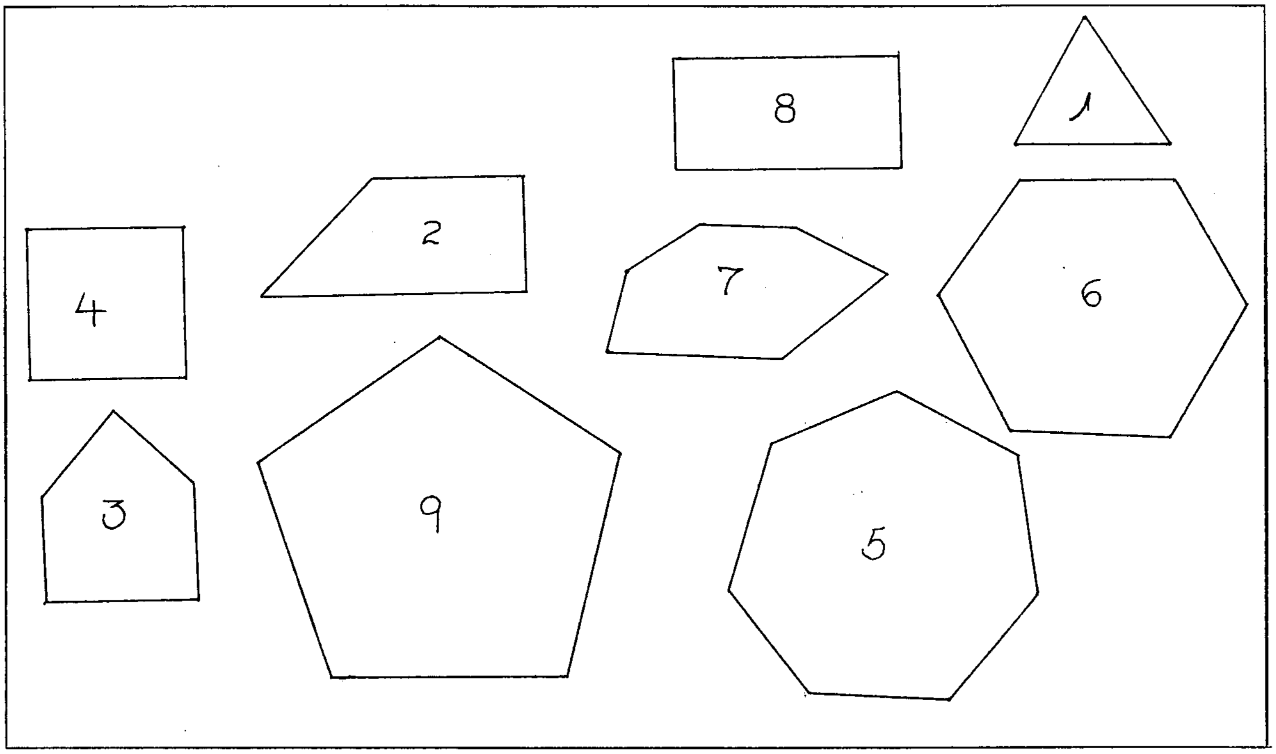
73 Buscar procedimientos para hallar perímetros y áreas de polígonos.

74 Caracterizar el círculo y buscar un procedimiento para hallar su perímetro y su área.

75 Determinar cómo varía el perímetro y el área de un polígono cuando varía el lado u otra línea notable conservando la forma.

CONTENIDOS BASICOS

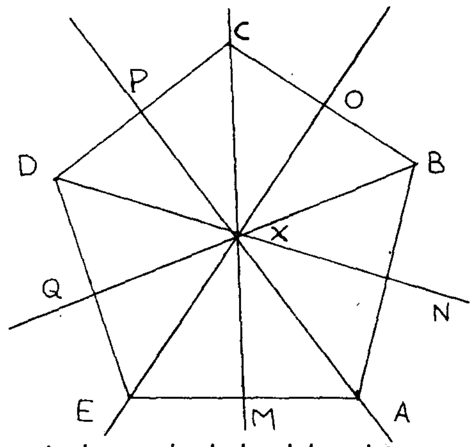
Recorte en cartulina los siguientes polígonos y halle todas las simetrías de cada uno.



Para cada uno de los polígonos coloque en el siguiente cuadro, las simetrías (rotaciones y reflexiones), los ejes de simetrías y el número total de simetrías.

Polígono	Rotaciones	# de rot.	Reflexiones	# de refle	Ejes de simetría	# total de Sime.
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9	$\frac{1}{5}$ v, $\frac{2}{5}$ v, $\frac{3}{5}$ v, $\frac{4}{5}$ v, I	5	$E_{\overleftrightarrow{MC}}$, $E_{\overleftrightarrow{ND}}$, $E_{\overleftrightarrow{DE}}$, $E_{\overleftrightarrow{PA}}$, $E_{\overleftrightarrow{QB}}$	5	$\overleftrightarrow{MC}$, $\overleftrightarrow{ND}$, $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{QB}$, X	10

Para un polígono como el 9 que es un pentágono, se tiene lo siguiente:



Cinco rotaciones alrededor del centro:

De $\frac{1}{5}$ de vuelta

De $\frac{2}{5}$ de vuelta

De $\frac{3}{5}$ de vuelta

De $\frac{4}{5}$ de vuelta

De una vuelta o Idéntica

Cinco reflexiones alrededor de los ejes:

$$\overleftrightarrow{MC}, \overleftrightarrow{ND}, \overleftrightarrow{OE}, \overleftrightarrow{PA}, \overleftrightarrow{QB}$$

Así este pentágono tendrá 6 ejes de simetría: uno perpendicular al plano de la hoja que pasa por el centro y que representamos con el punto X y los 5 ejes de reflexión (o corte del plano de reflexión).

Un polígono como el 7 tiene solo una rotación que es la idéntica y no tiene reflexiones.

¿El número de simetrías de cada polígono depende de la figura?

¿El número de rotaciones posibles que son simetrías depende del número de lados del polígono?

¿De los vértices? ¿De la longitud de los lados? ¿De la amplitud de los ángulos internos?

¿El número de reflexiones posibles que son simetrías depende del número de lados? ¿De los vértices? ¿De la longitud de los lados? ¿De los ángulos?

¿De qué depende?

Como resultado de estas experiencias y de estas observaciones se introduce el concepto de regularidad de un polígono. "Un polígono es regular si tiene tantos lados como simetrías que son rotaciones (contando la idéntica)".

Un triángulo equilátero (polígono 1) es regular porque tiene 3 lados y 3 rotaciones que le permiten una posición análoga a la inicial.

Los polígonos 4, 6, 5 y 9 son también polígonos regulares.

Un rectángulo que no sea cuadrado (polígono 8) no es regular puesto que tiene cuatro lados y sólo dos rotaciones que son simetrías.

Teniendo en cuenta las simetrías, los polígonos se pueden clasificar en regulares y no regulares o irregulares.

Los polígonos 2, 3, 7 y 8 son polígonos irregulares.

Al observar en los polígonos regulares los lados, los ángulos, los vértices, los ejes de simetría y las líneas notables de cada polígono se puede concluir lo siguiente:

- En un polígono regular el número de lados y de ángulos es el mismo.
- La longitud de todos los lados de un polígono regular es igual. ¿Por qué?
- La medida de los ángulos interiores de un polígono regular es la misma. ¿Por qué?
- El número de ejes de reflexión es igual al número de lados. ¿Por qué?
  Considera aparte el caso par (2, 4, 6 lados) y el caso impar (3, 5, 7 lados).
- Los ejes de reflexión del triángulo y del cuadrado coinciden con las líneas notables del polígono.

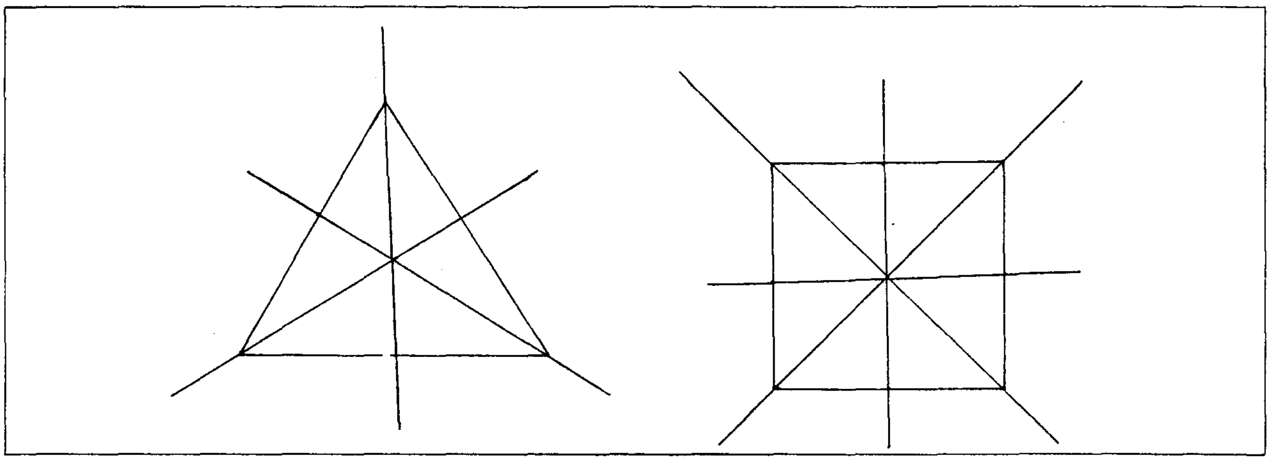
Veámoslo:

- Las líneas notables de un triángulo son las medianas, las mediatrices y las alturas.

  En un triángulo equilátero para un lado, estas tres líneas corresponden al mismo segmento de recta.

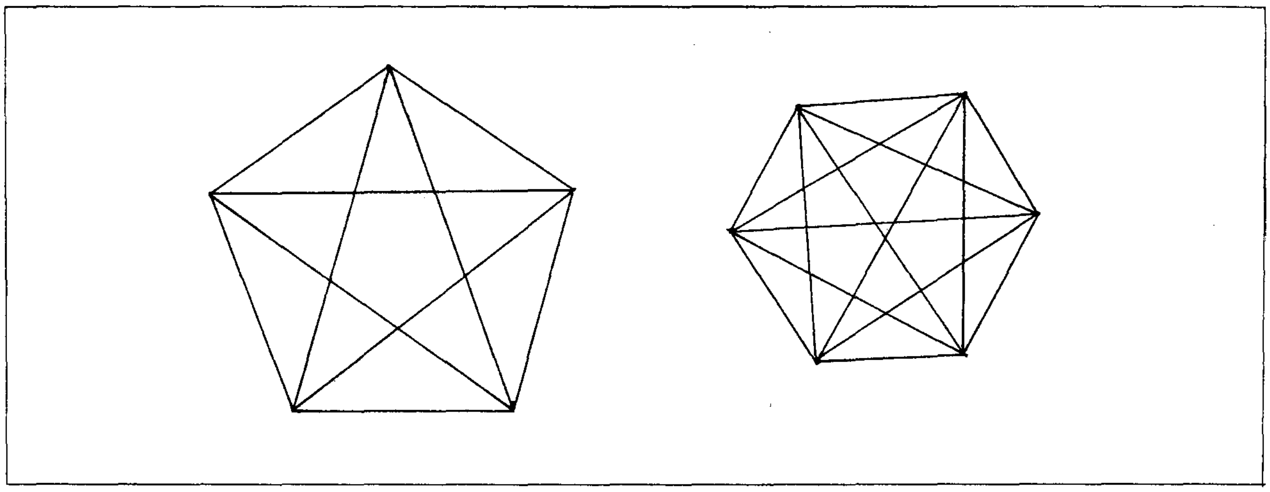
  Las líneas notables de un triángulo equilátero están sobre sus tres ejes de reflexión.

  Las líneas notables de un cuadrado son sus diagonales y sus medianas que están sobre sus ejes de reflexión.

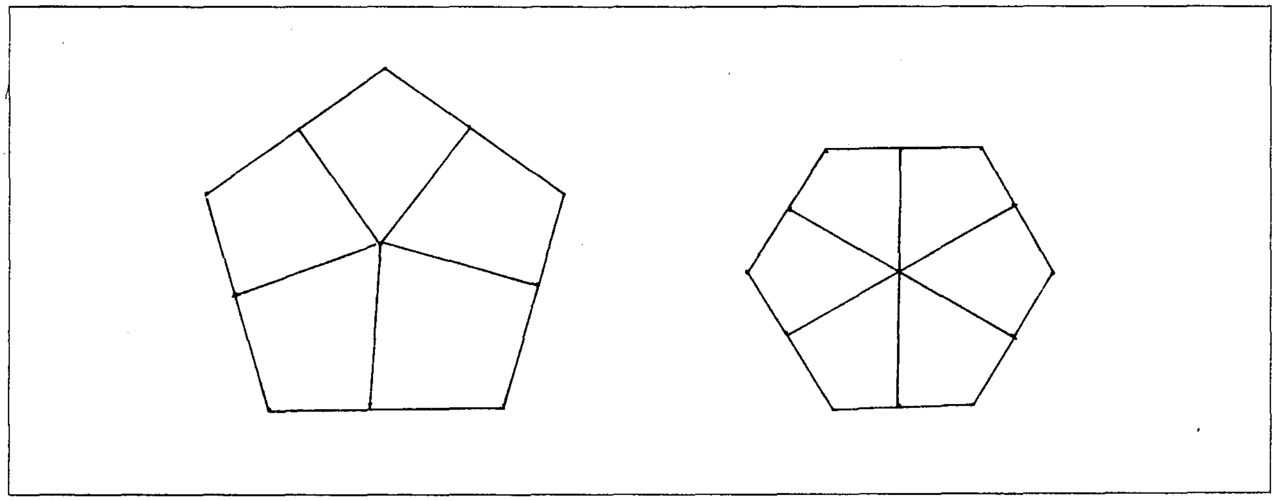


Para un polígono regular de más de cuatro lados las líneas notables son las diagonales y los apotemas.

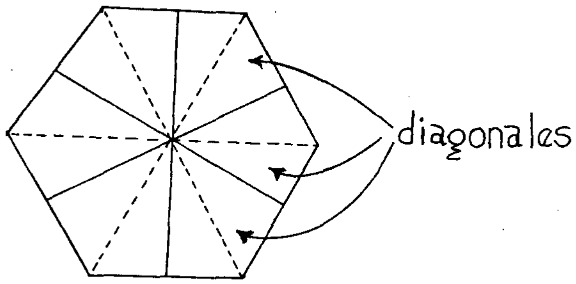
Diagonales: segmentos que unen dos vértices no consecutivos.



Apotemas: segmentos que unen el centro del polígono en el punto medio de cada lado. Estos segmentos son perpendiculares al lado sobre el que caen.



— En un polígono que tenga un número par de lados, las diagonales maximales (diagonales que unen dos vértices opuestos) están sobre algunos de los ejes de simetrías. También son ejes de simetría el segmento que reúne los dos apotemas de los dos opuestos. Veamos



¿Ocurrirá lo mismo para un polígono de un número impar de lados?

¿Algunas diagonales serán ejes de simetría?

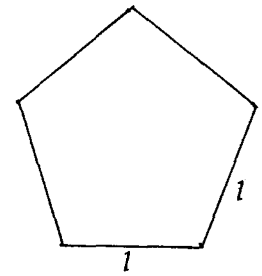
¿Un apotema será eje de simetría?

¿Qué relación tienen las líneas notables con los ejes de simetría?

- Existen procedimientos para hallar perímetros y áreas de polígonos.

Triangular o cuadricular un polígono es un procedimiento general para calcular áreas.

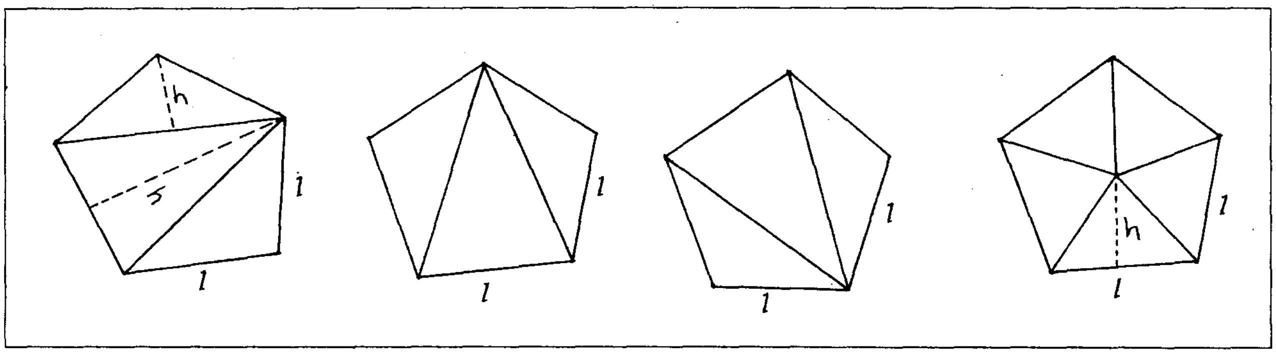
Busquemos procedimientos para calcular el perímetro y el área de un pentágono regular



El perímetro de un pentágono es:
$l + l + l + l + l = 5\,l$
$P = 5\,l$, 5 veces la longitud del lado.

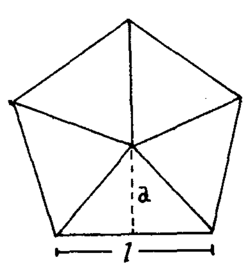
El perímetro de un polígono de n lados es n l

Para calcular el área, triangulemos el pentágono, se puede hacer de varias maneras:



Al calcular el área de cada uno de los triángulos en que se descompuso el pentágono, se encuentra que aunque en los tres primeros casos hay menos triángulos, es más difícil calcular sus áreas pues no son triángulos congruentes; por eso elegimos la cuarta manera de triangular el pentágono. Son cinco triángulos isósceles congruentes cuyas bases son los lados y cuyas alturas corresponden a las apotemas del polígono.

El área será igual al área de los 5 triángulos isósceles en que se descompuso el pentágono.



A Triángulo = $\frac{l \times a}{2}$

A Pentágono = $5(\frac{l \times a}{2}) = \frac{5 \times l \times a}{2}$
Perímetro = $5 \times l$

A Pentágono = $\frac{P \times a}{2}$

La altura de cada triángulo corresponde al apotema del pentágono.

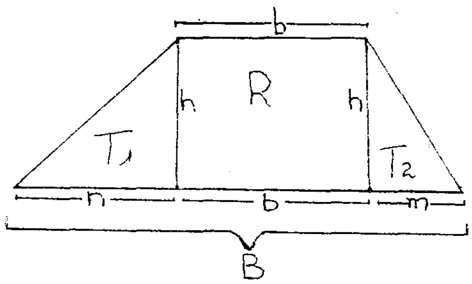
Para cualquier polígono regular el procedimiento es el mismo.

$$n \times \frac{l \times a}{2} = \frac{(n \times l) \times a}{2} = \frac{P \times a}{2}$$

P: Perímetro del polígono
a: apotema del polígono
n: número de lados del polígono.

De la misma manera, los polígonos que no son regulares se pueden triangular o cuadricular para buscar procedimientos para hallar sus áreas.

Veámoslo para el trapecio y el rombo.



$$A_{\text{Trapecio}} = A_{T_1} + A_{T_2} + A_R$$

$$A_{T_1} = \frac{n \times h}{2}$$

$$A_{T_2} = \frac{m \times h}{2}$$

$B = n + b + m$ $\qquad$ $A_R = b \times h$

$$A_{\text{Trapecio}} = \frac{n \times h}{2} + \frac{m \times h}{2} + b \times h$$

$$= \frac{n \times h}{2} + \frac{m \times h}{2} + \frac{2b \times h}{2}$$

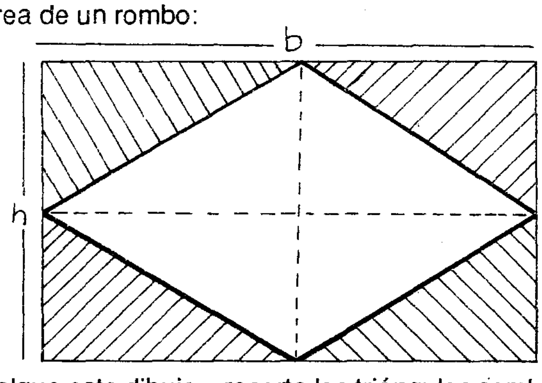
$$= \frac{(n + m + 2b).h}{2}$$

$$= \frac{(n + m + b + b).h}{2}$$

$$= \frac{(B + b).h}{2}$$

B y b son las bases del trapecio

Area de un rombo:



Calque este dibujo y recorte los triángulos sombreados. Forme con ellos un rombo y colóquelo sobre el rombo sin sombrear. Se tenía un rectángulo y ahora se tienen dos rombos de la misma área.

Area del rectángulo = $b \times h$

Area del rombo = $\frac{b \times h}{2}$

La base y la altura del rectángulo son las diagonales del rombo.

A (rombo)= $\frac{D \times d}{2}$

Invente otro procedimiento para hallar el área de un rombo. Mencione al menos dos procedimientos para hallar el área de un rectángulo, de un cuadrado, de un hexágono.

El Círculo:

Recorte en cartulina un círculo y hállele todas las simetrías.

Mencione algunas rotaciones que son simetrías de ese círculo. ¿Cuántas de estas simetrías rotacionales tendrá el círculo?

Mencione algunas reflecciones que son simetrías y sus correspondientes ejes. ¿Cuántas de estas simetrías tendrá el círculo?

De estas experiencias se puede concluir:

- El círculo tiene infinitas rotaciones que son simetrías e infinitas reflexiones que son simetrías.

- Se puede considerar el círculo como un caso límite de un "polígono regular de un número infinito de lados", y por lo tanto con un número infinito de simetrías.

- El radio correspondería al caso límite del apotema de ese "polígono".

- Los diámetros de un círculo están sobre los ejes de reflexión. Corresponderían a las diagonales más largas de ese "polígono".

Al comienzo de este programa, en el desarrollo de los objetivos 2, 3, 4, 5 se sugirió una actividad para hallar el perímetro de un círculo en función del diámetro.

Como resultado de esas experiencias se obtuvieron las aproximaciones:

$$C = 3.14\, d = \frac{22}{7}\, d$$

Al definir π como el ampliador del diámetro al perímetro se tiene exactamente:

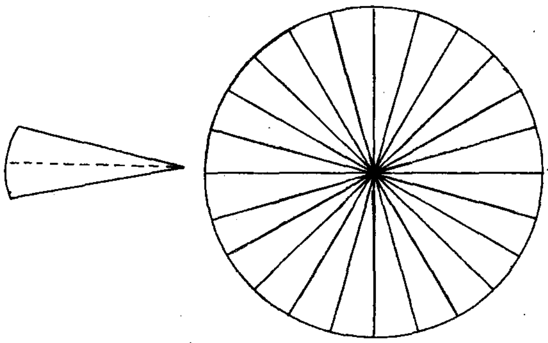
$$C = \pi\, d = 2\, \pi\, r$$

Así obtenemos un procedimiento para hallar perímetro de una circunferencia que es:
" π veces la longitud del diámetro"
" dos veces π por la longitud del radio".

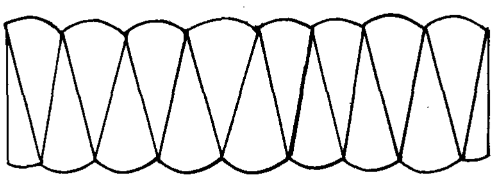
Busquemos ahora un procedimiento para hallar el área de un círculo aprovechando lo dicho sobre el caso límite de un polígono regular cuando va aumentando el número de lados:

- Recorte en cartulina un círculo de 10 cm de radio y divídalo en 16 partes de la misma área como se muestra en el gráfico.

- Recorte cada una de las 16 partes de igual área en que quedó dividido el círculo y una de las 16 partes córtela por la mitad así:



- Organice los pedazos recortados de tal manera que la figura armada se parezca a un rectángulo. Los dos pedazos de menor área se colocan en los extremos así:



Queda como un rectángulo, excepto por la base un poco ondulada.

- ¿Qué relación existe entre la longitud de la base de este "rectángulo ondulado" y la longitud de la circunferencia (o perímetro del círculo)?

- ¿Qué relación existe entre la altura del "rectángulo ondulado" y el radio del círculo?

- ¿Cómo se hallaría el área aproximada de este "rectángulo ondulado"?

- Con base en esta experiencia ¿Puede inventar un procedimiento para hallar el área del círculo?

El área aproximada del círculo recortado es igual al área aproximada del rectángulo formado:

A (rectángulo) = $b \times h = \frac{1}{2}$ Perímetro x radio
$= \frac{1}{2}\, 2\pi r \cdot r = \pi r^2$

Para hallar el área de cualquier círculo se multiplica π por el cuadrado del radio.

– Compare este procedimiento con el que se obtendría a partir de la manera como obtuvimos el área de un polígono regular en función del perímetro y del apotema: A = $\frac{P \cdot a}{2}$. Como el apotema del polígono se acerca al radio del círculo como polígono límite, y el perímetro del polígono se acerca al perímetro del círculo, el área se va acercando a:

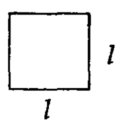
$$\frac{p \cdot r}{2}$$

Como $p = 2\pi r$, A (círculo)= $\frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$

– Lea y analice la lectura "rompecabezas cuadrado" que aparece al final de la unidad.

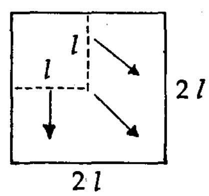
Un problema como este nos lleva a analizar que el perímetro de un cuadrado no varía en la misma proporción que varía su área.

Veamos cómo varían el perímetro y el área de un cuadrado cuando se duplica, se triplica, etc., la longitud de su lado.



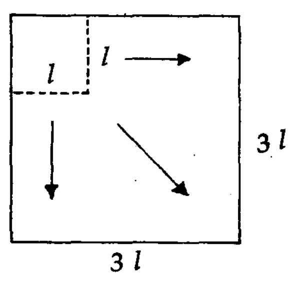
Perímetro = $l + l + l + l = 4l$
Area = $l \times l = l^2$

Dupliquemos la longitud del lado:



$P = 2l + 2l + 2l + 2l = 8l$
$A = 2l \times 2l = 4l^2$

Ahora tripliquemos la longitud del lado:



$P = 3l + 3l + 3l + 3l = 12l$
$A = (3l)^2 = 9l^2$

¿Qué pasa con el perímetro y el área cuando se cuadruplica o se quintuplica el lado?

Llamemos l_{in} al lado inicial, P_{in} al perímetro inicial, y A_{in} al área inicial.

Resumiendo se tiene:

Lado	**Perímetro**
l_{in}	$4\,l_{in} = P_{in}$
$2\,l_{in}$	$8\,l_{in} = 2(4\,l_{in}) = 2\,P_{in}$
$3\,l_{in}$	$12\,l_{in} = 3(4\,l_{in}) = 3\,P_{in}$
$n\,l_{in}$	$n\,(4\,l_{in}) = n\,P_{in}$

Lado	**Area**
l_{in}	$l^2_{in}=A_{in}$
$2l_{in}$	$4l^2_{in}=4A_{in}$
$3l_{in}$	$9l^2_{in}=9A_{in}$
$4l_{in}$	$16l^2_{in}=16A_{in}$
nl_{in}	$nl^2_{in}=nA_{in}$

- Si se duplica, se triplica, se cuadruplica, etc., la longitud del lado de un cuadrado, su perímetro se duplica, triplica, cuadruplica, etc., respectivamente.

En general si se le aplica un operador multiplicativo n( ) a la longitud del lado de un cuadrado, ese mismo operador aplicado al perímetro inicial nos produce el nuevo perímetro.

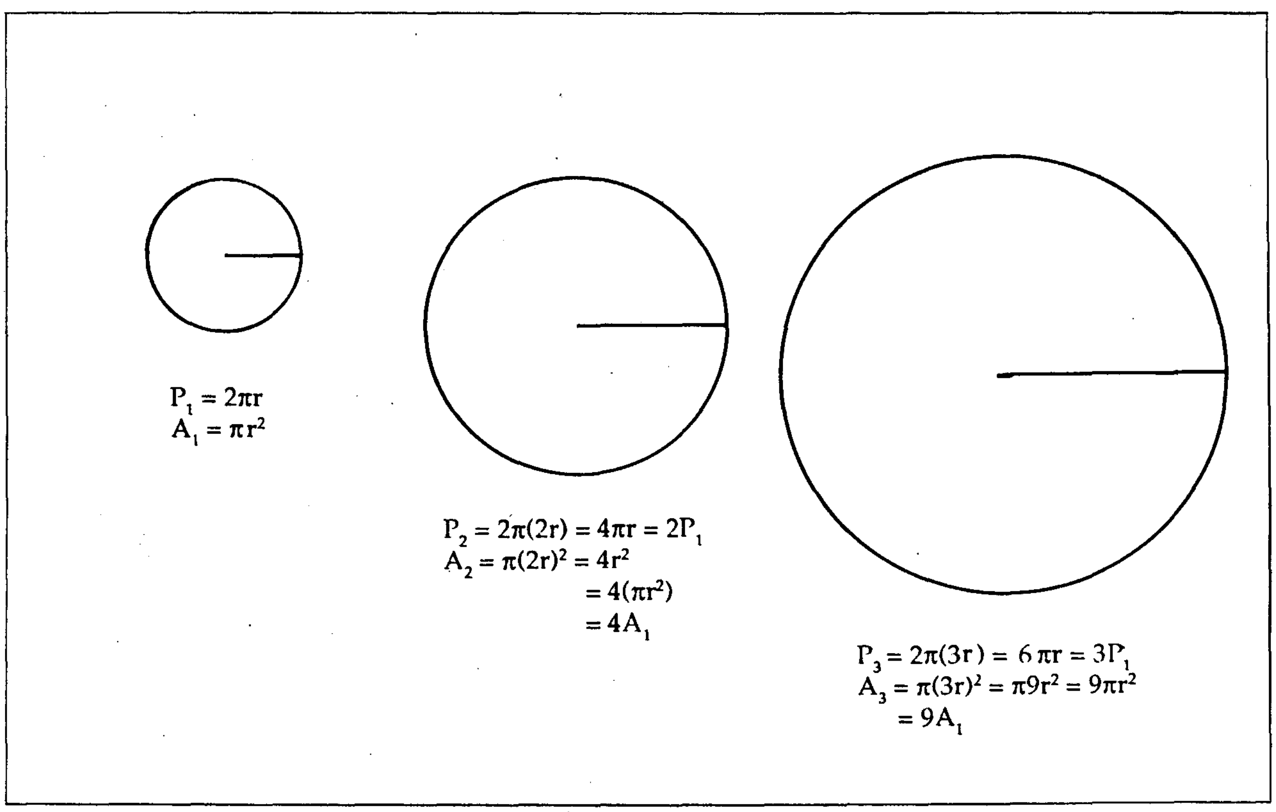
- Si se duplica, triplica, cuadruplica, etc., la longitud del lado de un cuadrado, su área se hace cuatro veces, 9 veces, 16 veces, etc. más grande, respectivamente.

En general si se le aplica un operador multiplicativo n( ) con $n > 1$ a la longitud del lado de un cuadrado, el área del nuevo cuadrado no va a ser n veces más grande que el área del cuadrado original, sino n^2 veces más grande.

- Decimos que el perímetro es directamente proporcional al lado, o que el perímetro varía linealmente con el lado, o que el perímetro es una función lineal del lado.

En cambio, decimos que el área no es directamente proporcional al lado (aunque si está directamente correlacionada con el lado). Más bien decimos que el área varía como el cuadrado del lado, o que el área es una función cuadrática del lado. (Ver la unidad de funciones lineales y cuadrática).

— Veamos ahora cómo varían el perímetro y el área de un circulo cuando varía la longitúd del radio.



SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Por considerar que el tema es bastante conocido por el profesor y manejado por el alumno, no hemos desarrollado detalladamente los objetivos. Corresponde al profesor ampliar y complementar los contenidos, así como seleccionar un buen número de ejercicios de aplicación e integrarlos con los demás sistemas.

Hay que observar que basta con que las rotaciones que son simetrías sean tantas como los lados de un polígono para que ese polígono sea regular (aunque tenga también el mismo número de reflexiones).

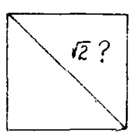
Conviene elaborar cuadros para recoger la información sobre cada polígono, y así orientar a los alumnos a través de preguntas para que saquen por sí mismos las conclusiones deseadas.

A través de estos temas estamos pasando de los sistemas geométricos a los sistemas métricos sin darnos cuenta. Conviene insistir en mantener separados los conceptos geométricos como radio, apotema, diagonal, etc. de los conceptos métricos como la longitud, el área, etc. Una cosa es el segmento dado, y otra su longitud en un sistema métrico específico.

El radio es considerado como el segmento y como la medida de ese segmento en algún sistema métrico.

El apotema es a veces una línea notable de un polígono regular y a veces la medida de ese segmento.

Cuando se dice que la diagonal del siguiente cuadrado es $\sqrt{2}$ se está ocultando el sistema métrico que se utilizó. La medida en cm no es $\sqrt{2}$ sino $\sqrt{2}$ veces la longitud del lado. Pero si la unidad de medida es el lado, entonces sí resulta que la diagonal tiene $\sqrt{2}$ veces esa longitud unidad.



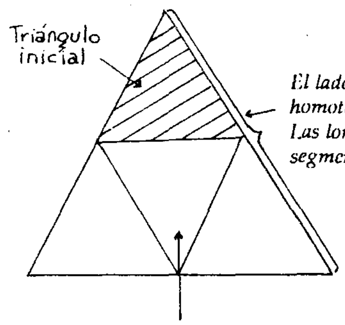
Para cada figura específica, implícitamente se construye un sistema métrico, cuya unidad básica de longitud es el lado de esa figura. (En el caso del círculo es el radio y para los griegos fue el diámetro).

El tema de las áreas ayuda a repasar y fortalecer temas vistos en la primaria como es el concepto mismo de área, medición de áreas, sus unidades y conversiones entre estas unidades. No conviene dar las fórmulas de las áreas, sino esperar a que los alumnos las deduzcan de sus experiencias para que no confundan el concepto de área con alguna de las fórmulas para hallar su valor numérico.

Se pueden ingeniar interesantes problemas sobre áreas sombreadas y aprovechar para buscar procedimientos para hallar áreas de sectores, segmentos y coronas circulares.

Otro ejercicio que pueden hacer es el de determinar como varían el perímetro y el área de un triángulo equilátero cuando varía el lado.

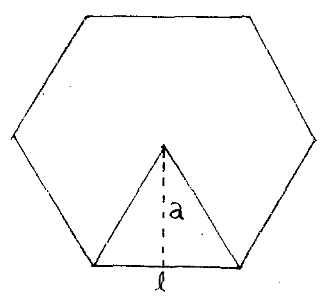
Veámoslo gráficamente:



El área se cuadruplicó, pues ahora tenemos 4 triángulos congruentes con el triángulo original.

Compruebe ahora analíticamente el mismo resultado.

Considere el siguiente hexágono regular



Duplique su apotema
¿Varía el lado? ¿En qué proporción varía?
¿Cómo varía el perímetro?
¿Cómo varía el área?

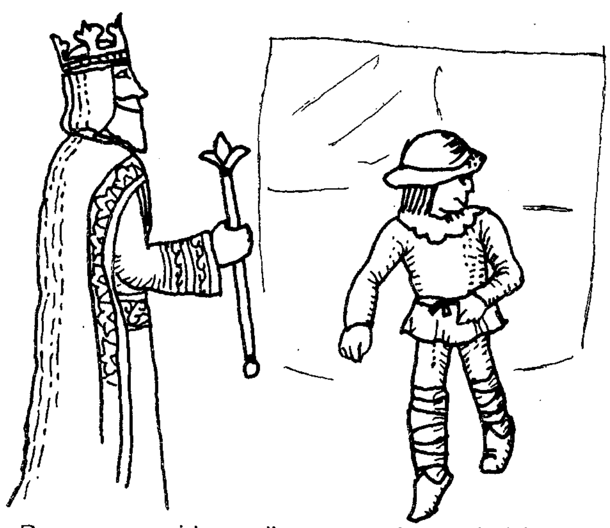
ROMPECABEZAS CUADRADO

Hace mucho tiempo, había un granjero cuya finca tenía forma cuadrada. Cada lado del cuadrado medía exactamente cien pasos de largo.

Un día llamó a la casa del granjero un hombre cansado, cubierto de polvo, pidiendo algo de comer. El granjero, que era muy bondadoso, le ofreció un abundante almuerzo.

Una vez que hubo terminado de comer, el forastero dijo estas palabras: "Granjero, yo soy tu rey. Como recompensa por tu bondad al ofrecerme comida, creyendo que yo no era sino un humilde extranjero, te concedo que dobles la extensión de tu finca. Pero cuando hayas añadido el nuevo terreno, tu granja deberá seguir teniendo la forma de un cuadrado".

El granjero se puso contentísimo, pues ahora podría sembrar el doble de superficie. Sin pensarlo dos veces, salió a medir su nuevo terreno para poder después cercarlo.



Pero en seguida se dio cuenta de que había un problema.

En un principio parecía fácil doblar su cuadrado de terreno. Parecía que, dado que cada lado del cuadrado medía cien pasos de largo, cada lado del nuevo cuadrado habría de medir doscientos pasos de largo, es decir, dos veces la longitud de los anteriores lados. Pero no resultó así. Haciendo que los nuevos lados midieran doscientos pasos no se doblaba su finca, ¡se hacía cuatro veces mayor! Era, de hecho, tan grande que contenía cuatro cuadrados, cada uno de cuyos lados medía cien pasos de largo.

El granjero se rascó la cabeza. Finalmente, volvió a su casa y cogió lápiz y papel.

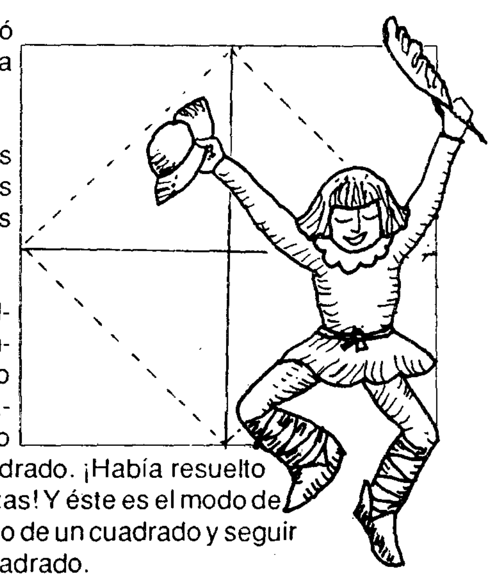
Después de mucho pensarlo, se le ocurrió una idea. Dividiría su cuadrado de terreno en cuatro partes más pequeñas. Después, simplemente, añadiría otros cuatro cuadrados del mismo tamaño que los cuatro pequeños que ya tenía. Así obtendría exactamente el doble de terreno de su primer cuadrado.

Primero, intentó añadir los nuevos cuadrados a un lado del suyo anterior. Pero eso no era posible, ya que el resultado era un rectángulo, no un cuadrado.

Luego intentó añadir dos nuevos cuadrados a un lado del anterior y dos al otro lado. Esto casi estaba bien. Pero faltaba un trozo en una esquina, así que no era un cuadrado perfecto. Y si añadía el pedazo que faltaba, entonces tenía más del doble de su granja.

De nuevo el granjero se rascó la cabeza. Entonces, se le ocurrió otra idea. Dividió su cuadrado en cuatro partes dibujando líneas diagonales. Así el cuadrado quedaba dividido en cuatro triángulos. Si podía añadir cuatro triángulos del mismo tamaño —formando un cuadrado— tendría la solución.

Así pues, añadió un triángulo a un lado de su cuadrado.



Después agregó otro triángulo a otro lado.

Y los otros dos triángulos, a los otros dos lados del cuadrado.

La figura resultante era un rombo; pero cuando lo hizo girar hacia un lado vio que era un cuadrado. ¡Había resuelto su rompecabezas! Y éste es el modo de doblar el tamaño de un cuadrado y seguir teniendo un cuadrado.

Unidad IV

MATEMATICA FINITA Y SISTEMAS RELACIONALES

Introducción

La primera parte de la unidad presenta una síntesis de la combinatoria que se viene trabajando desde la Básica Primaria, donde el énfasis se hacía en construir los arreglos que podían obtenerse, a partir de algunos objetos dados. Se trata ahora de encontrar una forma para hallar el número de permutaciones de m elementos tomados de un conjunto de n elementos. La propuesta se amplía para hallar las permutaciones que pueden formarse con elementos de dos conjuntos.

Las generalizaciones relacionadas con las combinaciones se explicitarán en el grado noveno sin excluir la posibilidad de que el docente, si lo considera conveniente, trate este tema con sus alumnos.

La segunda parte tiene como objeto de estudio las relaciones y la composición de relaciones, que se hace con base en las relaciones familiares.

Esta unidad parece un poco teórica y aislada de las primeras unidades debido a la necesidad de aclarar y precisar algunos conceptos que dentro de esta propuesta tienen un nuevo enfoque, entre ellos el de relación. Es pues deseable que el docente la estudie y analice antes de llevarla al aula. Seguramente encontrará la forma de integrarla con las dos primeras unidades de esta propuesta y darle así mayor sentido y utilidad. Lograr esta integración es el reto de quienes sigamos trabajando esta propuesta con la intención de mejorarla según los resultados de su aplicación en el aula y con el empeño de mejorar la relación afectiva que los educandos puedan establecer con las matemáticas.

Objetivos generales

—Relacionar los arreglos donde importa el orden con parejas ordenadas, ternas ordenadas, cuaternas ordenadas, etc. de elementos diferentes de un conjunto de n elementos y desarrollar un procedimiento para hallar el número de permutaciones de m elementos tomados de un conjunto de n elementos.

—Reconocer cuando una colección de subconjuntos de un conjunto es una partición e identificar las relaciones que la determinan y las propiedades de tales relaciones.

—Identificar diferentes tipos de relaciones, las propiedades que las caracterizan y las diferentes formas de representarlas.

—Hallar la relación compuesta de dos relaciones binarias.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

76 Obtener todas las parejas ordenadas, ternas ordenadas, cuaternas ordenadas, etc., de elementos diferentes en un conjunto de n elementos ($n \leq 5$).

77 Identificar las parejas ordenadas, las ternas ordenadas, las cuaternas ordenadas, etc. de elementos diferentes de un conjunto de n elementos como las permutaciones de 2, 3, 4, etc. elementos tomados del conjunto original.

78 Desarrollar un procedimiento para hallar directamente el número de permutaciones de m elementos tomados de un conjunto de n elementos.

CONTENIDOS BASICOS

Se llama permutación a cualquier sistema bien ordenado de objetos (llamado también "conjunto bien ordenado" de objetos). Cada permutación es pues una ordenación específica de los elementos de un conjunto, en que se asigna a cada uno de ellos un orden preciso con un elemento como "primero", otro como "segundo", etc. También se puede llamar "permutación" en sentido activo a la operación de cambiarle el orden a un conjunto bien ordenado. Por ejemplo la trasposición que cambia el sistema (1, 2) en el sistema (2, 1) es una permutación activa.

En una ordenación específica pueden intervenir **todos** los n elementos de un conjunto, en este caso se obtiene una permutación de esos n objetos. El número total de dichas ordenaciones se conoce como el número de permutaciones de n objetos tomados de n en n. Dos permutaciones de n objetos difieren en el orden de sus elementos.

Cuando en una ordenación específica **no** intervienen todos los n elementos de un conjunto sino m de ellos, se obtiene una permutación de esos m objetos. El número total de dichas ordenaciones se conoce como el número de permutaciones de m objetos tomados de un conjunto de n elementos.

Ejemplos:

1. Si se tiene un conjunto de dos elementos A = {María, Rosa}. ¿Cuántos nombres distintos se pueden formar con esas palabras, sin repetirlos?

Son dos los nombres distintos, de dos palabras, que pueden formarse: María Rosa y Rosa María.

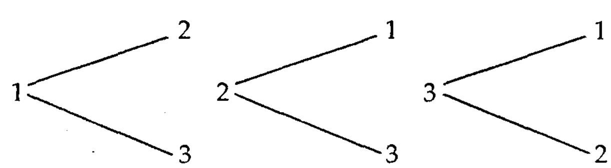
Si representamos el producto cartesiano $A \times A$ mediante una tabla cartesiana como:

Rosa	(María, Rosa)	(Rosa, Rosa)
María	(María, María)	(Rosa, María)
	María	Rosa

Vemos que las parejas (María, María) y (Rosa, Rosa) quedan excluidas del ejercicio, mientras que las parejas (Rosa, María) y (María, Rosa) nos dan tanto el orden como las componentes para elaborar los dos nombres pedidos.

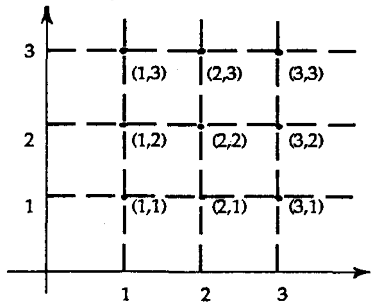
2. ¿Cuántos numerales de dos cifras diferentes se pueden escribir con los elementos del conjunto B = {1, 2, 3}?

La primera cifra se puede escoger de tres maneras. Puede ser 1, 2 o 3. Para la segunda cifra quedan, en cada caso, dos posibilidades:



Los numerales pedidos son: 12, 13, 21, 23, 31 y 32.

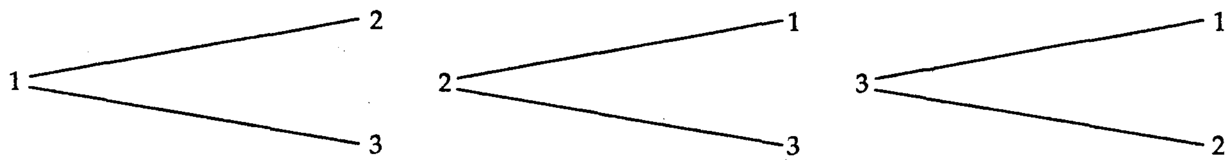
En la gráfica del producto cartesiano B x B.



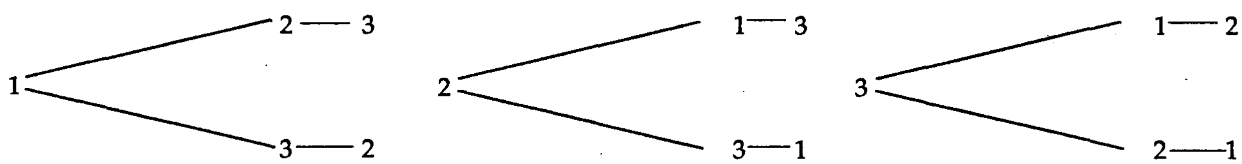
Se observa que las parejas que están sobre la diagonal quedan excluídas del ejercicio, mientras que las parejas representadas por puntos simétricos a ella sí proporcionan la información necesaria para el ejercicio.

3. Si se tiene el conjunto {1, 2, 3} ¿Cuántos numerales de tres cifras diferentes se pueden escribir con los elementos de ese conjunto?

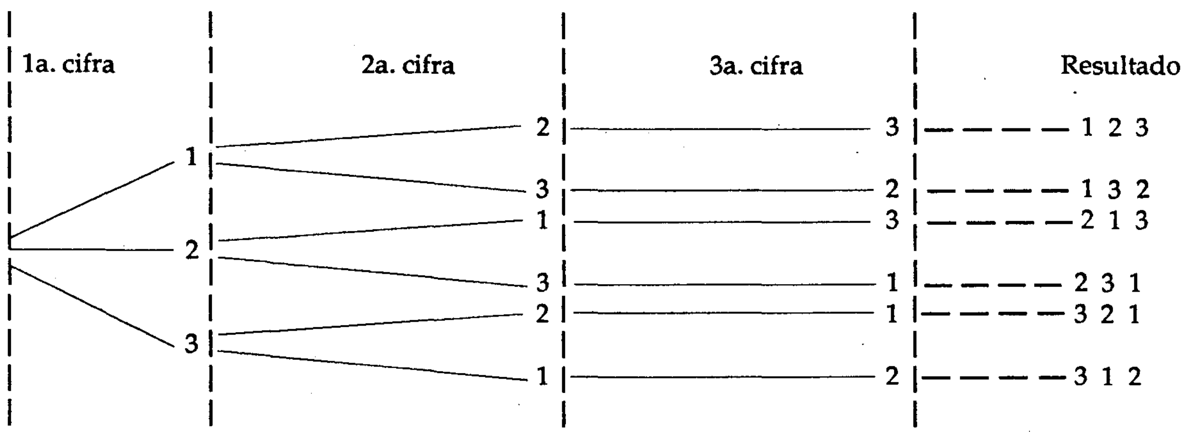
La primera cifra se puede escoger de tres maneras. Puede ser 1, 2 o 3. Una vez se fije la primera cifra, para la segunda quedan dos posibilidades:



Una vez se fijen la primera y la segunda cifra, para escoger la tercera queda una sola posibilidad (Forzada!)



Los pasos anteriores se pueden resumir en una sola representación llamada diagrama arbolar:



Obsérvese que las cifras de cada numeral son diferentes, es decir no se repiten.

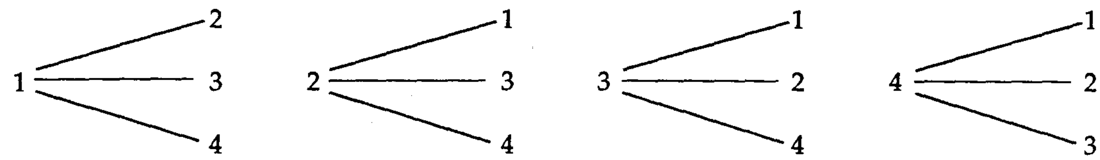
Para hallar el número de permutaciones se puede elaborar un casillero como:

Formas posibles para escoger la 1a. cifra	Formas posibles para escoger la 2a. cifra	Formas posibles para escoger la 3a. cifra
3	2	1

$3 \times 2 \times 1 = 6$

Permutaciones con **posibles repeticiones**: las permutaciones pueden incluir aquellos casos en que un elemento se repita. Veamos un ejemplo de este tipo.

4. ¿Cuántos numerales de dos cifras (con o sin repetición) se pueden escribir con los elementos del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$



12, 13, 14   21, 23, 24   31, 32, 34   41, 42, 43

Estos son los numerales de dos cifras diferentes sin repetición.

Para completar el ejercicio se agregan los numerales 11, 22, 33 y 44. Así se obtiene un total de 16 permutaciones de dos elementos tomados del conjunto de cuatro elementos. En este caso, para hallar el número de permutaciones, sin o con repetición, mediante el casillero, se tiene respectivamente.

Sin repetición:

Formas posibles para escoger la 1a. cifra	Formas posibles para escoger la 2a. cifra
4	3

$4 \times 3 = 12$

Con posibles repeticiones:

Formas posibles para escoger la 1a. cifra	Formas posibles para escoger la 2a. cifra
4	4

$4 \times 4 = 16$

Si los numerales pedidos fueran de tres cifras, los casilleros serían:

—Sin repetición:

Formas posibles para escoger la 1a. cifra	Formas posibles para escoger la 2a. cifra	Formas posibles para escoger la 3a. cifra
4	3	2

$4 \times 3 \times 2 = 24$

—Con repeticiones posibles:

Formas posibles para escoger la 1a. cifra	Formas posibles para escoger la 2a. cifra	Formas posibles para escoger la 3a. cifra
4	4	4

$4 \times 4 \times 4 = 64$

5. Retomemos un ejemplo visto en la unidad 5 de séptimo grado. Se trata de cuatro caballos: *el alazán*, el *bayo*, el *cenizo* y el *dorado*. Estos caballos los designamos con las letras a, b, c, d respectivamente. Supongamos que ellos participan en una competencia de carreras de caballos.

¿Cuántas son las posibles cuaternas ordenadas de caballos que pueden darse al final de la competencia suponiendo que no hay empates?

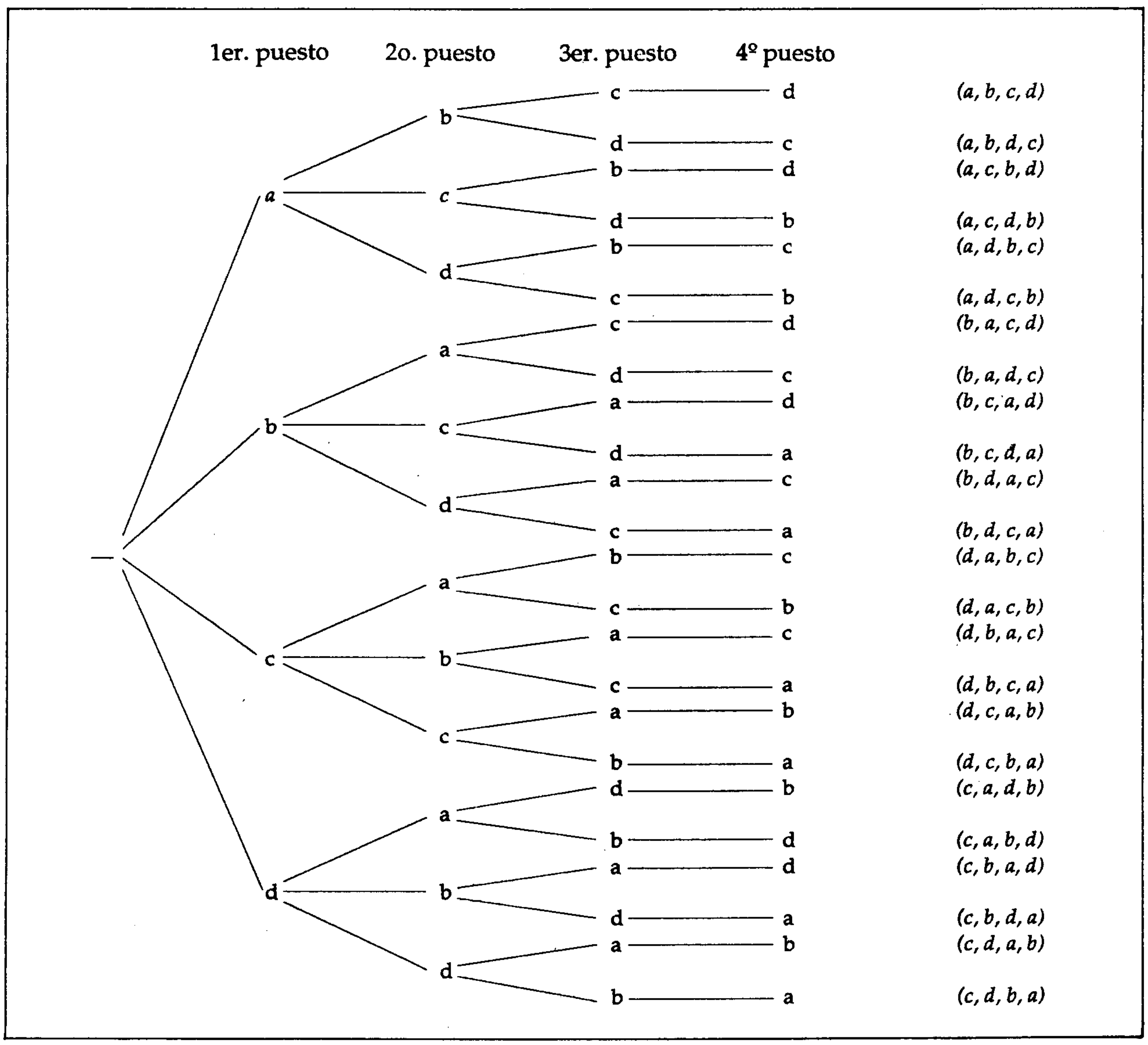
Realicemos el diagrama de árbol correspondiente: (Ver el gráfico).

NOTA: El conjunto de las cuaternas ordenadas {(a, b, c, d(, (a, b, d, c), ..., (c, d, b, a)} es el subconjunto del producto cartesiano:

{a, b, c, d} x {a, b, c, d} x {a, b, c, d} x {a, b, c, d} cuyos elementos tienen sus cuatro componentes distintas.

6. Retomemos nuevamente el ejemplo de los caballos de carrera y preguntémonos ¿de cuántas maneras posibles se pueden seleccionar tres caballos y de cuántas formas posibles se podría llenar un formulario de apuestas con el orden de llegada de esos tres caballos?

Ya en séptimo (7º) grado se resolvió la primera parte de este ejercicio y se vió que las formas posibles de seleccionar tres caballos corresponden a los subconjuntos de tres elementos del conjunto dado, o sea al número de combinaciones de tres elementos tomados de un conjunto de cuatro elementos.



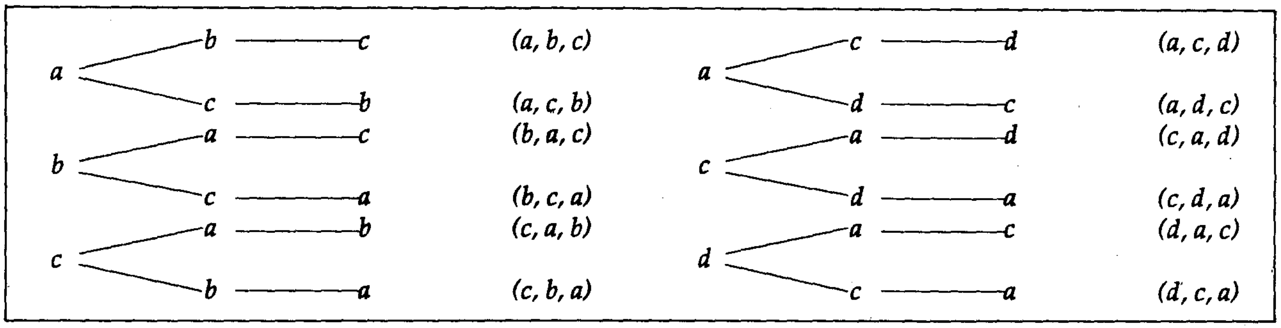
4	3	2	1
1er. puesto	2º puesto	3er. puesto	4º puesto

4 x 3 x 2 x 1 = 24

Diagrama del ejemplo 5

Continuación del ejemplo 6:

Estas posibilidades son: *{a, b, c}*, *{a, c, d}*, *{a, b, d}* y *{c, b, d}*. De cada uno de estos conjuntos de tres elementos se pueden obtener seis ternas ordenadas distintas:



y así sucesivamente hasta obtener las 24 ternas ordenadas. Estas serían las posibles formas de llenar un formulario de apuestas con el orden de llegada de los tres primeros caballos.

Como ejercicio se puede hacer el diagrama arbolar completo.

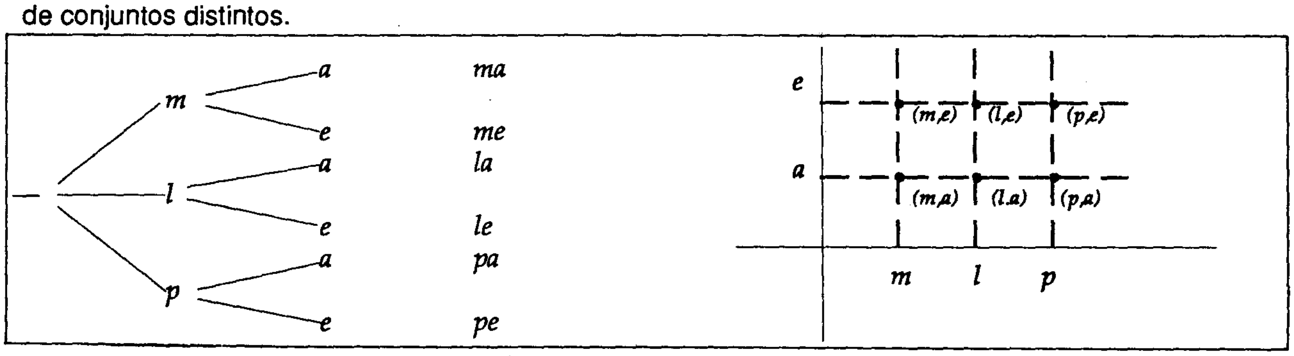
El número de estas permutaciones mediante el casillero lo podemos hallar así:

Formas posibles para seleccionar el primer caballo	Formas posibles para seleccionar el segundo caballo	Formas posibles para seleccionar el tercer caballo
4	3	2

4 x 3 x 2 = 24

Permutaciones entre elementos de dos conjuntos: los elementos que intervienen en una permutación pueden tomarse de varios conjuntos, es decir pueden provenir, no del producto cartesiano de un conjunto por sí mismo, sino del producto cartesiano de conjuntos distintos.

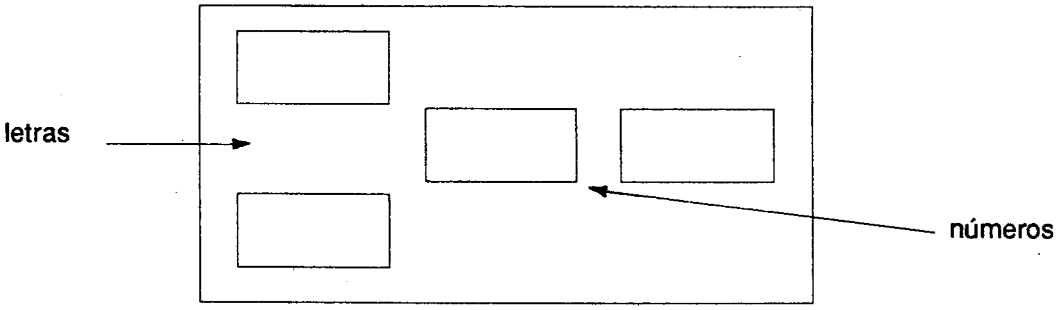
EJEMPLO 7. Formar todas las palabras de dos letras, que empiezan por cada una de las consonantes del conjunto {m, l, p} y terminan por las vocales del conjunto {a, e}.



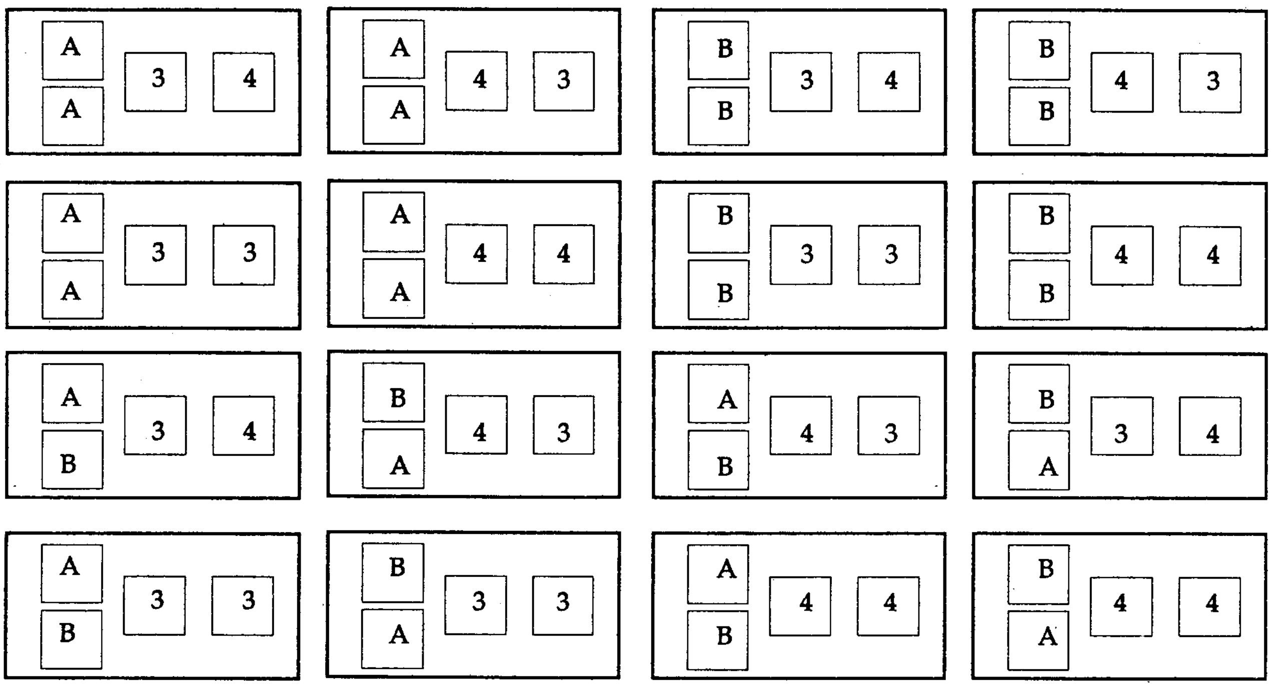
Obsérvese que las palabras pueden elaborarse a partir de las parejas ordenadas del producto cartesiano $\{m, l, p\} \times \{a, e\}$.

EJEMPLO 8. Este ejercicio consiste en elaborar placas para carros con dos letras y dos cifras, utilizando las letras del conjunto $\{A, B\}$ y los numerales del conjunto $\{3, 4\}$.

El formato para elaborar las diferentes placas es:



En una placa se puede usar la misma letra en las dos casillas de la izquierda, y el mismo número en las dos casillas de la derecha. Hay 16 placas posibles:



Este es el número de permutaciones sin o con repeticiones posibles entre los elementos de dos conjuntos distintos.

Obsérvese que el número de permutaciones, sin o con repeticiones posibles es: las dos letras es $2 \times 2 = 4$; de los dos números es $2 \times 2 = 4$.

Para cada una de las cuatro posibilidades de escoger las letras hay cuatro posibles parejas ordenadas de números. Así se obtiene un total de $4 \times 4 = 16$ placas.

El ejercicio puede ampliarse a placas de dos letras y tres cifras o de dos letras y cuatro cifras. Así mismo puede aumentarse el número de letras y de cifras de los conjuntos de donde pueden seleccionarse, graduando los ejercicios, según las capacidades de los alumnos, para que no sean demasiado fáciles ni demasiado largos.

El cambio a las placas nacionales de tres letras y tres cifras se presta para muchas exploraciones interesantes. Una pregunta generadora puede ser: ¿Cuántas placas más puede haber con tres letras y tres cifras que con dos letras y cuatro cifras?

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Desde la Básica Primaria se vienen estudiando las permutaciones como arreglos de objetos en los cuales importa el orden. También se estudian las combinaciones, como arreglos de objetos en los cuales no importa el orden. Tanto las permutaciones como las combinaciones se efectúan entre elementos de un mismo conjunto o entre elementos de varios conjuntos.

En este grado se estudian, en particular, las permutaciones (sin o con, repeticiones posibles) y se señalan las diferencias entre éstas y las combinaciones (que fueron objeto de estudio en el grado anterior). También se trata de comparar los diferentes tipos de arreglos con el fin de clasificarlos y diferenciar un caso de otro. Para ello es conveniente que el profesor tenga una visión general de las múltiples posibilidades que pueden presentarse al hacer arreglos de objetos.

Es posible que el siguiente cuadro ofrezca un resumen útil:

- Arreglos
  - Con Orden (Permutaciones)
    - En un conjunto
      - Todos los elementos
        - Sin repeticiones
        - Con repeticiones posibles
      - No todos los elementos
        - Sin repeticiones
        - Con repeticiones posibles
    - Entre varios conjuntos
      - Todos los elementos
        - Sin repeticiones
        - Con repeticiones posibles
      - No todos los elementos
        - Sin repeticiones
        - Con repeticiones posibles
  - Sin Orden (Combinaciones)
    - En un conjunto
      - Todos los elementos
      - No todos los elementos
    - Entre Varios conjuntos
      - Todos los elementos
      - No todos los elementos

Con base en el cuadro anterior se pueden analizar todos los ejemplos que se presentan en los contenidos básicos y todos aquellos ejercicios interesantes que surjan de los mismos estudiantes y de la creatividad del profesor.

De las representaciones gráficas del producto cartesiano (del tipo $A \times A$ o $A \times B$) se puede obtener la información necesaria para hallar las permutaciones de los elementos de dos conjuntos, tomados de a dos (parejas ordenadas). Sin embargo cuando se trata de ternas ordenadas, la representación resulta difícil.

Es conveniente después de cada ejercicio, hacer una reflexión sobre cómo hallar el número de los arreglos pedidos. Para el caso de las permutaciones de n objetos tomados m en m hemos utilizado el casillero. El número de factores que aparece en el casillero es igual a m.

En el caso particular en que $m = n$, en el casillero se tendrán n factores; el primero de ellos es n y el último es 1. (El producto de ellos se conoce como n factorial y se nota n?). No es conveniente dar las fórmulas que se encuentran en los libros, pues los alumnos se las aprenden de memoria sin entenderlas y las aplican sin pensar si son pertinentes o no.

A continuación se proponen otros ejercicios y se dan algunas sugerencias al respecto.

1. Con un estilógrafo, un monedero y una calculadora ¿cuántos paquetes de regalo distintos, de tres objetos, se pueden arreglar?

2. Con un pedazo de papel rojo, uno verde y otro amarillo ¿cuántas banderas de tres colores distintos se pueden construir?

3. Para formar numerales de dos cifras distintas, la primera de ellas puede escogerse entre tres dígitos y la segunda entre dos dígitos. ¿Cuántos numerales de dos cifras distintos se pueden escribir?

4. Para fabricar un juego de fichas, se dispone de cuatro formas y tres colores, ¿cuántas fichas diferentes se pueden obtener?

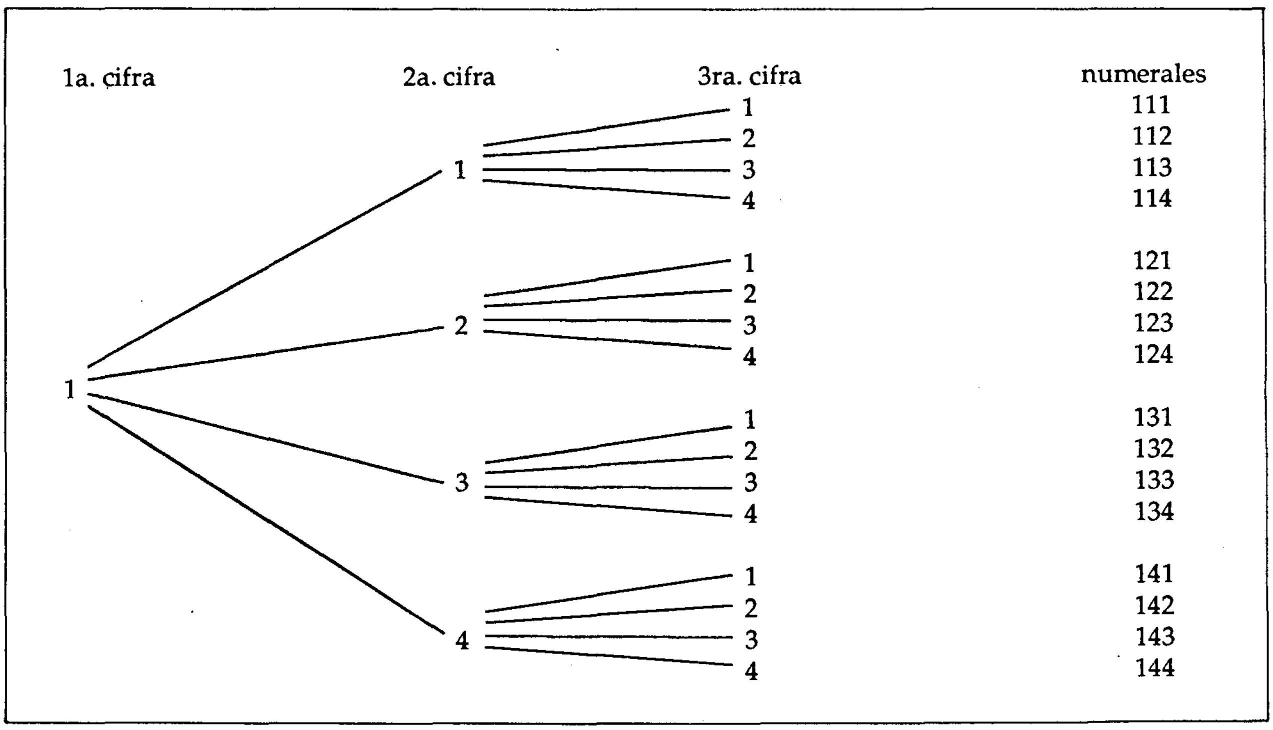
5. Si en el ejercicio anterior, las fichas se pueden hacer en tres tamaños y dos texturas, ¿cuántas fichas diferentes se obtienen en total?

6. Con los elementos del conjunto {1, 2, 3, 4} cuántos numerales de tres cifras: a) repetidas, b) sin repetición, c) con o sin repeticiones posibles, pueden escribirse.

NOTA: Este ejercicio puede llevar a una discusión interensante. Es posible que para la parte a) y b) la respuesta sea inmediata: 4 y 24.

Para resolver la parte c) del ejercicio puede pensarse en el número de posibilidades que hay que escoger la primera, la segunda y la tercera cifra. Como las cifras se pueden repetir, en cada uno de los puestos, siempre se tendrán 4 posibilidades para escoger la primera, la segunda y la tercera cifra. O sea que resultarán en total 4 x 4 x4 = 64 numerales; 36 de ellos tendrán solamente dos cifras repetidas, 4 tendrán las tres cifras repetidas y 24 ninguna cifra repetida.

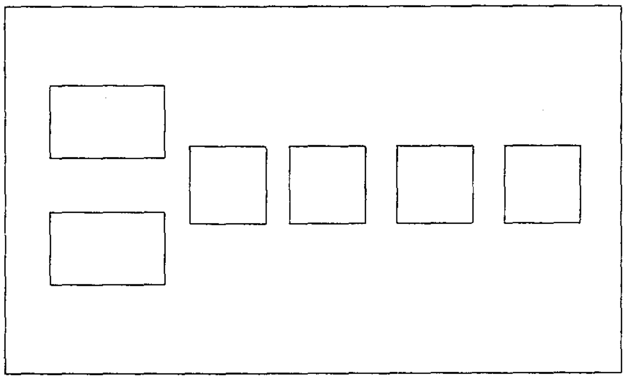
Otra forma (larga) de hallar todos los numerales de tres cifras, con o sin repetición es mediante un diagrama arbolar. Aquí haremos solamente una parte de él: cuando la primera cifra es 1.

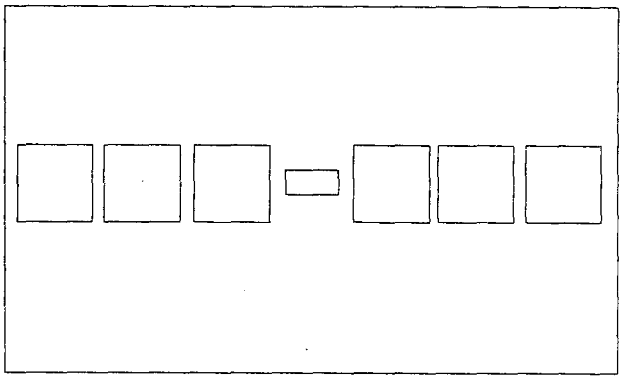


Para hacer todo el árbol pueden trabajar cuatro estudiantes, uno halla los numerales que empiezan por 1, otro los que empiezan por 2, etc.

Una vez se tenga armado todo el árbol se puede preguntar cuáles ramas habría que suprimir para que sólo quedaran los numerales sin repetición de cifras.

7. Con las letras X, Y, W y con las cifras 4, 5, 6, 7 cuántas placas diferentes de dos letras y cuatro números puedes construir, teniendo en cuenta que:





¿Cuántas placas de tres letras y tres números si no se aceptan repeticiones?

¿Cuántas placas de cada tipo si se pueden repetir letras pero no cifras? ¿Cifras pero no letras?

NOTA: Si se desea construir todas las placas y el ejercicio resulta muy largo para un solo estudiante, el ejercicio podría resolverse trabajando en pequeños grupos. Por ejemplo, si el grupo tiene 5 miembros, uno halla las permutaciones de las tres letras tomadas de a dos, sin repeticiones; otro halla los numerales de cuatro cifras, que empiezan por 4; otro los que empiezan por 5, etc. Luego se verá que el número de placas es igual al producto del número de permutaciones de las tres letras tomadas de a dos por el número de permutaciones de los cuatro numerales, etc. Pero es más importante como actividad de aprendizaje discutir los procedimientos y escribir sistemáticamente todas las placas sin que falte ninguna, que averiguar cuántas son utilizando fórmulas u otros artificios.

El número empieza a ser lo más importante cuando es tan grande que no resulta práctico escribir todas las permutaciones una por una. Cámbiese por ejemplo el ejercicio 7 en esta forma:

8. Con las letras A, E, I, O, U y con los números impares de 1 a 9, ¿cuántas placas diferentes de dos letras y cuatro números puedes construír teniendo en cuenta que se pueden repetir letras y cifras?

¿Cuántas placas de tres letras y tres números sin repeticiones?

¿Cuántas placas de cada tipo si se toman las consonantes y los diez dígitos con posibles repeticiones? ¿Si se toma todo el alfabeto?

Así repasan los métodos sistemáticos de construír todas las permutaciones con y sin repeticiones posibles, y se estudia la manera de obtener rápidamente el número total aunque no se recuerde ninguna fórmula.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

79 Formar colecciones de subconjuntos de un conjunto dado.

80 Analizar la relación de pertenencia de un conjunto a una colección de conjuntos.

81 Analizar la relación de contenencia entre dos colecciones de conjuntos.

82 Examinar si en una colección de subconjuntos de un conjunto, dos cualesquiera de ellos resultan disyuntos o no.

83 Examinar si la reunión de una colección de subconjuntos de un conjunto, agota dicho conjunto o no.

84 Reconocer si una colección de subconjuntos de un conjunto dado es o no es una partición de ese conjunto.

85 Identificar a cada uno de los elementos de la partición como las clases de la partición.

86 Reconocer que dos elementos que pertenecen a una misma clase de una partición son equivalentes según esa partición.

87 Identificar relaciones que determinan una partición en un conjunto dado.

88 Reconocer las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva de las relaciones que determinan una partición en un conjunto dado.

89 Identificar las relaciones que son a la vez reflexivas, simétricas y transitivas y denominarlas las relaciones de equivalencia.

CONTENIDOS BASICOS

Hay casos en que los elementos de un conjunto son a su vez conjuntos. Por ejemplo en el conjunto de los alumnos de octavo (8°) grado (si el colegio es mixto) pueden considerarse dos conjuntos: el de las mujeres y el de los hombres. Estos dos conjuntos son subconjuntos del primero.

Otro criterio que podría considerarse para obtener subconjuntos del conjunto de los alumnos de 8° grado es el de la inicial de los apellidos. Así se obtiene otra colección de subconjuntos distinta de la primera.

Un conjunto pertenece a una colección de conjuntos si es uno de los conjuntos que forman la colección, o si cumple la condición que la determina; en caso contrario no pertenece a la colección.

A la colección de conjuntos se les denota usualmente, con letras cursivas: $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$, etc.

Ejemplo: $\mathcal{A} = \{ \{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5, 6\} \}$

Las proposiciones: $\{1, 2\} \in \mathcal{A}$
$\{3\} \in \mathcal{A}$
$\{4, 5, 6\} \in \mathcal{A}$ son verdaderas
$\varnothing \in \mathcal{A}$
$\{1\} \notin \mathcal{A}$

Si todos los conjuntos que pertenecen a una colección $\mathcal{A}$, pertenecen a una colección $\mathcal{B}$, se dice que $\mathcal{A}$ está contenida en $\mathcal{B}$ y se simboliza:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$$

Si $\mathcal{A}$= { los alumnos del curso 1°, los alumnos del curso 2°, los alumnos del curso 3°}

y $\mathcal{B}$ = { los alumnos del curso 1°, los alumnos del curso 2°, los alumnos del curso 3°, los alumnos del curso 4°, los alumnos del curso 5°}

Entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$

Una colección de subconjuntos de un conjunto dado es una **partición** de ese conjunto si se verifica:

1. Ninguno de ellos está vacío.

2. La reunión de los subconjuntos que pertenecen a la colección es igual al conjunto original.

3. Los subconjuntos que pertenecen a la colección, tomados dos a dos, no tienen elementos comunes.

Si: $A = \{b, r, a, s, i, l,\}$

La colección de subconjuntos $\mathcal{A} = \{\{b, r, s, l,\}, \{a, i\}\}$ es una partición de A.

En efecto: 1. $\{b, r, s, l\}$ y $\{a, i\}$ son diferentes de vacío
2. $\{b, r, s, l\} \cup \{a, i\} = \{b, r, s, l, a, i\} = A$

3. $\{b, r, s, l\}$ Y $\{a, i\}$ no tienen elementos comunes, es decir son disyuntos, o lo que es lo mismo:

$\{b, r, s, l\} \cap \{a, i\} = \varnothing$

Otras particiones de A son las dadas por las colecciones de subconjuntos:

$\mathcal{M} = \{\{l, i, s\}, \{b, a, r\}\}$
$\mathcal{N} = \{\{b\}, \{r\}, \{a\}. \{s\}. \{i\}. \{l\}\}$
$\mathcal{O} = \{\{b, r, i, s, a,\} \{l\}\}$

En cambio:

$\mathcal{P} = \{\{b, r, a\}, \{s, i, l\}, \{\ \}\}$
$\mathcal{Q} = \{\{b, r\}, \{i, l\}, \{s\}\}$
$\mathcal{R} = \{\{b, r,\}, \{a, s\}, \{r, i, l\}\}$

no son particiones de A:

$\mathcal{P}$ no cumple la primera condición, pues el tercer subconjunto es el vacío.

$\mathcal{Q}$ no cumple la segunda condición: en la reunión falta la a:

$$\{b, r\} \cup \{i, l\} \cup \{s\} = \{b, r, i, l\}$$

R no cumple la tercera condición: aunque
$\{b, r\} \cap \{a, s\} = \varnothing$ y $\{a,s\} \cap \{r,i,l\} = \varnothing$, resulta que
$\{b,r\} \cap \{r,i,l\} = \{r\} \neq \varnothing$

Los elementos de una partición se llaman también **las clases de la partición.** Si tomamos la partición:

$$\mathcal{M} = \{\{l, i, s\}, \{b, a, r\}\}$$

Se tiene que: $\{l, i, s\}$ y $\{b, a, r\}$ son las clases de $\mathcal{M}$.

Estas clases son a su vez subconjuntos de A:

$\{l, i, s\} \in M$; $\{l, i, s\} \subset A$

$\{b, a, r\} \in M$; $\{b, a, r\} \subset A$

Dos elementos que pertenecen a la misma clase de una partición se dice que son equivalentes según esa partición (o en lo que se refiere a esa partición). Por ejemplo, como en la participación M está la clase $\{l, i, s\}$

l es equivalente con *i* según la partición $\mathcal{M}$

i es equivalente con *s* según la partición $\mathcal{M}$

⋮ ⋮

Pero *i* no es equivalente con a según la partición $\mathcal{M}$, aunque si lo era según la partición $\mathcal{A}$.

Teniendo en cuenta que los elementos de una partición se denominan clases, las propiedades de las clases de una partición $\mathcal{M}$ de un conjunto $\mathcal{A}$ se pueden enunciar así:

1. Ninguna de las clases de la partición es vacía.

2. La reunión de todas las clases de la partición $\mathcal{M}$ es igual al conjunto $\mathcal{A}$.

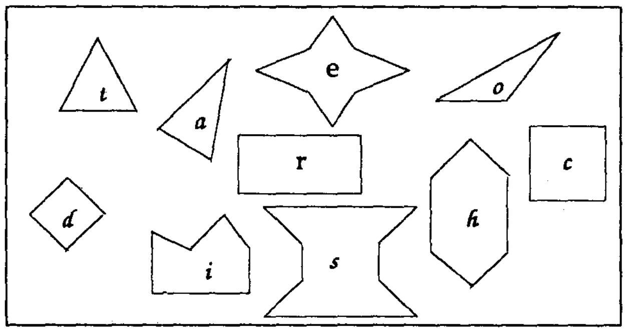
3. Dos clases distintas de una misma partición no tienen elementos comunes, es decir son disyuntos.

Nótese que $\mathcal{M}$ es diferente de la reunión de las clases; ésta reunión, como ya se dijo, es $\mathcal{A}$. En nuestro ejemplo $\{l, i, s\} \cup \{b, a, r\} = A$, pero $A \neq \mathcal{M}$, pues los elementos de A son 6 letras y los elementos de $\mathcal{M}$ son 2 clases.

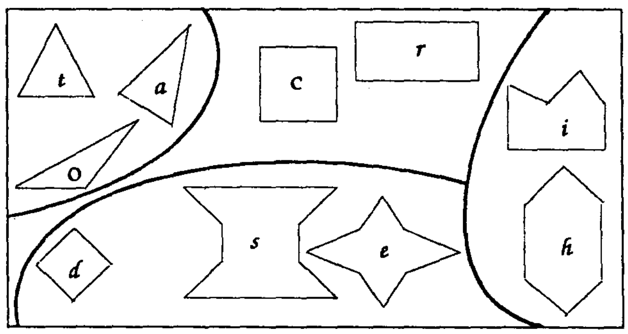
Existen algunas relaciones especiales que permiten clasificar los elementos de un conjunto. Se obtiene así una partición de dicho conjunto.

Pero dada una partición no siempre es claro cuál sería una relación que cumplan todos los elemtos de cada clase (salvo si se toma como relación "pertenecer a la misma clase").

Ejemplo. Si en el conjunto P:



Se considera la relación "... tiene tantos lados como..." se obtiene la siguiente partición de:
$P = \{a, c, d, e, h, i, o, r, s, t\}$.



Como se hizo contando los lados, llamemos $\mathcal{L}$ a ésta partición.

Así se forman cuatro clases que pertenecen a $\mathcal{L}$:

La de las figuras que tienen 3 lados, $\{t, a, o\}$

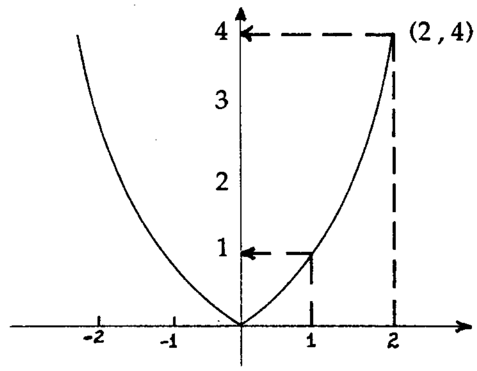
La de las figuras que tienen 4 lados, $\{d, c, r\}$

La de las figuras que tienen 6 lados, $\{h, i\}$

La de las figuras que tienen 8 lados, $\{e, s\}$

Teniendo en cuenta lo anterior, se pueden obtener las parejas ordenadas (x, y), y ver si "$\mathcal{Y}$ tiene tantos lados como $\mathcal{X}$"

Es posible que cuando se empiece a hacer la lectura relacional se presenten dudas en la elección del orden en que deben escribirse las componentes de las parejas ordenadas, ya que en español primero se lee la imagen. Es así como de la frase: "4 es el cuadrado de 2", la pareja ordenada correspondiente es (2, 4) y no (4, 2), como puede verificarse en la gráfica de la relación "es cuadrado de":



En nuestro ejemplo, se ve que si se elije la figura o y se pregunta: ¿Cuál (es) de las figuras restantes tiene (n) tantos lados como ésta?

Existen otras dos figuras que tienen tantos lados como : o

Este se puede simbolizar así:

o ⟶ t ; de aquí la pareja (o, t)

o ⟶ a ; de aquí la pareja (o, a)

La lectura relacional correspondiente es:

"*t* tiene tantos lados como o" : $t\,\mathrm{R}\,o$

"*a* tiene tantos lados como o" : $a\,\mathrm{R}\,o$

La relación, R, "tener tantos lados como", cumple tres propiedades.

1. Es reflexiva: para cualquier elemento x de p, este elemento puede ser su propia imagen por medio de la relación R.

En el ejemplo:

" t tiene tantos lados como t " ; t R t ; (t, t)

" h tiene tanto lados como h " ; h R h ; (h, h)

. . . .

. . . .

. . . .

" x tiene tantos lados como x" ; x R x ; (x, x)

Para indicar gráficamente que una relación es reflexiva se dibuja un bucle, encima de cada uno de los elementos del conjunto. Así se evita dibujar dos veces el mismo elemento.

En este caso la representación gráfica tendrá tantos bucles como elementos tenga el conjunto.

En el conjunto de todas las parejas ordenadas que cumplen la relación (que es como el esqueleto, o el cadáver de la relación, y llamamos el grafo de la relación), figurarán todas aquellas de la forma (x, x).

2. Es simétrica: si para dos elementos (x, y) de P se verifica y Rx, también se verifica xRy.

En este caso si (x, y) pertenece el grafo de R, entonces (y, x) también pertenece a dicho grafo.

En el ejemplo, a la figura d se le puede asociar mediante la relación la figura c y viceversa:

d ⟶ *c* ; (*d* , *c*) o (*d* , *c*)

c ⟶ *d* ; (*c* , *d*) o (*c* , *d*)

—¿Por qué a d le asociamos c?

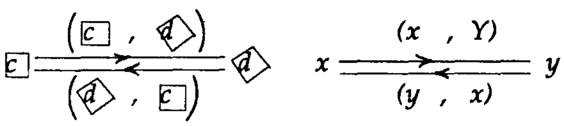
Porque " c tiene tantos lados como d" : *c*R*d*

—Por qué a c le asociamos d?

Porque " d tiene tantos lados como c " : *d*R*c*

Obsérvese que $\boxed{c}$ y d pertenecen a la misma clase, es decir son equivalentes según la partición £

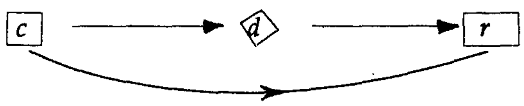
En la representación sagital de una relación simétrica, siempre que haya una flecha de un elemento x a otro y, también hay otra flecha de y a x.

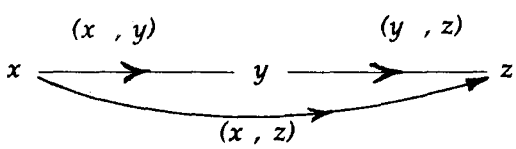


En el grafo de la relación, siempre que esté la pareja (x, y) también está la pareja (y, x).

3. Es transitiva: para tres elementos x, y, z de P siempre se verifica que: si zRy y yRx entonces zRx. Es decir si (x, y) y (y, z) cumplen la relación, entonces (x, z) también se cumple. (También se puede decir: si (x, y) pertenece al grafo de la relación R y (y, z) también, entonces (x, z) también pertenece a dicho grafo).

En el diagrama sagital esto se representaría así: siempre que se pueda transitar por dos flechas seguidas, hay un flecha directa:





En el grafo, siempre que estén (x, y) y (y, z) tiene que estar (x, z).

En el ejemplo:

"$\boxed{r}$ tiene tantos lados como d"

y

" d tiene tantos lados como $\boxed{c}$"

entonces

"$\boxed{r}$ tiene tantos lados como $\boxed{c}$"

En las actividades es mejor omitir, al principio, la lectura relacional y partir de los diagramas para obtener las parejas ordenas, para obtener estas parejas se lee hacia adelante:

Si "(c,d) cumple R" y "(d, r) cumple R", entonces "(c,r) cumple R".

Para la lectura relacional se lee primero la última imagen:

Si rRd y dRc, entonces rRc, siguiendo las flechas en reversa. Esto es de gran importancia en la comprensión y simbolización de la composición de relaciones.

Una relación que es *reflexiva, simétrica y transitiva* se denomina **relación de equivalencia.**

Se deja como ejercicio realizar el diagrama sagital de la relación R en P.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En la versión del programa de matemática para 6° grado de 1982 se propuso el estudio de familias de conjuntos. Este tema presentó dificultades para los estudiantes y por sugerencia de los profesores que colaboran en la validación de estos programas se aplazó su estudio para este grado; dicho tema lo tratamos en esta unidad insistiendo en una mayor participación de los estudiantes con el fin de que los ejemplos partan de ellos mismos, y para que la simbolización resulte después de un trabajo conjunto entre los alumnos y el profesor.

No se hablará de familias de conjuntos sino de colecciones de subconjuntos de un conjunto dado.

Se recuerda, también, que en la básica primaria cuando se trabajó con los llamados "bloques lógicos" y con otros materiales concretos, estos se clasificaban según su forma, tamaño, color, etc., y se obtenían colecciones de subconjuntos. Pero como en ese momento los objetivos eran otros, no se insistió sobre las particiones.

Ahora se trata de que los estudiantes caigan en la cuenta de que un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto, y de que analicen tanto la relación de pertenencia de un conjunto a una colección de estos, como la relación de contenencia entre dos colecciones de conjuntos.

Con el material que el profesor considere más adecuado (concreto o simbólico) llevará a los estudiantes a formar colecciones de subconjuntos a partir de un conjunto dado.

Las colecciones de subconjuntos no se obtendrán necesariamente a partir de las cualidades que tengan los objetos del conjunto inicial; en ocasiones es bien difícil encontrar una que permita hacerla. Los mismos estudiantes formarán los subconjuntos, elementos de la colección, y ensayarán diferentes formas de simbolizar las colecciones.

En algunos casos puede resultar más cómodo simbolizar por comprensión o propiedad común los subconjuntos que son elementos de la colección, y en otros casos simbolizarlos por extensión o por lista.

El profesor se asegurará de que los alumnos comprendan la diferencia entre ser subconjunto de un conjunto dado A, y ser elemento de una colección $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(A)$. Una clase que pertenece a la colección es un subconjunto de A, pero no todo subconjunto de A tiene que pertenecer a $\mathcal{B}$. (Se podría hacer otra colección a la que sí perteneciera!).

(Si los alumnos prefieren decir "una repartición" más bien que "una partición", el profesor puede seguir utilizando el término que prefieren los alumnos).

También se asegurará de que comprendan que no toda colección de subconjuntos de A es una partición de A.

Si se toma como conjunto referencial S el de los alumnos de básica secundaria del colegio, podrá obtenerse una colección de subconjuntos cuyos elementos sea: los alumnos de 6° grado, los alumnos de 7° grado, los alumnos de 8° grado y los alumnos de 9° grado.

$\mathcal{A}$= {los alumnos de 6° grado, los alumnos de 7° grado, los alumnos de 8°, los alumnos de 9° grado}

En este caso la colección está determinada por extensión; los elementos de la colección están expresados por comprensión.

$\mathcal{A}$= los cursos de básica secundaria.

$\mathcal{A}$ es también una partición de S.

$\mathcal{A}$ está determinada por comprensión.

También se puede tomar como conjunto referencial, las letras de una palabra, por ejemplo, las de la palabra "caleño", {c, a, l, e, ñ, o} = $\mathcal{M}$ y pensar en una colección de subconjuntos de letras con la condición de que con esas letras se puedan formar palabras conocidas.

Para tal efecto, un cuadro como el siguiente puede facilitar la tarea:

	c	a	l	e	ñ	o	Conjunto
el			x	x			{e, l}
año		x			x	x	{a, ñ, o}
ola		x	x			x	{o, l, a}
cal	x	x	x				{c, a, l}
leño			x	x	x	x	{l, e, ñ, o}
caño	x	x			x	x	{c, a, ñ, o}
cola	x	x	x			x	{c, o, l, a}
loca	x	x	x			x	{l, o, c, a}

Lo anterior permite llegar a una simbolización, más complicada que la de la colección $\mathcal{A}$, pero en cuya construcción habrán participado los alumnos:

$\mathcal{B}$= {{e, l}, {a, ñ, o}, {o, l, a}, {c, a, l}, {l, e, ñ, o}, {c, a, ñ, o], {c, o, l, a}}

Nótese que {c, o, l, a} = {l, o, c, a} y que $\mathcal{B}$ no es una partición de M.

El profesor hará notar a los estudiantes que en este caso hubiera resultado muy largo expresar "por comprensión" cada uno de los conjuntos elementos de la colección y muy complicado expresar a $\mathcal{B}$ en esa misma forma.

A partir de los subconjuntos de $\mathcal{M}$, que figuran en la tabla, se puede formar otra colección: la de los subconjuntos que tienen 4 elementos:

$\mathcal{D} = \{\{c, a, ñ, o\}, \{c, o, l, a\}, \{l, e, ñ, o\}$

Teniendo en cuenta las colecciones $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ se entrará a analizar las relaciones de pertenencia y contenencia.

Inicialmente se recordará la relación de pertenencia entre un con junto y sus elementos y la relación de contenencia entre dos conjuntos. Se puede tomar como referencia los conjuntos con los cuales se viene trabajando en esta actividad. Se podrán hacer algunos ejercicios como:

$C \in M$	(V) ;	$ñ \notin M$	(F);	$\{e\} \notin M$	(V) ;
$\{a, ñ, o\} \in \mathcal{B}$	(V) ;	$\{a, l, o\} \notin \mathcal{B}$	(F);	$\{o, c, a\} \in \mathcal{B}$	(V) ;
$\{c, a, ñ, o\} \subset \mathcal{B}$	(F) ;	$\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$	(V);	$\{c, a, ñ, o\} \subset \mathcal{D}$	(F) ;

{alumnos de 6° grado, alumnos de 7° grado} $\subset \mathcal{A}$ (V).

Para llegar al concepto de partición el profesor podrá seguir trabajando con los mismos ejemplos o con otros. Aquí continuamos con los mismos; de todas maneras éstas no dejan de ser sugerencias que respetan las situaciones reales que se dan en el aula de clase.

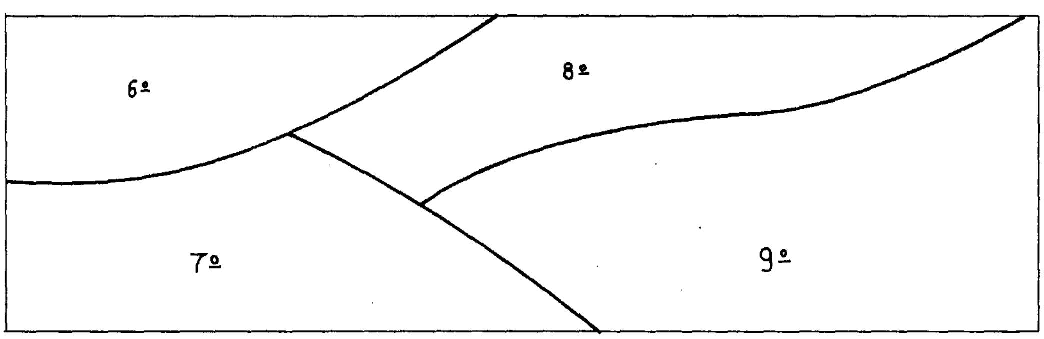
Se puede trabajar simultáneamente con las colecciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ y examinar:

a) Si ningún elemento está vacío.

b) Si dos elementos cualesquiera de $\mathcal{A}$ resultan disyuntos o no; lo mismo para dos elementos cualesquiera de $\mathcal{B}$. Es decir, si la colección tiene sus elementos disyuntos dos a dos.

c) Si la reunión de los elementos de la colección agota el conjunto inicial. Es decir, si la colección es exhaustiva.

En el caso de la colección $\mathcal{A}$ el conjunto inicial es el de los estudiantes de la básica secundaria (6° a 9° grado), a este conjunto lo llamaremos S. Un dibujo como el que sigue, puede facilitar las explicaciones:



a) Supongamos que el colegio tiene alumnos en todos los cursos de 6° a 9° grado. Así se cumplirá la condición de que ninguno de los cursos está vacío.

b) {Alumnos de 6° grado $\cap$ alumnos de 7° grado} = $\emptyset$; y así para cualquier par de elementos de $\mathcal{A}$.

c) {Alumnos de 6° grado $\cup$ alumnos de 7° grado $\cup$ alumnos de 8° grado $\cup$ alumnos de 9° grado} = S

En el caso de la colección $\mathcal{B}$, el único par de elementos disyuntos es: $\{e, l\}$ y $\{c, a, ñ, o\}$. Los demás tienen por lo menos un elemento común:

$\{c, a, l\} \cap \{l, e, o\} = \{l\}$

La reunión de todos los elementos de $\mathcal{B}$ es $M = \{c, a, l, e, ñ, o\}$.

Si consideramos la colección: $\mathcal{M} = \{\{e, l\}, \{c, a, ñ, o\}\}$

Se obtienen conclusiones semejantes a las del caso de $\mathcal{A}$:

$\{e, l\} \cap \{c, a, ñ, o\} = \varnothing \qquad \{e, l\} \cup \{c, a, ñ, o\} = M$

El profesor anotará que ninguno de los elementos de las colecciones es igual a vacío.

Así el terreno estará abonado para conceptualizar sobre lo que se denominará partición de un conjunto.

$\mathcal{A}$ es una partición de S.

$\mathcal{M}$ es una partición de M.

$\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ no son particiones de M.

¿Qué relación hay entre el conjunto de parte de M y una partición de M?

Una partición cualquiera de M, es un subconjunto de $\mathcal{P}$(M). En el ejemplo se tiene que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}$(M).

Los alumnos obtendrán otras particiones de M y de otros conjuntos.

Además, se sugiere tener en cuenta que:

—Toda partición es una colección de subconjuntos, pero no toda colección de subconjuntos es una partición.

—Toda relación de equivalencia produce una partición del conjunto en clases de equivalencia.

—Toda relación que produce una partición del conjunto es de equivalencia.

—Toda partición de un conjunto permite definir una relación de equivalencia ("pertenece a la misma clase que").

OBJETIVOS ESPECIFICOS

90 Reconocer si una relación binaria es reflexiva, no reflexiva o anti-reflexiva.

91 Reconocer si una relación binaria es simétrica, no simétrica o anti-simétrica.

92 Reconocer si una relación binaria es transitiva, no transitiva o anti-transitiva.

CONTENIDOS BASICOS

En la unidad cuarta de 6° grado se estudió el concepto de relación binaria y se estableció la diferencia entre relación y símbolo de relación, como también la diferencia entre las operaciones (o transformaciones) que corresponden a actividades prácticas, y las relaciones que corresponden a actividades teóricas.

En esta unidad ya se vió cuándo una relación es reflexiva, simétrica y transitiva; ahora se trata de ampliar el estudio de tales propiedades.

Propiedad Reflexiva y Propiedad Anti-reflexiva

Una relación R en un conjunto E produce el conjunto de parejas relacionadas por R, que llamamos el grafo de R. Estudiemos las parejas del tipo (x, x) y comprobemos que se verifica una sola de las siguientes condiciones:

1. En el grafo de la relación **están todas** las parejas de la forma (x, x), para cualquier $x \in E$: cada elemento está relacionado consigo mismo xRx.

2. En el grafo de la relación **están algunas** parejas de la forma (x, x), (sin estar todas): xRx a veces es verdadero y a veces es falso.

3. En el grafo de la relación **no hay ninguna** pareja de la forma (x, x): ningún elemento está relacionado consigo mismo: xRx siempre es falso.

En el primer caso se dice que R es reflexiva. En el segundo y tercero que R es no reflexiva. En el tercero que R es anti-reflexiva.

Una relación que no es reflexiva (o sea que no cumple la primera condición), no es necesariamente anti-reflexiva. Además, si la relación no es anti-reflexiva (o sea que no cumple la tercera condición), no es necesariamente reflexiva.

Ejemplo 1. En el conjunto E= {amor, base, cal, dulce} consideremos la relación R_1 "... se escribe con tantas letras como..."

Simplifiquemos el conjunto E escribiendo solo las iniciales:

E= {a, b, c, d}

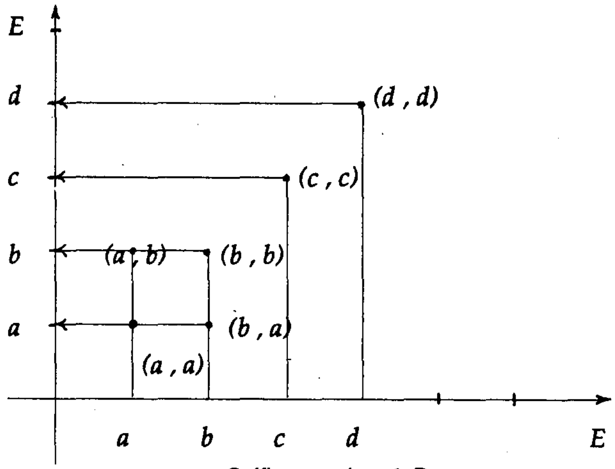
La representación de dicha relación puede darse por uno cualquiera de los siguientes diagramas.

—Representaciones cartesianas:

Recuerde que se lee primero la imagen, que se encuentra en la vertical.

d				x
c			x	
b	x	x		
a	x	x		
↖	*a*	*b*	*c*	*d*

Tabla cartesiana de R_1



Gráfica cartesiana de R_1

— Representaciones sagitales o de flechas:
Recuerde que se lee primero la imagen, que es hacia donde señala la flecha.

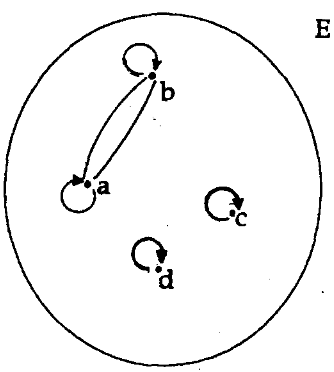


Diagrama sagital interno de R_1

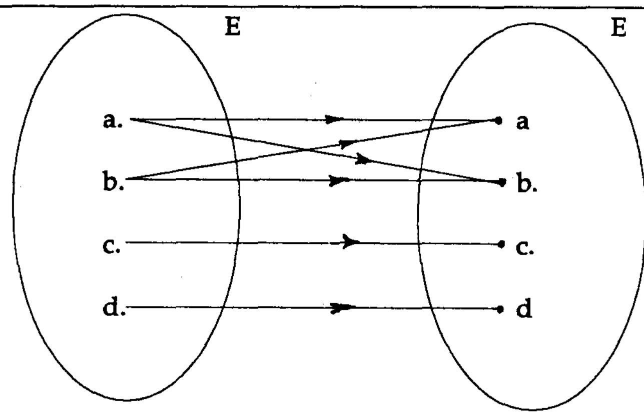


Diagrama sagital externo de R_1

Es fácil observar que cada elemento de E puede relacionarse consigo mismo por medio de R_1, así:

"amor se escribe con tantas letras como amor" a R_1
a"cal se escribe con tantas letras como cal" c R_1 c

En la tabla cartesiana todas las casillas de la diagonal están señaladas; en el diagrama sagital interno cada elemento tiene una flecha que se devuelve, y que llamamos "bucle; x R_1 x siempre es verdad: R_1 es reflexiva.

Ejemplo 2. Si en el mismo conjunto E consideramos la relación R_2

"... se escribe con más letras que..." entonces se tendrán representaciones en las cuales cada palabra "señala" a la que se escribe con más letras que ella, así:

cal ⟶ amor	(c, a)	a R_2 c
amor ⟶ dulce	(a, d)	d R_2 a
base ⟶ dulce	(b, d)	d R_2 b
cal ⟶ base	(c, b)	b R_2 c
• •	•	•
• •	•	•
• •	•	•

La tabla cartesiana y el diagrama sagital interno de la relación son respectivamente:

d	x	x	x	
c				
b			x	
a			x	
	a	*b*	*c*	*d*

Tabla cartesiana de R_2

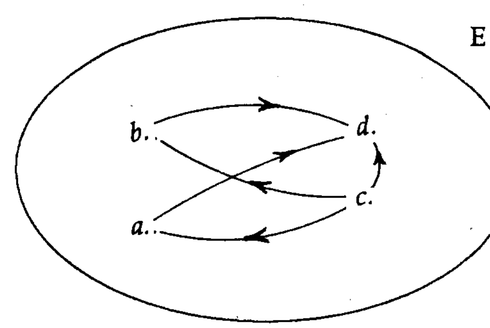


Diagrama sagital interno de R_2

En la tabla, ninguna de las casillas de la diagonal está señalada; en el diagrama sagital ningún elemento "luce bucle"; xR2x nunca es verdad; R2 es anti-reflexiva.

Ejemplo 3. En el conjunto M = { o, 1, 2, 3, 4, 9, } consideremos la relación R_3, "... es el cuadrado de ...."

9				x		
4			x			
3						
2						
1		x				
0	x					
	0	1	2	3	4	9

Tabla cartesiana R_3

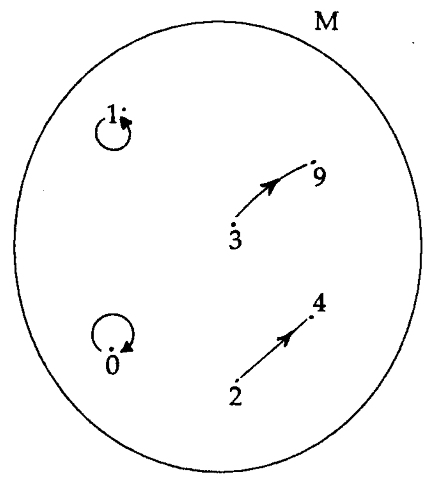


Diagrama sagital interno R_3

R_3 no es ni reflexiva, ni anti-reflexiva. Obsérvese que solamente algunas casillas de la diagonal principal de la tabla cartesiana están señaladas, pero no todas. En el diagrama sagital algunos elementos de M tienen bucles y otros no; xR_3x a veces es verdad y a veces no.

Ejemplo 4. La relación R_4 "... es el doble de..." en el mismo conjunto M, también es no-reflexiva. El único elemento que es su propio doble es el cero. ¿Es R_4 anti-reflexiva?

Propiedad Simétrica y Propiedad Anti-simétrica

En esta misma unidad se dijo que una relación R es simétrica si cada vez que una pareja (x, y) pertenece al grado de R, la pareja (y, x) también pertenece a dicho grafo. Equivalentemente, xRy es verdad, yRx también es verdad.

Una relación R es anti-simétrica si cada vez que una pareja (x, y) formada por dos elementos diferentes ($y \neq x$) pertenece al grafo de R, la pareja (y, x) no está en dicho grafo. Equivalente, si $y \neq x$ y yRx, no es verdad que xRy.

Una relación no-simétrica no es necesariamente anti-simétrica, de la misma manera que una relación no anti-simétrica no es necesariamente simétrica.

Existen, además, relaciones que son a la vez simétricas y anti-simétricas mientras que no hay relaciones que sean a la vez reflexivas y anti-reflexivas (a menos que consideremos como relación la "relación vacía" que no tiene nadie con nadie... Esta relación es muy patológica).

En la representación sagital, la simetría se expresa por el hecho de que siempre que haya una **flecha de ida** habrá también una **flecha de regreso.**

La anti-simetría se traduce por la no existencia del par de flechas de ida y regreso entre elementos diferentes.

En la representación cartesiana de tabla, la simetría se expresa por el hecho de que las casillas señaladas admiten por "eje de simetría" la diagonal donde están representadas las parejas de la forma *(x, x).*

En la representación cartesiana de ejes coordenados, el eje de simetría de los puntos correspondientes a las parejas de la forma (x, y), (y, x) es la recta que contiene los puntos de la forma (x, x), que llamamos la diagonal principal.

La anti-simetría se traduce por el hecho de que fuera de la diagonal no existen dos casillas señaladas (o dos puntos) que sean simétricas con relación a la diagonal principal.

Ejemplos:

—La relación R_1 "... se escribe con tantas letras como...", en el conjunto E del ejemplo 1, es simétrica y no anti-simétrica.

—La relación R_2 del ejemplo 2, no es simétrica. Es anti-simétrica.

—La relación R_3 del ejemplo 3, tampoco es simétrica pero es anti-simétrica.

—De la relación R_4 puede decirse lo mismo que se afirmó de R_2 y R_3.

—Si en el conjunto M consideramos la relación R_5 "...es lo mismo que..." o "... es igual a ..." se obtendrán representaciones como:

9						x
4					x	
3				x		
2			x			
1		x				
0	x					
	0	1	2	3	4	9

Tabla cartesiana R_5

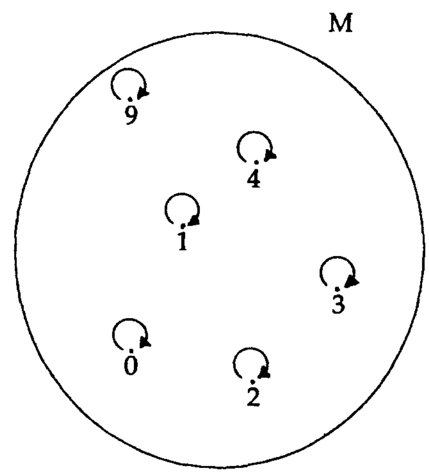


Diagrama sagital interno R_5

R_5 es a la vez simétrica y anti-simétrica.

NOTA: Una relación R anti-simétrica también se define en muchos libros como aquella en la cual, cada vez que las parejas (x, y) y (y, x) pertenecen al grafo de R se cumple que x=y Equivalentemente se dice que si yRx y xRy, entônces x=y.

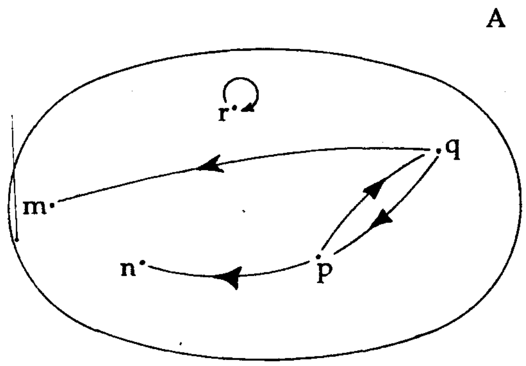
Esta definición exige cierto grado de desarrollo de pensamiento formal y por eso puede presentar dificultades para los alumnos.

Este tipo de definición puede ser útil para relaciones reflexivas, como cuando se trata de demostrar, por ejemplo, que a y b representan el mismo número; para comprobar esta afirmación se puede verificar primero que $b \leq a$. Como la relación es anti-simétrica, b = a. Algo parecido pasa cuando se quiere demostrar que M y N designan el mismo conjunto: se prueba que $M \subseteq N$ y que $N \subseteq M$; como la inclusión es anti-simétrica, M=N.

Sin embargo no siempre la relación anti-simétrica es también reflexiva, y por lo tanto no tiene mucho sentido preguntar si figuran las parejas (x, y) y (y, x) o si es verdad que yRx y xRy, para concluir que x= y.

Por ejemplo, la relación H "... es hijo de ..." en el conjunto V de los varones, es anti-simétrica, y no se dan ningún caso en el que yHx y a la vez xHy. Los lógicos dicen que la condición para la anti-simetría se cumple "vacíamente", pero las personas comunes y corrientes no aceptamos que esa expresión tenga mucho sentido intuitivo, y preferimos la formulación: si $y \neq x$ y $y\mathrm{R}x$, entonces no puede ser verdad que $x\mathrm{R}y$.

Si una relación R_6, en A tiene como representación sagital:



¿ Cuál de las afirmaciones siguiente es verdadera?

— R_6 es simétrica.

— R_6 es antisimétrica.

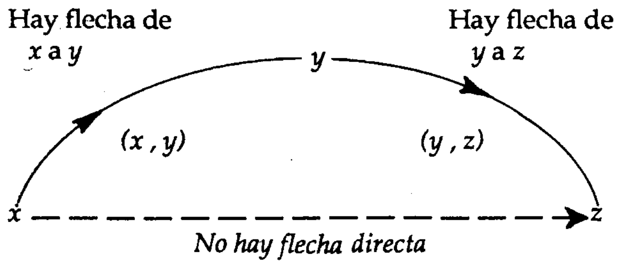
— R_6 es no simétrica y no anti-simétrica (V).

Propiedad Transitiva y Propiedad Anti-transitiva

En cuanto a la propiedad transitiva se dijo anteriormente, en esta unidad, que una relación R es transitiva si cada vez que las parejas (x, y) y (y, z) pertenecen el grafo de R, la pareja (x, z) también pertenece a dicho grafo. Equivalentemente, R es transitiva si siempre que $z\mathrm{R}y$ y $y\mathrm{R}x$, entonces $z\mathrm{R}x$.

Una relación R es anti-transitiva si cada vez que hay tres elementos diferentes x, y, z, y sucede que las parejas (x, y) y (y, z) pertenecen al grafo de R, la pareja (x, z) no pertenece a dicho grafo. Equivalentemente, si $x \neq y$, $y \neq z$, $z \neq x$, zRy y yRx, no puede ser verdad que $z\mathrm{R}x$.

En este caso, en el diagrama sagital, no hay ninguna flecha que acorte el recorrido que se hace por dos flechas seguidas entre tres elementos diferentes:

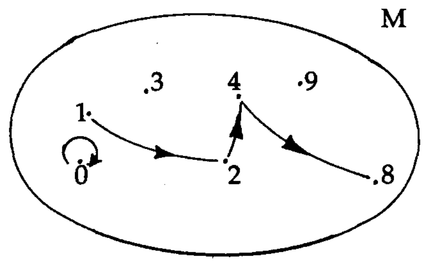


O sea que la pareja (x,z) no está en el grado de R.

Si una relación no es transitiva, no es necesariamente anti-transitiva, y si no es anti-transitiva no es necesariamente transitiva.

—La relación R_2 "... se escribe con más letras que..." que fue tratada en el ejemplo 2, es transitiva y no es anti-transitiva.

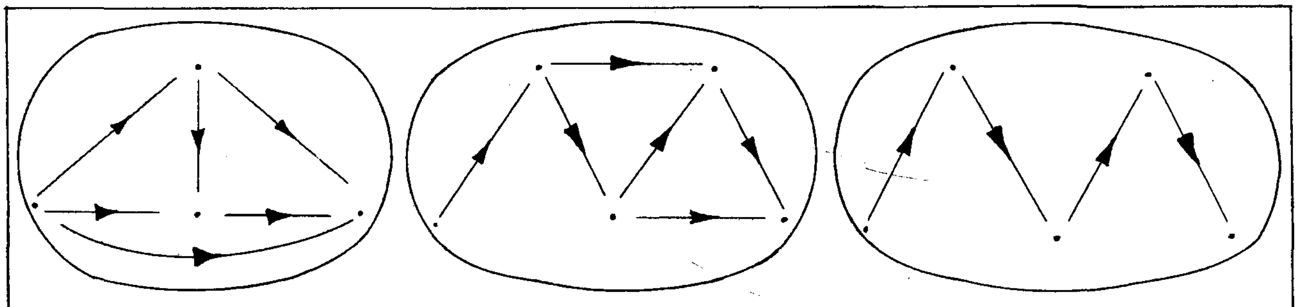
—La relación R_4 "... es el doble de..." en M = {0, 1, 2, 3, 4, 8, 9} que tiene como diagrama sagital:



no es transitiva y es anti-transitiva.

—La relación R_5 "... es igual a ..." en el mismo conjunto M es a la vez transitiva y anti-transitiva. Pero este caso es una mera curiosidad lógica, por no haber ternas de elementos conectados con fechas.

Lo importante es ver si siempre que se puede transitar por un elemento intermedio, se puede también pasar directamente, o si a veces sí se puede y a veces no, o si nunca se puede:



Siempre: transitiva | A veces si y a veces no | Nunca: anti - transitiva

El profesor pedirá a los alumnos ejemplos de relaciones y hará con ellos una lista en el tablero. Se precisará en cada caso el conjunto en el cual se va a estudiar la relación. Si entre los ejemplos hay alguna relación reflexiva, se puede empezar por la revisión de dicha propiedad.

Como ya se dijo en las sugerencias metodológicas anteriores, no es conveniente empezar por la lectura relacional sino preferencialmente por representaciones como:

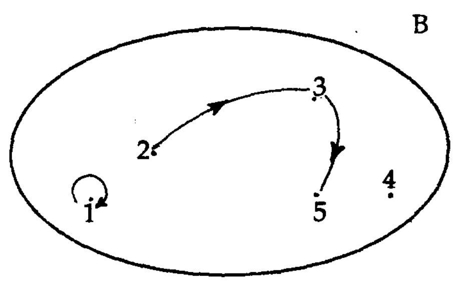
(a , b) (c , d)

donde cada elemento "señala" al que es su imagen por medio de la relación; ésto facilita la obtención de las parejas ordenadas.

De la relación que se estudie se realizarán los diagramas cartesianos (tabla y gráfica) y sagitales (interno y externo) correspondientes, como en el ejemplo 1 de los contenidos básicos.

En una relación como "... es el doble de ... menos 1", en el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se puede empezar así:

Cada número señalará a aquel que es su doble, menos 1.



$1 \rightarrow 1$ porque $1 = 2 \times 1 - 1$ (1, 1)
$2 \rightarrow 3$ porque $3 = 2 \times 2 - 1$ (2, 3)
$3 \rightarrow 5$ porque $5 = 2 \times 3 - 1$ (3,5)

4 y 5 no tienen a quién señalar (imagen) en B.

La lectura relacional correspondiente es:

"1 es el doble de 1, menos 1"
"3 es el doble de 2, menos 1"
"5 es el doble de 3, menos 1"

¿Es ésta una relación reflexiva?

No lo es pues **algunos** elementos no son su propio doble menos uno. Tampoco es anti-reflexiva porque 1 sí es su propio doble, menos 1.

Los alumnos realizarán los diagramas correspondientes y los compararán con aquéllos de una relación reflexiva ya estudiada.

oOtro ejemplo (relación anti-reflexiva) y con base en las representaciones cartesiana y sagital, los alumnos, orientados por el profesor, caerán en la cuenta de que por medio de la relación en estudio ningún elemento puede relacionarse consigo mismo. En el mismo conjunto B si se considera la relación "... es el doble de ..." se verá que ninguno de los números allí representados es su propio doble.

Observarán también que tanto en las casillas de la diagonal principal de la tabla como en la diagonal del sistema de coordenadas cartesianas no está representada ninguna de las parejas ordenadas del grafo de la relación. En el diagrama sagital ningún elemento tiene bucle.

Las conclusiones que elaboren los alumnos podrán, al final, sintetizarse en una tabla como:

Entre las parejas de la forma (x, x), pertenecen al grafo G...	todas	por lo menos una pero no todas	ninguna
La relación de grafo G es ...	Reflexiva	Ni reflexiva Ni anti-reflexiva	Anti-reflexiva
		← No reflexiva →	
	← No anti-reflexiva →		

$R \neq \emptyset$ **Tabla de la Propiedad Reflexiva para relaciones no vacías.**

De los ejemplos de relaciones que den los alumnos se tomarán aquellos que permitan ampliar el estudio de la propiedad simétrica y distinguir entre anti-simetría, no simetría y simetría. Se elaborará una tabla semejante a la de la propiedad reflexiva para sintetizar la propiedad simétrica aún para relaciones no vacías, puede darse el caso de que una relación (como R_5) sea a la vez simétrica y anti-simétrica y por lo tanto no puede decirse que las no simétricas incluyan a las antisimétricas, ni que las no anti-simétricas incluyan a las simétricas.

Como una relación no puede ser simétrica y no simétrica, o anti-simétrica y no anti-simétrica, puede elaborarse una tabla de doble entrada, que excluya esos dos casos, y en la cual se anoten los ejemplos que simultáneamente cumplan dos de las propiedades anotadas.

Con los ejemplos estudiados hasta aquí la tabla queda así:

	Simetríca	No simetríca
Anti simetríca	R_5	R_2, R_3 y R_4
No anti-simetríca	R_1, R_6	R_6

Luego los alumnos repasarán todas las relaciones estudiadas leyéndolas como más se acostumbra, o sea con la "lectura relacional" en la que se menciona primero la imagen: *a———b : bRa.*

Identificarán la lectura propia de las relaciones reflexivas: x R x siempre se cumpe para cualquier x, y para las anti-reflexivas: x R x nunca se cumple.

Harán lo mismo con las simétricas y las anti-simétricas:

—Si y R x, entonces x R y para cualquier x, y.

—Si y ≠ x y y R x, entonces nunca se cumple x R y.

Igualmente con las transitivas y las anti-transitivas:
—Si zRyyyRx, entonces zRx para cualquier x,y,z.

—Si $z \neq y, y \neq x, x \neq z, z\ R\ y$ y $y\ R\ x$, entonces nunca se cumple $z\ R\ x$.

Elaborarán también una tabla semejante a la de la propiedad reflexiva para sintetizar la propiedad transitiva teniendo cuidado de no incluir las anti-transitivas dentro de las no transitivas, ni las transitivas dentro de las no anti-transitivas.

Ejemplos: —En el conjunto F = *{2, 3, 4, 5, 6, 18}* la relación "... es un divisor de ..." (en sentido amplio), ¿es reflexiva? ¿es transitiva? Realiza los diagramas cartesiano y sagital correspondientes.

F

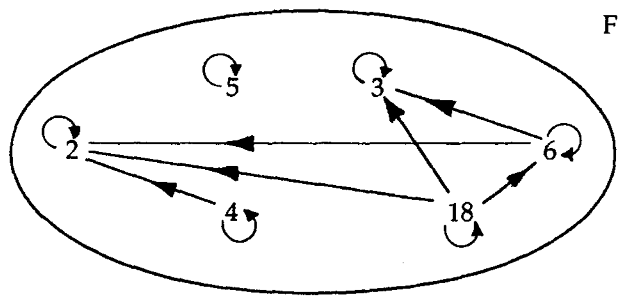


Diagrama sagital interno de la relación "... es un divisor de ..." en F.

—En el conjunto J = {0, 1, 2} la relación P "... es un múltiplo **par** de ..." ¿es reflexiva? ¿es anti-reflexiva? ¿es transitiva? ¿es anti-simétrica?

y P x significa que hay un número **par** p que multiplicado por x da y.

Realiza el diagrama sagital correspondiente.

J

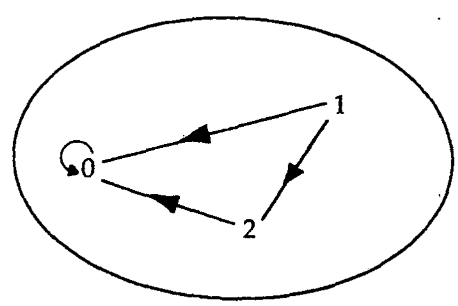
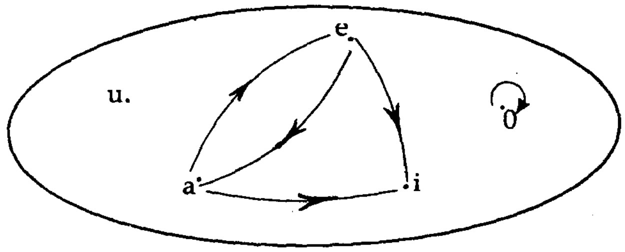


Diagrama sagital interno de la relación "... es un múltiplo par de ..." en el conjunto J.

NOTA: Cuando se habla de múltiplos se acostumbra excluír el cero, pero como 0 x 0 = 0, 0 x 1 = 0,0 x 2 = 0, etc., el cero puede considerarse como múltiplo par y como múltiplo impar de sí mismo, y también como múltiplo par de cualquier otro número n, pues $n \times 0 = 0$ y 0 es par.

—El siguiente diagrama sagital es el de una relación R en un conjunto A.

A



¿Es R anti-reflexiva? Explique su respuesta.
¿Es R anti-simétrica? Explique su respuesta.
¿Es R transitiva? Explique su respuesta.

—El siguiente diagrama cartesiano de tabla corresponde a la relación "... es un subconjunto de ..." en el conjunto $\mathcal{P}(B) = \{\{a\}, \{b\}, B, \emptyset\}$ donde B es el par $\{a, b\}$.

ø	x	x	x	x
{b}	x		x	
{a}	x	x		
B	x			
↖	B	{a}	{b}	ø

Construya el diagrama sagital.
¿Cuáles de las propiedades estudiadas cumple la relación?

—Fije un conjunto de alumnos que Ud. conozca y estudie las relaciones:

H : "... es hermano de ..."

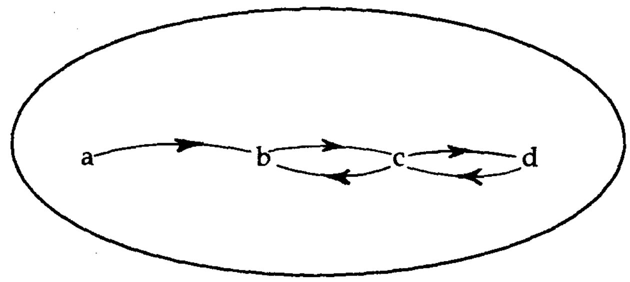
J : "... es más joven que ..."

P : "... es más pesado que ..."

El profesor se fijará especialmente en el manejo de las expresiones "siempre", "a veces sí", "a veces no", "nunca", "en todos los casos", "en algunos casos sí", "en algunos casos no", "en ningún caso", para que se vaya desarrollando el pensamiento formal de los alumnos, y para que no salten a una conclusión precipitada con el examen de unos pocos casos.

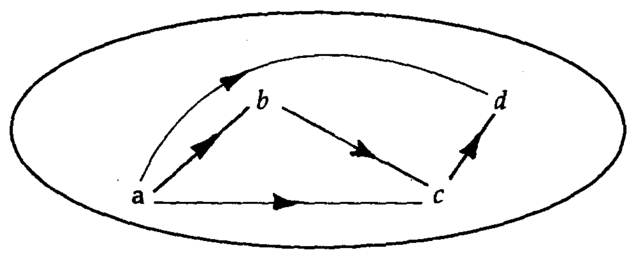
Es usual por ejemplo que, al ver algunos bucles en el diagrama sagital interno, los alumnos se apresuren a decir que la relación "es reflexiva aquí y aquí", y por lo tanto es reflexiva. Se aprovechará para hacer notar que basta una sola excepción para que la relación no sea reflexiva. Podría llegarse a un acuerdo con los alumnos en que digan que "una relación es reflexiva en el punto a" si a R a, con tal de que reconozcan que solo es reflexiva si es reflexiva en todos los puntos.

Lo mismo sucede al ver una pareja con "doble vía" en un diagrama



Algunos alumnos dirán que sí es simétrica en b, c, y en c, d. De nuevo se les hará notar que basta una sola excepción (a, b) para que no sea simétrica. Si insisten en decir que una relación R "es simétrica en la pareja (x, y) si a la vez y R x y X R y", deben reconocer que R solo es simétrica si lo es en todas las parejas que estén relacionadas.

Paralelamente se insistirá en que basta una sola excepción para que una relación no sea transitiva:



No hay flecha directa de b a d, aunque si se podría transitar por c. Si insisten en decir que una relación "es transitiva en la terna (x, y, z) si a la vez z R y, yR x y z R x", deben reconocer que R solo es transitiva si lo es en **todas** las ternas en las que se pueda transitar por el elemento intermedio.

—El siguiente ejercicio permite afianzar los conceptos de partición y relación de equivalencia. El conjunto referencial es N. La relación que vamos a considerar es: "... tiene el mismo residuo que ... en la división por tres".

Se dan algunas sugerencias y comentarios al respecto:

Número natural	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ...
Residuo de su división por tres	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1 ...

Se observa que los residuos posibles son: 0, 1, y 2. Esto permite organizar los datos anteriores en una tabla como:

Naturales	Residuos
0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...	0
1, 4, 7, 10, 13, 16, ...	1
2, 5, 8, 11, 14, 17, ...	2

De estas tres listas de números se puede concluir lo siguiente:

1. Ninguno de los conjuntos dados en cada una de las listas es vacío.
2. La reunión de esos conjuntos es igual a N.
3. Ningún natural figura en dos listas a la vez.

Las consideraciones anteriores, llevan a afirmar que la colección de esos conjuntos:

$\mathcal{H} = \{\{0, 3, 6, 9, \ldots\}, \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}, \{2, 5, 8, 11, \ldots\}\}$

es una partición de N.

– ¿cuáles son las clases de $\mathcal{H}$?

– óDar ejemplos de elementos que sean equivalentes y explicar por qué.

NOTA PARA EL PROFESOR. Las tres clases de equivalencia son las llamadas clases de congruencia módulo 3 o también clases residuales módulo 3.

La relación de equivalencia es la congruencia módulo 3.

Dos elementos de una misma clase son congruentes (o equivalentes según la partición) módulo 3.

Así: "4 es congruente con 7 módulo 3" (7,4)

"5 es congruente con 14 módulo 3" (14,3)

"3 es congruente con 15 módulo 3" (15,3)

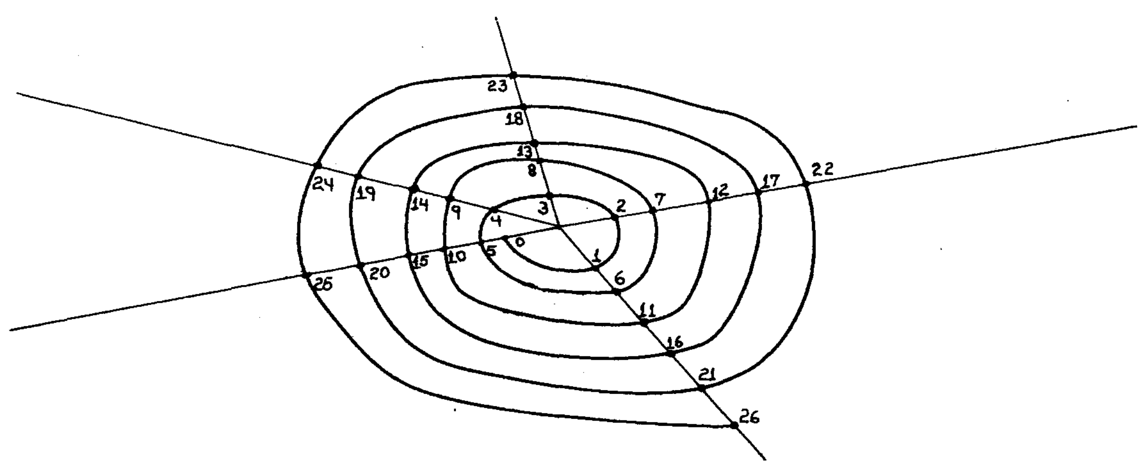
(7 - 4) es un múltiplo de 3: 3 ⌋ 3

(14 - 5) es un múltiplo de 3: 9 ⌋ 3

(15 - 3) es un múltiplo de 3: 12 ⌋ 3

Otra forma muy fácil de hallar las clases residuales módulo $n\,(n > 1)$ es la siguiente. Supongamos que $n = 5$

Se ve que en cada una de las semirrectas (figura siguiente) aparecen los elementos de cada una de las clases residuales módulo 5: la del cero, la del uno, la del 2, la del 3 y la del 4.



Otra manera de expresar esta relación de congruencia módulo 5, es decir que los dos números dan lo mismo quitando cincos:

18 es congruente con 13 módulo cinco

18 y 13 dan lo mismo quitando cincos:

$$\begin{array}{r} 18 \\ \underline{-5} \\ 13 \\ \underline{-5} \\ 8 \\ \underline{-5} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \underline{-5} \\ 8 \\ \underline{-5} \\ 3 \end{array}$$

Ambos pertenecen a la clase del 3.

La congruencia módulo 9 es interesante para verificar sumas, restas, y multiplicaciones: son las llamadas "pruebas por los nueves" o "quitando nueves". Hay un truco muy fácil (algoritmo) para encontrar el residuo módulo 9: basta sumar los dígitos del número (numeral) en base diez: $112 \equiv 4$ módulo 9.

$1 + 1 + 2 = 4$

$$\begin{array}{r|l} 112 & 9 \\ \cline{2-2} 22 & \\ 4 & \end{array}$$

Si la suma da nueve, el número es múltiplo de nueve. Si da más de nueve, se vuelven a sumar los dígitos. $168 \equiv 15 \equiv 6$ módulo 9.

$$\begin{array}{r|l} 168 & 9 \\ \cline{2-2} 78 & \\ 6 & \end{array}$$

OBJETIVOS ESPECIFICOS

93 Identificar las relaciones que son a la vez anti-simétricas y transitivas y denominarlas relaciones de orden.

94 Reconocer relaciones de orden estricto y de orden amplio.

95 Reconocer relaciones de orden total y de orden parcial.

96 Asociar una seriación en cadena o lineal con un orden total.

97 Asociar una seriación jerárquica o arbolar con un orden parcial.

CONTENIDOS BASICOS

Las relaciones, en un conjunto, que son a la vez transitivas y anti-simétricas, se denominan **relaciones de orden**.

Las relaciones de orden pueden ser de orden amplio o de orden estricto.

Una relación de **orden amplio** es transitiva, anti-simétrica y reflexiva.

Una relación de **orden estricto** es transitiva, anti-simétrica y anti-reflexiva.

El orden, ya sea amplio o estricto, puede ser total o parcial.

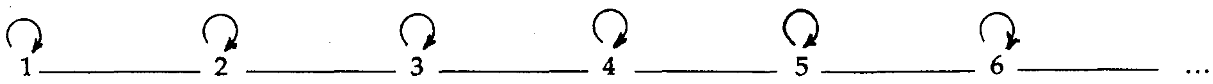
Es **total** cuando cualquier pareja de elementos distintos del conjunto es comparable mediante dicha relación, es decir, si a y b son elementos distintos del conjunto, entonces una de las parejas (a,b) o (b,a) pertenece al grafo de la relación.

Es **parcial** cuando existe por lo menos una pareja de elementos distintos del conjunto, que no es comparable mediante la relación. En este caso, si a y b son dos elementos distintos del conjunto, que no son comparables, ni la pareja (a,b) ni la pareja (b,a) pertenecen al grafo de la relación

Ejemplos:

— **Relación de orden amplio y total**: "...es mayor o igual que..." en los números naturales. En efecto, ella es transitiva, anti-simétrica y reflexiva (orden amplio), además cualquier pareja de elementos es comparable mediante la relación (orden total).

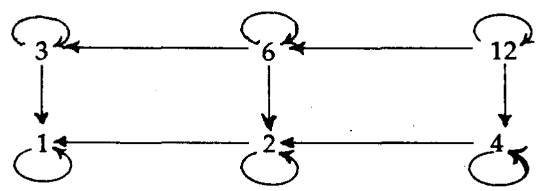
El diagrama de flechas simplificado de la relación en estudio es:



Esta simplificación del diagrama sagital es cómoda y legible, pero no debe confundirse con él, pues le faltan flechas: aquellas que permiten visualizar la propiedad transitiva.

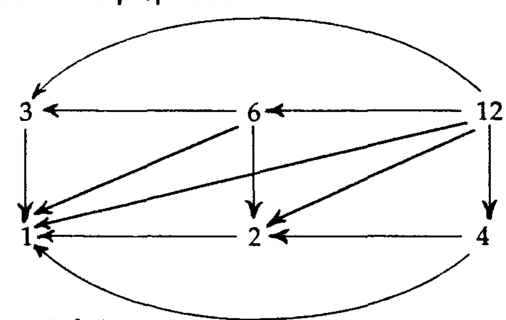
— **Relación de orden amplio y parcial**: "...es un divisor de..." (en sentido amplio) en el conjunto A = {1, 2, 3, 4, 6, 12}. En este caso la relación transitiva, anti-simétrica y reflexiva; pero no toda pareja de números es comparable mediante la relación, tal es el caso de 2 y 3, 3 y 4 (orden parcial).

El diagrama sagital simplificado de la relación es el siguiente:



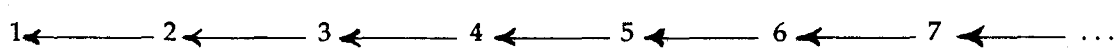
Este no es el diagrama sagital completo, pues faltan las flechas que permitirían visualizar la propiedad transitiva.

El diagrama sagital completo de la relación es:

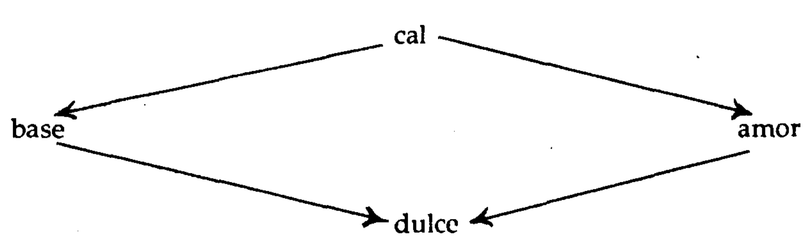


— **Relación de orden estricto y total**: "...es menor que..." en **N**. Esta relación es transitiva, anti-simétrica y anti-reflexiva (orden estricto). Cualquier pareja de elementos se puede comparar por medio de la relación.

A esta relación se le puede asociar el siguiente diagrama sagital simplificado:



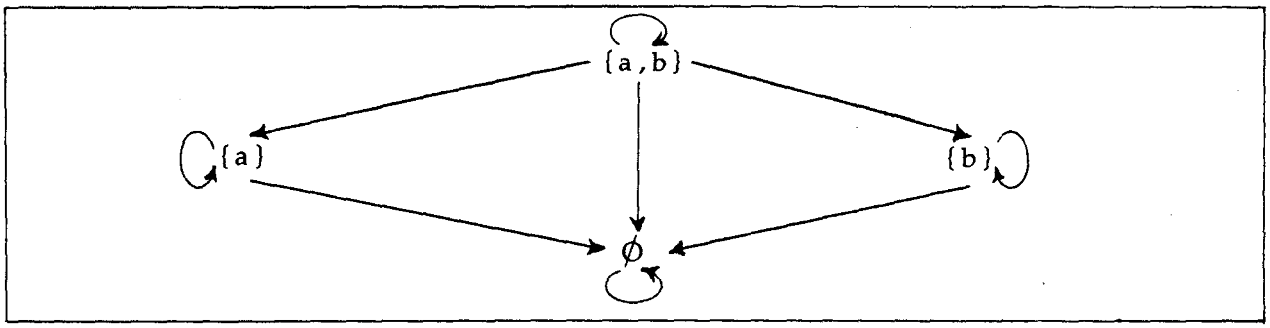
— **Relación de orden estricto y parcial**: "... se escribe con más letras que..." en el conjunto E = {*amor, base, cal, dulce*}. Esta relación es transitiva, anti-simétrica y anti-reflexiva. No todos los elementos se pueden comparar dos a dos mediante la relación, tal es el caso de *amor* y *base*, que se escriben con el mismo número de letras, por lo tanto el orden es parcial.



— Consideremos el conjunto $B = \{a, b,\}$, su conjunto de partes:

$\mathcal{P}\ (B) = \{\ \{a\}\ , \{b\}, \{a, b\}\ , \emptyset\ \}$ y la relación "... es un subconjunto de..." (en sentido amplio).

Esta relación en $\mathcal{P}$ (B) es de orden amplio y parcial. Se puede representar mediante un diagrama así:



NOTA: En los libros de Teoría de Conjuntos u otras materias afines, se suele definir el orden por las tres propiedades: reflexiva, anti-simétrica y transitiva simultáneamente. Pero esta definición excluiría los órdenes estrictos: $<$ no sería un orden en **N**. Sin embargo, para los alumnos es más fácil de comprender el orden estricto: es menor que; es divisor que; es subconjunto de, lo entienden como: estrictamente menor; divisor propio o estricto; subconjunto propio.

De todas maneras, si se tiene la anti-simétrica y la transitiva, la reflexiva se puede añadir o quitar a voluntad.

Ejemplo. Si se tiene $\leq$ y se suprime el símbolo de la igualdad ($\lneqq$) queda $<$
Si se tiene $\subseteq$ y se suprime el símbolo de la igualdad ($\subsetneqq$) queda $\subset$.
Si se tiene $\underline{L}$ y se suprime el símbolo de la igualdad ($\underset{\neq}{L}$) queda L.

Es decir:

$\leq$	$\lneqq$	$<$
$\subseteq$	$\subsetneqq$	$\subset$
$\underline{L}$	$\underset{\neq}{L}$	L

La nomenclatura usual de muchos libros es la de llamar "orden parcial" a **todos** los órdenes, sean o no totales. Así, parcial y total no se excluyen. Esto contradice el uso común de los alumnos, quienes dividen los órdenes en totales y parciales como clases exclusivas. Podría decírseles que un orden total también puede llamarse "parcial", así como un número entero también puede llamarse "quebrado".

Cuando el orden es total el diagrama simplificado es una seriación en cadena o lineal.

Cuando el orden es parcial el diagrama simplificado es de tipo jerárquico.

Ambos tipos de representación no constituyen el diagrama sagital completo de la relación, pero sí ofrecen la información mínima necesaria para ver qué clase de relación es. En ocasiones el diagrama sagital tiene tantas flechas que su lectura resulta difícil e incómoda. Por eso se omiten los "bucles" ( ) y la flecha directa que corresponde a dos flechas seguidas (. . .).

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Para el logro de estos objetivos es conveniente empezar las actividades con el estudio de relaciones que permitan ordenar de alguna manera los elementos de un conjunto. También podría ordenarse el conjunto y asociarle a este orden la relación correspondiente.

Después de establecer el orden entre los elementos del conjunto, se verá cuáles de las propiedades estudiadas anteriormente cumplen dicha relación.

Ejemplo: Se puede considerar un grupo cualquiera de alumnos y sus respectivas estaturas:

Alumno	Estatura (cm)
Arrieta Esteban	157
Barrios Carmen	163
Castro Rosa	163
Díaz Mario	165
Guardo Hermes	170
Flórez Juliana	170
López Omar	168
Llamas Ana	160
Mejía José	175

Si a este grupo de alumnos se les pide que formen una fila de tal manera que el de **menor estatura** quede adelante, posiblemente se observará que algunos de ellos ocupan un sitio sin vacilar, mientras que otros se atropellan entre sí, pues la decisión de quién va adelante de quién, sólo depende de quien llegue primero.

En un principio se obtendrán filas en las cuales dos alumnos de igual estatura querrán ocupar el mismo sitio (a cada estudiante lo vamos a identificar con la inicial del apellido):

A LL	B	DL	G	M
	C		J	

Una vez que aquellos de la misma estatura lleguen a un acuerdo se obtendrá una cualquiera de las siguientes filas:

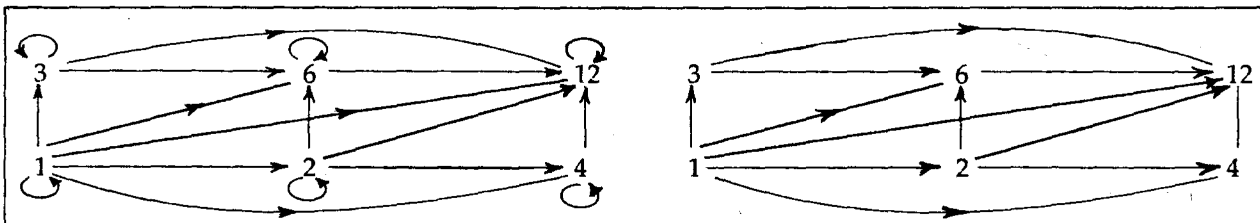
A	LL	B	C	D	L	G	F	M
A	LL	B	C	D	L	F	G	M
A	LL	C	B	D	L	F	G	M
A	LL	C	B	D	L	G	F	M

Se ve pues que la relación "... es de menor estatura que..." en el conjunto de alumnos considerado es de orden estricto y parcial. El orden es estricto por tratarse de una relación transitiva, anti-simétrica y antireflexiva. Posteriormente se verá que este orden es parcial porque no todos los elementos son comparables, es el caso de Hermes Guardo y Juliana Flórez, Carmen Barrios y Rosa Castro.

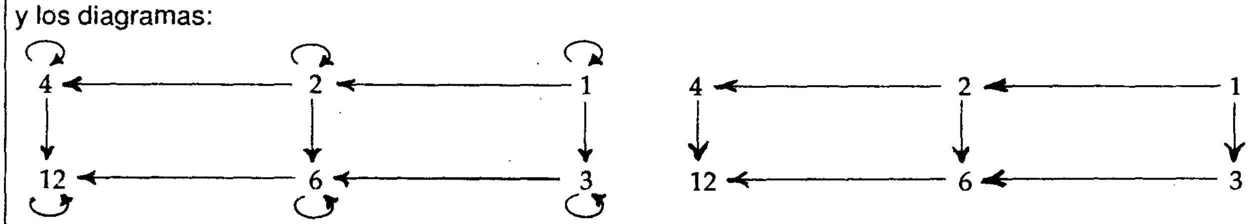
En las relaciones que se estudien se podrá empezar por diferenciar el orden estricto del orden amplio. Después de analizar varios ejemplos puede escogerse uno de ellos para hacer una síntesis.

Ejemplo 2. Si se fija el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ y en él se consideran las relaciones "... es un múltiplo de..." en sentido amplio y en sentido estricto, es fácil ver que en el primer caso el orden es amplio y en el segundo el orden es estricto.

Los diagramas sagitales (completos) de las relaciones son:



y los diagramas:



son una simplificación de los diagramas sagitales completos: correspondientes a cada una de las relaciones; ellos brindan la información mínima necesaria para concluir sobre el tipo de relación que representan.

Ejemplo 3. Si en B = {1, 3, 6, 12, 24} se consideran las relaciones anteriores, los esquemas correspondientes serán ahora:

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24$	Orden amplio
$1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 12 \rightarrow 24$	Orden estricto

Es el momento de hablar de orden parcial y de orden total. Es posible que frente a estas dos situaciones (la del conjunto A y la del conjunto B) los alumnos elaboren algunas conclusiones relacionadas, al menos, con los diagramas sagitales simplificados (que no son los diagramas sagitales completos).

En el ejemplo 2, se verá que algunos números como 2 y 3, 4 y 3, no son comparables mediante las relaciones dadas, mientras que en el ejemplo 3 cualquier par de elementos es comparable mediante las relaciones en estudio. De aquí resultan los siguientes tipos de relaciones:

— Relación de orden amplio y parcial
— Relación de orden estricto y parcial
— Relación de orden amplio y total
— Relación de orden estricto y total

Para afianzar esta distinción se estudiarán otros ejemplos, de preferencia aquellos que sean conocidos por los alumnos.

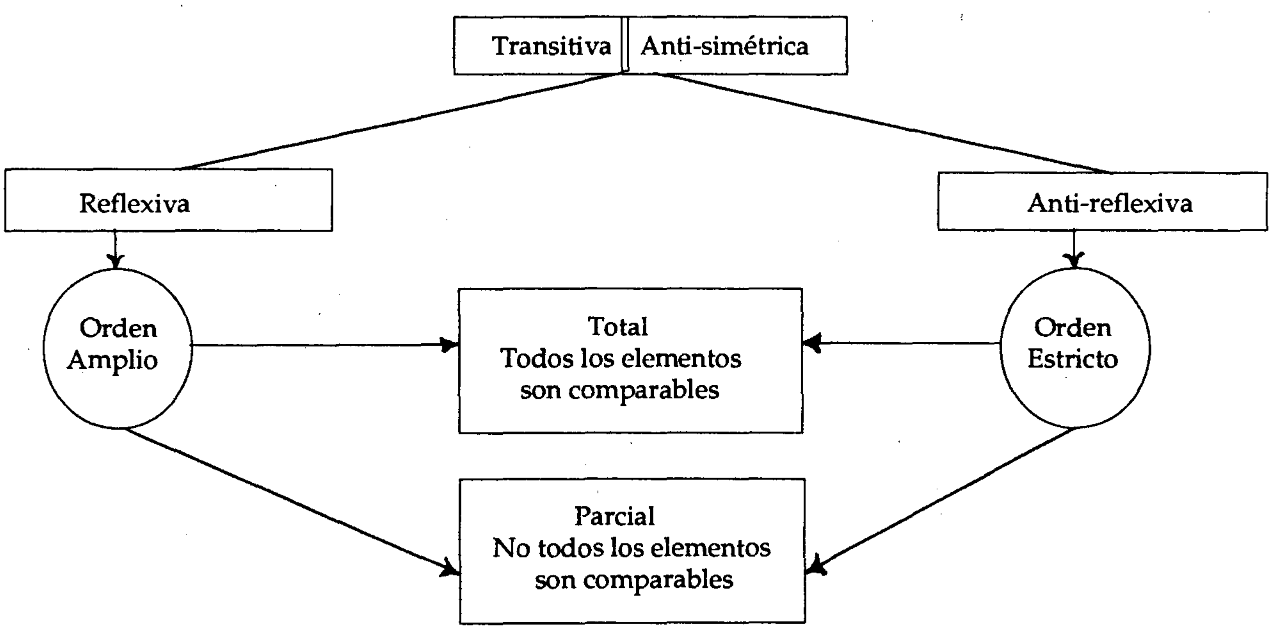
El orden alfabético es estricto y total: si a él le asociamos la relación "... está después de..." es claro que en el conjunto L = {a, b, c, d, e, f, ...z}, dicha relación es transitiva, anti-simétrica y anti-reflexiva, además cualquier pareja de letras es comparable mediante la relación.

El diagrama sagital de esta relación resultaría tan lleno de flechas que su lectura podría ser difícil. Pero se puede llegar a un acuerdo con los estudiantes y hacer un diagrama simplificado como el siguiente:

a → b → c → d → e → f → ..... → z

Después de analizar varios ejemplos de relaciones de **orden total** se verá que a todas las relaciones de ese tipo puede asociárseles una seriación en cadena o lineal, como fue el caso de la relación "... está después de..." en el conjunto L.

Finalmente podría elaborarse un resumen, así:



OBJETIVOS ESPECIFICOS

98 Representar con diagramas de flechas y diagramas cartesianos una relación binaria de un conjunto a otro.

99 Reconocer si una relación binaria de un conjunto a otro está totalmente definida o no, si es sobreyectiva, funcional, inyectiva, biyectiva o no.

100 Identificar la relación inversa de una relación binaria.

101 Hallar la relación compuesta de dos relaciones binarias en un conjunto.

CONTENIDOS BASICOS

Una **relación** es **binaria** cuando se establece o se da entre dos elementos que pueden provenir del mismo conjunto o de dos conjuntos diferentes. Así, en la frase: "Cartagena es la capital de Bolívar" se establece una relación entre dos elementos: el departamento de Bolívar y la ciudad de Cartagena, que es su capital. (Ver Unidad IV, 6º Grado).

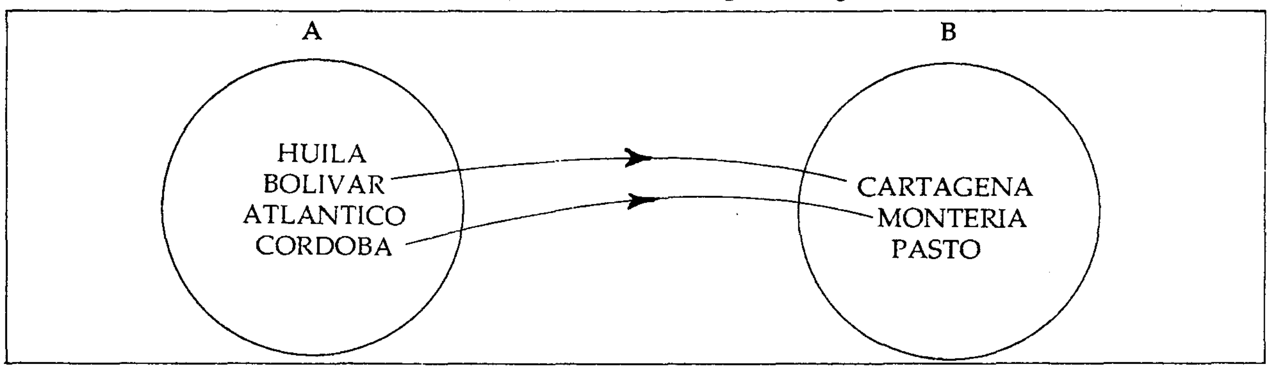
Una relación R se da entre los elementos de un conjunto A (llamado conjunto de salida) y los elementos de un conjunto B (conjunto de llegada) cuando para algún $x \in A$ y algún $y \in B$ la frase de la forma "yRx" se cumple.
En este caso decimos que la pareja (x,y) pertenece al grafo de R.

El grafo de la relación R es pues el conjunto de todas las parejas $(x,y) \in A \times B$ que cumplen la condición *yRx*. A veces se confunde la relación R con la frase yRx o con el grafo de R. Pero es preferible distinguirlos unos de otros. Para hacer pensar en la relación podemos dar un símbolo (como "<"), una expresión incompleta (como "... es menor que..."), o una frase (como "a es menor que b") o una lista de parejas (como { (0,1), (0, 2), (1, 2), ...}).

Ejemplo: sea A = {Huila, Bolívar, Atlántico, Córdoba}
B = {Cartagena, Montería, Pasto} y la relación:

R : "... es la capital de..."

— Diagrama sagital

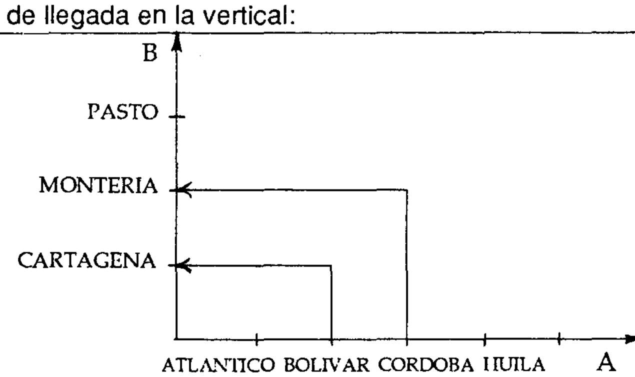


— Diagramas cartesianos

El conjunto de salida se escribe en la horizontal y el de llegada en la vertical:

PASTO				
MONTERIA			X	
CARTAGENA		X		
	ATLANTICO	BOLIVAR	CORDOBA	HUILA

Tabla



Gráfica

Los elementos del conjunto de salida que tienen imagen constituyen el **dominio** de la relación y las imágenes el **recorrido** o codominio de la relación.

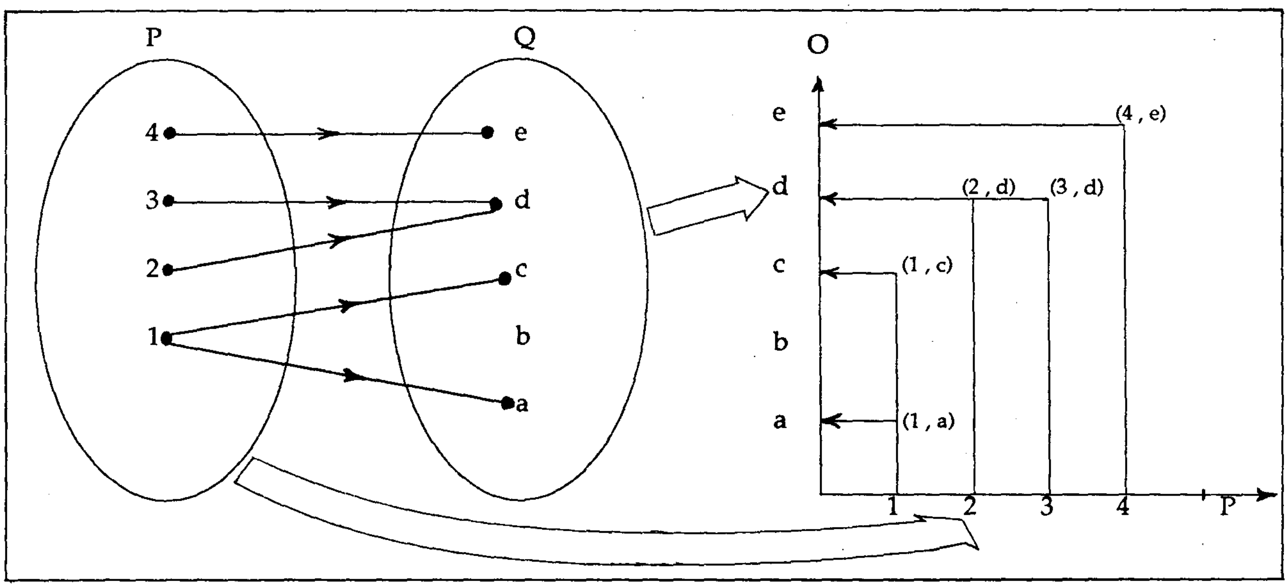
En algunos libros al recorrido o codominio también lo llaman rango.

En el ejemplo anterior, se tiene:

Dominio = {Bolívar, Córdoba}
Recorrido = {Cartagena, Montería}

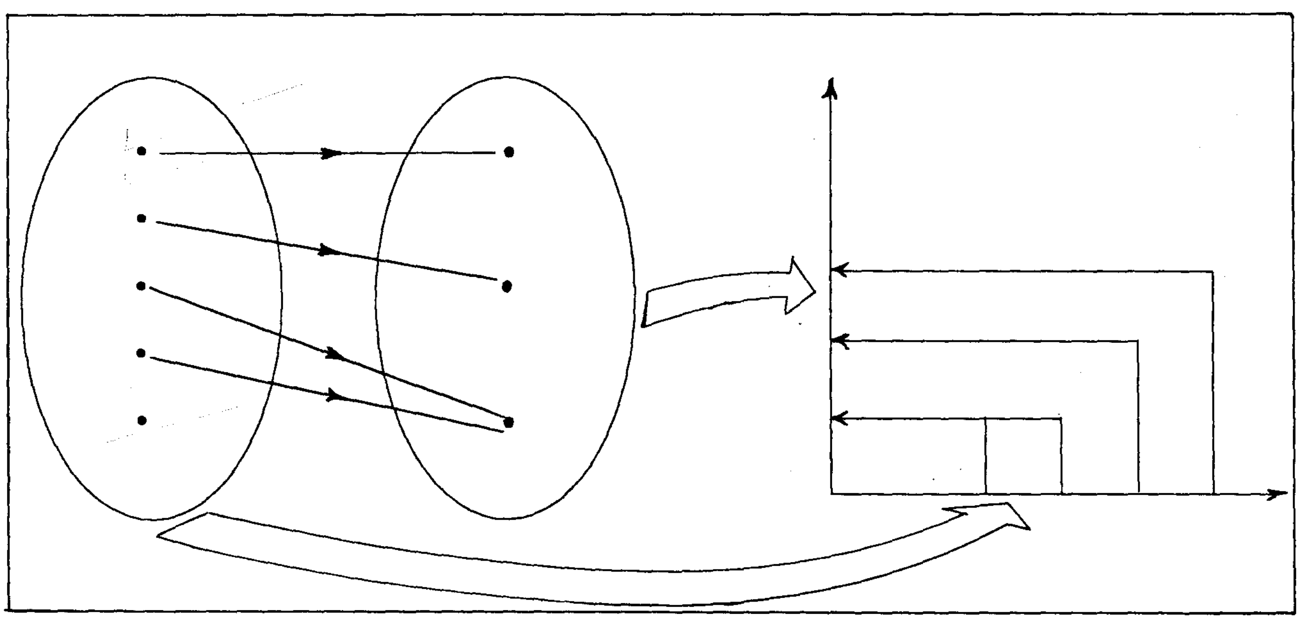
Relación totalmente definida: cuando el dominio es todo el conjunto de salida se dice que la relación está totalmente definida.

En el diagrama de flechas y en el cartesiano esta propiedad se visualiza fácilmente porque de todos los elementos del conjunto de salida sale por lo menos una flecha.



La relación "... es la capital de..." no está totalmente definida, pues los elementos Huila y Atlántico no tienen imagen en B: de ellos no sale ninguna flecha.

Relación Sobreyectiva: cuando el recorrido (o codominio) es todo el conjunto de llegada, se dice que la relación es sobreyectiva. En este caso, cada uno de los elementos del conjunto de llegada es imagen de por lo menos un elemento del conjunto de salida. A cada uno de los elementos del conjunto de llegada le llega por lo menos una flecha.



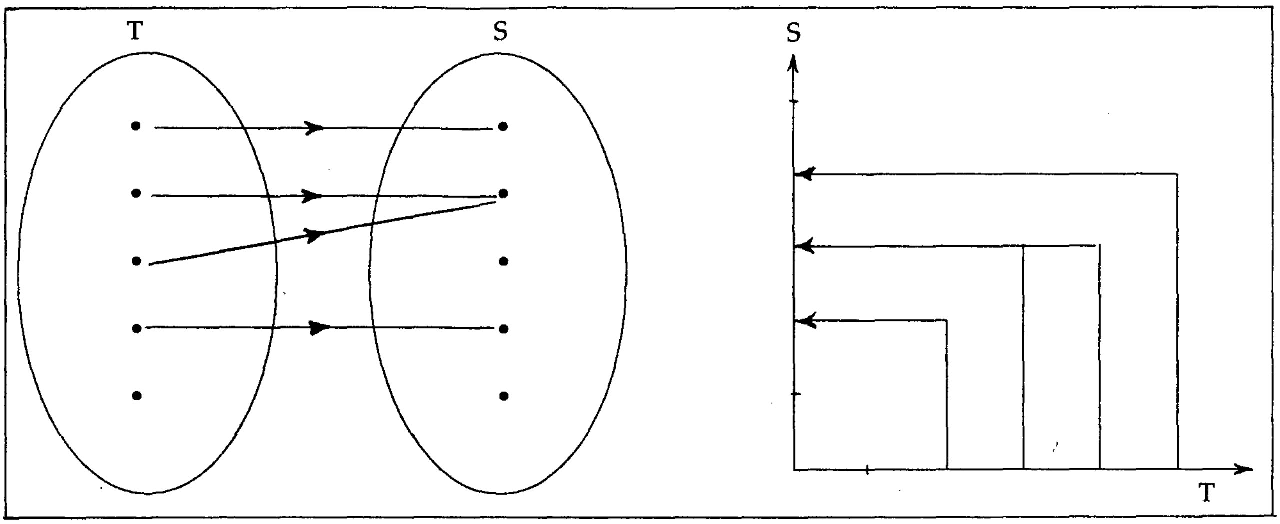
Relación funcional: una relación es funcional cuando a elementos distintos del conjunto de llegada les corresponden pre-imágenes distintas.

No hay flechas divergentes a partir de un mismo punto del diagrama sagital. De ningún elemento del conjunto de salida sale más de una flecha.
Puede que no salga ninguna, pero sale máximo una.

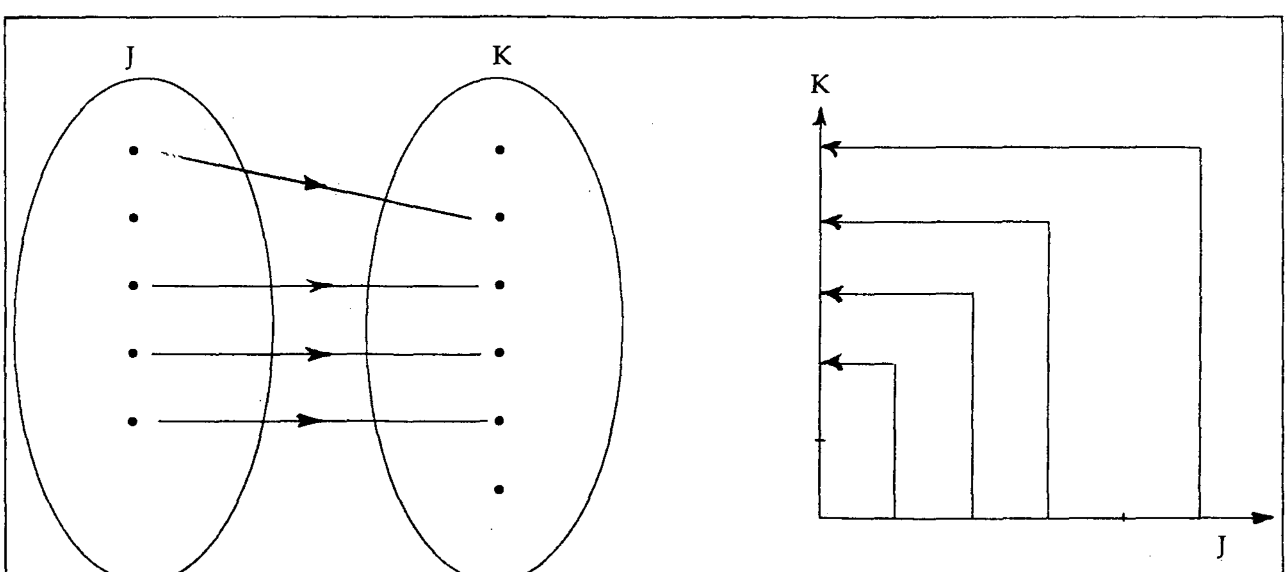
Este tipo de relación se distingue fácilmente por el esquema de lectura.
En dicho esquema cabe un artículo definido antes de la palabra que designa la relación.

Ejemplo: en la relación "... es papá de...", ¿cabe un artículo definido? Pensemos en Zoila y Guillermo; supongamos que la frase relacional "Guillermo es papá de Zoila" se cumple. Entonces cabe cambiar la frase relacional en: "Guillermo es **el** papá de Zoila".
Esto es correcto porque Zoila tiene un solo papá, es decir, una sola imagen bajo la relación "... es papá de...".

La relación "... es múltiplo de..." en **N**, ¿es funcional? No, porque las frases relacionales no admiten un artículo definido: "9 es **el** múltiplo de 3", sería incorrecto, pues 9 no es la única imagen de 3 por medio de la relación: "9 es **un** múltiplo de 3", (pero hay otros).

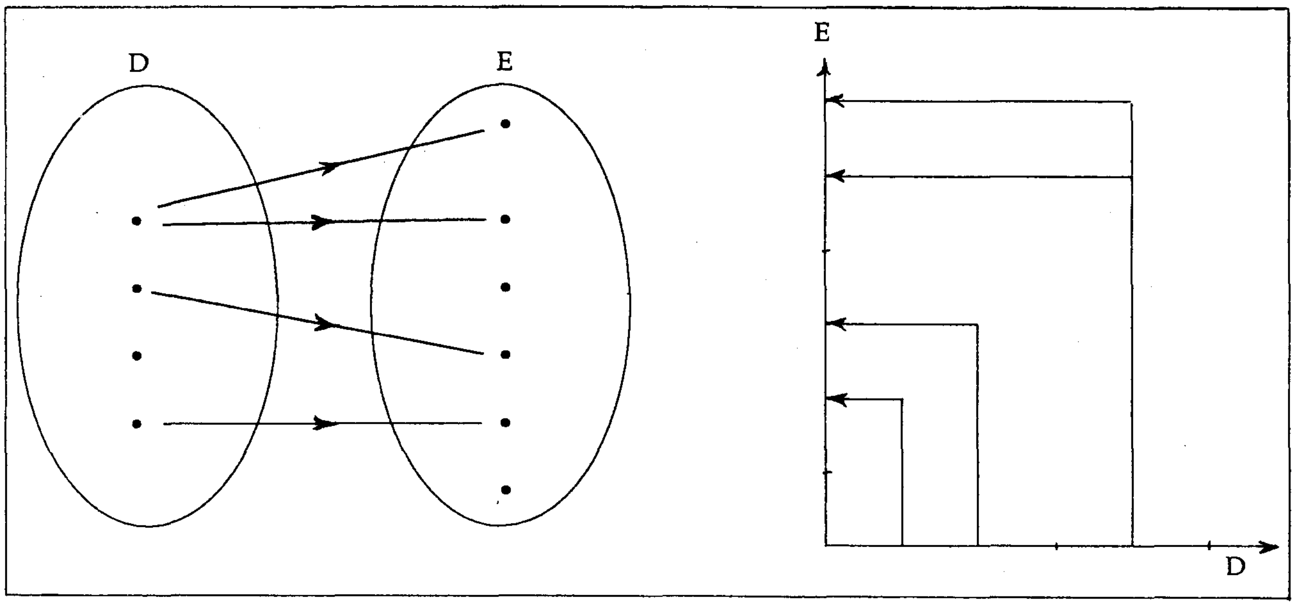


Relación inyectiva: una relación es inyectiva cuando a elementos distintos del conjunto de salida les corresponden imágenes distintas. En el diagrama sagital no hay flechas convergentes a un mismo punto. A ningún elemento del conjunto de llegada le llega más de una flecha. Puede que no le llegue ninguna, pero le llega máximo una.



Este diagrama corresponde a una relación a la vez funcional e inyectiva.

Si la relación no es funcional pero sí es inyectiva el diagrama sagital puede ser:

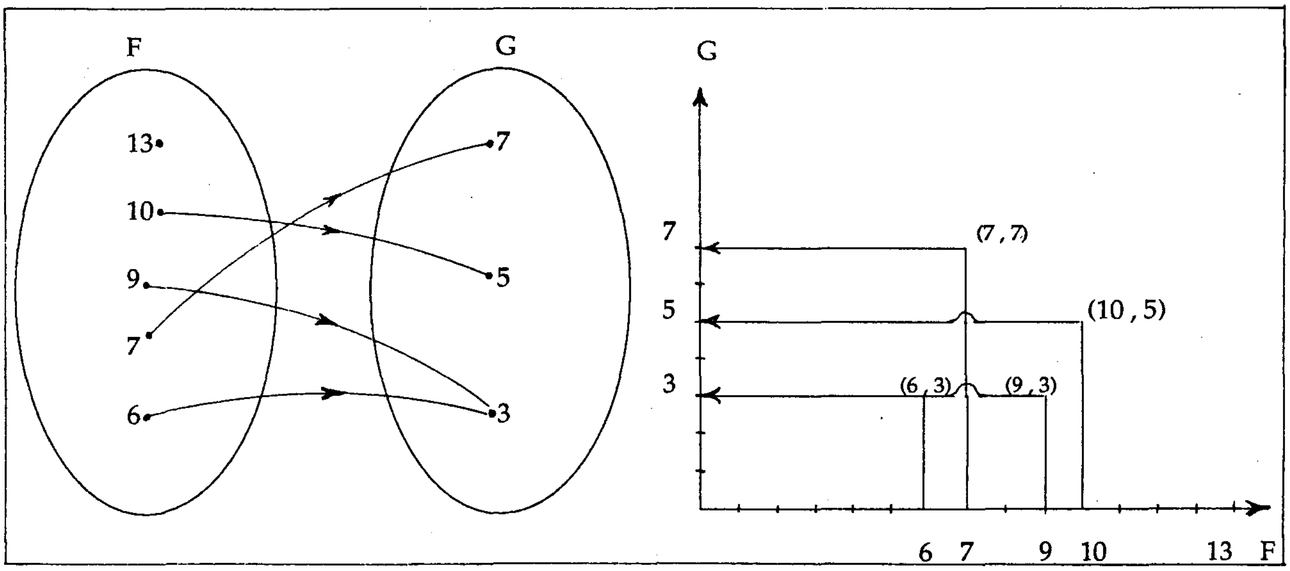


Relación Biyectiva: una relación totalmente definida y funcional que es al mismo tiempo sobreyectiva e inyectiva se dice que es biyectiva. En este caso el conjunto de salida es el dominio de la relación, el de llegada es el recorrido de la relación y además a elementos distintos del conjunto de salida les corresponden imágenes distintas, y a elementos distintos del conjunto de llegada les corresponden pre-imágenes distintas.

Relación Inversa: dada una relación R entre los elementos de un conjunto E (conjunto de salida) y los elementos de un conjunto F (conjunto de llegada), la relación inversa de R tendrá como conjunto de salida a F y como conjunto de llegada a E. El sentido de las flechas del diagrama sagital de esta relación, es contrario al de las flechas del diagrama sagital de R.

A la relación inversa de R la podemos notar
R^- o R^{-1}

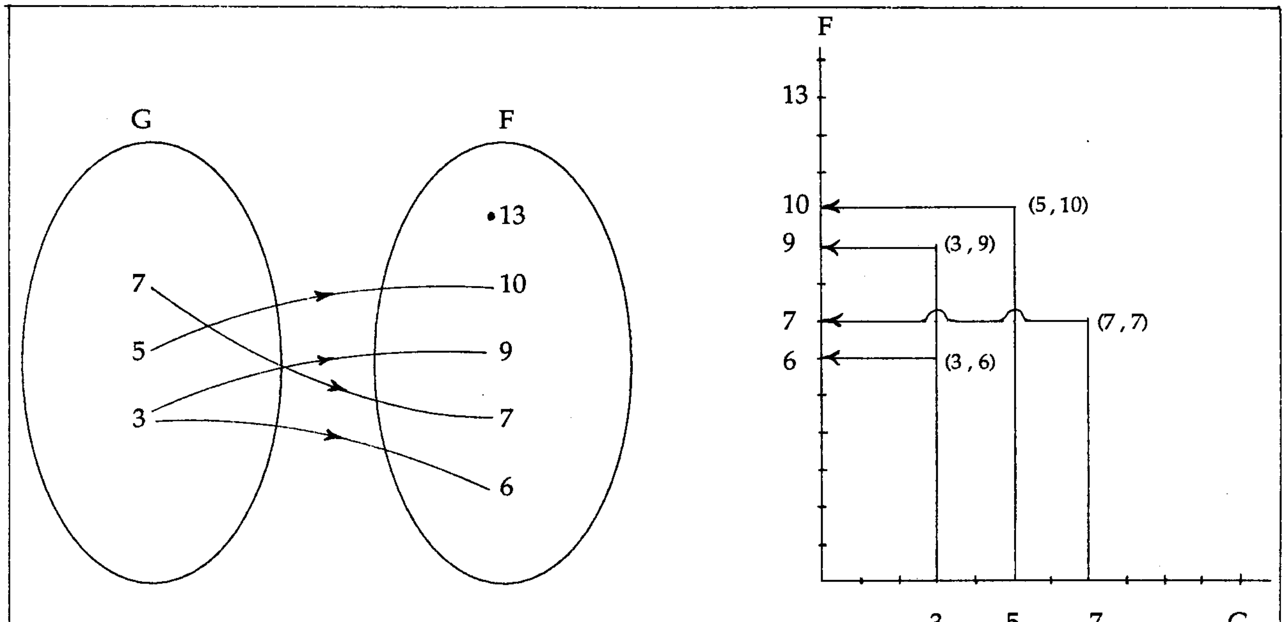
Ejemplo: consideremos la relación "... es divisor de..." entre los conjuntos $E = \{6, 7, 9, 10, 13\}$ y $F = \{3, 5, 7\}$



"... es divisor de ... "

El grafo de R es { (6, 3), (9, 3), (10, 5), (7, 7) }

Los diagramas sagital y cartesiano de la relación inversa son respectivamente:



"... tiene por divisor a ..."

"... es multiplo de ..."

El grafo de la relación inversa de R es { (3, 6), (3, 9), (5, 10), (7, 7) }

El siguiente cuadro permite comparar las propiedades de las dos relaciones dadas en el ejemplo.

	Totalmente Definida	Sobreyectiva	Funcional	Inyectiva	Biyectiva
R	No	Si	Si	No	No
$R^{\leftarrow}$	Si	No	No	Si	No

Como puede verse en el ejemplo las dos relaciones no tienen las mismas propiedades.

Cuando una relación está totalmente definida, su inversa es sobreyectiva y viceversa; si es funcional, su inversa es inyectiva, y viceversa; si a la vez es funcional e inyectiva, la inversa también es funcional e inyectiva, y si es biyectiva, su inversa también lo es. Pero baste que falle una sola propiedad, y ya ni R ni $R^{\leftarrow}$ pueden ser biyectivas.

Relación Compuesta: en el lenguaje ordinario expresamos por medio de la repetición de la palabra "de" una combinación de dos relaciones:

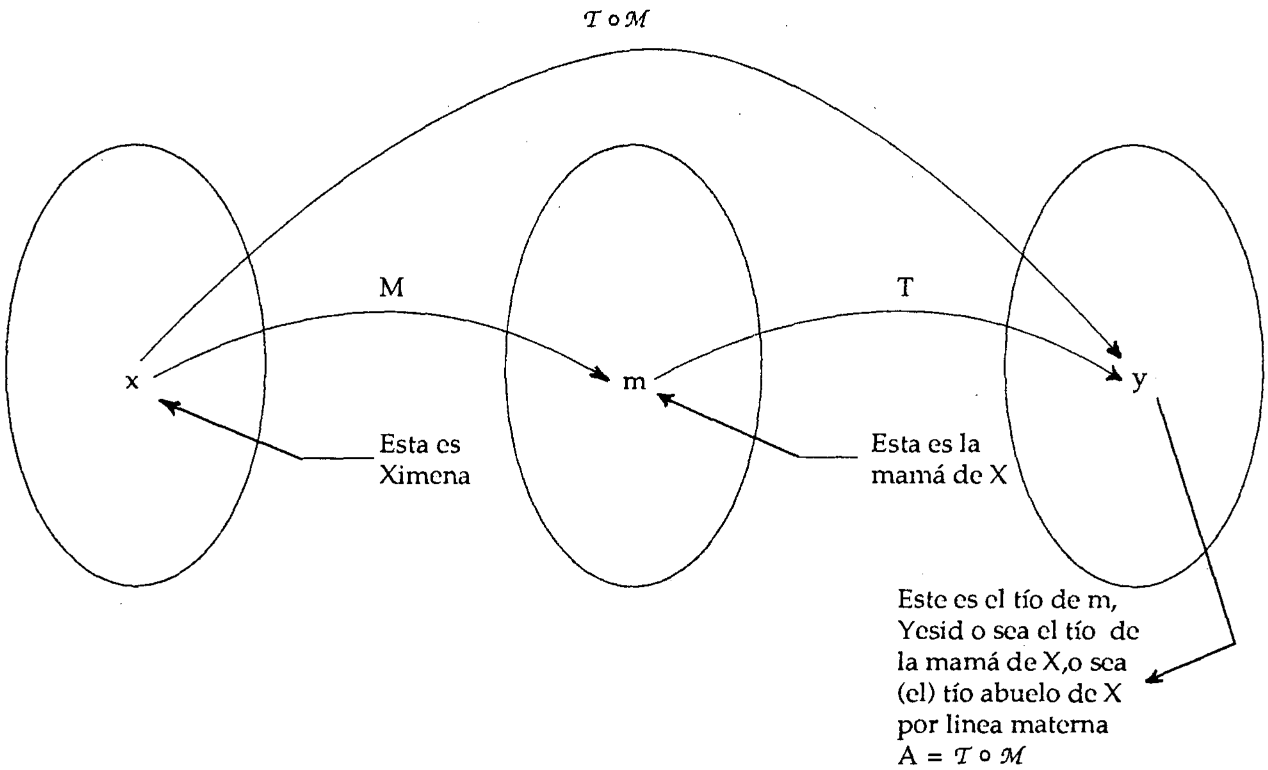
"... es tío **de** la mamá **de**..."
"... es vecino **de** un amigo **de** ..."
"... es raíz **de** un múltiplo **de**..."
"... es cuadrado **de** la mitad **de**..."

Estas combinaciones de relaciones se llaman relaciones compuestas, y la composición se simboliza por un circulito entre los símbolos de las relaciones: R ° U.

Ejemplo:

$\mathcal{T}$: "... es (un) tío de..."
$\mathcal{M}$: "... es (la) mamá de..."
$\mathcal{T}o\mathcal{M}$: "... es (un) tío **de** (la) mamá de..."
$\mathcal{A}$: "... es (un) tío abuelo de..." (por línea materna).

Como se lee primero la imagen, en una frase de tipo "y $\mathcal{T}°\mathcal{M}$x", como por ejemplo: "Yesid es tío de (la) mamá de Ximena", la flecha sale de x y apunta hacia y.



Nótese cómo se empiesa a leer desde la imagen hacia atrás y es... de ... x. En este caso y ... $\mathcal{T}$... o ...M ..x y $\mathcal{T} \circ M$x que es equivalente a y $\mathcal{A}$xTambién podemos decir: $\mathcal{A} = \mathcal{T} \circ M$.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Como el trabajo en clase se hace, preferencialmente, con base en los ejemplos que den los alumnos, creemos que las aclaraciones y sugerencias ya hechas en los contenidos básicos son suficientes para orientar el trabajo del profesor en el estudio de los temas propuestos.

BIBLIOGRAFIA

ALLEN DOERFER, K. y OAKLEY, C. **Fundamentos de Matemáticas Universitarias**. Cali: Mc Graw - Hill, 1974.

BARNETT, Raymond A. **Algebra y Trigonometría**. México: Mc Graw-Hill, 1987.

BRANSFORD,J. y STEIN, B. **Solución Ideal de Problemas**. Guía para mejor pensar, aprender y crear. Barcelona: Editorial Labor S.A. 1986.

BROWN, S, y WALTER,M. **The art of problem posing**. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press, 1983.

CAMPOS, Alberto. **La Educación Geométrica**. Bogotá: Imprenta Universidad Nacional, 1981.

CANAVOS, George C. **Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos**. México: Mc Graw-Hill, 1988.

CASTELNUOVO, Emma. **Didáctica de la Matemática Moderna**. México: Editorial Trillas, 1973.

COLOMBIA. COLCIENCIAS. **Educadores e Informática: Promesas, dilemas y realidades**. Bogotá: Colciencias, 1988.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. **Marcos Generales de los Programas Curriculares**. Bogotá: Editolaser, 1984.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. **Propuesta de Programa Curricular para Matemáticas: Sexto Grado y Séptimo Grado de Educación Básica**. Bogotá: Imprenta Nacional, 1988.

DAVIS, P.J. y HERSH, R. **Experiencia Matemática**. Barcelona: Editorial Labor S.A., 1988.

DIENES, Z.P. y GOLDING, E. W. **La Geometría a través de las Transformaciones** (3 volúmenes). Barcelona: Editorial Teide, 1973.

GOMEZ, Pedro. **Matebásica Matica**. Bogotá: Una Empresa Docente, 1989.

GRIMALDI, Ralph P. **Matemáticas Discreta y Combinatoria**. México: Addison- Wesley Iberoamericana, 1989.

JOHNSON BAUGH, Richard. **Matemáticas Discretas**. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

JURGENSEN, R. DONNELLY, A. y DOLCIANI, M. **Geometría Moderna: Estructura y Método**. México D.F.: Publicaciones Cultural, 1968.

KLEIMAN, Ariel. **Conjuntos Aplicaciones Matemáticas a la Administración**. México: Editorial Limusa: 1980.

KOLMAN, Bernard, & BUSBY, Robert C. **Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación**. México, etc. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1986.

LABINOWICZ, Ed. **Introducción a Piaget: Pensamiento, Aprendizaje, Enseñanza**. México: Fondo Educativo Interamericano, 1980.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Matemáticas para Computación** (Serie Schaum). México, Bogotá, etc.: Mac Graw-Hill, 1983.

LOVELL, K. **Desarrollo de los Conceptos Básicos Matemáticos y Científicos en los Niños**. Madrid: Morata S.A., 1984.

MIALARET, Gastón. **Las Matemáticas. Cómo se aprenden y cómo se enseñan**. Madrid: Pablo del Río, editor, 1977.

MUNEM, M.A. y YIZZE, J. P. **Precalculus**. Barcelo na: Reverté S.A., 1980.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICAS. **Colección Temas de Matemáticas**. México: Trillas, 1970.

PAPERT, Seymour. **Desafío a la mente**. Buenos Aires: Galápago, 1982.

PIAGET, Jean. **Introducción a la Epistemología Genética**. El pensamiento matemático. Buenos Aires: Paidos, 1975.

PORTUS, Lincoyan. **Matemáticas Financieras**. México: Mc Graw-Hill, 1975.

PUENTE, A., POGGIOLI, L. y NAVARRO, A. **Psicología Cognoscitiva: Desarrollo y Perspectivas**. Caracas: Mc Graw-Hill Interamericana Venezuela, S.A., 1989.

TAKEUCHI, Y. **¿Qué son los Números No-estándar?**, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.