REPUBLICA DE COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL
Dirección General de Capacitación
y Perfeccionamiento Docente
Currículo y Medios Educativos

MATEMATICAS

MARCO GENERAL

PROPUESTA
PROGRAMA CURRICULAR

Noveno Grado de Educación Básica

Santafé de Bogotá, D.C. 1991

Edición a cargo de la Dirección General de Capacitación, Currículo y Medios Educativos del Ministerio de Educación Nacional. Santafé de Bogotá, 1991.

Producción:
División de Diseño y Programación Curricular de Educación Formal.

Revisión:
Grupo de Matemáticas.

Coordinación Editorial:
Hernando Garnica Ochoa.

Artes e Impresión:
Editorial Gente Nueva

PRESENTACION

Al entregar a los maestros colombianos la programación correspondiente al noveno grado del área de Matemáticas, el Ministerio de Educación Nacional completa la serie de programas curriculares correspondientes a los nueve años de Educación Básica Secundaria.

En el caso específico del área de Matemáticas donde a lo largo de varios años se han ido introduciendo modificaciones y permanentes innovaciones con el ánimo de acercarse a los desarrollos más actualizados de su enseñanza, se ha elegido el enfoque de sistemas pues tiene tres ventajas fundamentalmente "Una en el interior de la matemática, otra en el campo de la integración o la articulación de la Matemática con otras ciencias y otra respecto a la metodología propuesta para desarrollar los contenidos".

Es así como a lo largo de la Educación Básica Secundaria, en los diferentes sistemas ya sean numéricos, geométricos, métricos, de datos, lógicos, de conjuntos, de operaciones y relaciones y analíticos, se avanza en el estudio de los números enteros, los racionales, los reales y los complejos, se desarrolla una exploración activa del espacio tridimensional, se propone estudiar las inferencias directas e indirectas, las falacias usuales y las condiciones necesarias y suficientes, etc., en la perspectiva de orientar la formación del adolescente colombiano hacia el desarrollo de habilidades que le permitan un razonamiento lógico, crítico y objetivo, e igualmente busque utilizar la matemática para interpretar y solucionar los problemas de la vida cotidiana, de la tecnología, el arte y la ciencia.

Se espera que la metodología propuesta dentro de la pedagogía activa, logre la meta de activar la mente y desarrollar sus potencialidades, de tal manera que esa misma experiencia física permita a la vez el desarrollo de la experiencia lógico-matemática.

Dentro de la metodología activa irrumpe en los últimos tiempos el constructivismo como una corriente que plantea en general cómo el comportamiento inteligente de una persona no depende de unos procesos de razonamiento abstractos, sino que depende íntimamente de la clase de conocimientos que la persona tiene acerca de la situación particular en cuestión.

Así considera:

- Lo que hay en el cerebro del que va a aprender tiene importancia.
- Encontrar sentido, supone establecer relaciones.
- Quien aprende, construye activamente significados.
- Los estudiantes son irremplazables en su propio aprendizaje.

Tanto el enfoque de sistemas como la metodología de pedagogía activa y la corriente del constructivismo, son los pilares que permiten invitar a los padres de familia, a los profesores, a los alumnos, a los investigadores, a los autores de textos y a la comunidad en general a estudiar esta propuesta, trabajarla, adecuarla a sus propias realidades y necesidades para hacer sugerencias que permitan su enriquecimiento permanente.

Se hace necesario tomar conciencia de la presencia continua y la constante influencia de la matemática en la cultura y en la sociedad; por esto se espera que los niños y el ciudadano colombiano en general comprendan y construyan el conocimiento matemático que les permita tener un gusto por el descubrimiento, tener un saber autónomo y apreciar sus aplicaciones en ciencia y tecnología.

Señores maestros, el Ministerio de Educación está abierto a recibir de ustedes, comentarios, sugerencias y recomendaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Solo así, en este proceso de doble vía, podemos avanzar en la renovación curricular y ofrecer al país una educación de calidad como es el anhelo de todos los Colombianos.

Rafael Rodríguez Rodríguez
Jefe División de Diseño y Programación
Curricular de Educación Formal

CONTENIDO

UNIDAD VI

UNIDAD VII

MARCO GENERAL

PROGRAMADORES - AUTORES:

Ministerio de Educación Nacional
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Virginia Cifuentes de Buriticá
Teresa León Pereira
Orlando Múnera Patiño
Carmen Lucila Osorno Reyes

ASESOR

Universidad Nacional de Colombia
Carlos E. Vasco Uribe

Introducción

Este documento contiene el Marco General del Programa de Matemáticas para la Educación Básica. En él se presenta un enfoque global de los contenidos acorde con el desarrollo de las Matemáticas y se sugiere un enfoque metodológico que se adecúe al elegido para los contenidos, a las características de los estudiantes colombianos y a las diversas transformaciones por las que pasa el conocimiento humano de los 6 a los 18 años.

Enfoque

A. JUSTIFICACION

La historia de las Matemáticas no puede aislarse de la historia de la humanidad, puesto que el desarrollo de la una ha avanzado paralelamente con el desarrollo de la otra. Es innegable el impulso que las Matemáticas le han dado al progreso de la humanidad, tanto en el aspecto científico como en el tecnológico.

Las aplicaciones que actualmente tienen las Matemáticas no se circunscriben a las de las Ciencias Naturales. En la psicología, la sociología, la economía, la geografía, la antropología, la lingüística, etc., se van encontrando cada vez más situaciones tratables con nuevos modelos matemáticos, y aplicaciones de modelos generados en otras áreas o producidos creativamente al interior de las matemáticas llamadas "puras".

Todos en nuestra práctica cotidiana necesitamos, a menudo, efectuar cálculos y estimar rápidamente algunos resultados. Esta utilidad de las Matemáticas es tan antigua como lo es la historia del hombre. Es, por tanto, indispensable insistir en la operatoria y el cálculo mental, sin volver a las rutinas tediosas de antaño que provocaban en la mayoría de los alumnos una aversión permanente hacia las Matemáticas; se insiste más bien en la comprensión de los conceptos y el desarrollo de los procesos, y en la formulación y solución de problemas, para apoyar y motivar el ejercicio de los algoritmos de cálculo. Se introducen también explícitamente experiencias y ejercicios de estimación aproximada de los resultados de cálculos y de mediciones, y se desarrollan habilidades tan importantes como las de encontrar los resultados exactos a través de procedimientos de rutina. Las calculadoras y las computadoras harán cada vez más importantes las primeras que las segundas.

Para la comprensión de conceptos, procesos y sistemas matemáticos se requiere un mínimo de cierta teoría de conjuntos, al menos implícita, la que comienza con el manejo concreto de colecciones figurales y no figurales, necesarias para la comprensión del concepto de número natural, y continúa, gradualmente, con un mínimo de simbolismo formal, a lo largo de toda la Educación Básica, para proporcionar un lenguaje común al estudio de los diversos sistemas matemáticos y preparar el paso al estudio de la teoría axiomática de conjuntos, que según las circunstancias, podría tratarse en los grados 10º y 11º.

La mayoría de las profesiones y oficios, y aún el desempeño exitoso en muchas circunstancias de la vida ordinaria, exigen un adecuado manejo del espacio y de sus representaciones plásticas, gráficas o simplemente imaginativas. Por una falsa reacción contra la geometría euclidiana y por falta de alternativas, el estudio de la geometría en la Educación Básica se había hecho cada vez más limitado, hasta llegar a desaparecer en muchos planteles, con resultados muy negativos en las habilidades de manejo del espacio. En este programa la geometría aparece enfatizada en todos los grados, como una exploración sistemática del espacio. Esta exploración es primordialmente activa, dinámica y sólo secundariamente un estudio de figuras trazadas en el tablero, o en el papel, que ya han perdido su carácter dinámico.

Los computadores encarnan en sus circuitos la lógica de Boole. Esta lógica, que en la época de su creación, a mediados del siglo XIX, sólo interesó a unos pocos especialistas, ocupa hoy un sitio privilegiado en el diseño y en el manejo de las calculadoras y los computadores y, en general, en todas las áreas de la informática. Por lo tanto, aparecen desde el primer grado algunos objetivos relacionados con la lógica y el seguimiento de instrucciones lógicamente estructuradas, que preparen a los alumnos para una fácil transición a la programación de calculadoras y computadores, cuando puedan tener acceso a ellos.

Hay otro aspecto muy importante, es el relacionado con el rigor y la precisión en la formación intelectual, y la contribución de las Matemáticas a esa formación. Se busca favorecer el desarrollo de procesos y habilidades de pensamiento; entonces, no se trata de trabajar el programa simplemente porque las Matemáticas se consideran importantes por sí mismas, sino también porque las actividades propias de esta área del conocimiento pueden: estimular la actividad y las operaciones mentales, activar la capacidad de razonamiento y de pensamiento crítico y creativo, generar procesos mentales superiores, contribuir a organizar la mente y a formar para la toma de decisiones y para la formulación, análisis y solución de problemas.

El lenguaje de las Matemáticas intenta ser, esencialmente, preciso y general, en contraste con la ambigüedad y la particularidad del lenguaje usual. Mientras que el primero está sujeto a reglas estrictas que limitan su significación para disminuir las interpretaciones subjetivas, el segundo permite toda una serie de interpretaciones mediante las cuales el sujeto puede manifestar sus sentimientos e intuiciones. Es de la síntesis de estos dos lenguajes de donde surge el factor de formación intelectual que permite distinguir lo preciso de lo ambiguo y lo particular de lo general.

En el currículo de Educación Básica se incluye el estudio de todos estos aspectos de las Matemáticas con el fin de contribuir decididamente a la educación integral del individuo, y llevarlo a participar activamente de ese gran patrimonio de la humanidad, que son las Matemáticas.

B. ENFOQUE DE SISTEMAS

En la Matemática como en todas las ciencias, ha habido diversas tendencias o enfoques que de alguna manera buscan organizar los contenidos, correlacionarlos, jerarquizarlos, etc., que han constituído "escuelas matemáticas".

Actualmente hay una corriente muy notoria que se propone presentar la Matemática como una ciencia unificada, en la cual las diversas ramas tienen estructuras comunes, afines, que pueden expresarse en el lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

Este enfoque unificador de todas las ramas de la Matemática (o sea de las Matemáticas) puede articularse o establecerse, de manera coherente, alrededor de un concepto clave más amplio que el de conjunto, que es el concepto de **Sistema.**

El enfoque por sistemas contrasta con el enfoque por conjuntos de la llamada "Nueva Matemática" o "Matemática Moderna" ("New Math"), con el enfoque por habilidades algorítmicas básicas de la corriente de "Volver a lo Básico" ("Back to Basics"), y con el enfoque por resolución de problemas ("Problem Solving Approach").

El concepto de sistema tiene la ventaja de no ser exclusivo de la Matemática, ya que es empleado en una u otra forma en todas las ciencias. Cada ciencia se ocupa de sistemas especiales; por consiguiente, se deben establecer reglas específicas para interpretarlos y manejarlos, y garantizar, además, una utilización adecuada del lenguaje de los sistemas y de la teoría general de sistemas.

El enfoque elegido para el actual programa oficial de Matemáticas correspondiente al nivel de Educación Básica, es el enfoque de sistemas; por eso conviene analizarlo detalladamente.

En círculos dedicados en Colombia a la docencia y a la investigación matemática, es ya conocida la obra "Un nuevo enfoque para la didáctica de las Matemáticas" en cuyos dos volúmenes el asesor del Ministerio de Educación Nacional en la elaboración de los programas de Matemáticas para la Educación Básica, Carlos E. Vasco U., desarrolla el enfoque de sistemas, analiza los conceptos asociados a dicho enfoque (como los de conjunto, objeto, relación, operación, sistema y estructura), y trata específicamente los sistemas matemáticos.[1]

---

1 **(Ver bibliografía. Las obras se citarán con la primera palabra del título y el año de su publicación).**

1. CONCEPTO DE SISTEMA

Para definir un sistema hay que establecer previamente el significado de las palabras que se van a emplear. Esas palabras son: conjunto, objeto, relación, operación. Quien intente definirlas, se convencerá de que no es posible hacerlo en términos de conceptos más fundamentales, pues lo único que es posible encontrar, para cada una de esas palabras, es una lista de sinónimos, con diversas connotaciones y de que, con base en esos sinónimos, todo el mundo parece entender qué quieren decir esas palabras, sin detenerse a pensar si existe una definición precisa para cada una.

Los sinónimos más usuales para esas palabras son:

Conjunto: colección, clase, agrupación, agregado, montón, grupo (rebaño, jauría, bandada. . .).
Objeto: cosa, elemento, individuo, entidad, ser (persona, animal, planta, mineral. . .).
Relación: referencia, respecto, "ser hacia" (Aristóteles), nexo, lazo, vínculo, conexión.
Operación: acción, transformación, modificación, intervención, conversión (Relaciones 1978).

A partir de estas cuatro palabras, o de sus sinónimos, es posible expresar el concepto clave del currículo de Matemática: el concepto de sistema.

Sistema es un conjunto de **objetos** con sus **relaciones y operaciones**

Con base en esta definición, pueden identificarse y analizarse sistemas en diversos campos de la actividad científica, económica, política, etc.

2. SISTEMAS ESPECIFICOS DE LA MATEMATICA

En particular, para describir un sistema determinado de la Matemática hay que especificar un conjunto de objetos, un conjunto de operaciones y un conjunto de relaciones. Un ejemplo puede ser un sistema estudiado en la Aritmética, en el cual:

- el conjunto de objetos es el formado por los números enteros.[2]
- el conjunto de operaciones es el formado por la adición y por la multiplicación, y
- el conjunto de relaciones es el formado por las relaciones de orden: ". . . es menor o igual que. . .", ". . . es mayor o igual que. . .", ". . . es estrictamente mayor que. . .".

Si cada uno de estos conjuntos se simboliza por una letra mayúscula, se tiene:

- Conjunto de objetos: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Conjunto de operaciones: $\Omega = \{+, \times\}$
- Conjunto de relaciones: $\mathcal{R} = \{\leqslant, <, >, \geqslant\}$

Es posible, pues, representar este sistema de los números enteros así:

$(\mathbb{Z}, \{+, \times\}, \{\leqslant, <, >, \geqslant\})$

Para nombrar más abreviadamente este sistema, se puede establecer la convención de emplear solamente las letras mayúsculas, que simbolizan los conjuntos de objetos, de operaciones y de relaciones, en ese orden.

$$(\mathbb{Z}, \Omega, \mathcal{R})$$

Por las propiedades que cumplen las operaciones y las relaciones definidas en este conjunto específico de los enteros, se suele o se acostumbra mencionar este sistema indicando la estructura que tiene. Como en este caso el sistema tiene estructura de anillo ordenado, se denomina anillo ordenado de los números enteros.

En forma similar pueden describirse otros sistemas de la Aritmética, de la Geometría, de la Teoría de Conjuntos, de la Lógica Matemática, etc. En general, cada sistema queda perfectamente determinado por tres conjuntos:

a. **Un conjunto de objetos,** simbolizado por una letra mayúscula latina, por ejemplo A. Este conjunto, llamado **conjunto subyacente,** no puede ser vacío.

b. **Un conjunto de operaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula griega, por ejemplo Ω (omega). Este conjunto puede ser vacío en el caso de sistemas puramente relacionales, como el llamado **conjunto parcialmente ordenado,** en el que se tienen: $A \neq \phi$, $\Omega = \phi$, $\mathcal{R} = \{\leqslant\}$ y que se puede simbolizar así:

$(A, \phi, \{\leqslant\})$, o,
$(A, \{\leqslant\})$, o,
$(A, \leqslant)$

c. **Un conjunto de relaciones,** simbolizado ordinariamente por una letra mayúscula cursiva, por ejemplo $\mathcal{R}$. En este conjunto, se suelen

[2] **(Conviene recordar que el conjunto de los números enteros se simboliza mediante una $\mathbb{Z}$ y sus elementos son: el cero, todos los enteros positivos: 1, 2, 3. . . y todos los enteros negativos: -1, -2, -3, . . .).**

indicar únicamente las relaciones binarias entre elementos del conjunto A.

Además de estas relaciones en A, se dan otras relaciones en las que intervienen elementos de A, operaciones de Ω y relaciones de $\mathcal{R}$.

Estas relaciones se suelen enunciar en el lenguaje propio del sistema, y constituyen su teoría.

Abreviadamente, cualquier sistema específico de la Matemática puede simbolizarse por medio de una terna o tripla ordenada de conjuntos:

$$\mathcal{S} = (A, \Omega, \mathcal{R})$$

A : el conjunto de objetos del sistema $\mathcal{S}$
Ω : el conjunto de operaciones del sistema $\mathcal{S}$
$\mathcal{R}$: el conjunto de relaciones del sistema $\mathcal{S}$

3. VENTAJAS DEL ENFOQUE DE SISTEMAS

El enfoque de sistemas contenido en los estudios mencionados anteriormente, contribuye al logro de los objetivos del Programa de Matemáticas porque organiza y unifica los diversos contenidos y las diversas ramas de la Matemática, a través de unos conceptos y un lenguaje común; facilita la articulación de la Matemática con las demás áreas del Currículo, y permite desarrollar los contenidos atendiendo a las características de los alumnos del Ciclo Básico y de la realidad en que viven, sin caer en el énfasis desmedido en los conjuntos, que se hace en cierto tipo (ya no tan moderno) de la llamada "Matemática Moderna".

Son, pues, tres las ventajas del enfoque de sistemas: una en el interior de la Matemática, otra en el campo de la integración o articulación de la Matemática con otras ciencias y otra respecto a la metodología propuesta para desarrollar los contenidos.

Conviene analizar las implicaciones que tiene este enfoque en la articulación de la Matemática con las demás ciencias. Basta una rápida revisión de los contenidos tratados en Ciencias Naturales, en Ciencias Sociales, en Administración, etc., para concluir que todas estudian determinados sistemas, y que, por consiguiente, hay en este concepto una fuente de articulación e integración.

Ejemplos de esos sistemas, no estrictamente matemáticos, son: el sistema ecológico (uno de los conceptos de más actualidad), el sistema respiratorio, el sistema circulatorio, el sistema social, el sistema económico, el sistema solar, etc. Sistemas como el social o el circulatorio son muchísimo más complejos que los sistemas matemáticos.

Los sistemas matemáticos son muy simplificados. Los sistemas reales son siempre más complejos. Esta es la regla clave para la articulación de la Matemática con las demás ciencias. El dominio del concepto de Sistema en Matemática prepara para el dominio de ese concepto y sus aplicaciones en las Ciencias Naturales y Sociales, en el Lenguaje, y en la solución de problemas de la vida real. (Ver: Relaciones, 1978; Concepto, 1980).

Las otras dos ventajas de este enfoque se explicitarán posteriormente en la estructura conceptual del área.

Objetivos

A. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA

El estudiante debe:

- Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente.
- Adquirir independencia en la actividad intelectual.
- Adquirir profundidad y perseverancia en la búsqueda del conocimiento.
- Ampliar su capacidad para realizar generalizaciones.
- Desarrollar habilidades en los procedimientos operativos aritméticos y geométricos.
- Familiarizarse con conceptos básicos de la Matemática.
- Adquirir precisión en la expresión verbal y familiaridad con el lenguaje y expresiones simbólicas.
- Interpretar la realidad a través de modelos matemáticos.
- Utilizar la Matemática para interpretar y solucionar problemas de la vida cotidiana, de la tecnología y de la ciencia.
- Ejercitar la agilidad mental para encontrar soluciones a problemas de diferentes tipos.
- Reconocer y valorar algunas de las funciones de la Matemática en el desarrollo de la ciencia y en el mejoramiento de las condiciones de vida.

B. OBJETIVOS GENERALES DEL AREA EN LA EDUCACION BASICA

- Construir el conjunto de los números naturales a partir de colecciones, de objetos concretos y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las

relaciones que correspondan a las situaciones aditiva, multiplicativa y potenciativa.
- Adquirir habilidad para el cálculo aritmético mental y para el cálculo escrito, con ayuda de la calculadora y sin ella.
- Construir el conjunto de los números fraccionarios a partir de operadores sobre magnitudes concretas y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números fraccionarios y de las operaciones entre ellos.
- Construir algunos subconjuntos de números reales a partir de situaciones geométricas e iniciar el estudio del conjunto de los números reales y, en él, efectuar las operaciones y reconocer las relaciones que correspondan a las situaciones aditiva y multiplicativa.
- Resolver situaciones de la vida diaria que requieran el uso de los números reales y de las operaciones entre ellos.
- Realizar cálculos numéricos utilizando las propiedades de las operaciones fundamentales estudiadas en el conjunto numérico respectivo.
- Adquirir habilidades y destrezas para formular, plantear y resolver problemas que permitan la aplicación de modelos matemáticos.
- Explorar el espacio en dos y tres dimensiones y construir modelos imaginativos y pictóricos del mismo y desarrollar algunos sistemas conceptuales y simbólicos que permitan manejar esos modelos.
- Calcular longitudes, áreas y volúmenes de figuras en el espacio.
- Identificar diferentes sistemas métricos y ejercitar las conversiones de unidades.
- Analizar sistemas de datos estadísticos, calcular frecuencia y promedio y representarlos gráficamente.
- Identificar y utilizar correctamente las conectivas del lenguaje ordinario: y; o; si, . . . entonces; si, . . . entonces. . . y si no, no.
- Reconocer y utilizar correctamente los cuantificadores del lenguaje ordinario: todos, cada uno, algún, alguno, algunos, ningún, ninguno, nadie, algunos no, hay, no hay.
- Determinar y representar conjuntos y subconjuntos.
- Realizar operaciones entre conjuntos: unión, intersección, diferencia, complemento y producto cartesiano; analizar algunas propiedades de estas operaciones y utilizar correctamente sus símbolos más usuales.
- Reconocer relaciones de pertenencia, contenencia, disyunción y equinumerosidad; analizar algunas propiedades de estas relaciones y utilizar correctamente sus símbolos más usuales.
- Generar todas las permutaciones y combinaciones de objetos tomados de conjuntos de pocos elementos, atendiendo a condiciones previamente determinadas.
- Reconocer, analizar y representar relaciones en sistemas específicos y en particular relaciones de orden y de equivalencia.
- Reconocer, analizar y representar operaciones en sistemas específicos y en particular operaciones conmutativas y asociativas.

Estructura

Es fácil comprender ahora la ventaja del enfoque de sistemas, como organizador de los contenidos de Matemáticas (ver Cuadros Nos. 1 a 6). Este enfoque suministra una organización o estructura de carácter general para el área y un esquema de presentación de cada sistema, los cuales proporcionan las bases necesarias para desarrollar los contenidos mínimos del programa, para abordar otros temas de las diversas ramas de la Matemática, y aún de otras ciencias.

La estructura del área de Matemática, debe señalar, como mínimo, algunos aspectos, tales como: organización de los contenidos, grandes temas, secuencia, grado de profundidad, interrelaciones y desarrollo del enfoque. Los cuadros 1 a 6 que aparecen en las páginas siguientes constituyen una aproximación a dicha estructura.

CONTENIDOS

Los contenidos del área para la Educación Básica Primaria (1º a 5º grados) se han organizado, bajo los siguientes títulos: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de datos, sistemas lógicos, conjuntos, relaciones y operaciones. (Ver cuadro No. 1).

Las tres últimas columnas (5, 6, 7) de donde salen flechas que apuntan hacia los otros sistemas, presentan contenidos que apoyan la construcción, comprensión y estudio de éstos: la de sistemas lógicos explicita las expresiones del lenguaje usual cuya utilización y significados se pueden trabajar a lo largo de la Educación Básica Primaria; la de Conjuntos y la de Relaciones y Operaciones presentan los conceptos mínimos que se requieren tanto para la construcción del concepto de número como para la de los sistemas propuestos en cada grado. Estas dos últimas columnas son una guía que le permite al docente conocer los temas indispensables para escudriñar la formación de los sistemas mencionados y orientar con mayor acierto el trabajo de los alumnos sin pretender ninguna formalización con respecto a dichos temas.

Los contenidos para la Básica Secundaria (6º a 9º grados) se han distribuído así: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas analíticos, sistemas de datos, sistemas lógicos, sistemas de conjuntos y sistemas de relaciones y operaciones. (Ver cuadro No. 2).

1. SISTEMAS NUMERICOS

Estos se estudian de manera gradual. En la Educación Básica Primaria, el de los números naturales, comenzando con los números de 0 - 100 en primer grado y ampliando en cada grado el conjunto numérico. En cada uno de estos conjuntos se van introduciendo progresivamente las operaciones comenzando con la adición y la sustracción en primer grado, hasta llegar a las primeras nociones de potenciación, radicación y logaritmación en quinto grado y además las relaciones de orden aditivo y de orden multiplicativo. También en la Primaria se inicia el estudio de los números fraccionarios y de los decimales. En la Educación Básica Secundaria se avanza en el estudio de los números enteros, los racionales, los reales y los complejos, vistos como sistemas numéricos con sus operaciones y las relaciones que hay entre sus elementos. Se hace mucho énfasis en la solución y formulación de problemas, como aplicación de los algoritmos de las operaciones y en ejercicios de cálculo mental. Con ésto se espera que, a medida que los niños vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar las semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que más adelante les permitan integrar conocimientos y hacer generalizaciones.

2. SISTEMAS GEOMETRICOS

Se incorpora toda la parte de Geometría activa a través de la exploración del espacio. De esta manera se estudian los sólidos, las figuras planas, las líneas, los ángulos, etc.; destacando relaciones como paralelismo, perpendicularidad, congruencia y semejanza, y transformaciones como rotaciones, traslaciones, reflexiones, reducciones y ampliaciones.

Para la Básica Secundaria sigue siendo importante la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y las maneras de representar ese espacio en el papel. Se insiste en las distintas representaciones gráficas, los distintos tipos de proyecciones y el dibujo técnico.

3. SISTEMAS METRICOS

Se estudia el sistema métrico decimal siguiendo lo más posible el sistema internacional IS (o SI), y otros sistemas no decimales. En dichos sistemas se expresa el resultado de medir longitudes, áreas, el volumen de un cuerpo, la capacidad de un recipiente, el peso y la masa de un objeto, la duración de un evento y la amplitud de un ángulo. Los patrones estandarizados se utilizan después de realizar mediciones con unidades arbitrarias y sentir así la necesidad de una unidad común de medida aplicable en todos los casos. En los diferentes sistemas se realizan conversiones con sus aplicaciones y se hacen comparaciones.

En todos los casos se trata de desarrollar la habilidad para hacer una estimación perceptual (a "ojo") del rango en el que se halla una magnitud concreta dada para hacer una rápida selección de las unidades más apropiadas para ese rango específico, y para obtener un valor aproximado al menos del orden de magnitud que resultaría si se hiciera una medición más exacta.

4. SISTEMAS DE DATOS

Se estudian algunos conceptos fundamentales de estadística que sirven para interpretar algunos modelos de la realidad. Se inicia con la recolección de datos, su organización en tablas de frecuencia y su representación en diagramas. Se hace algún análisis de los datos recogidos y tabulados mostrando lo que puede deducirse de ellos y cómo pueden compararse entre sí; para ello se estudian al final de la Básica Primaria algunas medidas de tendencia central y al final de la Básica Secundaria se complementan estas medidas y se introducen las medidas de dispersión.

En cuanto a la probabilidad, inicialmente se trabaja en forma cualitativa y posteriormente se avanza estudiando sus aspectos cuantitativos.

Se propone ejercitar la lectura inteligente y crítica de los informes estadísticos comerciales y financieros que aparecen en la prensa y en revistas especializadas.

Hay que ejercitar al alumno en la interpretación crítica y en la transformación de datos.

5. SISTEMAS LOGICOS

No se pretende hablar de lógica matemática abstracta, sino de ciertos aspectos del lenguaje en los que se notan regularidades que se pueden manejar matemáticamente. Por eso se parte de las expresiones que manejan los alumnos para ir introduciéndolos poco a poco en un lenguaje más riguroso, que tiene por objeto, entre otros, evitar las frecuentes ambigüedades del lenguaje usual, y más tarde, desarrollar las habilidades del pensamiento deductivo.

En la Básica Secundaria se propone estudiar las inferencias directas e indirectas, las falacias usuales, las condiciones necesarias y suficientes. Con esto se quiere desarrollar el espíritu crítico, la detección de supuestos ocultos y de inferencias no válidas.

6. SISTEMAS DE CONJUNTOS

Como ya se dijo en la justificación, se trata de la teoría mínima necesaria para introducir algunos conceptos fundamentales de la Aritmética, de la combinatoria y de la probabilidad, y para preparar una posterior formulación unificada de las diversas ramas de las matemáticas.

7. SISTEMAS DE OPERACIONES Y RELACIONES

Se analizan algunos fundamentos teóricos sobre estos conceptos. Dicho análisis se insinúa empíricamente desde la Básica Primaria hasta llegar a una conceptualización más general al finalizar la Básica Secundaria. Las operaciones se estudian como transformaciones sobre los elementos de un sistema, mientras que las relaciones corresponden a la teoría acerca de los mismos. Se estudian también las propiedades, tanto de las operaciones como de las relaciones y se presentan algunos aspectos teóricos sobre las funciones, que preferiblemente se consideran como operadores, aunque pueden también considerarse como relaciones unívocas.

Una vez afianzado el dominio de ciertos operadores, ellos mismos empiezan a consolidarse en un nuevo sistema, en el cual sirven como elementos sujetos a nuevas operaciones de orden superior, como la composición, la inversión, etc. Tendríamos pues un sistema de operaciones. Algo semejante ocurre con la conformación de nuevos sistemas de orden superior, cuyos objetos son las relaciones del nivel anterior, sobre las que actúan nuevas operaciones, y entre las cuales se establecen nuevas relaciones. Tendríamos así un sistema de relaciones.

8. SISTEMAS ANALITICOS

Se propone la utilización de las funciones, las gráficas y las tablas para modelar situaciones de cambio. Puede ser más importante en un primer momento el análisis cualitativo de las gráficas que el trazado muy preciso de gráficas a partir de fórmulas o de tablas.

Se trabaja con situaciones de la vida real y sus modelos de puntos y líneas, modelos escalonados, modelos lineales, polinómicos de 2º y 3º grado, exponenciales, radicales y logarítmicos. Es importante ejercitar las traducciones de una a otra de las distintas representaciones de una función.

Se incorporan algunos temas de los que se habían venido tratando en los programas tradicionales bajo el nombre de "Algebra", y que en realidad son sólo el manejo de ciertas expresiones para las funciones reales o sus valores. A través de la función lineal se cubren temas como la proporcionalidad y todas sus aplicaciones. Paralelamente a las funciones se van estudiando las ecuaciones e inecuaciones.

En este programa se hace énfasis en el estudio de sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, y en Secundaria además en el análisis real. En cuanto a los demás sistemas se hace un manejo racional y prudente necesario para adquirir familiaridad con las matemáticas no numéricas y para contribuir al desarrollo de la capacidad de análisis, y a largo plazo, del pensamiento formal.

En síntesis, los contenidos básicos vistos en los cuadros 1 y 2, permiten: Identificar los sistemas de la Matemática en los cuales se ubican los contenidos propuestos para el programa; identificar los grandes temas que se proponen para cada grado; reconocer la secuencia que debe seguirse al desarrollar los contenidos; apreciar el grado de profundidad con que deben ser tratados los contenidos en cada grado e identificar las correlaciones que hay entre los temas de un mismo grado o entre temas de diferente grado. El hecho de tener una visión global del programa de cada grado favorece la enseñanza correlacionada y permite además, obtener información sobre lo que un alumno, que cursa un determinado grado, estudió en el grado anterior y lo que va a necesitar para el grado siguiente.

El cuadro No. 3, titulado **Sistema,** señala una forma común para la presentación de los diversos sistemas. Según lo explicado anteriormente, es importante identificar en cada caso los elementos u objetos, las relaciones y las operaciones, y dar prioridad a estas últimas.

En el ejemplo tomado de la aritmética, los elementos son números enteros, las operaciones son la adición y la multiplicación y las relaciones son: ". . . es estrictamente menor que. . .", ". . . es menor o igual que. . .", etc. En el ejemplo tomado de la geometría, los elementos son líneas del plano, las operaciones son las rotaciones y las traslaciones, y las relaciones son: ". . . es perpendicular a. . .", ". . . es paralela a. . .". En forma similar se explican los ejemplos tomados de la Teoría de Conjuntos y de la Lógica. Los ejemplos podrían ser otros, pero el esquema de presentación es el mismo en todos los casos.

No se pretende que los niños conozcan e interpreten ese cuadro. Pero sí se espera que a medida que vayan trabajando con diferentes sistemas, puedan identificar semejanzas y diferencias en su funcionamiento y acumular experiencias que, más adelante, les permitan integrar los conocimientos y hacer generalizaciones. Por ejemplo el "descubrir", en la primaria, que la adición y la multiplicación de números naturales son conmutativas y que la unión e intersección de conjuntos también lo son, debe llevar al estudiante de secundaria a elaborar un concepto más general de conmutatividad. Así se propicia el desarrollo mental del estudiante, se ahorra tiempo y se adquieren conocimientos más sólidos y duraderos. En esa forma, también, la mente del niño elabora progresivamente los conceptos y no tiene necesidad de repetir fórmulas y definiciones abstractas carentes de significado para él.

Además de los sistemas que se presentan en el cuadro No. 3 para la Aritmética, la Geometría, la Teoría de Conjuntos y la Lógica, podrían darse muchos otros sistemas de esas y otras ramas de las Matemáticas: por ejemplo, se puede hablar de muchos sistemas numéricos diferentes, no sólo cambiando el conjunto de los números enteros por los naturales, los fraccionarios, los reales o los complejos, sino distinguiendo varios sistemas diferentes sobre cada uno de esos conjuntos.

Puede hablarse también de un sistema de numeración como algo diferente de un sistema numérico: en el sistema de numeración los objetos son los símbolos, de los cuales hay primitivos (dígitos) y derivados, y la operación básica es la concatenación o yuxtaposición. Las relaciones son de cercanía y ubicación espacial, y de compatibilidad para la yuxtaposición.

"También puede enfocarse en este sentido el estudio de un sistema métrico, y comparar las presentaciones del sistema métrico decimal que dan los libros de Matemáticas, con los sistemas que aparecen en los libros de Física (IS, MKS, CGS, FPS). Se notará inmediatamente que ninguno de ellos es el presentado por los libros de Matemáticas; que las unidades de tiempo no son decimales; que la teoría de la dimensión se hace necesaria para entender el sistema; que la multiplicación de unidades produce múltiplos y submúltiplos, si es externa, pero que la multiplicación interna produce unidades de otra dimensión". (Concepto, 1980).

El cuadro No. 4 titulado **Enfoque de Sistemas** indica que dicho enfoque es adecuado tanto para el tratamiento de los contenidos como para la metodología con que se desarrollan.

El cuadro No. 5 titulado Relaciones entre Sistemas muestra cómo a partir de las actividades sobre sistemas concretos y del lenguaje natural se pueden ir construyendo los sistemas matemáticos. Muestra también nexos entre ellos y la manera de avanzar de los ya conocidos o más familiares hacia los más abstractos.

CUADRO No. 1

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA PRIMARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 SISTEMAS DE DATOS	5 SISTEMAS LOGICOS	6 CONJUNTOS	7 RELACIONES Y OPERACIONES
1o.	. Hacia el concepto de número. . La decena y la centena como unidades de orden superior. . Naturales de 0 a 100 con adición y sustracción y simbolización. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden aditivo . . . es mayor que. . . . . . es menor que. . . . Ordinales . Operadores como −1, + 1, −2, etc.	. Relaciones espaciales. . Algunos sólidos geométricos regulares. . Figuras planas. Bordes rectos y bordes curvos. . Introducción a la simetría. . Líneas (abiertas y cerradas)	. Introducción a la medición de longitudes: patrones arbitrarios, el dm y el m. . Medición de tiempo.	. Iniciación a gráficas de barras.		. Clasificaciones. . Noción de conjunto; elemento. . Conjuntos equinumerosos. Cardinal. . Noción de unión de conjuntos disyuntos. . Representación gráfica. . Arreglos sencillos.	. Iniciación a la representación de relaciones. . Diversas maneras de efectuar operaciones.
2o.	Naturales de 0 a 1000 con adición, sustracción y multiplicación. División (iniciación). . Números pares y números impares. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo. . . . es múltiplo de. . . . . . es divisor de. . .	. Rectas paralelas y perpendiculares. . Rotaciones y giros. Angulos. . Formas geométricas regulares: cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares. . Noción de perímetro.	. Longitud: m, dm, cm. Area: Unidades arbitrarias, dm^2 . Unidades de duración: horas, minutos.	. Gráficas de barras.	. Significado de la "y" y de la "o" en una instrucción. . Expresiones "todos", "algunos", "ninguno".	. Pertenencia. . Noción de subconjunto. . Unión de conjuntos disyuntos y no disyuntos. . Cardinal de la unión. . Parejas con y sin orden.	. Propiedades: conmutativa, asociativa, modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (introducción).
3o.	. Nuestro sistema de numeración. . Numeración romana. . Naturales mayores de 1000 con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos generalizados para adición, sustracción y multiplicación con aplicaciones. . Números primos. . Operadores naturales. . Introducción a los operadores fraccionarios.	. Superficies (fronteras de sólidos). Superficies planas. . Líneas (fronteras de superficies). . Puntos (fronteras de líneas) . Caracterización de triángulo, cuadrado, rectángulo y círculo.	. Longitud, m, múltiplos y submúltiplos. . Yarda y vara. . Superficie. Area. Patrones estandarizados: m^2, cm^2, y mm^2. . Volumen. Patrones arbitrarios. . Capacidad: patrones arbitrarios. Litro.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos.	. Diversos significados de la "y" y de la "o" en el lenguaje ordinario. . Diversas maneras de cuantificar expresiones en el lenguaje ordinario.	. Simbolización de las relaciones de pertenencia y contenencia. . Unión e intersección. . Algunos arreglos con y sin orden.	. Relaciones de orden. . Diagrama de flechas. . Propiedades antisimétrica y transitiva. . Propiedades conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones. Distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.
4o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación y división. M.C.D. y M.C.M. . Fraccionarios con adición, sustracción y multiplicación. . Decimales con adición y sustracción. . Algoritmos con aplicaciones. . Orden multiplicativo.	. Modelos de sólidos. . Cuadriláteros: trapecios. . Perímetro (generalizado). . Radios, diámetros. . Areas: trapecio, cuadrado, rectángulo, triángulo. . Cuadrícula.	. Area. Algunos múltiplos y submúltiplos del m^2. . Medidas agrarias. . Volumen: m^3, dm^3, cm^3. . Peso: gramo, kilogramo.	. Recolección de datos. . Tabulación y representación de datos. . Iniciación al análisis de datos. . Frecuencias, moda.	. Proposiciones: Significado verdad o falsedad. . Negación de proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario.	. Relaciones de contenencia. . Igualdad de conjuntos. . Conjunto referencial. . Complemento de un conjunto. Simbolización y representación. . Algunos tipos de arreglos.	. Relación inversa. . Diagramas de flechas. Propiedades antisimétrica y transitiva.
5o.	. Naturales con adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación. . Fraccionarios con adición, sustracción, multiplicación y división. . Decimales con adición, sustracción, multiplicación y división. . Algoritmos con aplicaciones. . Razones y proporciones. . Proporcionalidad directa e inversa.	. Construcciones con regla y compás. . Polígonos regulares. . Construcción de algunos sólidos. . Area del círculo. . Area y volumen de algunos sólidos.	. Conversiones con unidades de longitud, área, capacidad y peso. . Otras unidades de peso. . Unidades de duración. . Conversiones.	. Noción de promedio en un conjunto pequeño de datos.	. Proposiciones . Conjuntivas, disyuntivas y condicionales.	. Extensión y comprensión. . Conjuntos: infinito ($\mathbb{N}$), unitario, vacío. . Unión e intersección. . Otros tipos de arreglos.	. Recopilación de las operaciones conmutativas, asociativas, modulativas estudiadas. . Igualdades.

CUADRO No. 2

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION BASICA SECUNDARIA

TEMA / GRADOS	1 SISTEMAS NUMERICOS	2 SISTEMAS GEOMETRICOS	3 SISTEMAS METRICOS	4 SISTEMAS ANALITICOS	5 SISTEMAS DE DATOS	6 SISTEMAS LOGICOS	7 SISTEMAS DE CONJUNTOS	8 SISTEMAS DE RELACIONES Y OPERACIONES
6o.	. Sistemas de numeración: Historia Bases (sin operaciones): 2, 5, 10, 12. . $(\mathbb{N}, +, -, x, \div, \leqslant, \geqslant)$. . Potenciación, radicación y logaritmación. . $(\mathbb{Q}^+, +, -, x, \div, \leqslant, \geqslant)$. . Expresiones fraccionarias y decimales.	. Traslaciones. Paralelismo. . Rotación, Angulos. . Perpendicularidad. . Triángulos y cuadriláteros. . Distancias. . Teorema de Pitágoras.	. Unidades de longitud (sistema métrico decimal y otros sistemas). . Repaso de unidades de área. . Unidades de amplitud de ángulos (vueltas y grados).	. Representación en la recta numérica $(\mathbb{N}, \mathbb{Q}^+)$ (no "recta real"). . Relaciones: $\leqslant, <, \geqslant, >$.	. Frecuencias absolutas. . Frecuencias relativas (porcentuales, fraccionarias). . Diagramas de barra y circular. . Frecuencias ordinarias o puntuales. . Frecuencias acumuladas.	. Conectivas. . Constantes y variables. . Términos y predicados. . Proposiciones abiertas y cerradas. Sustitución.	. Conjuntos finitos e infinitos. . Conjunto referencial. . Subconjunto. . Complemento de un conjunto. . Operaciones entre conjuntos numéricos.	. Relaciones binarias. . Propiedad antisimétrica y transitiva de algunas relaciones. . Operaciones unarias y binarias. . Diferencia entre operación y relación.
7o.	. $(\mathbb{Z}, +, -, x, \div, \leqslant, \geqslant, \lfloor\ \rfloor)$. $(\mathbb{Q}, +, -, x, \div, \leqslant, \geqslant)$. Valor absoluto. . Algoritmos con aplicaciones: porcentajes, descuentos, interés, cambio de moneda. . Algunos reales: π, $\sqrt{2}$.	. Movimientos rígidos: Rotaciones Reflexiones Traslaciones . Congruencias y semejanzas. . Homotecias . Polígonos . Círculo . Perímetro	. Otros sistemas de unidades de amplitud de ángulos. . Unidades de duración. Conversiones ("Complejos").	. Funciones crecientes y decrecientes. Correlación. . Funciones lineales. Razones Proporciones . Representación gráfica de funciones lineales y de gráfica lineal. Ejes, cortes, intercepto. . Ecuaciones lineales. Solución de ecuaciones lineales.	. Medidas de tendencia central: moda, media y mediana.	. Afirmaciones y negaciones verdaderas y falsas. . Proposiciones abiertas y cerradas. Cuantificación. . Expresiones con variables y paréntesis. . Igualdades.	. Conjunto de partes. Cardinal del conjunto de partes. . Subconjuntos del conjunto de partes. Combinaciones.	. Operaciones binarias. Propiedades: operación clausurativa, asociativa, conmutativa, modulativa, invertiva. . Distributividad. . Linealidad de operadores.
8o.	. $(\mathbb{R}, +, -, x, \div, \leqslant, \geqslant)$. Potenciación de: $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$	. Simetrías activas. Rotación, reflexiones, ejes de simetría. . Hacia el concepto de grupo. . Polígonos: caracterización, perímetros y áreas. . Circunferencia y círculo. . Relación del perímetro y del área de un polígono con la longitud de su lado.	. Unidades de área en varios sistemas. . Conversiones.	. Funciones lineales. . Funciones de gráfica lineal. . La recta, pendiente. . Ecuaciones lineales. . Funciones cuadráticas. . Representación de funciones cuadráticas. . Ecuaciones cuadráticas.	. Medición . Muestreo. . Disposición y representación de datos. . Escala.	. Predicados de uno y dos puestos. . Negación de cuantificadores.	. Colecciones finitas de conjuntos. . Colecciones exhaustivas de conjuntos disyuntos dos a dos. . Subconjuntos del producto cartesiano. Permutaciones.	. Relaciones binarias. Representación gráfica de relaciones. Propiedades: relación totalmente definida, sobreyectiva, funcional, inyectiva, biyectiva. Relación reflexiva, antireflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, antitransitiva. . Clasificaciones, particiones y equivalencias. . Seriaciones y órdenes. . Composición e inversión de relaciones.
9o.	. Composición de operadores unarios. . $(\mathbb{Q}^*, +, x)$ y $(\mathbb{R}^*, +, x)$. . Introducción a los sistemas con números complejos. . Construcción de +1, −1, i, −i, como: operadores rotores, vectores, puntos del plano, raíces de ecuaciones de la forma $x^2 + c = 0$, con $c > 0$. . Representación de números en diferentes sistemas simbólicos. . Coordenadas polares.	. Escalas . Proyecciones: puntuales y paralelas. . Representación de sólidos en el plano: vista única y vistas múltiples. . Planos y cortes: cónicas. . Volumen de sólidos.	. Unidades de volumen y capacidad en varios sistemas. . Relación entre volumen y capacidad.	. Funciones de gráfica lineal y ecuaciones lineales. . Funciones cuadráticas y ecuaciones cuadráticas. . Solución ecuac. cuadráticas. Factor común. Cuadrado perfecto. Diferencia de cuadrados. . Función cúbica y ecuaciones cúbicas . Función exponencial. . Polinomios de una variable Operaciones: +, −, x, ÷. . Sucesiones y series: límites. . Progresiones. Decimales infinitos. . Interés: simple, compuesto.	. Medidas de tendencia central: media, moda, mediana, cuartiles, deciles y percentiles. . Medidas de dispersión: máximo, mínimo, rango, rango intercuartílico.	. Demostración: directa, indirecta, refutación, contraejemplos.	. Azar y necesidad: vocabulario de probabilidad. . Eventos, espacios muestrales. . Medidas normalizadas sobre conjuntos finitos.	. Funciones: Composición de funciones. Función idéntica. Inversión de funciones. Función de dos variables.

CUADRO No. 3

SISTEMA

CONJUNTO DE OBJETOS $\mathcal{A}$	CONJUNTO DE OPERACIONES Ω	CONJUNTO DE RELACIONES $\mathcal{R}$

ARITMETICA

Ejemplo: Un sistema de números enteros		$(\mathbb{Z}, \Omega, \mathcal{R})$
$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	$\{+, \times\}$	$\{<, \leqslant, >, \geqslant\}$

GEOMETRIA

Ejemplo: Un sistema de líneas en el plano		$(\mathcal{L}, \mathcal{T}, \mathcal{P})$
$\{L, M, N, \ldots\}$	{ rotaciones, traslaciones }	$\{/\!/, \perp\}$

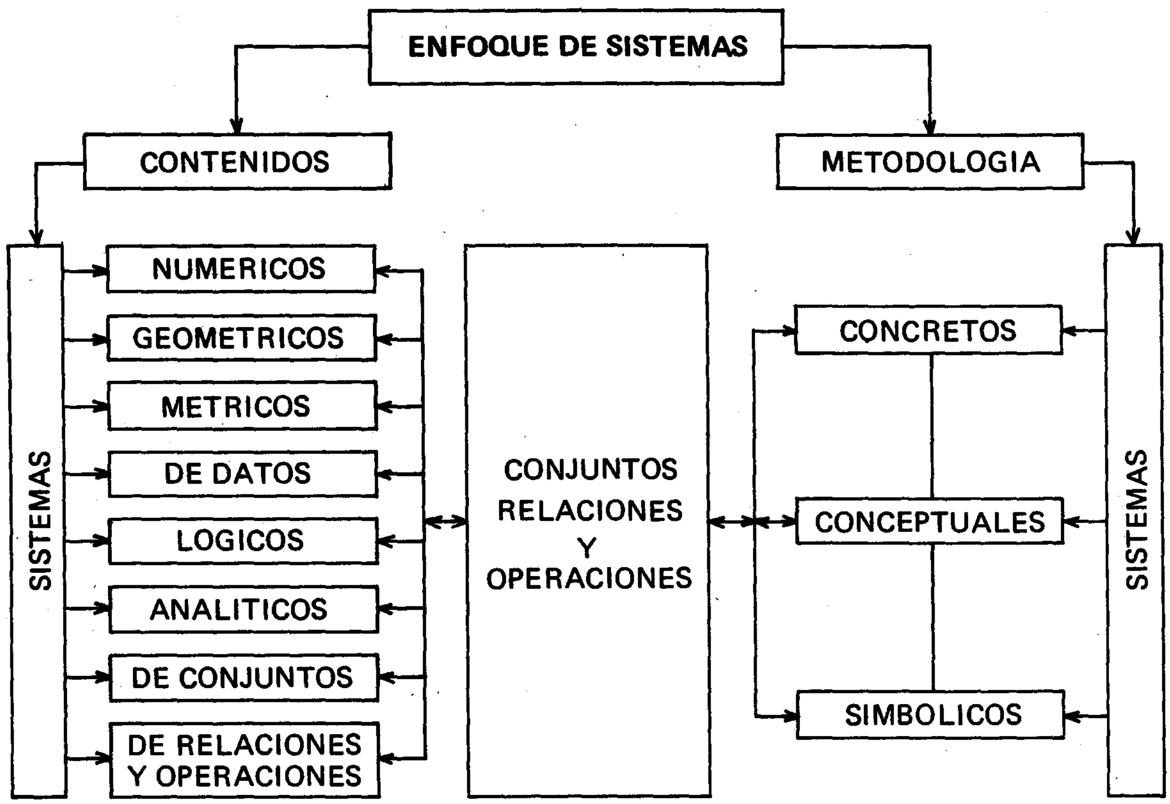
TEORIA DE CONJUNTOS

Ejemplo: Un sistema de conjuntos		$(\mathcal{P}(U), \Omega, \mathcal{C})$
$\{A, B, C, \ldots \phi, U\}$	$\{\cup, \cap, '\}$	$\{\subset, \subseteq, \supset, \supseteq\}$

LOGICA

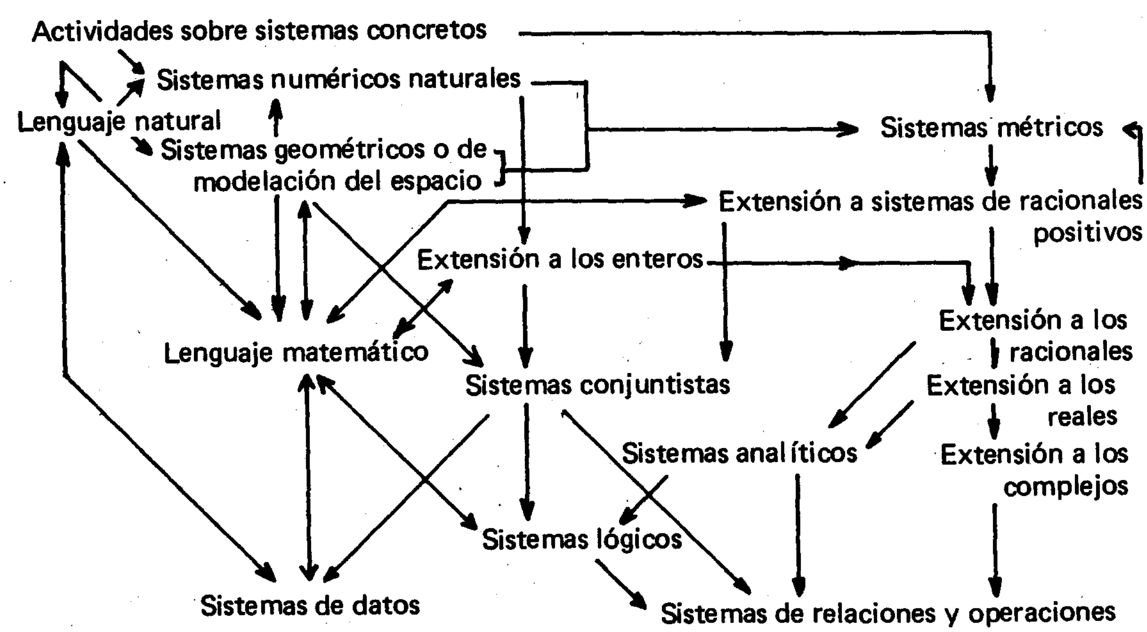
Ejemplo: Un sistema de proposiciones		$(\mathcal{L}_o, \kappa, \mathcal{R})$
$\{p, q, r, \ldots\}$	$\{\neg, \vee, \wedge\}$	$\{\equiv, \vdash\}$

CUADRO No. 4



CUADRO No. 5

RELACIONES ENTRE SISTEMAS



Metodología

Vistas ya las ventajas del enfoque de sistemas, tanto en el interior de las Matemáticas, como en la articulación de las ciencias, analicemos una metodología coherente con este enfoque de sistemas elegido para los contenidos.

Seleccionamos la metodología propuesta por la Pedagogía Activa, la cual si bien procura un aprendizaje que se inicia y se nutre con la experiencia física y el contacto directo con objetos ya conocidos, tiene como meta la activación de la mente y el desarrollo de sus potencialidades, de tal manera que esa misma experiencia física sea a la vez experiencia lógico-matemática. A partir de las regularidades de las reacciones de los objetos vamos construyendo los conceptos de las ciencias naturales, y a partir de las regularidades de nuestras acciones vamos construyendo los conceptos de las ciencias formales. La actividad neuromuscular es un punto de partida necesario pero no suficiente, y es sólo eso: un punto de partida en el cual no se puede permanecer. Si la actividad corporal no obra como activadora de procesos de pensamiento, puede reducirse a un simple activismo.

La selección de esa metodología requiere la opción por una determinada corriente sobre la Filosofía de las Matemáticas. La corriente que nos parece más coherente con la mencionada Pedagogía es el **Constructivismo,** y por eso lo empleamos para abordar los distintos sistemas, seguros de que podemos aprovechar también, en una síntesis integradora, los beneficios de otras corrientes como el Intuicionismo, el Logicismo y el Formalismo. El Anexo "¿Son las Matemáticas una construcción de la mente humana?", presenta una síntesis de las mencionadas corrientes e invita a maestros, alumnos y padres de familia a discutir el tema y a tomar conciencia de su posición al respecto.

Además la metodología propuesta para el desarrollo del programa de Matemáticas está basado en la teoría sicológica de Jean Piaget, y en toda la discusión ulterior tanto post-piagetiana como neo-piagetiana, que se concreta en algunas técnicas de aprendizaje de las Matemáticas, como las de Zoltan P. Dienes, Hans Aebli, etc. Entre las varias que se podrían proponer, es quizá esta metodología la que resulta más acorde con los descubrimientos de la Sicología Evolutiva, con la Teoría de Sistemas, y con la realidad individual y social que vive el estudiante.

A. ASPECTO SICOLOGICO

La Sicología Evolutiva ha logrado establecer que los niños piensan en forma diferente a los adultos y que la evolución del pensamiento infantil al pensamiento adulto se logra a través de varios períodos sucesivos ordenados, identificados por características específicas y diferenciados por el grado de complejidad y de generalidad de las estructuras del pensamiento, propias de cada uno. Los períodos de la evolución del pensamiento son el Sensorio-motriz, el Preoperacional, el de las Operaciones Concretas y el de las Operaciones Formales.

El avance y la consolidación de las etapas o sub-períodos de cada período, así como la transición al siguiente, parecen ocurrir a distintos ritmos en distintas personas, en distintos ambientes, con respecto a distintos contenidos y como respuesta a distintas necesidades..

Por consiguiente, un programa de Matemáticas que procura el desarrollo integral del alumno debe atender a sus características, a sus posibilidades y a sus necesidades. Si atiende a sus características, se adecúa a su forma de pensar y a las capacidades que le ha permitido desarrollar el medio en que vive. Si atiende a sus posibilidades, establece metas cuyo logro supone un progreso siempre renovado hacia el nivel más desarrollado del pensamiento que sigue inmediatamente al nivel en que él se encuentra. Y si atiende a sus necesidades, constituye un estímulo constante que hace que el alumno se desarrolle día a día y adquiera las habilidades de razonamiento, cálculo y simbolización que le permitirán desempeñarse con éxito en su medio.

Un primer requisito para conseguir lo anterior es identificar los períodos y las etapas de desarrollo mental por los que atraviesan los estudiantes, en este caso, los estudiantes del Ciclo Básico. En Colombia puede decirse que los niños inician la Primaria aproximadamente a los 6 años y terminan la Secundaria hacia los 16. Según Piaget, entre estas edades el pensamiento, pasa por dos períodos: el de las operaciones concretas de 7 a 11 años, y el de las operaciones formales de 11 a 15 años.

En nuestro medio apenas se están realizando estudios exploratorios, que permiten conjeturar que el desarrollo de las operaciones concretas en los niños sí empieza hacia los siete años, aunque el período de adquisición de las operaciones formales puede prolongarse hasta los 17 o 18 años. En ciertos casos y ambientes el dominio de las operaciones formales no parece ser necesario, para enfrentar las necesidades inmediatas por lo cual este período no llega a estabilizarse ni siquiera en la edad adulta.[3]

Pero como condición para desarrollar el pensamiento crítico y la capacidad de argumentación racional y sólida, el maestro sí puede proponerse como meta apoyar y estimular la adquisición y consolidación de las operaciones formales por parte de sus alumnos.

Vale la pena insistir en que el maestro necesita conocer las características del pensamiento de sus alumnos, en cada una de estas edades, para poder realizar acertadamente su trabajo.

Dada la magnitud y la profundidad de la obra que Piaget y su escuela han realizado durante el medio siglo que llevan dedicado al estudio de la inteligencia, resulta muy difícil conocer completamente sus planteamientos y, más difícil aún, tratar de sintetizarlos o de explicarlos en pocas páginas. Sin embargo, dado que la metodología propuesta para desarrollar el programa oficial de Matemáticas está basada en gran parte en la Sicología Evolutiva Piagetiana, es preciso intentar un esbozo de varias de sus ideas. Por ejemplo, es importante mencionar algunas características del desarrollo intelectual en los períodos de operaciones concretas y de operaciones formales.

Una idea bastante general es que los niños pequeños son muy distintos de los adultos en aspectos tales como: métodos para conocer la realidad, ideas sobre el mundo y empleo del lenguaje. Un niño tiene una estructura mental diferente a la de un adulto y por eso muchas veces, aun cuando realicen las mismas acciones o repitan las mismas palabras, pueden pensar cosas muy diferentes. Por ejemplo, cuando un niño de menos de 7 años pasa un líquido del vaso a un plato, se fija solamente en los estados inicial y final del líquido y cree que hay más líquido en donde el nivel está más alto. Si el nivel más alto era el del vaso, dice que por pasarlo del vaso al plato se disminuyó el líquido. Un niño de 8 años, por ejemplo, ya sabe que por el sólo hecho de pasarlo de un recipiente a otro no disminuye el líquido, pero no puede predecir acertadamente cosas que no se ciñan a lo que está viendo. Un joven de 14 o 15 años no tiene problema con el trasvase del agua y puede hacer conjeturas y formular hipótesis sobre cosas que no está viendo, y finalmente, los adultos pueden pensar que todo eso es tan fácil que no se justifica dedicarle tiempo.

Otro ejemplo: mientras un grupo de adultos puede realizar un diálogo o intercambiar diferentes opiniones, respetar puntos de vista diferentes, etc., los niños de pocos años realizan monólogos colectivos, donde cada uno habla y ninguno escucha. Para otros niños hablar entre sí puede constituir todo un descubrimiento porque les permite darse cuenta de que no todos piensan lo mismo.

De esta y otras consideraciones se puede concluir que el educador no puede suponer que lo que es válido para él, es también válido para el alumno. Y si aceptamos que los niños tienen una estructura mental diferente de la de los adultos, entonces el maestro debe estar atento a la forma como reaccionan los niños ante las distintas actividades y hechos de cada día. Algo muy importante que debe tener en cuenta el educador, es que los niños, especialmente los de menos edad, aprenden a partir de actividades concretas. El niño necesita actuar sobre las cosas para comprenderlas.

Mediante la actividad concreta y la manipulación de los objetos el niño va progresando en su desarrollo intelectual. Por eso en cada período se comporta de manera diferente. En los primeros años simplemente los manipula, los reúne o los separa, los hace girar, los golpea, etc. Unos años más tarde, no sólo los manipula físicamente, sino que representa mentalmente operaciones que se puedan realizar con esos objetos y en un período posterior, puede representar mentalmente las actuaciones sobre los objetos, sin necesidad de mirarlos y puede expresar, mediante oraciones, su pensamiento, sus suposiciones y las consecuencias de las mismas.

Características como esas son las que se tienen en cuenta para decir que un niño está en uno u otro período de su desarrollo intelectual. Si solamente logra realizar ciertas manipulaciones coherentes, se ubica en el período preoperacional. Si además de las manipulaciones logra realizar representaciones mentales de acciones organizadas de modo que una acción puede combinarse con otra, y anularla o reforzarla, se ubica en el período de las operaciones concretas. Y cuando el joven además de todo lo anterior logra formular hipótesis sobre objetos que no están presentes, predecir conclusiones y trabajar con proposiciones en lugar de objetos concretos, se ubica en el período de las operaciones formales llamado también del pensamiento abstracto o hipotético - deductivo.

En términos generales, puede decirse que cuando el niño inicia la Educación Básica Primaria está pa-

---

[3] **Pre-escolar: Félix Bustos, Ministerio de Educación Nacional (MEN); Martha Arango, Centro Internacional de Educación (CINDE); Primaria: Araceli de Tezanos, Universidad Externado de Colombia; Secundaria: Eloísa Vasco, CAFAM; Educación Especial: Miguel de Zubiría, Martha Lucía Pérez, Etti Stiwark, Mariela Tobón, Universidad Javeriana.**

sando del período preoperacional al de las operaciones concretas y que en los primeros años de Educación Básica Secundaria debe empezar a tener comportamientos propios del período de las operaciones formales.

En cada uno de estos períodos el pensamiento se caracteriza por su habilidad para realizar ciertas acciones y por la propensión a hacer ciertas deducciones que a los adultos les parecen erróneas, aunque sean muy coherentes con la lógica predominante en ese período.

En el período de las operaciones concretas el pensamiento:

1) Adquiere propiedades como la reversibilidad, la transitividad, la asociatividad.
2) Realiza composiciones.
3) Reconoce transformaciones.
4) Puede realizar operaciones aritméticas (como la adición y la multiplicación).
5) Realiza mediciones (de longitud, de duración, de área, de masa, de peso, etc.).
6) Establece correspondencias, clasificaciones y seriaciones.

Resumiendo las características del pensamiento operatorio concreto, podemos decir que se caracteriza porque:

1) No se detiene en los estados inicial y final de las cosas o de los objetos, sino que tiene en cuenta las transformaciones e incluso las imagina.
2) Es reversible; esto es, razona de modo que mentalmente puede imaginar una acción y anularla con la acción contraria para regresar al estado inicial.
3) Posee, en gran parte, las nociones de conservación.
4) No siempre requiere que las acciones que el niño realiza sobre los objetos o situaciones, se ejecuten "realmente", sino que pueden realizarse de manera imaginaria o mental. Por ejemplo, son operaciones concretas las que realizan los jugadores de ajedrez cuando frente al tablero piensan o se imaginan las posibles jugadas y sus consecuencias, tanto si tocan las fichas como si no tocan ninguna.

"El niño de 7 a 11 años actúa como si su principal tarea fuera organizar y ordenar lo que está inmediatamente presente: la extrapolación limitada de este organizar y ordenar hacia lo "que no está allí", es algo que hará cuando sea necesario, pero que es visto como una actividad restringida de casos especiales". (Sicología, 1978; p. 223).

El período siguiente es el de las operaciones formales, llamado también del pensamiento hipotético-deductivo. "La propiedad general más importante del pensamiento formal, aquella de la cual Piaget deriva todas las restantes, concierne a la distinción entre lo real y lo posible. A diferencia del niño del período de las operaciones concretas, el adolescente, al comenzar la consideración de un problema, trata de prever todas las relaciones que podrían tener validez respecto de los datos y luego intenta determinar, mediante una combinación de la experimentación y el análisis lógico, cuál de estas relaciones posibles tiene validez real". (Sicología, 1978; p. 224).

En la transición de las operaciones concretas a las operaciones formales se registra un paso inicial e importante, que equivale a una reorientación fundamental respecto de los problemas cognoscitivos. El adolescente ya no está preocupado exclusivamente por organizar aquello que llega de modo directo a sus sentidos; gracias a esa reorientación, tiene la capacidad potencial de imaginar todo lo que podría estar allí y de asegurarse, en mayor medida, de que hallará todo lo que de hecho se encuentra allí.

Esa reorientación implica algunas características del pensamiento formal:

El pensamiento formal es fundamentalmente hipotético-deductivo. El adolescente se mueve dentro del ámbito de lo hipotético con mucha más audacia que el niño.

El pensamiento formal es, por sobre todo, pensamiento proposicional.

Las entidades importantes que manipula el adolescente en su razonamiento ya no son los datos de la realidad en bruto, sino afirmaciones o enunciados (proposiciones) que "contienen" esos datos. El adolescente también realiza operaciones de primer orden, (clasificaciones, seriaciones, correspondencia), pero también hace algo más, que es precisamente lo que hace a su pensamiento formal antes que concreto. Toma los resultados de esas operaciones concretas, los moldea en la forma de proposiciones, y luego sigue operando con ellos. Es decir, establece diversos tipos de vínculos lógicos entre ellos.

Las operaciones formales son, pues, operaciones realizadas sobre los resultados de operaciones (concretas) anteriores y sobre las operaciones mismas tomadas ahora como objeto de las nuevas operaciones ("operaciones de segundo orden").

Estas ideas sobre los dos períodos finales del desarrollo, pueden complementarse con otras ideas de

John H. Flavell, un estudioso de la teoría Piagetiana y que ha sido ampliamente consultado en lo referente al aspecto sicológico de este marco teórico: "El desarrollo intelectual es un proceso de organización y lo que se organiza son operaciones activas, intelectuales, su organización en sistemas con estructura definible es el sine qua non (indispensable) para la "buena" cognición, vale decir, la cognición de mayor madurez genética". (Sicología, 1978; p. 180).

"El desarrollo ontogénico de estructuras puede verse como un proceso de aproximaciones sucesivas a una especie de equilibrio, un estado final que nunca se alcanza por completo. El desarrollo mismo pues, constituye una totalidad con una meta o ideal que subordina los medios". (Sicología, 1978; p. 67).

Al maestro no le basta conocer las características del pensamiento en cada uno de los períodos del desarrollo. Necesita conocer y emplear estrategias metodológicas que produzcan "desequilibrios" o "disonancias cognitivas" motivadoras que propicien el paso de un período a otro. Hagamos una breve reflexión sobre diferentes procesos y tipos de procesos cuyo desarrollo se puede estimular con el aprendizaje de las matemáticas.

B. TRABAJO CON PROCESOS

Es conveniente insistir en que los procesos que vive el alumno forman una **totalidad,** que podríamos llamar "proceso vital", "proceso de desarrollo integral", etc. y en que no se debe separar ese proceso en "proceso cognoscitivo", "proceso afectivo" y "proceso sicomotriz", sino sólo señalar aspectos específicos de un único proceso global.

Por más que sea muy delicado tratarlos separadamente, los procesos que se han señalado usualmente en el **aprendizaje de las matemáticas** provienen principalmente de la teoría del desarrollo cognoscitivo de Piaget. **Tomemos primero los procesos más importantes en el desarrollo de la aritmética,** que también son claves en el desarrollo de las ciencias naturales y de las sociales:

a. *Procesos de clasificación* (o de "fabricar clases"); es conocido el problema de las clasificaciones "funcionales" o por asociación, y las "taxonómicas" o por criterio de pertenencia a una clase. Estos procesos están basados en relaciones de semejanza y relaciones de equivalencia.

b. *Procesos de seriación* (o de "alinear ordenadamente objetos"); entre las seriaciones está el conteo, tanto el meramente verbal como el coordinado con objetos y con movimientos ("palmoteo", salto o "salteo" de baldosas, señalamiento o "dedeo" de objetos para contarlos). Se puede señalar la importancia que tiene el conteo de dos en dos, de tres en tres, de cinco en cinco, de diez en diez, etc., empezando de distintos números, para desarrollar estos procesos de seriación, así como para apoyar los procesos de construcción de las operaciones aritméticas y de sus algoritmos, del sistema de numeración en base diez (o en otras bases), etc. Los procesos de seriación son también muy importantes en las ciencias sociales, sobre todo para el dominio de las sucesiones temporales en la historia y de los encajamientos espaciales en la geografía; en español y literatura para el orden de los episodios en una narración, y en las ciencias naturales para preparar los procesos de medición.

c. ***La reversibilidad*** se da primeramente en las seriaciones. El desarrollo de la reversibilidad es un proceso nunca acabado. Se puede señalar la importancia del conteo simple en reversa, y del conteo por saltos en reversa. Es impactante dar un ejemplo no numérico: piénsese en la dificultad de buscar una palabra en el diccionario o un apellido en el directorio telefónico cuando uno se pasa más allá de la letra inicial respectiva. ¿Qué letra está antes de la H? No nos sabemos el orden alfabético en reversa: tenemos que recomenzar hacia adelante con "F, G, H, I", y entonces sí decimos: "Ah! Es la G!"

Poco se ha caído en la cuenta de que esos dos procesos de clasificación y seriación corresponden principalmente a la interacción con objetos discretos (que Piaget llama "experiencia pre-lógica"), y de que por eso están íntimamente relacionados con la aritmética. **Hay pues que añadir los procesos correspondientes a la interacción con el continuo espacial** (que Piaget llama "experiencia infra-lógica") relacionados con la exploración del espacio y la construcción de la geometría y la medición.

Estos procesos espaciales desbordan el área de matemáticas, y tienen que ver también con el área de sociales, especialmente en los aspectos geográficos y en la representación espacial de la sucesión temporal; con el área de ciencias naturales, especialmente en la astronomía, la mecánica, etc.; y con las áreas de educación estética y de educación física.

a. *Procesos de ubicación espacial.* Hay un problema sobre las coordenadas cartesianas y las polares para la ubicación de objetos distantes. Otro problema es el de inclusión de regiones espaciales dentro de otras; esto es útil para la inclusión de ciudades en departamentos, y de éstos en regiones, países y continentes.

b. Procesos de encontrar un camino para llegar a un sitio. Aquí también se dificulta a los niños el desarrollo de la reversibilidad.

c. Procesos de representación de objetos tridimensionales en dos dimensiones, y de reproyección de objetos tridimensionales a partir de su representación en dos dimensiones. Ver la investigación de Germán Mariño, "El dibujo espontáneo y la concepción del espacio en el adulto popular". Bogotá: Dimensión Educativa, sin fecha (1986?).

d. Procesos de conservación de cantidades o "magnitudes concretas" de una "magnitud física abstracta":

—Conservación de longitudes y distancias (el largo es genéticamente distinto de la distancia: las longitudes son de lo "lleno", las distancias de lo "vacío").

—Conservación de volúmenes y capacidades. Parecen ser diferentes las conservaciones de volúmenes de sólidos granulosos; de sólidos macizos; de sólidos maleables, como la plastilina, y de líquidos. (De nuevo los volúmenes son de lo "lleno", y las capacidades de lo "vacío", por eso a veces las capacidades son llamadas "volúmenes internos" de los recipientes).

—Conservación de áreas. Se suele confundir "área", que es un concepto métrico, con "superficie", que es un concepto geométrico; sinembargo, no se confunde "segmento" que es un concepto geométrico, con "longitud", que es un concepto métrico. La conservación de áreas se suele adquirir después de la de los volúmenes y capacidades, por más que matemáticamente pareciera más natural pasar primero de una a dos dimensiones (de longitudes a áreas), y luego de dos a tres (de áreas a volúmenes). (También habría que explorar la diferencia entre áreas de lo "lleno" y de lo "vacío"; parece que no se da el caso de denominar con palabras diferentes el área de lo "lleno", como la de un disco, y la de lo "vacío", como la de un hueco).

—Conservación de las duraciones; masas/pesos; amplitudes angulares; temperaturas (consideradas por los niños en un primer momento como dos dimensiones de "caliente" y "frío"; la temperatura es difícil de diferenciar del calor en termodinámica); etc. Nótese que "tiempo" y "espacio" no son magnitudes sino estructuraciones más generales de los fenómenos.

e. Procesos de medición. Se trata de imponerle el conteo, proveniente de lo discreto, a lo continuo, para así asignarle números o "cuantificarlo". El proceso comienza con unidades antropocéntricas para las longitudes y distancias, como el dedo, el geme, la cuarta, el pie, el codo, la brazada, el paso simple o doble, etc. Cuando fracasa la conmensurabilidad directa con la unidad seleccionada, no se acude a los fraccionarios, sino primero a las parejas unidad grande - unidad pequeña, con números naturales para ambas: dos cuartas y tres dedos.

f. Procesos de estimación aproximada. Es importante para avanzar en los procesos de medición desarrollar la estimación aproximada (o "a ojo") de las longitudes/distancias, áreas, volúmenes/capacidades, duraciones, masas/pesos, amplitudes angulares, temperaturas, etc.

Procesos Lógico-Formales

Respecto del pensamiento formal, se podrían desglosar todos o algunos de los siguientes aspectos o sub-procesos del desarrollo del pensamiento en los niños y jóvenes.

a. Procesos de abstracción empírica (por regularidad de características comunes a objetos, y olvido de las características que son diferentes).

b. Procesos de abstracción reflexionante (por regularidad de acciones y detección de los esquemas que se repiten).

c. Procesos de manejo proposicional (las 16 conectivas binarias y el grupo INRC, procesos de manejo de condicionales y el grupo IKRC; procesos de manejo de cuantificadores y el grupo INAC. Al respecto recomendamos consultar "Dos nuevos grupos piagetianos en la lógica elemental". Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 17, n. 64 (1989), pp. 29-36).

d. Procesos de inferencia hipotético-deductiva.

e. Procesos combinatorios.

f. Procesos de estimación cualitativa y precisión cuantitativa de las probabilidades.

g. Procesos de análisis y de síntesis.

En cuanto a los procesos de **resolución de problemas**, con la debida referencia al proceso global de desarrollo de cada estudiante, se pueden desglosar los siguientes aspectos o sub-procesos relacionados con la resolución de problemas, y que pueden ser apoyados específicamente a través de actividades que contribuyan a su desarrollo; empecemos con dos procesos piagetianos:

a. Procesos de aislamiento de variables (en problemas físicos).

b. Procesos de captación de correlación y de proporcionalidad.

Otros procesos relacionados con la solución de problemas podrían ser:

c. Procesos de previsión y anticipación de dificultades, peligros, etc.

d. Procesos de representación imaginativa o diagramada de situaciones de la vida real.

e. Procesos de formulación de hipótesis.

f. Procesos de experimentación o puesta a prueba de hipótesis.

h. Procesos de generación de caminos de solución.

i. Procesos de evaluación de los posibles caminos y de decisión por el camino más prometedor.

j. Procesos de búsqueda de soluciones por el camino elegido.

k. Procesos de verificación de soluciones.

Procesos Metacognitivos.

a. Procesos de fijación conciente de la atención.

b. Procesos de apreciación e incremento de la propia motivación para la tarea.

c. Procesos de planeación.

d. Procesos de activación simultánea de procesadores mentales.

e. Procesos de auto-monitoría ("mirar por encima de su propio hombro" en frase de David Perkins). La monitoría se refiere a la auto-evaluación periódica; a la verificación de la distribución y administración del tiempo disponible; a la perseverancia en la tarea; a la flexibilización para salir de rutinas poco promisorias, etc.

C. TRABAJO CON SISTEMAS

Lo expuesto acerca del enfoque de sistemas y de la Sicología Evolutiva es muy útil para orientar el trabajo del maestro en el desarrollo del programa de Matemáticas.

Una de las funciones de la metodología es la de determinar la forma de presentar los contenidos a los estudiantes. Específicamente en el caso de las Matemáticas, los contenidos deben trabajarse teniendo en cuenta las características y la forma de aprender propias del niño en cada período del desarrollo. En el Ciclo Básico, el niño aprende a partir de la experimentación y de la manipulación de los objetos.

El niño no encuentra los objetos en forma estática y aislada. El niño se encuentra siempre con sistemas. Pero, como se dijo al tratar las ventajas del enfoque de sistemas, no se pretende que los niños durante la Educación Básica Primaria aprendan en abstracto qué es un sistema ni qué estructura tienen los que con mayor frecuencia se trabajan (como serían las estructuras de grupo y anillo). La razón es que en los grados 1º, 2º, 3º, 4º, y aún 5º., no poseen los conocimientos necesarios para entender lo que es un grupo o anillo. Es el maestro quien debe saber, en cada caso, con cuál sistema están trabajando los estudiantes; así podrá orientarlos para que lleguen a conclusiones válidas dentro de la situación que están trabajando y para que cuando se encuentren ante otra situación nueva, no le apliquen irreflexivamente las mismas conclusiones, sino que la analicen para ver en qué se parece y en qué se diferencia de la situación ya conocida.

El maestro acompaña al estudiante para que vaya adquiriendo conceptos que en la secundaria le permitirán estudiar más rigurosamente los sistemas y sus estructuras.

Tenemos, por ejemplo, el caso de un sistema formado por subconjuntos de un conjunto referencial (tapas de gaseosa). El niño de 6 o 7 años no tiene la noción abstracta de conjunto. Se encuentra con una colección de tapas que forman una figura o agrupación visual. "Esa primera noción de colección figural que desarrolla el niño, es la de un sistema de objetos con sus relaciones de cercanía espacial, en el contexto de la posibilidad de reunirlos o separarlos manualmente. No hay, pues, colecciones de un solo elemento y mucho menos colecciones vacías.

La noción de colección no figural que se va desarrollando poco a poco, es también la de un sistema de objetos capaces de una descripción común. Todavía aparecen las relaciones de cercanía, pero empiezan a predominar las relaciones de semejanza, en el contexto de la posibilidad de manipular, comparar, superponer, agregar y retirar objetos". (Concepto 1980).

Sólo más tarde, hacia los doce, catorce o dieciseis años, se independiza el niño de las colecciones figurales y no figurales y maneja un sistema con inclusiones, uniones e intersecciones. Así llega al concepto abstracto de conjunto y al de los sistemas formados por ellos con sus operaciones y relaciones. Este progreso puede permitirle pensar en conjuntos vacíos, en conjuntos de un solo elemento, y distinguir un elemento aislado del conjunto formado por ese único elemento. Pero esa es una adquisición tardía. Por eso, no hace falta darle al niño de primaria definiciones de sistema, ni de conjunto, ni de la estructura de semigrupo o de álgebra de Boole. Pero sí es conveniente que el maestro sepa que los subconjuntos de ese referencial de tapas, T, con la unión, forman un semigrupo ($\mathscr{P}$(T), $\cup$), con la intersección también, y con la unión, la intersección y el complemento forman un álgebra de Boole ($\mathscr{P}$(T), $\cup$, $\cap$,).

El enfoque de sistemas permite estudiar articuladamente las diversas ramas de las Matemáticas; "no consideramos que la lógica, los conjuntos, las relaciones, las operaciones y las estructuras sean cinco regiones de las Matemáticas que puedan ser enseñadas sucesivamente y como temas completos y consistentes entre sí. Nos parece que ellos deben aparecer conjunta y unificadamente como un lenguaje que permite no sólo expresar más precisamente las situaciones de la vida real, sino también comprenderla más profundamente" (Lógica 1976; p. 100).

En particular, el profesor debe preparar su clase estudiando cuidadosamente el sistema que va a presentar a sus alumnos. No todo lo que sepa e investigue sobre ese sistema se deberá explicar a los alumnos y, especialmente, se evitará dar palabras y definiciones abstractas, explicitar estructuras formales, o enseñar demasiados símbolos. Para orientación del profesor y para estructurar la presentación del material, podrán servir las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los objetos con los que estamos trabajando?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos objetos?
- ¿Cómo se agrupan esos objetos en conjuntos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esos conjuntos?
- ¿Qué operaciones efectuamos con y entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas operaciones?
- ¿Qué relaciones descubrimos entre esos objetos?
- ¿Qué símbolos utilizamos para representar esas relaciones?
- ¿Qué sistema estamos estudiando?
- ¿Cómo lo representamos?
- ¿Qué estructura tiene este sistema?
- ¿Cómo explicitamos simbólicamente esa estructura?

Estas doce preguntas aclaran la situación de cualquier cálculo matemático, desde el cálculo aritmético con números naturales, o el cálculo lógico con proposiciones, el cálculo de clases con los conjuntos como objetos, hasta el cálculo por antonomasia o por excelencia: el cálculo diferencial e integral en el cual los objetos son las funciones reales, o también, el cálculo geométrico sobre puntos, rectas, ecuaciones, o vectores.

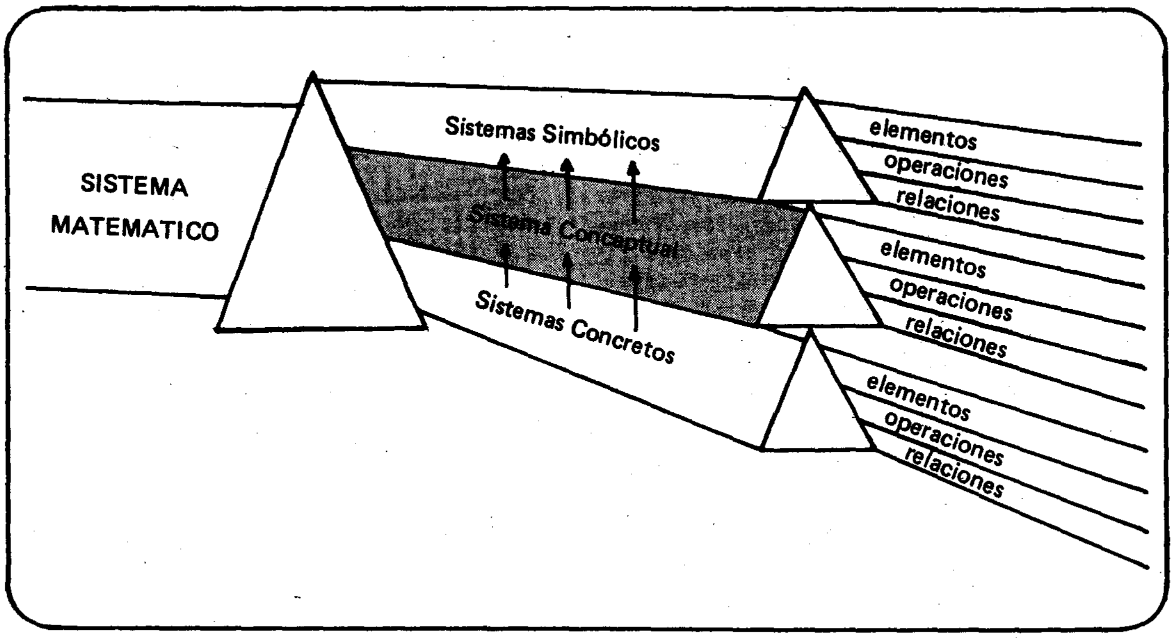
Estas preguntas son perfectamente generales para todo tipo de descripción matemática y hasta para cualquier tipo de descripción científica que quiera ser rigurosa.

En particular, para el estudio de la lógica, todas estas preguntas deben estar activas desde el comienzo. "Recuérdese que los objetos son las proposiciones y las operaciones son la negación y las diez conectivas binarias. Para el estudio de las conectivas, recomendamos la utilización de los juegos lógicos al estilo de Dienes-Golding, Papy, etc., por coincidir con el enfoque que busca familiarizar al estudiante con una situación real hasta llegar a su normal formalización o matematización". (Lógica, 1976; pp. 100-101).

Este paso de las situaciones reales y concretas a la matematización conceptual y a algún tipo de formalización, así sea una simple simbolización, no es exclusivo de la lógica. Se trae este ejemplo porque las situaciones del lenguaje ordinario, tanto el de tipo declarativo, formado por proposiciones, como el de tipo imperativo, formado por instrucciones, presentan suficientes regularidades para servir de sistemas concretos, de los cuales puede construírse un sistema conceptual, el cual a su vez puede ser simbolizado con palabras, con símbolos, con circuitos, etc. La última formalización simbólica, con definiciones, axiomas y teoremas, puede esperar al 10º y 11º grado, o a la Universidad; en la Educación Básica es suficiente una mínima simbolización, así sea sólo verbal y a lo más con algunos símbolos que sirven de "taquigrafías" de las expresiones verbales, para que esta simbolización ayude a manejar los sistemas conceptuales, no para estorbar su construcción.

La recomendación fundamental es la de no empezar por los sistemas simbólicos para tratar de que el alumno construya los sistemas conceptuales, sino comenzar por los sistemas concretos que él maneja, así el profesor los considere muy elementales, empíricos y pre-matemáticos, para que a través de la familiaridad con las regularidades de esos sistemas concretos vaya construyendo el sistema conceptual respectivo; una vez iniciada la construcción de éste, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aún traducir de unos sistemas simbólicos a otros, puesto que ya comprenden lo que quieren decir. Pero si se fuerza al alumno a manejar un sistema simbólico sin haber construído el sistema conceptual a partir de los sistemas concretos, ese sistema simbólico puede bloquear la construcción del sistema conceptual. La concepción de los sistemas matemáticos que motiva la recomendación anterior es la siguiente: cualquier sistema matemático que el profesor vaya a presentar a sus alumnos puede analizarse como un rayo de luz que pasa por un prisma: si se observa cuidadosamente, se encontrará que tiene un núcleo central, el que es verdaderamente importante, que es el respectivo sistema conceptual. Sobre él, a un nivel superficial, aparecen uno o varios sistemas simbólicos para representar ese único sistema conceptual. Y bajo el sistema conceptual, a un nivel profundo, casi diríamos arcaico, aparecen uno o varios sistemas concretos, de cuyas regularidades es posible construir el mismo sistema conceptual. (Ver cuadro No. 6).

CUADRO No. 6
UN DOBLE ANALISIS DE SISTEMAS



Desafortunadamente, los libros sólo pueden ofrecernos los sistemas simbólicos: no se puede imprimir otra cosa que palabras, símbolos y gráficas. Por eso es fácil creer que el verdadero sistema matemático es el sistema simbólico, y así trató de hacerlo creer la filosofía formalista de las matemáticas. Un buen matemático puede reconstruir el sistema conceptual a partir del sistema simbólico, pero los niños y jóvenes más bien pueden experimentarlo como un obstáculo para llegar al sistema conceptual. Ellos tienen una manera mucho más natural de construir el sistema conceptual: jugando con sistemas concretos que lleven a esa construcción. Tarea importante del profesor es la de identificar esos sistemas concretos, ojalá de entre los sistemas que sean familiares para el alumno en su cultura y en su edad específicas, para organizar actividades de juego, de ejercicio, de comparación, que hagan resaltar las regularidades que van a permitir la construcción conceptual respectiva.

Por ejemplo, con las colecciones figurales y no figurales de dos o más objetos puede organizarse una serie de juegos que lleven al sistema conceptual de los números naturales, resaltando las ordenaciones o seriaciones internas de cada colección y las clasificaciones en colecciones iguales de numerosas; la simbolización con palabras, palitos, cifras indo-arábigas o romanas vendrá después. Pero los mismos juegos de colecciones pueden servir para resaltar otras operaciones manuales como reunir y separar, y otras relaciones como las de inclusión y disyunción, para permitir una construcción de un primer sistema conceptual de tipo conjuntista, así no se simbolicen formalmente esas operaciones y relaciones.

Sistemas concretos como los de avanzar o retroceder por las calles de la ciudad, observar subidas o bajadas de temperatura en un termómetro, o jugar con consignaciones y retiros de una caja de ahorros, son la base para la construcción del sistema conceptual de los números enteros con las operaciones de adición y sustracción, y las relaciones de orden aditivo. Obsérvese que las calles mismas, o el termómetro, o el estado de cuenta, no son buenos modelos para el sistema conceptual: son los sistemas activos mencionados los que sirven de sistemas concretos para la construcción del sistema conceptual de los enteros como operadores activos, en los que la adición aparece como una mera composición o aplicación sucesiva de operadores. En la misma forma se aprovechan sistemas concretos conocidos por el alumno, como el de vueltas y fracciones de vuelta, el de los metros o pulgadas y fracciones de las mismas unidades, el de los litros o galones y fracciones de los mismos, para construir el sistema conceptual de los fraccionarios como operadores reductores o ampliadores sobre magnitudes. Los simbolismos vienen después: la mitad, 1/2, 0.5 o el 50% nos muestran cuatro símbolos posibles para el mismo concepto. Nótese que no hace falta "dividir un todo en partes" ni utilizar rectángulos o ponqués para dividirlos en partes de áreas iguales, entre otras cosas, porque este sistema concreto es el más difícil para los niños de 6 a 9 años. También podría utilizarse, si se está seguro de que los niños tienen suficiente familiaridad y dominio del mismo, pero se recomienda no empezar por este sistema concreto, sino por el de los operadores o transformadores mentales que agrandan o achican las magnitudes.

En los ejemplos anteriores puede observarse que siempre hay unos objetos o elementos de cierto conjunto sobre el que está montado el sistema respectivo, unos operadores o transformadores activos que actúan sobre esos objetos, y unas relaciones o correspondencias entre ellos.

Este segundo análisis de cada sistema, así sea concreto, conceptual o simbólico en estos tres aspectos: elementos, operadores y relaciones, se representa en el Cuadro No. 6 con los pequeños prismas de la derecha. A diferencia de un rayo monocromático que no se vuelve a descomponer si se pasa por un segundo prisma, en nuestra analogía cada tipo de sistemas sí se descompone de nuevo en tres franjas o aspectos:

- El aspecto "material" de los elementos u objetos que forman el conjunto subyacente al sistema.
- El aspecto "dinámico" de los operadores o transformadores.
- El aspecto "estático" o "estructural" de las relaciones que configuran el sistema.

Lo ideal, en cuanto a metodología se refiere, es que el maestro organice las actividades de aprendizaje de modo que el estudiante se enfrente siempre con problemas apropiados para la etapa en que se encuentra, o sea aquellos que presentan situaciones propicias para el desarrollo de las estructuras de la etapa inmediatamente siguiente. La manipulación de objetos permite apreciar qué acciones son capaces de hacer los niños con ellos y, a partir de allí, diseñar actividades pedagógicas para llevarlos a imaginar acciones posibles sobre ellos y prever los efectos de éstas. Conviene organizar el trabajo escolar de modo que el estudiante pueda ir superando progresivamente las etapas del aprendizaje de las Matemáticas propuestas por Zoltan P. Dienes. Es muy acorde con la teoría de Piaget permitir el juego libre y el juego estructurado durante un tiempo suficiente para la familiarización con las operaciones y las relaciones, y para la interiorización y reversibilización de las acciones concretas sobre los sistemas que inventa el niño.

Pero "sistema concreto" no se identifica necesariamente con "material concreto". El material es a lo más lo correspondiente a los objetos del sistema concreto, mientras que lo más importante, las operaciones y relaciones no son objetos materiales. Además, a medida que progresan las construcciones imaginativas y abstractas de los alumnos, "concreto" debe entenderse más como "familiar" que como "material".

Lo que para un alumno de primaria es muy abstracto, como los fraccionarios puede ya haberse vuelto concreto para el alumno de 10º grado. Y lo que para él es aún muy abstracto, como las funciones reales, es el sistema concreto para el estudio del análisis funcional en la universidad.

Una de las metas que puede proponerse el maestro es la de proporcionar tantas oportunidades de jugar con ciertos sistemas importantes desde distintos puntos de vista, que se vuelvan concretos y familiares para el alumno, y sirvan así de punto de partida para la construcción de nuevos sistemas conceptuales.

Así como en el análisis del sistema a través del primer prisma lo más importante y central era el sistema conceptual, en este segundo análisis lo más importante y central en cada sistema es la dinámica conformada por los operadores o transformadores.

Esta prioridad a lo activo y operatorio sobre los elementos y las relaciones es lo que hemos llamado "el enfoque de operadores".

En los ejemplos anteriores los operadores binarios de unión e intersección y el operador unario de complementación conforman la dinámica de un sistema conjuntista; los enteros positivos y negativos aparecen como operadores activos sobre otros sistemas, y aparecen también operadores unarios que actúan sobre los enteros, como el cambio de signo, además de los operadores binarios ya conocidos; los fraccionarios aparecen primero como operadores mentales que achican o agrandan las magnitudes, y luego se organizan en sistemas que a su vez tienen operadores unarios como el opuesto o el recíproco, y binarios como la adición, sustracción, multiplicación y división, etc.

La atención prioritaria a los operadores o transformadores, a los aspectos activos y dinámicos de los sistemas, son más acordes con la actividad del alumno, y con la manera como en la historia va progresando la construcción de nuevos sistemas matemáticos.

Tratar de captar esos aspectos dinámicos y activos, de construir nuevos objetos matemáticos a partir de los operadores que reflejan la práctica, es lo que pretende el enfoque de operadores.

En un grupo escolar puede suceder que el desempeño de los estudiantes refleje grados diferentes de su desarrollo cognoscitivo; que algunos reflejen una mezcla de estructuras (propias del período anterior al que se supone que les corresponde por su edad), organizadas pero inadecuadas; que otros presentan ya el uso vacilante y esporádico de estructuras nuevas que aún no se han organizado por completo; y que otros reflejen una mayor organización y estructuración del pensamiento. El maestro debe tratar de detectar esas diferencias, que, en la mayoría de los casos, pueden ser perfectamente explicables, ya que si bien los períodos y las etapas del desarrollo se suceden en un orden riguroso, no se presentan en todas las personas a la misma edad cronológica. En ese caso, no es preciso exigir a todos el mismo nivel de desempeño intelectual, sino tratar de que cada uno llegue al dominio de las estructuras del nivel en que se encuentra y presentarle situaciones en las que se pueda empezar a generar un avance al nivel siguiente. Ese avance sólo comenzará cuando la maduración neuronal y el procesamiento más o menos consciente de la información ya adquirida, lo permitan, y el apoyo de los compañeros y de los adultos lo estimulen.

Una actitud permanente de búsqueda, de observación, de análisis de las respuestas de los estudiantes, de las dificultades que encuentran, puede dar al maestro criterios y pautas para mejorar el programa, para adecuarlo al medio; en una palabra, para lograr que sea lo que debe ser: un instrumento que favorezca el desarrollo integral de los educandos y que los prepare en la vida para la vida.

Anexo

¿SON LAS MATEMATICAS UNA CREACION DE LA MENTE HUMANA?

Una invitación a explicitar la concepción matemática que orienta nuestra acción pedagógica en esta área del conocimiento.

1. ¿PARA QUE ESTA LECTURA?

Uno de los factores determinantes de la metodología aplicada tanto para enseñar como para aprender una ciencia es la idea que cada uno tiene de lo que es esa ciencia.

En el caso de Matemáticas hay diversas corrientes: una que considera que ellas existen independientemente de nosotros, otra que afirma que son creadas por algunos cerebros o grupos privilegiados, otra que piensa que son fruto espontáneo de las elaboraciones que la mente humana realiza y, finalmente, otra que considera que son una creación de la mente humana y que esa creación se realiza mediante procesos que deben darse en cada cerebro y en cada grupo.

Cada una de esas formas de "concebir" las Matemáticas determina una actitud y un método específico para acercarse a ellas, para enseñarlas y para aprenderlas.

De ahí la importancia y la necesidad de que maestros y alumnos analicemos cuál es nuestra posición al respecto. Tal vez eso nos ayude a entender por qué estamos dispuestos a revisar nuestros métodos pedagógicos o por qué queremos conservar los que tenemos.

Esta lectura es ante todo una invitación para que los profesores tratemos este tema, para que refresquemos nuestros conocimientos al respecto, y especialmente, para que nos cuestionemos sobre la coherencia entre la concepción que tenemos de las Matemáticas y las teorías sobre Pedagogía Activa y Psicología Cognitiva con las cuales decimos estar de acuerdo. Una vez hecho esto entre los profesores se puede ir suscitando la misma reflexión entre los alumnos.

Como material para la discusión, la lectura incluye una síntesis muy apretada de cinco corrientes sobre los Fundamentos de las Matemáticas. No se pretende agotar el tema, por eso son valiosos los aportes de cada uno y los que se obtengan en lecturas complementarias. Se incluye, al final, la bibliografía consultada.

2. CORRIENTES SOBRE LOS FUNDAMENTO DE LAS MATEMATICAS

La historia da cuenta de siglos y siglos de diversas posiciones y discusiones sobre el origen y la naturaleza de las Matemáticas; es decir, sobre si las Matemáticas existen fuera de la mente humana o si son una creación suya; si son exactas e infalibles o sin son falibles, corregibles, evolutivas y provistas de significado como las demás ciencias.

2.1 El Platonismo

Considera las Matemáticas como un sistema de verdades que han existido desde siempre e independientemente del hombre. La tarea del matemático es descubrir esas verdades matemáticas, ya que en cierto sentido está "sometido" a ellas y las tiene que obeceder. Por ejemplo, si construímos un triángulo de catetos **c**, **d** y de hipotenusa **h**, entonces irremediablemente encontraremos que: $h^2 = c^2 + d^2$.

El Platonismo reconoce que las figuras geométricas, las operaciones y las relaciones aritméticas nos resultan en alguna forma misteriosas; que tienen propiedades que descubrimos sólo a costa de un gran esfuerzo; que tienen otras que nos esforzamos por descubrir pero no lo conseguimos, y que tienen otras que ni siquiera sospechamos, ya que las Matemáticas trascienden la mente humana, y existen fuera de ella como una "realidad ideal" independiente de nuestra actividad creadora y de nuestros conocimientos previos.

¿Cuántos de nuestros profesores y cuántos de nuestros alumnos pertenecerán, sin proponérselo y más aún sin saberlo, al Platonismo? ¿Cuáles implicaciones favorables y cuáles desfavorables se pueden originar en esa situación? ¿Cuál sería, para la corriente del Platonismo, un concepto de Pedagogía Activa coherente con su posición filosófica?

2.2 El Logicismo

Esta corriente de pensamiento considera que las Matemáticas son una rama de la Lógica, con vida propia, pero con el mismo origen y método, y que son parte de una disciplina universal que regiría todas las formas de argumentación. Propone definir los conceptos matemáticos mediante términos lógicos y reducir, los teoremas de las Matemáticas a teoremas de la Lógica, mediante el empleo de deducciones lógicas.

Prueba de lo anterior son afirmaciones como "La Lógica Matemática es una ciencia que es anterior a las demás, y que contiene las ideas y los principios en que se basan todas las ciencias", (DOU, 1970, p. 59), atribuída a Kurt Godel (1906) y que coincide, en gran medida, con el pensamiento aristotélico y con el de la escolástica medieval. Claro que hay que tener en cuenta que para los antiguos, la Lógica era más un arte que una ciencia: un arte que cultiva la manera de operar válidamente con conceptos y proposiciones; un juego de preguntas y respuestas; un pasatiempo intelectual, que se realizaba en la Academia de Platón y en el Liceo de Aristóteles, en el que los contendientes se enfrentaban entre sí mientras el público aplaudía los ataques y las respuestas.

Esta corriente reconoce la existencia de dos Lógicas que se excluyen mutuamente: la deductiva y la inductiva. La deductiva busca la coherencia de las ideas entre sí; parte de premisas generales para llegar a conclusiones específicas. La inductiva procura la coherencia de las ideas con el mundo real; parte de observaciones específicas para llegar a conclusiones generales, siempre provisorias, que va refinando a través de experiencias y contrastaciones empíricas.

Una de las tareas fundamentales del Logicismo es la "logificación" de las Matemáticas, es decir, la reducción de los conceptos matemáticos a los conceptos lógicos. El primer paso fue la reducción o logificación del concepto de número. En este campo se destaca el trabajo de Gottlob Frege (1848-1925) quien afirma ". . . espero haber hecho probable que las leyes aritméticas son juicios analíticos y por tanto a priori. Según ello, la aritmética no sería más que una lógica más desarrollada; todo teorema aritmético sería una ley lógica aunque derivada. Las aplicaciones de la aritmética a la explicación de los fenómenos naturales sería un tratamiento lógico de los hechos observados; computación sería inferencia. Las leyes numéricas no necesitan, como pretende Baumann, una confirmación práctica para que sean aplicables al mundo externo; puesto que en el mundo externo, la totalidad del espacio y su contenido, no hay conceptos, ni propiedades de conceptos, ni números. Por tanto las leyes numéricas no son en realidad aplicables al mundo externo: no son leyes de la naturaleza. Son, sin embargo, aplicables a los juicios, los cuales son en verdad cosas de la naturaleza: son leyes de las leyes de la naturaleza. . ." (DOU, 1970, p. 62-63).

Frege hizo grandes aportes a lo que hoy conocemos como Lógica Matemática: cálculo proposicional, reglas para el empleo de los cuantificadores universal y existencial, y el análisis lógico del método de prueba de inducción matemática.

El Logicismo, lo mismo que otras teorías sobre fundamentos de las Matemáticas, tiene que afrontar el delicado reto de evitar caer en las paradojas, sin que haya conseguido una solución plenamente satisfactoria, después de un siglo de discusiones y propuestas alternativas. Entre los problemas que reaparecen en la discusión sobre filosofía de las matemáticas, está el de la logificación o aritmetización del continuo de los números reales: ¿Se puede entender lo continuo (los reales) a partir de lo discreto (aritmética de los naturales)?

¿Cuál es, como docentes o como estudiantes, nuestra posición frente a esta forma de concebir las Matemáticas y la Lógica?

2.3 El Formalismo

Reconoce que las Matemáticas son una creación de la mente humana y considera que consisten solamente en axiomas, definiciones y teoremas como expresiones formales que se ensamblan a partir de símbolos, que son manipulados o combinados de acuerdo con ciertas reglas o convenios preestablecidos. Para el formalista las Matemáticas comienzan con la inscripción de símbolos en el papel; la verdad de la matemática formalista radica en la mente humana pero no en las construcciones que ella realiza internamente, sino en la coherencia con las reglas del juego simbólico respectivo. En la actividad matemática, una vez fijados los términos iniciales y sus relaciones básicas, ya no se admite nada impreciso u oscuro; todo tiene que ser perfecto y bien definido. Las demostraciones tienen que ser rigurosas, basadas únicamente en las reglas del juego deductivo respectivo e independientes de las imágenes que asociemos con los términos y las relaciones.

¿Qué tanto énfasis formalista hay en la educación matemática en nuestros establecimientos educativos? ¿Qué actitud produce este tratamiento formalista en la mayoría de nuestros alumnos? ¿Qué piensan ellos sobre esto? ¿Qué clase de implicaciones tiene este hecho en el desarrollo integral y pleno de los estudiantes?

2.4 El Intuicionismo

Considera las Matemáticas como el fruto de elaboraciones que hace la mente a partir de lo que percibe a través de los sentidos y también como el estudio de esas construcciones mentales cuyo origen o comienzo puede identificarse con la construcción de los números naturales.

Puede decirse que toda la Matemática Griega, y en particular, la Aritmética, es espontáneamente intuicionista, y que la manera como Kant concebía la Aritmética y la Geometría es fundamentalmente intuicionista, por más que el Intuicionismo como escuela de filosofía de las matemáticas se haya conformado sólo a comienzos del siglo XX.

El principio básico del Intuicionismo es que las Matemáticas se pueden construir; que han de partir de lo intuitivamente dado, de lo finito, y que sólo existe lo que en ellas haya sido construído mentalmente con ayuda de la intuición.

El fundador del Intuicionismo moderno es Luitzen Brouwer (1881-1968), quien considera que en Matemáticas la idea de existencia es sinónimo de constructibilidad y que la idea de verdad es sinónimo de demostrabilidad. Según lo anterior, decir de un enunciado matemático que es verdadero equivale a afirmar que tenemos una prueba constructiva de él. De modo similar, afirmar de un enunciado matemático que es falso significa que si suponemos que el enunciado es verdadero tenemos una prueba constructiva de que caemos en una contradicción como que el uno es el mismo dos.

Conviene aclarar que el Intuicionismo no se ocupa de estudiar ni de descubrir las formas como se realizan en la mente las construcciones y las intuiciones matemáticas, sino que supone que cada persona puede hacerse consciente de esos fenómenos. La atención a las formas como ellos ocurren es un rasgo característico de otra corriente de los fundamentos de las Matemáticas: el Constructivismo, al cual nos referimos enseguida.

2.5 El Constructivismo

Está muy relacionado con el Intuicionismo pues también considera que las Matemáticas son una creación de la mente humana, y que únicamente tienen existencia real aquellos objetos matemáticos que pueden ser construídos por procedimientos finitos a partir de objetos primitivos. Con las ideas constructivistas van muy bien algunos planteamientos de Georg Cantor (1845-1918): "La esencia de las Matemáticas es su libertad. Libertad para construir; libertad para hacer hipótesis". (DAVIS, HERSH, 1988, p. 290).

El Constructivismo matemático es muy coherente con la Pedagogía Activa y se apoya en la Psicología Genética; se interesa por las condiciones en las cuales la mente realiza la construcción de los conceptos matemáticos, por la forma como los organiza en estructuras y por la aplicación que les da; todo ello tiene consecuencias inmediatas en el papel que juega el estudiante en la generación y desarrollo de sus conocimientos. No basta con que el maestro haya hecho las construcciones mentales; cada estudiante necesita a su vez realizarlas; en eso nada ni nadie lo puede reemplazar.

¿En qué medida el trabajo en clase de Matemáticas tiene un enfoque constructivista? ¿Qué implicaciones se derivan de ese enfoque para el desarrollo integral de los estudiantes?

¿Qué tanta compatibilidad o incompatibilidad hay entre las corrientes mencionadas? ¿Qué relación tienen con los programas de matemáticas?

Tal vez resulte provechoso para docentes y estudiantes hacer una reflexión en torno a este tema de las filosofías de las matemáticas, y en torno a preguntas como las formuladas. Podría optarse por la realización de mesas redondas con todo el curso o varios cursos. Una reunión previa de los profesores de Matemáticas, y una serie de lecturas y discusiones entre colegas, pueden ayudar a que esas mesas redondas sean más fructíferas, más animadas, y más productivas para el cambio de actitud de profesores y alumnos hacia las Matemáticas.

3. LOS PROGRAMAS DE LA RENOVACION CURRICULAR FRENTE A LOS FUNDAMENTOS DE LAS MATEMATICAS

Estos programas de Matemáticas comparten ampliamente el enfoque constructivista y consideran que las Matemáticas no se reducen al estudio de una realidad preexistente e ideal, ni a un juego de ajedrez con símbolos y fórmulas preestablecidas, sino que tienen que ver con las culturas, con las formas de razonar, con el grado de desarrollo de las mentes, con las necesidades que experimentan las personas y los grupos frente a los problemas que son imposibles de resolver con los conocimientos que se tienen en un momento determinado. Las Matemáticas son una creación de la mente, una obra del pensamiento a lo largo de los siglos.

De ahí la importancia del enfoque de operadores que busca primordialmente estimular la actividad mental, enfatizar los procesos más que los resultados y acentuar los aspectos dinámicos de las Matemáticas. De ahí también la importancia del enfoque de sistemas que busca ante todo generar en las mentes las habilidades necesarias para crear y manejar nuevos sistemas, con sus nuevos números u otros objetos matemáticos, sus operaciones y sus relaciones internas y externas.

Esa creación requiere que los nuevos objetos matemáticos sean coherentes con los ya creados para que no den lugar a contradicciones. Esa búsqueda de coherencia es un reto para el creador del nuevo sistema, y lo guía en la construcción y afinación de las operaciones y relaciones que intenta extender de los sistemas antiguos al nuevo que está diseñando.

Cuando se ha conseguido que los estudiantes, apoyados en sistemas concretos, desarrollen operadores mentales, construyan algunos sistemas conceptuales y los manejen con propiedad y clara conciencia de lo que hacen, se ve cómo en ese proceso se han ido introduciendo símbolos, proposiciones y reglas de formalización, propios del Logicismo o del Formalismo, y que en este momento no solamente tienen sentido sino que resultan necesarios para acceder a niveles superiores del conocimiento.

Entonces, los programas tienen un enfoque Constructivista, pero no por ello desconocen las ventajas prácticas de los sistemas formales, ni renuncian al goce intelectual que produce la búsqueda de la coherencia y de la claridad, el respeto por las reglas de juego y la exigencia de un cuidadoso empleo del lenguaje verbal y del simbólico formal.

Pero las anteriores afirmaciones no constituyen ni un reconocimiento de, ni una invitación a una posición simplistamente ecléctica. Es necesario saber qué se toma de cada corriente, y por qué y para qué se trabaja de acuerdo con sus planteamientos, desde una verdadera síntesis integradora.

La elaboración de esa síntesis requiere conocimiento y análisis de las diferencias entre las corrientes de pensamiento, de los puntos de coincidencia y de las discrepancias que hay entre ellas. Las conclusiones de ese análisis ayudarán a entender a la comunidad educativa (alumnos, maestros, padres de familia, autores de textos y de materiales didácticos) que la concepción que tengamos individualmente y como grupo, sobre lo que son las Matemáticas, determina en gran medida el método del profesor para realizar su trabajo, el de los alumnos para aprender y el de los padres de familia para acompañar a sus hijos en ese aprendizaje personal.

BIBLIOGRAFIA

BANDET, J. y ZARASANA, R. *Hacia el aprendizaje de las Matemáticas.* Buenos Aires: Kapelusz, 1975.

BERMAN, Serge y BEZARD, René. *Contando y Midiendo.* Introducción a la Enseñanza de las Matemáticas. Números en la Escuela de Párvulos. México: Uthea, 1974.

BUSTOS, Félix. *El aprendizaje. Alternativa Piagetiana.* Cúcuta: Grupo Libertad Editores. 2a. Edición, 1983.

CAMPEDELLI, Luigi. *Fantasía y Lógica en la Matemática.* Barcelona: Labor, 1970.

CASTELNUOVO, Emma. *Didáctica de la Matemática Moderna.* México: Trillas, 1973.

COHEN, Jozef. *Procesos del Pensamiento.* México: Trillas, 1974.

DIENES, Zoltan P. *Las seis etapas de aprendizaje en Matemática.* 2a. edición, Barcelona: Teide, 1975.

DIENES, Zoltan P. y GOLDING, E.U. La *Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria.* Barcelona: Teide, 1973.

DAVIS, Philip y HERSH, Reuben. *Experiencia Matemática.* Barcelona: Labor, 1988.

DOU, Alberto. *Fundamentos de la Matemática.* Barcelona: Labor, 1970.

FLAVELL, John H. *La Sicología Evolutiva de Jean Piaget.* 5a. Edición, Buenos Aires, Paidós, 1975.

FUCHS, Walter. *El Libro de la Matemática Moderna.* Barcelona: Omega, 1968.

FURTH, H. y WACHS, H. *La Teoría de Piaget en la Práctica.* Buenos Aires: Kapelusz, 1978.

GINSBURG, Herbert y OPPER Sylvia. *Piaget y la Teoría del Desarrollo Intelectual.* Madrid: Prentice-Hall Internacional, 1977.

KLINE Morris. *El Fracaso de la Matemática Moderna.* Buenos Aires: Siglo XXI, 1976.

MAZURE, Joseph. *El Aprendizaje de la Matemática Moderna.* Buenos Aires: Planeta, 1981.

MIALARET, G. *Las Matemáticas. Cómo se aprenden y cómo se enseñan.* Madrid: Pablo del Río, 1977.

PIAGET, Jean. *Sicología y Pedagogía.* Barcelona: Ariel, 1977.

PIAGET, Jean y BETH E.W. *La Enseñanza de las Matemáticas.* Madrid: Aguilar, 1963.

PIAGET y otros. *La Enseñanza de la Matemática Moderna.* Madrid: Alianza, 1978.

POLYA, G. *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* México: Trillas, 1969.

SANTALO, Luis A. *La Educación Matemática Hoy.* Barcelona: Teide S.A., 1975.

THE OPEN UNIVERSITY. *Lógica II - Prueba.* Curso Básico de Matemáticas. Unidad 17. Cali: Talleres Gráficos de Carvajal, 1974.

_ _ _ _ _ _ _. *Números Complejos I. Curso Básico de Matemáticas.* Unidad 27. Cali: Talleres Gráficos de Carvajal, 1974.

VASCO, U. Carlos E. *Relatores y Operadores.* Memorias del IV Coloquio Colombiano de Matemática. Bogotá: Imprenta Universidad Nacional, 1975.

_ _ _ _ _ _ _. *Lógica, Conjuntos y Estructuras.* UNESCO - CIAEM. La Educación Matemática en las Américas IV. Montevideo, 1976.

_ _ _ _ _ _ _. *Relaciones, Operaciones y Sistemas.* Conferencia mimeografiada para el programa de Maestría Universidad NOVA-CAFAM y para el Seminario sobre Jean Piaget. Bogotá: Universidad Nacional. Bogotá, 1978.

_ _ _ _ _ _ _. *El Concepto de Sistema como Clave del Currículo en Matemática.* Notas de Matemática No. 10. Bogotá: Imprenta Universidad Nacional, 1980.

_ _ _ _ _ _ _. *Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas.* Volumen I. Bogotá: División de Materiales Impresos y Audiovisuales, Ministerio de Educación Nacional, 1984.

_ _ _ _ _ _ _. *Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas.* Volumen II. Bogotá: División de Materiales Impresos y Audiovisuales, Ministerio de Educación Nacional, 1988.

PROGRAMA CURRICULAR

PROGRAMADORES AUTORES

Ministerio de Educación Nacional:
Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Teresa León Pereira

Universidad Nacional de Colombia:
Carlos E. Vasco Uribe

COAUTOR DE LA UNIDAD DE GEOMETRIA:

Nelson A. Izquierdo Chaves

ASESOR

Universidad Nacional de Colombia:
Carlos E. Vasco Uribe

Consideraciones y recomendaciones generales

El programa de matemáticas para el noveno grado completa la serie de estos programas, propuesto por el Ministerio de Educación, para los nueve años de Educación Básica.

En este grado se deben evidenciar, de alguna manera, y acrisolar, cuanto sea posible, los logros obtenidos durante la Primaria y la Secundaria. Igualmente importante es el poder detectar, tan pronto como sea posible, las dificultades que no se hayan superado y los vacíos que hayan quedado. Esos elementos de la realidad de cada grupo de estudiantes, son básicos para que maestros y alumnos, en forma responsable y solidaria, hagan la adecuación del programa general, a su caso específico.

Los objetivos generales del área, incluídos en el Marco General del Programa, deben revisarse y tenerse también como elementos orientadores del trabajo en Matemáticas para el noveno grado. Como se indicó en 6º, 7º, y 8º, esos objetivos son los más importantes ya que se orientan al pleno desarrollo humano y, por consiguiente, a la educación integral de los alumnos. En segundo lugar están los objetivos generales de noveno que indican lo que es peculiar de los Sistemas Numéricos, Geométricos, Métricos, etc., para este grado. El orden en que están dispuestas las unidades sugiere que el programa puede ser desarrollado siguiendo esa secuencia. Pero es necesario tener presente que simultáneamente se van desarrollando el lenguaje natural, el lenguaje matemático y los sistemas lógicos conjuntistas operacionales y relacionales.

Un detenido análisis del Marco de los Programas, de los objetivos generales del área y generales del grado permite inferir que el énfasis de la Renovación Curricular en Matemáticas está:

- En la transformación de la concepción y de las prácticas metodológicas. Se proponen estrategias para desarrollar habilidades de pensamiento y procesos de construcción de los conocimientos.

- En la aplicación del enfoque de sistemas que determina una forma de acercamiento a los temas del área. Los sistemas se abordan como totalidades con dinámica y estructuras propias. Se parte de los sistemas concretos como básicos para la construcción, organización y sistematización consciente de los conceptos. Por último se llega a los sistemas de símbolos para expresar, interpretar y traducir los conceptos que se han construído.

- En la importancia dada al desarrollo de procesos de pensamiento que permitan remplazar el aprendizaje mecánico y repetitivo por el aprender a aprender durante toda la vida.

- En planteamientos y acciones orientadas a transformar el ambiente de la clase de Matemáticas y de las relaciones maestro-alumnos,

alumnos-alumnos, maestros-programas-alumnos, y de todos ellos con la vida.

– En la transformación de la concepción y de las prácticas evaluativas. Se trata de emplear la evaluación como un instrumento de autoformación y como fuente de información para comprender y orientar los procesos individuales y grupales.

Según todos los aspectos enumerados anteriormente el énfasis no está en el desarrollo de un gran número de temas. Muy posiblemente no se desarrollen todos los temas que tradicionalmente se incluían en 4º de bachillerato. Tampoco se descartan todos. Se han seleccionado o agregado los que se consideran básicos en la formación humana y académica que se espera de un estudiante que termina la Educación Básica y se enfrenta a otro tipo de estudios o directamente a la vida en el mundo del trabajo.

Con los programas de la Renovación Curricular se necesita dar más tiempo, por lo menos al principio, para el desarrollo de cada proceso y de cada tema. Por consiguiente no se puede pretender (y no hay que angustiarse por ello) desarrollar todos los temas y todas las sugerencias incluídos en los programas. La extensión y el detalle con que han sido diseñados se debe a que los cambios que se proponen requieren encontrar nuevas formas de trabajo. De nada serviría afirmar que hay que cambiar si no se participa en la búsqueda de esas nuevas formas de abordar el aprendizaje de las Matemáticas. Otra razón es la dificultad para poner en marcha un sistema nacional de **APOYO A LA FORMACION PERMANENTE DE LOS EDUCADORES.** Cuando ese sistema se haya implementado podría pensarse que bastarían unos lineamientos generales que incluyeran el enfoque, la estructura, los objetivos o propósitos generales, una propuesta de los contenidos y unas sugerencias para la evaluación. Las actividades sugeridas en los programas servirían entonces como temas de talleres y jornadas pedagógicas.

Desde esa perspectiva, tanto los objetivos específicos como las sugerencias metodológicas tienen el carácter de propuestas que buscan facilitar la comprensión y aplicación del enfoque. No tienen un carácter de obligatoriedad molesta. Si algunos profesores han elaborado propuestas innovadoras más acertadas, pedagógicamente hablando, pueden darlas a conocer a sus colegas y ponerlas en práctica en el aula.

La evaluación como un proceso debe ser permanente y participativa. Se espera que en este grado sean posibles la evaluación de cada alumno por si mismo (autoevaluación), la evaluación conjunta del grupo (coevaluación) y la evaluación que hace el maestro respecto del trabajo de los alumnos (heteroevaluación).

El asesor y las programadoras agradecen los comentarios y las sugerencias encaminadas a mejorar esta propuesta.

Objetivos generales

1. Tomar conciencia y apreciar en forma conjunta los resultados obtenidos en cuanto a educación integral, desarrollo del pensamiento y formación matemática en los nueve años de Educación Básica.

2. Participar en y disfrutar la transformación positiva del ambiente de trabajo en matemáticas.

3. Desarrollar habilidades para construir y apropiarse de estrategias que ayuden a formular, analizar y resolver problemas, de modo que se logre una comprensión de los conceptos y una organización cada vez más fundamentada y coherente del pensamiento.

4. Avanzar en el desarrollo de procesos de inferencia lógica, de formulación, experimentación y puesta a prueba de hipótesis, de resolución de problemas, de representación imaginativa o dibujada de situaciones, de fijación consciente de la atención, de automonitoría, de auto-evaluación. . .

5. Vivenciar y analizar las características y las exigencias de una evaluación que contribuya a mejorar la educación y tenga efectos positivos más allá de la vida escolar.

6. Desarrollar la composición de operadores unarios como operación básica del análisis.

7. Avanzar en la construcción y análisis de sistemas numéricos construídos en el conjunto de los reales e identificar la estructura de algunos de ellos.

8. Construir los números complejos a partir de varios sistemas concretos e iniciar el estudio de algunas de sus propiedades.

9. Desarrollar elementos básicos para la construcción de espacios vectoriales.

10. Avanzar en el conocimiento de funciones, ecuaciones y polinomios.

11. Avanzar en la exploración activa, la comprensión, la representación y el manejo del espacio tridimensional, en la realidad externa y en la imaginación.

12. Construir conceptos básicos sobre sucesiones y sus aplicaciones.

13. Avanzar en el estudio de sistemas métricos referidos a volúmenes, pesos y masas.

14. Avanzar en la construcción de las ideas básicas sobre medidas de tendencia central, de dispersión y probabilidad.

15. Avanzar en el desarrollo del pensamiento crítico y argumentativo a través del estudio de distintas formas de razonamiento y métodos de argumentación.

CONTENIDOS

FORMAS DE RAZONAMIENTO Y METODOS DE ARGUMENTACION

— Conjeturas, pruebas y refutaciones

— Métodos de demostración de conjeturas
. Médoto directo
. Método indirecto
. Métodos de refutación
. Contraejemplos, reducción al absurdo.

— Métodos de encontrar demostraciones (métodos heurísticos).

SISTEMAS CON NUMEROS REALES

— Otros operadores reales.

— Diversos empleos de los símbolos en álgebra.

— Operadores unarios.

— Composición de operadores como función básica del análisis.

— Estructuras de algunos sistemas con números reales.

— Procesos de formulación, análisis, crítica y solución de problemas.

INTRODUCCION A SISTEMAS CON NUMEROS COMPLEJOS

— Posibilidad de construírlos.

— Construcción. Diversos enfoques:
raíces de algunas ecuaciones de segundo grado, operadores rotores ampliadores o reductores.

— Coordenadas rotacionales o polares.

FUNCIONES, ECUACIONES Y POLINOMIOS

— Repaso sobre lo visto de funciones y de ecuaciones.

. Función lineal, función idéntica, función opuesta, función constante.
. Funciones de gráfica lineal y ecuaciones lineales.
. Funciones cuadráticas y ecuaciones cuadráticas.
. Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización.
Factor común
Cuadrado perfecto de un binomio
Diferencia de cuadrados.

— Función cúbica y ecuaciones cúbicas.

. Solución de ecuaciones cúbicas.
. Cubo perfecto de un binomio.
. Raíces reales y raíces imaginarias de ecuaciones cúbicas.

— Función exponencial.

. Comparación entre el inverso y el recíproco de una función (problemas de notación).

- . Repaso de las propiedades de las funciones: inyectiva, sobreyectiva, totalmente definida y biyectiva.

— Polinomios (de una variable) como combinaciones de las funciones constante, idéntica, cuadrática, cúbica, etc.

- . Operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división.
- . Comparación entre funciones, ecuaciones, polinomios y gráficas.

SUCESIONES Y SUS APLICACIONES

— Sucesiones finitas.

— Progresiones como sucesiones.

— Sucesiones infinitas.

— Límite de sucesiones.

— Aplicaciones.

- . Interés simple
- . Interés compuesto
- . Decimales infinitos

GEOMETRIA Y MEDICION

— Escala

— Proyecciones

- . Proyecciones puntuales: divergentes y convergentes.
- . Proyecciones de rayos paralelos: oblicuas y ortogonales al plano de proyección.

— Representación de cuerpos sólidos en el plano:

- . Dibujo de vista única: axonometrías y perspectivas cónicas.
- . Dibujos de vistas múltiples.

— Planos y cortes

- . Cortes del cono recto: cónicas

— Volumen de sólidos

— Capacidad

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

— Medidas de tendencia central: media, moda, mediana, cuartiles, deciles y percentiles.

— Medidas de dispersión: máximo, mínimo, rango, rango intercuartílico.

— Nociones de probabilidad:

- . Eventos probables, seguros, imposibles, igualmente probables.
- . Conjunto de casos posibles.
- . Conjunto de casos igualmente probables.
- . Medición de la probabilidad de un evento.

Unidad I

FORMAS DE RAZONAMIENTO Y METODOS DE ARGUMENTACION

Introducción

Debido al carácter tan general de los sistemas lógicos y a su utilización en el tratamiento de todos los demás sistemas, esta primera unidad también podría ser la última del programa de matemáticas de 9º grado; más aún, tal vez lo más conveniente podría ser que el profesor parcelara el año escolar de manera que al menos el último mes del curso quedara reservado para trabajar sistemáticamente con los alumnos sobre formas de razonamiento y métodos de argumentación, además de dedicarle algunos períodos agrupados al comienzo, en la mitad y al final del curso, o distribuídos a lo largo de todo el año.

En esta unidad no se trata de "enseñar lógica matemática", ni de aprender a utilizar los símbolos de la lógica formal o memorizar las tablas de verdad. El propósito principal de la unidad es más bien el de proporcionar a los estudiantes múltiples experiencias positivas y gratificantes que les hagan sentir, admirar y ejercitar el maravilloso poder lógico de su cerebro para lanzar hipótesis, formular conjeturas, confirmarlas o refutarlas, argumentar en favor y en contra de una tesis, realizar inferencias, detectar supuestos ocultos, demostrar teoremas, generar y transformar información en forma rigurosa y extraer de ella otra información no percibible a primera vista.

Este propósito se logra en forma mucho más eficaz si se distribuye el material en todo el noveno grado, y ojalá desde el de octavo, y se van aprovechando los diversos temas del programa de matemáticas, y ojalá de todas las demás áreas.

Hoy más que nunca, cuando la vida humana parece no valer nada y la irracionalidad está de moda, necesitamos sentirnos orgullosos de que somos seres pensantes, racionales y lógicos, muy superiores a los mejores computadores electrónicos: tanto es así, que nosotros somos los que los diseñamos, fabricamos, programamos y utilizamos.

Destruir un cerebro humano es pues el peor crimen contra Dios, la Humanidad y la Naturaleza. Entorpecer su desarrollo por la privación de proteínas y de estímulos en la infancia, o por el consumo de drogas y alcohol en la juventud, o por la manipulación, ocultación y tergiversación de la información en todas las edades, es un delito que se acerca a ese crimen execrable. En cambio, los que se preocupan por desarrollar los cerebros de los niños y los jóvenes, y sobre todo los niños y los jóvenes que se preocupan por desarrollar ellos mismos su cerebro, prestan el mejor servicio a la patria y la mejor inversión para el futuro.

Contribuir al desarrollo del pensamiento formal, de la argumentación lógica, del espíritu crítico, del diálogo racional y civilizado, es pues una meta imprescindible de la educación, y los profesores de matemáticas podemos hacer un aporte insustituíble para acercarnos a esa meta. Por supuesto que tan elevado propósito no puede cumplirse en una unidad, ni en un área, ni en un grado. Es una tarea permanente de la educación en todos los grados y un desafío continuo para los profesores de todas las áreas, pero muy en particular para el profesor de matemáticas en los grados superiores. Esta unidad sobre formas de razonamiento y métodos de argumentación tampoco puede pues pretender lograr sus objetivos en un sólo mes al comienzo o al final del curso. Pero como se dijo al comienzo, sí puede ser más efectiva si se deja como una síntesis final de algo que ha ido ocurriendo a lo largo de las demás unidades del curso, porque todas las unidades del programa de matemáticas de 9º grado se prestan en diversas formas a este tipo de "gimnasia mental" para el desarrollo del pensamiento lógico.

En el estudio de los sistemas numéricos construídos con los racionales, los reales y los complejos, las oportunidades de conjeturar, inferir, argumentar, demostrar y refutar son muy frecuentes. La construcción de los irracionales es ya una hazaña de la razón, que supera los resultados de todos los experimentos empíricos, en los que dos segmentos trazados en el papel o construídos como bordes de cartulinas, maderas y plásticos, siempre resultan conmensurables tras la selección de una apropiada unidad de longitud suficientemente pequeña. Sólo la lógica rigurosa y la comprensión del esquema de demostración por el absurdo permiten rechazar la hipótesis de la conmensurabilidad y sorprenderse como los pitagóricos ante la existencia de longitudes inconmensurables (ver por ejemplo los objetivos específicos 13 a 15 del programa de 8º grado y la segunda unidad del programa de 9º).

La detección de ciertos esquemas que se repiten al multiplicar un número por sí mismo varias veces lleva a la construcción de toda una familia de operadores: el que eleva al cuadrado, el que eleva al cubo, etc., y la consiguiente construcción mental de la potenciación como una sola operación binaria que sintetiza todos esos operadores, seleccionando el cuadrado cuando el segundo operando es 2, el cubo cuando el segundo operando es 3, etc. Esa es otra proeza mental, que se completa con la puesta en marcha de dos mecanismos de reversibilidad: el primero lleva a la construcción de los operadores que extraen las raíces que tienen como índice un número natural: la raíz cuadrada, la cúbica, etc., y el segundo a la de los operadores que producen los logaritmos que tienen como base un número natural: el logaritmo en base 2, en base 3, etc. De estas dos construcciones puede llegarse en general a la de las funciones exponenciales y logarítmicas. En cada uno de los pasos de esas construcciones se van dando múltiples oportunidades de analizar la estructura lógica interna de las afirmaciones y de las argumentaciones propuestas para demostrarlas.

El estudio de los distintos sistemas que se forman con números reales y la detección de sus estructuras, y al no poder extraer raíces ni logaritmos de números negativos, el paso a la construcción de distintos sistemas con números complejos desde varios puntos de vista, son temas que se prestan también para discusiones sobre la forma misma de las afirmaciones y de las demostraciones (ver también el objetivo específico 6 del programa de 8º. grado).

En la unidad de geometría y medición de 9º surgen continuamente conjeturas que pretenden generalizar lo encontrado en casos particulares, y estimulan a buscar formas de confirmarlas o rechazarlas. En la geometría euclidiana plana y sólida, y en las no euclidianas, como la proyectiva, la afín, la riemanniana y la lobatchevskiana, se conocen infinidad de teoremas y problemas que estimulan a buscar formas de demostrarlos y resolverlos, y multitud de fórmulas que desafían a quienes quieran demostrarlas, transformarlas y utilizarlas. El paso de las tres dimensiones de la realidad a las dos del papel, o de las dos de los planos y diagramas a la imaginación y construcción de los objetos sólidos en ellos diseñados, produce muchas situaciones en donde las conjeturas intuitivas no resultan verdaderas, y las aparentemente falsas resultan demostrables.

La unidad de sistemas analíticos que trata sobre funciones, ecuaciones y polinomios también se presta mucho a la utilización de distintas formas de análisis lógico de las proposiciones y de distintas maneras de transformarlas, demostrarlas y combinarlas. En esa unidad se desarrolla la teoría de las funciones reales como operadores mentales que se construyen a partir de la modelización de cambios y movimientos conocidos por los estudiantes en la vida práctica, se desarrollan herramientas simbólicas y gráficas para representar esos operadores mentales, y luego se vuelve a la aplicación de esa teoría y de esas herramientas a la vida cotidiana.

La unidad de sucesiones, series y sus aplicaciones a las matemáticas financieras, y la de estadística y probabilidad llevan también a razonamientos rigurosos, a partir de problemas prácticos delicados que permiten fomentar el ahorro y la inversión, defender los ingresos, negociar los contratos y pliegos de peticiones, prever los costos reales de adquirir bienes a crédito, y no dejarse engañar por los porcentajes, índices, tablas y estadísticas presentados amañadamente en avisos, plegables, comunicados y otros medios de comunicación.

Una ejercitación sistemática del razonamiento serio, una agudización del espíritu crítico y autocrítico, un aprecio del apoyo que el lápiz y el papel, la calculadora o el computador proporcionan a los pasos lógicos que va dando nuestro cerebro al analizar estas situaciones de las matemáticas financieras, permiten ir más allá del aprendizaje de fórmulas y la utilización mecánica de una calculadora, hasta desarrollar el pensamiento lógico y la confianza en el poder de la argumentación rigurosa y de su expresión simbólica.

Por lo tanto, esta unidad de formas de razonamiento y métodos de argumentación como síntesis final al terminar el 9º grado sólo tiene sentido si desde el comienzo del año, a lo largo de todo el curso y de todas las demás unidades del grado, se ha ido haciendo sistemáticamente ese señalamiento repetido de las características de las conjeturas y afirmaciones, de las maneras de probarlas o refutarlas, y de las maneras de transformar mental, verbal y simbólicamente la información disponible para formular y para resolver problemas relacionados con la vida práctica y con la discusión teórica respectiva. Esta unidad sólo pretende sistematizar en alguna forma lo que debe ser ese trabajo previo realizado durante todo el año; por eso se ubica como primera unidad en el programa de 9º, de manera que el profesor pueda tener en cuenta a lo largo de las demás unidades los puntos de vista presentados en la primera, y hacer así más efectiva y satisfactoria esa síntesis final.

Objetivos generales

- Experimentar el poder del cerebro humano para generar hipótesis y conjeturas, confirmarlas o refutarlas, argumentar en favor o en contra de una hipótesis, y generar y transformar información en forma rigurosa para extraer de ella otra información no percibible a primera vista.
- Detectar y analizar distintas formas de argumentación en las discusiones de la vida cotidiana, de las ciencias sociales y naturales y ante todo de las matemáticas.
- Distinguir entre la certeza subjetiva con que se mantiene un enunciado, su probabilidad, su verdad o falsedad, y la validez de los argumentos en los que se apoya.
- Analizar la estructura lógica interna de los enunciados que ocurren en una argumentación en la vida cotidiana, en las ciencias sociales y naturales y ante todo en las matemáticas.
- Distinguir las afirmaciones condicionales de las incondicionales o absolutas, analizarlas, transformarlas y relacionarlas con las distintas formas de expresarlas en el lenguaje ordinario y con las simplificaciones usuales en la lógica.
- Distinguir las afirmaciones cuantificadas de las no cuantificadas, y en las primeras distinguir sus tipos y partes, y ejercitar sus transformaciones.
- Dado un argumento para sustentar una afirmación o tesis, detectar si tiene supuesto o hipótesis explícitos u ocultos, si es directo o indirecto, si tiene uno o varios pasos, cuáles son, en qué regla de inferencia se basa la transición de un enunciado a otro, y si esa regla es válida o no.
- Detectar y ejercitar esquemas de argumentación directa e indirecta, juzgar su validez o falacia, y desarrollar estrategias para encontrar y desarrollar argumentaciones válidas para apoyar una tesis y para defenderse de argumentaciones falaces.

SUGERENCIAS METODOLOGICAS GENERALES PARA LA UNIDAD

Para no repetirlas en cada una de las actividades siguientes y para que se aprovechen durante todo el curso, se sugieren aquí algunas ideas para orientar la metodología de la unidad, suponiendo también que se va a seguir la recomendación más importante dada en la introducción, o sea que el trabajo lógico se vaya haciendo a lo largo de todo el año escolar y a propósito de todas las demás unidades (y ojalá de todas las demás áreas), para terminar con el estudio más detallado de esta unidad como síntesis final.

Conforme al marco general del área de matemáticas, se comienza por situaciones que sean familiares a los alumnos, en las cuales se presente una regularidad suficiente para que sirvan de sistemas concretos, a partir de los cuales se iniciará la construcción de los sistemas lógicos conceptuales. Estas construcciones no consisten en "darles los conceptos" a los alumnos, lo que desafortunadamente se entiende con frecuencia como darles a ellos las definiciones más o menos rigurosas y formalizadas que han desarrollado los lógicos y los matemáticos en los últimos 25 siglos. Los conceptos más importantes de la lógica no se pueden dar por medio de definiciones: cada alumno tiene que construírlos activamente en su propio cerebro, con esfuerzo y persistencia, y por supuesto con la confrontación con los demás alumnos, los profesores y los buenos libros.

A los alumnos no hay que "enseñarles a pensar": ellos saben pensar bastante bien; más bien hay que apoyarlos y asesorarlos para que aprendan a pensar mejor, más finamente, más coherentemente, más lógicamente. Pero para esto último tampoco hay que "enseñarles lógica": ellos saben bastante lógica; basta oírlos discutir, argumentar y defender sus ideas o sus interpretaciones de los reglamentos deportivos. Más bien hay que apoyarlos y asesorarlos para que aprendan a razonar mejor, más críticamente, más coherentemente, más lógicamente. Por eso esta unidad debe partir de los razonamientos cotidianos que los alumnos producen, confirman o rebaten en sus discusiones.

Si otra persona no duda de mis afirmaciones, ni me las contradice abiertamente, ni me rechaza los argumentos que le doy para convencerla, no veo cómo podrían surgir en mí las construcciones lógicas. Si yo creo todo lo que me dicen, y no me preocupo por ponderar si lo que me dicen es probable, plausible, verdadero o falso, no tiene sentido aprender definiciones, tablas de verdad, distinciones entre certeza, verdad y validez, etc. Si yo soy tan crédulo que no sospecho de los argumentos con que otros tratan de convencerme, y acepto las razones que oigo en la radio y la televisión para apoyar las afirmaciones que me lanzan diariamente esos medios de comunicación, nunca podré construir el concepto de inferencia válida, ni distinguir las argumentaciones sofísticas de las correctas. ¿De qué me sirve entonces saberme de memoria la definición de "modus ponens"?

Sólo después de comprobar el avance en la construcción conceptual de los sistemas lógicos por parte de los alumnos a partir de sus argumentaciones concretas, y después de ejercitar su utilización consciente a través del lenguaje ordinario oral y escrito, vale la pena lanzarles repetidas invitaciones a utilizar taquigrafías y abreviaturas inventadas por ellos mismos para escribir con más eficiencia sus análisis de las afirmaciones y de las argumentaciones. Después de valorar y discutir esos intentos, se podrían tal vez introducir los símbolos lógicos formales que se utilizan en los libros de texto. Pero si no se alcanza a llegar hasta el conocimiento y dominio de esos sistemas simbólicos formales, eso no importaría mucho, con tal de que los pasos conceptuales sí se hayan dado en forma suficiente para contribuir al desarrollo del pensamiento formal de los alumnos.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

1. Detectar formas de argumentación en las discusiones de la vida cotidiana, de las ciencias sociales y naturales y ante todo de las matemáticas.

2. Distinguir entre un paso mental de argumentación y el enunciado mismo que se pronuncia o consigna como resultado del paso.

3. Analizar las formas de argumentación en una serie de enunciados o proposiciones y una serie de pasos mentales que pasan de uno a otro de esos enunciados o proposiciones.

4. Distinguir entre la certeza subjetiva con que se mantiene un enunciado, su probabilidad, su verdad o falsedad, y la validez de los argumentos en los que se apoya.

CONTENIDOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

La fragmentación de las emisiones sonoras de la conversación ordinaria en palabras, sílabas y letras requiere un procesamiento más o menos consciente, una atención sostenida y una actividad apoyada por las teorías lingüísticas y la tradición escrita. Este mismo esfuerzo lo exige la fragmentación de una discusión, un diálogo o un discurso en una serie de episodios de argumentación en donde uno quiere convencer a otro de algo; más esfuerzo exige la fragmentación de cada episodio en una serie de afirmaciones y negaciones complejas, conectadas mentalmente por unos pasos argumentativos no directamente audibles o visibles en esa serie de enunciados, y más todavía la fragmentación de cada una de esas afirmaciones y negaciones complejas en enunciados simples o atómicos ligados por conectivas y afectados por negaciones y cuantificadores. No siempre es conveniente partir de lo simple a lo complejo. Con frecuencia es más eficaz y más interesante partir de bloques con el suficiente grado de complejidad para que tengan sentido global para el alumno; sólo en la medida en que la profundización en ese sentido global inicial, y en la medida en que la utilización más eficaz de esos bloques complejos para propósitos vitales, emocionales y prácticos lo exijan, vale la pena enfocar más cuidadosamente el microscopio teórico para analizar esos bloques en componentes cada vez más finos y aparentemente más alejados de la realidad cotidiana.

Comenzar el trabajo lógico con las letras proposicionales p, q, r, etc. y la definición de las conectivas lógicas, ya sea por su interpretación en el lenguaje cotidiano, ya sea por sus tablas de verdad, no parece ser lo más indicado desde el punto de vista pedagógico, ni parece influir mucho en el desarrollo del pensamiento formal de los alumnos.

La sugerencia inicial es más bien la de comenzar por situaciones de comunicación cotidiana en las que alguien quiera convencer a otra persona de algo. Una discusión respecto a un controvertido "fuera de lugar" en fútbol, o un aviso en el que se trate de convencer al televidente de que use el producto X porque ahora viene con el nuevo ingrediente Y® (marca registrada), pueden dar lugar al tipo de discusión lógica que se quiere fomentar en esta unidad.

La lógica en su forma consciente y sistemática surgió muy probablemente en Atenas como reacción de algunos ciudadanos más inteligentes y perspicaces, como Aristóteles, ante uno de los espectáculos favoritos de los atenienses en esos tiempos en que no había radio, televisión, cine ni fútbol: ir al ágora a oír a los sofistas argumentar en favor o en contra de cuanta idea se les ocurría, y atacar o defender una opinión según lo que les pagara el atacante o proponente de la misma. Existe todavía una amplia zona de Hyde Park en Londres, en donde cada fin de semana es posible ir a escuchar decenas de oradores que exponen sus teorías políticas, filosóficas, religiosas, ecológicas, éticas o esotéricas ante la curiosidad de centenares de visitantes que escuchan un rato, se pasan a otro grupo, discuten, protestan o aplauden a los proponentes de dichas teorías. ¿Cómo es posible que se defiendan tan brillantemente tesis tan diferentes y aun contradictorias? ¿Cómo es posible que haya personas tan hábiles en la argumentación que por una suma de dinero pueden inventarse una manera de convencer al auditorio de algo que en sí no les importa y en lo que no creen en lo más mínimo?

Los sofistas de esos tiempos no se han acabado: más bien se han multiplicado y siguen todavía escribiendo discursos para los políticos, redactando comunicados de prensa y diseñando comerciales para la radio y la televisión.

Pero los Aristóteles de nuestros tiempos que saben analizar y criticar esas argumentaciones parecen ser muy pocos, y las grandes mayorías siguen siendo presa fácil de los demagogos, estafadores, voceros de gremios y gobiernos, jefes de relaciones públicas, agentes de prensa y demás comunicadores sin escrúpulos.

Uno de los primeros pasos para que nuestros estudiantes lleguen a ser émulos de Aristóteles es el de acercarlos a la tradición escrita por medio de la búsqueda y consignación de trozos de argumentación que ocurran en la vida cotidiana, por ejemplo en los deportes, en las clases de ciencias naturales y sociales, y por supuesto en las clases de matemáticas. También es posible buscar esas argumentaciones en libros y periódicos, o en programas de radio y televisión. Los buenos libros de detectives o de espías están llenos de inferencias más o menos plausibles y de deducciones brillantes a partir de pistas que pasan desapercibidas en una primera lectura. También es posible utilizar una grabadora para recoger alguna argumentación y luego transcribirla, o simplemente poner atención a la misma y luego consignarla por escrito a partir de lo que se haya logrado conservar en la memoria.

Viene en seguida el **análisis de la argumentación** que se utilizó en ese episodio, análisis que se compone de varias tareas para realizar:

1. El análisis de la argumentación puede comenzar por **la búsqueda de la tesis** explícita o implícita que el argumentante o proponente quiere probar. Esa tesis deberá pues ser también la conclusión de la argumentación. Puede estar enunciada al principio, en el medio, o al final del episodio de argumentación, o aparecer repetida en varias partes, ordinariamente al comienzo y al final. (Por algo se dice que "si una tesis se repite lo suficiente, acaba por volverse verdadera"). Pero no por estar repetida deja de ser la tesis central que quiere probarse a través de ese episodio de argumentación.

2. En segundo lugar es conveniente **especificar claramente quién es el argumentante o proponente, y quiénes son los destinatarios u oponentes** en ese episodio de argumentación. Eso ayuda a ver qué intereses puede tener el argumentante, y a qué necesidades, sentimientos y conocimientos de los destinatarios está apelando. Una argumentación es siempre una especie de juego entre dos interlocutores: un proponente o argumentante, y un destinatario de esa propuesta, que se convierte al menos provisionalmente en oponente.

   Si el destinatario no duda, rechaza o al menos cuestiona la tesis del proponente, éste no necesita comenzar el juego argumentativo. "Si uno no quiere, dos no pelean", dice el refrán.

3. Después se puede empezar a **analizar, fragmentar o segmentar la argumentación en enunciados aislables con sentido completo,** que parten de un primer enunciado que sea diferente de la tesis, y que se suceden unos a otros hasta llegar a la conclusión. El primer enunciado no puede ser la tesis misma, pues ella es la que está en juego. La conclusión debe coincidir con la tesis o ser un enunciado equivalente a ella. Es conveniente señalar cada enunciado de la serie con un número de orden o un literal en orden alfabético para poder referirse a él más fácilmente. Nótese que puede haber varias maneras diferentes de segmentar un mismo episodio argumentativo, que pueden ser todas correctas.

4. Pero un "paso" de la argumentación no es propiamente uno de esos enunciados de la serie ya segmentada tomado por sí mismo, sino la transición o paso de uno a otro. La siguiente tarea es pues **explicitar el primer paso de la argumentación, tanto con el primer enunciado distinto de la tesis, como con las razones por las cuales se seleccionó ese enunciado.** El primer paso consiste pues no sólo en la primera proposición o enunciado con sentido completo (diferente de la tesis) que se encontró en la segmentación del episodio, sino en la jugada completa que consiste en seleccionar ese primer enunciado y lanzarlo a la discusión, como quien juega la primera carta de un partido de naipes. La jugada no es sólo la carta. Lo que hay que estudiar es el porqué de esa primera jugada, las razones para empezar por ahí, la intención del proponente de utilizar esa carta posteriormente en la argumentación, la justificación o falta de ella para poner esa primera piedra en la argumentación, y los posibles enunciados implícitos, hipótesis ocultas o supuestos compartidos por el proponente y el oponente que hacen posible esa primera jugada argumentativa.

   Nótese que si simplemente se repite la tesis, esa no es argumentación válida. Eso sería suponer verdadera la tesis, lo que se llama "petición de principio". Se supone que la tesis es controvertible, y que el destinatario de la argumentación la puede rechazar, o de hecho la rechaza. Si la acepta de una vez, ¿para qué, empezar el juego argumentativo?

   Por lo tanto, en el primer paso o jugada el proponente trata siempre de buscar un punto de partida que sea aceptable para el destinatario, de tal manera que éste lo acepte por lo menos provisionalmente. (En general, suponemos que el primer paso no es rechazado por el destinatario. Pero por supuesto que el destinatario también se puede volver oponente desde el primer paso, y rechazar aun esta primera acción del juego, lo que obligaría al proponente a inventarse otra jugada de apertura).

5. En forma parecida, se prosigue el análisis con **la explicitación de cada paso subsiguiente de la argumentación,** paso que debe con-

signarse no sólo con **la frase explícita** dicha por el proponente, sino con **la razón** por la cual es aceptable. El paso consiste no sólo en el nuevo enunciado que aparece en el juego, sino en la jugada misma de seleccionarlo y lanzarlo sobre la mesa apoyándolo en enunciados anteriores que pueden estar ya explícitos sobre la mesa y aceptados por el oponente, o estar implícitos entre los enunciados que el proponente supone que el oponente comparte con él, transformándolos por medio de una regla o instrucción considerada como válida o correcta por ambos participantes.

6. En la misma forma, **la explicitación del último paso** no es consignar solamente **el último enunciado** de la argumentación, sino también **la razón** por la cual se considera aceptable formularlo como remate del episodio. Como los anteriores, el último paso consiste también en la selección del último enunciado como aceptable a partir de otros enunciados anteriores implícitos o explícitos, utilizando algunas reglas o transformaciones consideradas como válidas. Como veíamos arriba, el último enunciado suele ser la misma tesis, o en algunos casos una proposición de la cual la tesis se deduce tan fácilmente que no vale la pena explicitar ese último paso hacia la conclusión.

Otras veces, como veremos en las argumentaciones indirectas o "por reducción al absurdo", el último paso es un enunciado que suena tan claramente absurdo o que contradice tan evidentemente uno de los enunciados anteriormente aceptados en la discusión, que el oponente no tiene más remedio que aceptar que su oposición fracasó, y que el punto de partida de ese episodio de la argumentación era inaceptable. Si ese punto de partida era la negación de la tesis del proponente, éste ganó el juego, porque al mostrar que la negación de la tesis inicial era inaceptable, obliga al oponente a aceptarle la afirmación de esa tesis.

El trabajo analítico que se explica en los numerales 4, 5 y 6, que sirve para hacer explícitos los pasos mentales que llevan a los enunciados que sí se verbalizaron o escribieron, es el más difícil en el análisis de un episodio argumentativo. Se puede hacer y consignar después de haber segmentado la serie de enunciados explícitos, o irlo haciendo al mismo tiempo que se escriben esos enunciados de la serie, anotando a la derecha del enunciado explícito el aspecto mental del paso, utilizando una disposición de doble columna.

Es importante también acostumbrarse a asumir en distintos juegos argumentativos los dos papeles: el del proponente y el del oponente. Los debates en grupo en donde se asuman distintos puntos de vista, y los cambios de roles en juegos argumentativos, ayudan a la formación del espíritu crítico, a la "descentración" del propio punto de vista, y al desarrollo de la tolerancia mutua y de la capacidad de argumentar sin enojarse, gritar ni amenazar.

También es importante aprender a saltar de uno a otro papel en un paso de una argumentación, cuando las razones que da o que supone el proponente del juego principal no se aceptan, y el oponente pasa a ser proponente en un mini-episodio argumentativo dentro del juego grande. En ese momento el juego grande se suspende; si el oponente que ahora se volvió proponente del mini-juego lo gana, gana todo el juego. Si lo pierde, se continúa el juego principal en donde había quedado suspendido, y el proponente del mini-juego tiene que aceptar que el paso era correcto, y seguir actuando como oponente del juego grande.

El resultado escrito del análisis de un episodio de argumentación es pues en primer lugar el enunciado de la tesis, con la especificación del proponente y el destinatario, y luego la serie de enunciados de la argumentación; éstos van señalados con números o letras consecutivas para poder referirse fácilmente a ellos; al final o al lado de la serie de enunciados, se escribe una serie de párrafos breves en donde se explican los pasos inicial y siguientes de la argumentación. En cada párrafo se indica si el paso es aceptable o no, con base en qué enunciados anteriores explícitos o implícitos se acepta, y por medio de qué tipo de regla de inferencia o regla de deducción se hizo la transición al nuevo enunciado. Por ejemplo, supongamos que la tesis en un episodio argumentativo tomado de la vida cotidiana es la siguiente:

Tesis: Hoy alguien llegó antes que yo a mi casa. El proponente soy yo: el oponente es mi hermano menor.

Argumentación:

1. Siempre que yo llego de primero a mi casa, la puerta está con doble llave.

2. Hoy no está la puerta con doble llave.
3. Entonces yo no llegué hoy de primero a mi casa.

Análisis de los pasos:

1. Puede que eso haya pasado muchas veces. Pero, ¿cómo hace uno para saber que eso siempre es verdad? Sinembargo, por esta vez supongamos que sí es verdad lo que dice el primer enunciado, o por lo menos que mi hermano no protestó contra él y me dejó dar el primer paso.

2. Mi hermano me tendrá que creer este segundo enunciado, porque yo fui el que saqué las llaves, traté de abrir, y me di cuenta de que necesité menos vueltas para abrir la chapa. Yo ya abrí la puerta, y ya nadie puede comprobar que no estaba con doble llave: ¡sólo me lo pueden creer!

3. Si se aceptan los dos primeros enunciados, el paso de sacar la negación de la condición inicial o antecedente (llegar de primero) cuando no se cumple el condicionado o consecuente (estar con doble llave), es una transformación mental muy común que parece siempre válida.

Propongamos una taquigrafía:

1. ¿De primero? - ¡Doble llave!
2. No doble llave
3. Luego no de primero.

Los alumnos podrían proponer una forma más abreviada todavía:

1. prim ⟶ dob
2. NO prim

---

3. NO dob.

La raya horizontal (como la de una suma) indica ese paso mental que da el proponente cuando de las dos primeras premisas extrae la conclusión 3. Eso es lo que indica la palabra "luego", expresión transicional que anuncia el resultado de un paso mental. Pero no hace falta poner esa raya; más concisamente todavía se podría escribir:

1. $p \longrightarrow d$
2. $\neg\ d$
3. $\neg\ p.$

Así se ve más clara la estructura de esta regla de deducción o regla de inferencia: se acepta una condicional; si luego se comprueba que el consecuente es falso, se deduce que el antecedente tenía que ser falso. Esa forma de producir un nuevo paso de argumentación se llama "modus tollens" o "modus tollendo tollens", que en latín significa "el modo que quita (el antecedente) quitando (el consecuente)". Esta regla es correcta o válida, en el sentido de que si la condicional inicial es verdadera, y es verdad que no se cumplió el consecuente, siempre es verdad que no se cumplió el antecedente. La regla válida más conocida es el "modus ponens", o "modus ponendo ponens", que en latín significa "el modo que pone (el consecuente)", o "el modo que pone (el consecuente) poniendo (el antecedente)". Esta regla tiene la siguiente estructura: se acepta una condicional; si luego se comprueba que el antecedente es verdadero, se deduce que el consecuente tiene que ser verdadero. En la situación de nuestro ejemplo, este nuevo tipo de argumentación quedaría así con las abreviaturas ya utilizadas:

a. ¿De primero? - ¡Doble llave!
b. De primero
c. Luego doble llave.

Pero volvamos a la argumentación que le estaba proponiendo a mi hermano. Quitando la expresión transicional "luego", el último enunciado era: "Yo no llegué hoy de primero a mi casa".

Nótese que este último enunciado todavía no es la conclusión final que yo quería probar, pues no repite la tesis. La tesis era: "Hoy alguien llegó antes que yo a mi casa". Falta pues un último paso, que convierte fácilmente el enunciado 3 en la conclusión o tesis.

Sinembargo esta facilidad aparente con que el cerebro convierte la frase: "Hoy no llegué de primero", en: "Alguien llegó antes que yo", es una maravilla de la lógica. Se necesita saber mucho de cuantificadores y predicados de uno y dos puestos para poder analizar y fundamentar explícitamente esta transformación. Pero todos la podemos hacer mentalmente y estar seguros de la equivalencia lógica de esas dos frases, tanto en el sentido de que la una se puede deducir de la otra (equivalencia sintáctica o de deducción formal), como en el sentido de que siempre que la una es verdadera, la otra también tiene que serlo, y viceversa (equivalencia semántica o de interpretación).

Nótese también que lo más importante es el paso mental que permite al proponente formular un nuevo enunciado a partir de que los otros hayan sido aceptados por el interlocutor. Ese poder que tiene el cerebro para sacar inferencias o deducciones de las afirmaciones o negaciones hechas anteriormente es el que estamos tratando de experimentar, desarrollar y someter a control en el estudio de los sistemas lógicos.

Volvamos ahora al episodio del aviso de televisión que nos quiere convencer de utilizar un dentífrico X. Suponemos pues que la tesis es:

Tesis: Ud. debe utilizar el dentífrico X.
El proponente es un odontólogo que sale en la televisión.
El destinatario soy yo u otro televidente.

Argumentación:

1. El dentífrico X tiene el nuevo ingrediente Y.
2. El nuevo ingrediente Y elimina eficazmente la placa bacteriana.
3. La placa bacteriana produce caries e inflamación en las encías.
4. Luego Ud. debe utilizar el dentífrico X. (Conclusión).

Análisis de los pasos:

1. Se supone que es verdad que ese dentífrico tiene ese ingrediente porque lo dice el odontólogo (pero también puede que no sea un odontólogo sino un actor vestido de odontólogo, o un odontólogo a quien le pagan para que diga eso aunque él mismo no haya hecho el análisis químico). Pero bueno, aceptemos que sí tiene el ingrediente Y. (La palabra "nuevo" es para apelar al deseo de novedad que todos tenemos, pero no veo qué tiene qué ver eso con la argumentación misma).

2. Eso no es tan fácil; el cepillado por sí solo no elimina la placa; ni siquiera la utilización de la seda dental garantiza eso. Por lo tanto en este paso ya falla la argumentación, pues de una premisa falsa se puede deducir cualquier cosa. ¿Qué pretendía el proponente al decir 2 después de 1? Tal vez que si le acepto que ese ingrediente Y sí elimina la placa, se puede concluir que el dentífrico X sí elimina la placa.

3. Eso sí lo creo porque lo sé por la clase de Ciencias Naturales y Salud y porque me lo ha dicho el odontólogo del colegio. Acepto esa nueva premisa.

4. No veo por qué la conclusión se sigue de los enunciados anteriores. Tal vez hay que suponer una hipótesis implícita: que los destinatarios queremos evitar las caries y las inflamaciones de las encías; esa hipótesis es aceptable. También es aceptable otra premisa general: que si yo quiero evitarlas, debo utilizar los medios eficaces para evitarlas. Lo que parece decir el proponente es: "Este es un medio eficaz, luego debo utilizarlo". No veo por qué; también puedo utilizar otro igualmente eficaz, y hasta puede que haya otros más eficaces.

Propongamos una taquigrafía:
3. ¿Placa? - Caries
3bis. No placa
3ter. No caries

Eso me suena raro. Eso supondría que la existencia de la placa bacteriana fuera condición necesaria para que salgan caries. Aun suponiendo que sí sea una condición suficiente, puede ser que no se dé la placa y sí salgan caries. No se puede aceptar una regla de inferencia o deducción que con la negación del antecedente de una condicional me niegue el consecuente.

Veamos este ejemplo:

1. ¿Llovió? - Mojada la acera
2. No llovió
3. No mojada la acera.

Eso no se sigue necesariamente. ¿Qué tal que la hubieran lavado con manguera?

Esta es una argumentación falaz o sofística muy usada en los discursos, avisos, editoriales, etc., y se llama precisamente "la falacia de la negación del antecedente".

Una argumentación falaz puede pasar de premisas verdaderas a una conclusión falsa, y no se le puede tener ninguna confianza. En cambio, una argumentación correcta o válida no puede extraer una conclusión falsa de premisas verdaderas en ningún caso, situación o modelo de interpretación.

Estudiemos ahora dos ejemplos de argumentación matemática, una válida y otra inválida.

Primero la inválida:

Tesis: Dos números diferentes a, b, son iguales. El proponente soy yo, y el destinatario es Ud.

Argumentación:

1º $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
2º $(b-a)^2 = b^2 - 2ba + a^2$
3º $a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ba + a^2$
4º $(a-b)^2 = (b-a)^2$
5º $(a-b) = +\sqrt{(a-b)^2}$
6º $(b-a) = +\sqrt{(b-a)^2}$
7º $(a-b) = (b-a)$
8º $a - b + a = b$
9º $a + a = b + b$
10º $2a = 2b$
11º $a = b$ (Conclusión)

Análisis de los pasos:

1º Es un producto notable fácilmente verificable por expansión de $(a-b)(a-b)$.
2º Es un producto notable fácilmente verificable por expansión de $(b-a)(b-a)$.
3º Basta reordenar las términos por la conmutativa de la adición y la de la multiplicación.
4º Dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
5º Saco la raíz cuadrada positiva a ambos miembros del 1º.
6º Saco la raíz cuadrada positiva a ambos miembros del 2º.
7º Si las expresiones a lado y lado del 4º son iguales, sus raíces cuadradas positivas dadas por el 5º y el 6º tienen que ser iguales.
8º Basta agregar a ambos lados +a (o intercambiar —a cambiando signos).
Esas reglas son válidas para las sumas y restas.
9º Basta agregar a ambos lados +b (o intercambiar —b cambiando signos).
10º Obvio que $x + x = 2x$
11º Basta dividir por 2 a ambos lados de la igualdad (o cancelar los doses).

Parece pues que el argumento es válido, aunque la conclusión no me guste. Claro que el análisis lo hice sólo parcialmente; si Ud. lo completa, verá en dónde hay falacias o pasos mentales que no son válidos.

Veamos ahora la anunciada argumentación válida:

Tesis: $(-x)(+y) = -xy$, o como dicen tan mal dicho, "menos por más da menos".

El proponente es el autor del texto, y el oponente soy yo. No me la creo.

Argumentación:

1º $(-x) + (+x) = 0$
2º $[(-x) + (+x)](+y) = 0$
3º $(-x)(+y) + (+x)(+y) = 0$
4º $(-x)(+y) + xy = 0$
5º $(-x)(+y) + xy + (-xy) = 0 + (-xy)$
6º $(-x)(+y) + 0 = -xy$
7º $(-x)(+y) = -xy$ (Conclusión)

Análisis de los pasos

1º Parece aceptable la primera jugada, pues la suma de los opuestos aditivos da cero. Para eso los inventaron. ¿Pero cómo haría el autor del texto para inventarse ese primer paso?

2º También veo que es necesario aceptar la segunda jugada, pues cero por cualquier número como +y tiene que dar cero.

3º Este paso supone que yo acepto la ley distributiva de la multiplicación sobre la suma por la derecha. Si la acepto, no tengo más remedio que aceptar este tercer paso. Ahí hay una hipótesis implícita, pero el paso mismo es válido.

4º Eso sí es puro cambio de notación, porque el signo + unario es el "operador mansito" que no hace nada, y por eso da lo mismo +x que x, o +y que y. Se supone que si sólo se hace un cambio válido a nivel de la notación simbólica, no pasa nada a nivel conceptual.

5º Parece que el proponente sumó a ambos lados el opuesto de xy. Eso es como un supuesto muy general: que sumar lo mismo a ambos lados de una igualdad no altera la igualdad. Si acepto eso, tengo que aceptar el paso.

6º Ahí supone el proponente que se pueden asociar las sumas como a uno le convenga, pero lo debería decir más claro, por ejemplo insertando un paso más entre el quinto y el sexto:

5º $[(-x)(+y) + xy] + (-xy) = 0 + (-xy)$
5º bis $(-x)(+y) + [xy + (-xy)] = 0 + (-xy)$
6º $(-x)(+y) + 0 = -xy$

Ahora sí el paso 5º bis sería válido por la ley asociativa y el paso 6º por la invertiva de la adición en el lado izquierdo y por la modulativa de la adición en el lado derecho. Pero bueno, el autor dió tres brincos en uno.

7º Claro, por la modulativa puede escribir ese último paso, y esa conclusión era la misma tesis. Me la ganó.

Una cosa es que cada enunciado esté bien formado, y otra que la argumentación esté bien construída. Una cosa es que yo compruebe que la argumentación llegue a una verdad en un caso, y otra que sí pruebe en general y en todos los casos. Una cosa es que la argumentación sea correcta o válida, y otra que cada enunciado sea verdadero. Una cosa es que la conclusión sea verdadera, y otra que sí esté correcta o válidamente demostrada. Una cosa es que yo esté convencido de la verdad de una tesis, otra que tenga una demostración válida, y otra que esa tesis sea verdadera.

Distingamos pues entre los estados de conciencia del proponente o el oponente, que llamamos el convencimiento, la certidumbre o **certeza** subjetiva acerca de un enunciado, y la **verdad** o **falsedad** objetiva de ese enunciado, que llamamos el **valor de verdad** del enunciado. Uno puede tener certeza de algo falso, o tener certeza de que algo es falso siendo verdadero. En el lenguaje ordinario confundimos "cierto" con "verdadero". (Decimos: " ¡Es cierto!" y "¿No cierto?"). Pero lógicamente hablando, la certeza es subjetiva, y por más que siempre haya algo de subjetividad en toda verdad, idealmente la verdad debería ser objetiva, o sea que la correspondencia del enunciado con lo que sucede en la realidad debe resultar la misma para distintos sujetos que se pongan a investigar la verdad de ese enunciado con seriedad e imparcialidad.

En la misma forma, en el lenguaje ordinario confundimos "verdadero" con "correcto" o "válido". (Decimos: " ¡Correcto!"). Pero lógicamente hay que distinguir entre una conclusión verdadera, y una argumentación correcta o válida. A esa cualidad de ser correcto o válido que tiene un razonamiento, es lo que llamamos su **validez.**

Un argumento es válido si en todas las situaciones pensables o en todos los modelos posibles en los que las premisas se cumplan, la conclusión también tiene que cumplirse. En cierto sentido los argumentos válidos le transmiten la verdad de las premisas a la de la conclusión. (Si alguna de las premisas no es verdadera, no se sabe si el argumento válido transmite la falsedad o no; sólo se sabe que transmite la verdad).

Una argumentación en la que todos los pasos se apoyen en argumentos válidos se llama **deducción,** y se dice que la conclusión de ese razonamiento está **demostrada;** una conclusión demostrada a partir de enunciados de una teoría, se llama **teorema** de esa teoría.

Otros tipos de argumentos que se encuentran en la vida ordinaria no son deducciones rigurosas, sino que se basan en inferencias probables, que en mayor o menor grado le aumentan la probabilidad a la conclusión, pero no garantizan su verdad, ni siquiera cuando todas las premisas son verdaderas. Estos argumentos que no son válidos en el sentido técnico de conservar la verdad en todos los modelos posibles, se llaman argumentos inválidos, incorrectos, falaces o sofísticos. Esto no quiere decir que no se puedan sacar conclusiones verdaderas al utilizar esos pasos incorrectos, sino que el esquema de argumentación no garantiza que la verdad de las premisas se transmita a la conclusión.

Los adjetivos "correcta" o "válida", o al contrario, "incorrecta", "inválida" o "falaz", se deberían aplicar sólo a la argumentación misma, y los adjetivos "verdadera" o "falsa" a las premisas y a la conclusión. También se podría extender el uso de "correcto" o "válida" a una conclusión que estuviera correcta o válidamente apoyada en una argumentación correcta o válida. Pero podría haber entonces conclusiones correctas pero falsas, o inválidas pero verdaderas. Tomemos por ejemplo la siguiente argumentación:

Hipótesis: $1 = 0$
Tesis: $2 = 1$
Proponente: Yo. Oponente: Usted.

Argumentación:

a) $1 = 0$
b) $1 = 0$
c) $1 + 1 = 0 + 0$
d) $2 = 0$.

Análisis de los pasos:

a) Lo tengo que aceptar, pues esa es la hipótesis
b) Correcto el paso, pues simplemente repite la hipótesis.
c) También lo tengo que aceptar, pues se pueden sumar ordenadamente los dos miembros de una igualdad: esa es una regla válida.
d) Es válido, pues $1 + 1 = 2$ y $0 + 0 = 0$.

Tenemos pues una conclusión correcta, esto es, correctamente deducida, pero falsa, lo que no es raro, pues la hipótesis $1 = 0$ ya era falsa.

Examinemos en cambio la siguiente argumentación:

Hipótesis: $1 = 0$
Tesis: $1 = 1$
Proponente: Yo. Oponente: Usted

Argumentación:
a) $1 = 0$
b) $0 = 1$
c) $1 + 0 = 0 + 1$
d) $1 = 1$.

Análisis de los pasos:

a) Lo tengo que aceptar, pues esa es la hipótesis.
b) Correcto el paso, pues la igualdad es simétrica.
c) También lo tengo que aceptar, pues se pueden sumar ordenadamente los dos miembros de una igualdad.
d) También correcto, pues el cero es el módulo de la adición.

La conclusión es verdadera, y además se deduce correctamente de la hipótesis, que por supuesto es falsa.

Una deducción válida a partir de premisas o hipótesis falsas no garantiza que la conclusión sea verdadera o falsa. Por eso se dice que de una falsedad se puede deducir cualquier cosa. Lo único que garantiza una deducción válida es que si las hipótesis, premisas y postulados son verdaderos, la conclusión también va a ser verdadera. Un paso correcto o válido lo único que garantiza es que a pesar de la transformación que haya sufrido el enunciado, si el enunciado o los enunciados anteriores eran verdaderos, se conserva el valor de verdad del enunciado transformado.

Nótese que el valor de verdad de un enunciado puede ser "Verdadero", o "Falso". Si el valor de verdad es "Verdadero", se conserva con un paso válido; si el valor de verdad es "Falso", no sabemos si se conserva o no. Nótese también que la argumentación anterior tiene una hipótesis explícita, y otras implícitas, como son la simetría de la igualdad, y la llamada "noción común" (por encontrarse así en el libro primero de los Elementos de Euclides) de que agregar iguales a iguales produce iguales. Una hipótesis se llama también "suposición" o "supuesto". Una hipótesis básica explícita o implícita puede ser aceptada por todos los que participan en la argumentación porque todos comparten la misma teoría, y en ese caso se suele llamar "axioma" o "postulado" de la teoría, una hipótesis explícita puede también ser expresada sólo como premisa provisional para los propósitos del juego argumentativo que va a comenzar; por eso a veces empezamos diciendo: "Supongamos que. . .". "En ese caso se dice que esa premisa no se afirma categóricamente sino hipotéticamente.

En el lenguaje ordinario no se suelen explicitar muchas de las hipótesis y de los supuestos utilizados en la argumentación, y esa es una manera de engañar a los incautos. De ordinario muchas de las hipótesis y supuestos quedan implícitos, no por engañar a los otros, sino porque uno mismo no es consciente de ellos, o porque asume que todos los aceptan (serían entonces similares a los axiomas o postulados).

La raíz latina de las palabras "suposición" y "supuesto" es "sub-poner", o "poner debajo", como quien pone la primera piedra de un edificio que se va construyendo de abajo para arriba; el edificio sería la argumentación. La palabra "hipótesis" significa exactamente lo mismo en griego: "puesta debajo". La argumentación se construiría pues de abajo para arriba. En cambio, por alguna razón cultural, tal vez por la manera vertical de escribir de arriba hacia abajo los pasos de las argumentaciones, hoy día nos parece que la conclusión está como colgada de las hipótesis, como si la construcción del edificio argumentativo fuera de arriba para abajo. Decimos que la conclusión depende de las hipótesis. "Depender" viene de "pender", "estar colgado". También se dice en lenguaje elegante que la conclusión "pende de las hipótesis". Hay aquí un cambio de imagen interesante, que proviene tal vez de la necesidad que tenían los antiguos de memorizar los pasos de una argumentación como de abajo para arriba, por falta de escritura, lo que les imponía una imagen mental como de ir acumulando piedras para una construcción, y en cambio nosotros ponemos arriba al comienzo de una hoja las premisas, y vamos escribiendo a renglón seguido las proposiciones sucesivas hasta llegar a la conclusión, considerándola como dependiente, pendiente o colgada de las ramas superiores.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

5. Analizar la estructura lógica interna de los enunciados que ocurren en una argumentación en la vida cotidiana, en las ciencias sociales y naturales y ante todo en las matemáticas, distinguiendo las afirmaciones simples y las compuestas y sus negaciones, las conectivas lógicas binarias, los predicados o relaciones, los términos constantes y los variables, y los cuantificadores.

6. Detectar distintos tipos de formación de proposiciones compuestas a partir de simples, y en particular la conjunción, los distintos tipos de disyunción, y las negaciones de esos tipos de proposiciones.

CONTENIDOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Al tratar de analizar una argumentación es posible que se encuentren enunciados complejos, como:

- Si N.N. es hijo de su papá, puede ser su hermano o ser Ud. mismo.
- O se come el helado y se toma la gaseosa, o se come las galletas y se toma el vaso de leche, pero no las cuatro cosas a la vez.
- Si $1 = 0$, entonces $2 = 0$ y $3 = 0$.
- Si $1 = 0$, entonces $1 = 1$.
- En caso de que Ud. no haya pagado la última cuota o que su póliza esté vencida, si sufre un accidente no puede exigir el pago del seguro, pero eso no quiere decir que si ha pagado puntualmente y su póliza no está vencida, sí pueda exigirlo.
- Supongamos que $x = y$ pero $y \neq z$, o que $x \neq y$ pero $y = z$.
- Su amiga vino ayer y también vino hoy pero ya no vendrá mañana ni pasado mañana.
- Como ayer fue domingo, mañana es martes.
- Si $xy = 0$, entonces $x = 0$, o $y = 0$, o ambos.
- Es necesario que $x \neq 0$ y $y \neq 0$ para que $xy \neq 0$.

Nótese que los dos últimos enunciados podrían estar ligados por un paso de una argumentación. Parece que si Ud. acepta el primero, tiene que aceptar el segundo. Los podríamos ligar por una expresión transicional como "luego", o "por lo tanto", y aceptaríamos como válido ese enunciado compuesto que consta del enunciado inicial, la expresión transicional y el resultado de la transformación. Pero hay que pensar en varias cosas al tiempo para captar la validez de esa transformación.

En un primer análisis de una argumentación se eliminan las expresiones transicionales como "luego", "por lo tanto", "de ahí se sigue", "de donde se deduce que", etc., que representan relaciones en general no simétricas entre los enunciados, y además se eliminan las expresiones transicionales como "o lo que es lo mismo", "dicho de otra manera", "equivalentemente", "lo que también se puede decir", etc., que representan relaciones simétricas entre enunciados. Los enunciados que quedan después de eliminar esas expresiones transicionales se separan uno de otro como resultados de pasos de argumentación. Las expresiones transicionales mencionadas indican pues que se dió mentalmente un paso argumentativo, y lo que hay que analizar después es si ese paso que se dió era válido o no.

Pero al tratar de analizar pasos de distintas argumentaciones que comiencen, pasen o terminen en enunciados complejos, se va notando la importancia de analizar cada uno de esos enunciados a un nivel más fino, para ver de qué enunciados más simples se compone, y cómo están ligados esos enunciados más simples, hasta que llegue un momento en que no podamos encontrar enunciados más simples que todavía sean afirmaciones con sentido completo.

Haciendo una analogía con la química, podemos llamar "enunciados atómicos" o "proposiciones atómicas" a las afirmaciones más simples, que ya no podemos descomponer más todavía en otros enunciados con sentido completo. A los enunciados complejos los podríamos entonces llamar "enunciados o proposiciones moleculares".

Es necesario ver cómo están ensamblados o pegados los enunciados atómicos para formar uno molecular. Por ejemplo, no es lo mismo decir:
"Si el perro ladra y el timbre suena, entonces llegó mi tía", que:
"El perro ladra y el timbre suena, pero no llegó mi tía", o:
"Ni el perro ladra ni el timbre suena, pero sí llegó mi tía". Los tres enunciados moleculares son muy distintos, pero sus tres componentes atómicos parecen ser los mismos: "El perro ladra", "el timbre suena", "llegó mi tía".
Sinembargo, los ligamentos que los conectan son distintos: "Si. . . y. . ., entonces. . .", en el primer caso; ". . . y . . ., pero no. . ." en el segundo caso; "ni. . . ni, . . . pero sí. . ." en el tercero.

En cierto sentido esas palabras cortas del lenguaje que no parecen referirse a ningún objeto, persona, acción, evento o fenómeno, y que a veces se llaman en el programa de Español y Literatura "elementos de relación", o que en otros libros se denominan "conectores", "conectivos" o "conectivas", sirven en nuestra lengua en forma similar a la adición y la multiplicación entre números: pegan enunciados o proposiciones para producir otros nuevos más complejos. Decimos pues que esas palabras, que a veces se cambian por símbolos formales, representan operadores mentales binarios que conectan dos proposiciones, y a esos operadores binarios los llamamos "conectivas lógicas". Pero también podríamos llamarlos conectivos, conectores u operadores lógicos. Las palabras o los símbolos formales son del sistema lógico simbólico; los operadores mentales binarios o conectivas son del sistema lógico conceptual, que es el más importante.

La negación que representamos por la palabra "no" o por la expresión: "Es falso que", se parece al cambio de signo en los enteros o en los reales, porque ambos funcionan como operadores unarios: anteponer una negación a una proposición le cambia el valor de verdad de "Verdadera" a "Falsa" o viceversa, así como anteponer un signo menos le cambia el valor a una expresión numérica no nula de "Positiva" a "Negativa" o viceversa. La negación mental es pues un operador unario de un sistema conceptual lógico. Como no conecta dos proposiciones, sino que afecta sólo una, es mejor no llamar a este operador de negación "conectivo" ni "conectiva" ni "conector", sino sólo "operador de negación". Pero en muchos libros llaman también "conector", "conectivo" o "conectiva" a la negación, aunque no conecte.

Recuérdese de nuevo que la palabra "no" o el símbolo formal "$\neg$" pertenecen al sistema simbólico, y el operador mental unario que representan esos símbolos pertenece al sistema conceptual. Así como el "no" se parece a la operación unaria de cambiar signo en los enteros o los reales, la "o" se parece a la operación binaria de adición, y la "y" a la operación binaria de multiplicación. El "si. . ., entonces. . .", la "o. . ., o. . .", el "sí. . . , pero no. . .", el "ni. . . , ni. . .", etc. sirven como nuevas operaciones binarias entre proposiciones atómicas o moleculares que producen nuevas proposiciones moleculares más complicadas, aunque no es fácil encontrar operaciones parecidas entre números reales.

Ya desde el siglo XVII Godofredo Leibnitz, y Leonardo Euler en el siglo XVIII, se habían dado cuenta de que había una analogía entre las operaciones del álgebra de los números reales y las de la lógica. Pero sólo a mediados del siglo XIX los ingleses George Boole y Augusto De Morgan lograron precisar esas analogías y desarrollar un álgebra parecida a la de los números reales, de tal manera que funcionara como álgebra de la lógica, es decir, que fuera un sistema simbólico lo suficientemente flexible y operatorio para que permitiera lograr resultados lógicos por meras manipulaciones de los símbolos. Por eso una de las estructuras más frecuentes en los sistemas matemáticos utilizados en la lógica formal y en la teoría de computación, se llama "álgebra de Boole" o "álgebra booleana", en honor de George Boole.

Pero volvamos al análisis de un enunciado complejo o molecular al que se llega por un paso de argumentación, y del que se pasa a otro por un nuevo paso. Cuando el enunciado es molecular, un paso de argumentación que pase a otro enunciado puede resultar en otro más complicado, o en uno más simplificado. Por ejemplo, pensemos en un número entero n, y explicitemos la siguiente hipótesis:

1. El entero n es par y es mayor que uno.
2. Por lo tanto n es positivo.
3. Luego existe un entero positivo k que permite decir que $n = 2k$.

El paso de 1 a 2 parece simplificar las cosas; pero el paso del 2 al 3 las complica notablemente.

Veamos la estructura interna del enunciado 1. Podríamos partirlo en dos componentes atómicos: "el entero n es par", "el entero n es mayor que uno". Están ligados por una "y", que obra aquí como un operador binario. Al operador mental binario que representa la "y", o simplemente a la "y", la llamamos "conjunción". A veces se llama también "conjunción" al enunciado molecular que consta de varios enunciados atómicos ligados por "y". Esta confusión se debe a que usualmente confundimos la operación misma con el resultado que se produce al aplicarla; por ejemplo, llamamos a veces "multiplicación" tanto a la operación misma de multiplicar, como al producto que resulta de efectuarla.

En la gramática clásica también se llaman "conjunciones" (y en el programa de Español y Literatura a veces se llaman "elementos de relación") ciertas palabras, como "y", "e", "que", "pero", "más", etc. Técnicamente la conjunción es sólo la operación mental simbolizada por la palabra "y" (o por las palabras "e", "pero", "más", "y también", etc.), en cambio, el "ni", o mejor el "ni. . .ni", representa otra operación mental distinta, para no hablar del "que", palabra que puede representar muchas combinaciones mentales diferentes entre enunciados. Además, la palabra "y" puede representar otras operaciones mentales distintas de la conjunción, como por ejemplo cuando decimos "Tres y cuatro siete", en donde la "y" representa la operación mental de adición; o cuando decimos "Los perros y los gatos", en donde la "y" representa la operación mental de reunión de conjuntos (aquí la "y" no representa la intersección); o cuando decimos "Adán y Eva", en donde la "y" representa la operación mental de formar parejas ordenadas. Lo más importante es el sistema conceptual, no tanto el simbólico.

Volvamos a nuestros dos enunciados atómicos: "el entero n es par", "el entero n es mayor que uno". Notemos que ellos no son ni verdaderos ni falsos hasta que elijamos un enero específico en vez del entero genérico n. Como cada uno de ellos tiene la variable n, y además representa una condición que debe cumplir n, llamamos a cada uno de ellos "una condición en n". Como todavía están abiertos a que se escoja uno u otro entero para utilizarlo en vez de la n, decimos que son "enunciados abiertos" o "proposiciones abiertas". El enunciado molecular completo 1 sigue siendo una condición en n, o sea una proposición o enunciado abierto en donde figura la variabe n, y al que todavía no puede asignársele un valor de verdad determinado, ni "verdadero" ni "falso".

El anunciado 2 parece ser simple o atómico si le quitamos la expresión transicional "por lo tanto", que se refiere más bien al paso mental que nos hace pasar del 1 al 2. Queda sólo la condición en n o enunciado abierto "n es positivo".

Fijémonos ahora en el paso mental que pasa del 1 al 2. ¿Por qué se dice que n es positivo? El primer enunciado atómico de 1: "n es par", no parece tener nada que ver con el 2. El 2 se dedujo sólo del segundo enunciado atómico de la proposición compuesta 1, pues si un número entero es mayor que 1, por supuesto que tiene que ser mayor que cero, y eso es lo que significa ser positivo.

El enunciado 2 es pues más simple que el 1, y sigue siendo una proposición abierta o condición en n. Hubo un paso mental que desprendió la segunda parte del enunciado compuesto con "y", simplificando asi la expresión. Este desprendimiento es válido con la "y" pero no es válido con la "o". De "p y q" podemos deducir "p", y también deducir "q", pero de "p o q" no podemos deducir ninguno de los dos.

Si tratamos de hacer el análisis del enunciado 3 ("existe un entero positivo k que permite decir que n = 2k") en sus proposiciones atómicas y sus conectivas lógicas, veremos que nuestro esfuerzo de "química analítica" por sí solo no es suficiente para detectar la estructura interna de ese enunciado. Allí aparece al principio la expresión "Existe un. . .", que no podemos eliminar como transicional, y que parece indicar algo así como que "mínimo un entero k" cumple la condición que sigue. Esa expresión es una manera de decir cuántos enteros cumplen la condición, por más que lo diga algo vagamente, pues no dice si es exactamente uno o si puede haber otros. A este tipo de expresiones que dicen precisa o vagamente cuántos elementos cumplen una condición, se les llama "cuantificadores" del sistema simbólico. En los sistemas conceptuales de la lógica elemental los cuantificadores son operadores unarios que actúan sobre proposiciones abiertas o condiciones. La proposición total con cuantificador y todo, o a veces sólo la proposición abierta sobre la que actúa el cuantificador, se suele llamar "proposición cuantificada". Este cuantificador representado por la expresión "Existe un k" se llama "cuantificador existencial" porque expresa la existencia de por lo menos un elemento del conjunto referencial o universo subyacente que cumpla la condición que sigue; pero el mismo cuantificador podría estar expresado por "Al menos un k" "Mínimo un k", "Hay un k, o varios, que", etc. El cuantificador existencial también se llama "cuantificador particular", para contrastarlo con el "cuantificador universal" o "cuantificador general" que se expresa con las expresiones "Todos", "Todo", "Cada" o algunas equivalentes. En español hay pues muchas expresiones que actúan como cuantificadores de proposiciones abiertas o condiciones:

"Todos", "Todo", "Cada uno", "Para cada", "No todos", "Algunos no", "Algunos sí", "Para algún", "Hay", "Alguien", "Nadie", "Ninguno", "Nada", "No hay", "Por lo menos uno, dos, tres. . .", "A lo más uno, dos, tres. . .", "Mínimo uno, dos, tres. . .", "Máximo uno, dos, tres. . .", "Exactamente uno, dos, tres. . .", "Muchos", "Casi ninguno. . .", "Casi todos", "Infinitos", etc.

En nuestro caso el enunciado 3 ("existe un entero positivo k que permite decir que $n = 2k$"), la posible proposición atómica sobre la que actúa el cuantificador particular o existencial es una proposición abierta, pero parece muy complicada internamente. En ella aparece una variable k, el predicado "es entero positivo", otra vez la k, una variable n, la constante 2, la relación binaria representada por $=$, probablemente un operador de multiplicación implícito entre el 2 y la k, y tal vez alguna conectiva oculta: k es entero positivo y $n = 2k$.

Este análisis más fino de las proposiciones atómicas puede compararse ya no con la química sino con la física, en particular con la física llamada "moderna", o sea la física atómica, la física nuclear y la física de alta energía, que permiten analizar los átomos en un núcleo y una envoltura, y permiten analizar el núcleo en protones, neutrones y tal vez otras partículas como los quarks, con campos, fuerzas o intercambios de partículas que los mantienen unidos.

El análisis lógico que corresponde a la química se llama "cálculo proposicional", que estudia las proposiciones atómicas y las maneras de volverlas moleculares por medio de las negaciones y las conectivas binarias; el análisis más fino que corresponde a la física se llama "cálculo de predicados", que incluye el anterior, pero estudia también los predicados, los términos variables y los constantes, las sustituciones de unos por otros, las condiciones o proposiciones abiertas, las sentencias o proposiciones cerradas, y los cuantificadores.

Para hacerle este análisis más fino al estilo de la física nuclear a una proposición compuesta, primero habría que hacerle el "análisis químico", o sea irle quitando todas las conectivas binarias, las negaciones y los cuantificadores, hasta encontrar sus componentes atómicos, que pueden ser proposiciones abiertas o condiciones atómicas, o proposiciones cerradas o sentencias atómicas. Luego a cada componente atómico habría que hacerle el "análisis físico" para distinguir el núcleo de la envoltura. La envoltura de una proposición atómica cerrada o abierta podría ser un predicado unario o de un sólo puesto, y entonces el núcleo sería un término, que a su vez puede ser una constante, una variable, o ser él mismo el resultado de aplicar un símbolo de operador a una o varias constantes y variables; el predicado podría ser binario o de dos puestos, y entonces el núcleo va a tener dos términos; si es ternario, tres términos, etc.

Hay que hacer el análisis con cuidado; puede haber distintas maneras de hacer esa disección, y es posible que distintos resultados sean igualmente correctos.

Por ejemplo en nuestro caso 3 ("existe un entero positivo k que permite decir que $n = 2k$"), sería correcto decir que el cuantificador es "existe (por lo menos) un entero positivo k", llamado "cuantificador restringido" porque el número k que dice que existe está restringido a ser entero positivo, y que la condición que está siendo cuantificada en ese caso sería una sola condición atómica en dos variables "$n = 2k$". (En este caso, la condición es una ecuación por tener como predicado binario central "es igual a", pues el relator principal es el signo "=" que tiene dos puestos). Pero también se puede decir que el cuantificador es "Existe (por lo menos) un k", y que la condición que está siendo cuantificada es una conjunción de dos condiciones simples o atómicas: "k es entero positivo", y "$n = 2k$". La primera condición tiene como envoltura el predicado unario "es entero positivo", y como núcleo la variable k. La segunda tiene como envoltura el predicado binario "es igual a", y como núcleo los dos términos k y 2k; el primero es un término simple, y el segundo se puede considerar como un término compuesto formado por el operador unario duplicador representado por 2( ) actuando sobre k, o también como formado por el operador binario de multiplicación, que aunque no se escribe, actúa sobre la constante 2 y la variable k para formar un sólo término. Todos esos análisis de física atómica y nuclear aplicados al enunciado 3 estarían correctos.

Aquí se ve que el lenguaje ordinario y el lenguaje matemático tienen maneras muy especiales de formar expresiones simbólicas muy distintas:

1. Los **términos,** que son expresiones que se refieren a los objetos del conjunto referencial o universo subyacente al sistema del que se habla, y que se forman a partir de variables, constantes, u operadores aplicados a variables o constantes. Una variable o expresión para un objeto todavía no determinado es pues un término; una constante o expresión para un objeto ya determinado es también un término; una expresión para un operador unario o de un puesto aplicada a un término forma otro término; una expresión para un operador binario o de dos puestos aplicada a dos términos forma otro término, etc.

2. Las **proposiciones o enunciados simples o atómicos,** que expresan afirmaciones sobre los términos a partir de predicados y uno o más términos. Un predicado por sí solo no es pues una proposición; un predicado unario o de un puesto aplicado a un término variable forma una proposición abierta o condición; un predicado unario aplicado a un término constante forma una proposición cerrada o sentencia; un predicado binario o de dos puestos aplicado a dos términos variables, o a uno variable y otro constante, forma también una proposición abierta o condición; un predicado binario aplicado a dos términos constantes forma una proposición cerrada o sentencia, etc.

3. Las **proposiciones o enunciados complejos o moleculares,** que se forman a partir de proposiciones simples o atómicas por medio de cuantificadores y de negaciones (que actúan como operadores unarios sobre proposiciones para formar nuevas proposiciones), o por medio de conectivas binarias (que actúan como operadores binarios sobre proposiciones para formar nuevas proposiciones).

4. Las **argumentaciones o demostraciones,** que son listas que se forman a partir de proposiciones simples o complejas por medio de reglas que permiten pasar de una a otra, reglas que se pueden hacer explícitas por escrito al lado de los enunciados, o permanecer sólo en el cerebro del que está armando la demostración. Cada proposición simple o compleja de una de estas listas puede o no estar ligada a la anterior por medio de una expresión transicional que se refiere a la existencia del paso mental de argumentación, sea por deducción o por equivalencia. Así como hay reglas que permiten saber si una demostración está bien armada, también hay otras que permiten saber si una proposición compleja o molecular está bien armada, otras que permiten saber si una proposición simple o atómica está bien formada, y otras que permiten saber si un término está bien formado.

Una vez que se empiezan a percibir regularidades en cada uno de los niveles, el tratamiento del sistema simbólico se empieza a independizar de la interpretación que se haga de él. Se desarrollan lógicas formales de términos y de fórmulas y luego se buscan los sistemas matemáticos apropiados que puedan servir de modelos o interpretaciones de los sistemas lógicos formales. Estos estudios de los lenguajes formales y sus modelos constituyen fecundos campos de investigación matemática que se han desarrollado muchísimo en los últimos cien años.

Pero el propósito de este estudio de los sistemas lógicos en el grado 9º no es todavía el de desarrollar lenguajes formales por un lado, y por el otro montar sistemas formales que sirvan de modelos para los primeros, sino detectar regularidades en el lenguaje natural y en el lenguaje matemático para afinar la capacidad analítica, las habilidades argumentativas y el espíritu crítico de los estudiantes, y así contribuir al desarrollo del pensamiento formal en los mismos. Sólo unos pocos de ellos, tal vez menos del uno por mil, llegarán a entusiasmarse por el estudio de la lógica formal como disciplina independiente. Pero el 100% de ellos necesita un mínimo (y ojalá que no sea muy mínimo) de capacidad analítica, de habilidad para argumentar y contraargumentar, y de fino espíritu crítico.

Estas capacidades pueden desarrollarse a partir de argumentaciones largas y complejas, y también a partir de argumentaciones muy cortas y simples. El propósito de las actividades siguientes es el de refinar la capacidad analítica aplicándosela a cada enunciado de una argumentación para ver si es simple o complejo, y si es complejo, de qué enunciados más simples está compuesto, con qué operadores binarios (conectivas lógicas) está armado, y qué operadores unarios (cuantificadores o negaciones) lo afectan.

Más que definiciones o "tablas de verdad" de estos operadores unarios y binarios, lo que el cerebro necesita es saber qué inferencias válidas se pueden hacer a partir de los enunciados complejos que los contienen, y a partir de qué enunciados puede introducirse válidamente uno de esos operadores. Igualmente importante es saber qué inferencias inválidas o sofísticas se suelen hacer a partir de esos enunciados complejos, y de qué manera suelen introducirse inválidamente esos operadores.

Tómese por ejemplo el caso de los cuantificadores arriba enunciados. No nos interesa tanto definirlos ni simbolizarlos formalmente, sino ver qué podemos deducir de una frase que contenga uno de estos operadores unarios, o cómo podemos deducir una frase que contenga uno de ellos a partir de otros enunciados anteriores, ya sea directamente o combinándolos con los otros operadores unarios del sistema lógico: las negaciones.

- ¿Es lo mismo decir "No todos vinieron" que "Algunos no vinieron"?
- ¿Se puede deducir que "Algunos no vinieron" a partir de la hipótesis de que "Algunos vinieron"?
- Compare "Hay", "Alguien", "Algunos". ¿Es importante la "s" final de "Algunos"?
- Supongamos que nadie dejó de ir a la fiesta. ¿Se deduce de ahí que todos fueron?
- ¿Es lo mismo decir "Todos" que "Cada uno"? ¿Por qué se dice "Todos y cada uno"?
- ¿Qué tengo que saber sobre una condición simple para poderle anteponer el cuantificador "Todos"?
- Si ya sé que todos los elementos de un conjunto que no está vacío cumplen una condición, y yo sé el nombre de uno de ellos, ¿puedo decir que ese elemento particular la cumple? ¿Puedo deducir que hay por lo menos un elemento que cumple esa condición? ¿Qué pasa si el conjunto sólo estaba definido por comprensión y de pronto no tenía ningún elemento?
- Cuando voy encontrando que unos cuantos elementos de un conjunto A cumplen cierta condición C(x) y no he encontrado ninguna excepción, ¿puedo introducir el cuantificador universal y decir: "Todo x de A cumple C(x)"? Piense en los impares: $A = \{3, 5, 7, \ldots, 2k+1, \ldots\}$. Verifico que el 3 es primo; que el 5 es primo; que el 7 es primo, y salto a decir: "Todos los impares son primos". Esta "sobregeneralización" es una inferencia inválida muy común.
- ¿Qué otros cuantificadores se pueden expresar utilizando solamente "Existe por lo menos un" y "Todos" con la ayuda de negaciones?
- ¿Se puede expresar el cuantificador "Todos" utilizando el cuantificador "Existe por lo menos un" y una o dos negaciones?
- Comparada con el cuantificador "Nadie", ¿cómo actúa la negación "no" en el cuantificador "No hay nadie que"? ¿Es lo mismo decir "Es falso que nadie" que "No hay nadie"?
- ¿Es lo mismo decir "Mínimo uno" que "Por lo menos uno", y "Máximo uno" que "A lo más uno"? ¿Cuáles de esas expresiones corresponden al cuantificador existencial?
- ¿Qué diferencia hay entre "Todos no caben en el bus" y "No todos caben en el bus"? ¿Se podrán traducir estos cuantificadores por "Nadie cabe en el bus" y "Existe por lo menos uno que no cabe en el bus"? ¿Será que todos, o al menos algunos de los estudiantes son tan gordos que no pasan por la puerta del bus?

El español es más sutil que los libros de lógica, en los cuales se buscará en vano una respuesta a las últimas tres preguntas. Aquí como siempre, los sistemas matemáticos son modelos simplificados de la realidad, y en particular los sistemas lógicos son modelos simplificados del lenguaje ordinario. Por complicados que les parezcan a los alumnos los sistemas matemáticos, son más sencillos y transparentes que los sistemas producidos por la evolución de la naturaleza y de la cultura.

Pasemos ahora a analizar las **proposiciones compuestas o moleculares** en las que las proposiciones atómicas pueden estar afectadas por **negaciones** y enlazadas por **conectivas binarias.** En el lenguaje ordinario hay decenas de expresiones que niegan una proposición o conectan dos o más de ellas.

— La negación toma distintas formas lingüísticas y se ubica en distintos puestos en la frase. Pero siempre actúa como un operador unario en un sistema lógico. Cuando se repite, puede a veces eliminarse su sentido de negación, como cuando decimos "No hubo nadie que hubiera dejado de asistir", o "Es falso que nadie hubiera dejado de asistir". En el primer caso se podría deducir que todos asistieron, pero en el segundo caso más bien se deduce que algunos no aistieron, o que al menos uno no asistió. Son deducciones sutiles que el cerebro produce y que hay que hacer conscientes y procurar verificar con modelos de situaciones posibles para ver cuándo son válidas y cuándo inválidas.

— Para introducir correctamente una negación en un paso de argumentación tengo que saber previamente que la proposición anterior era falsa; si era verdadera, no puedo insertar una negación, pero sí puedo introducir dos negaciones que se anulen la una a la otra. "Alguien vino; luego es falso que nadie vino". Pero de "Alguien vino", no se sigue que "No vino nadie"; estas dos negaciones no se anulan sino que se refuerzan.

— La conjunción de dos proposiciones se hace por medio de una conectiva que actúa como operador binario sobre proposiciones más simples, y que puede indicarse con "y", "y también", "y además", "pero", "pero sí", etc. La conjunción de dos proposiciones permite deducir cualquiera de ellas dos. Si sé que el número es par y mayor que uno, puedo deducir que es mayor que uno, y por lo tanto positivo; también puedo deducir que es par, y por lo tanto expresable como 2k con k entero.

— Para pegar correctamente en un paso de argumentación dos proposiciones más simples con una conjunción, tengo que saber previamente que ambas eran verdaderas.

a. 2 es par
b. 2 es primo
c. 2 es par y es primo.

— Es interesante estudiar frases compuestas de dos proposiciones que estén conectadas por "no. .. pero sí. . .", o por "sí. . . pero no. . .". Piénsese qué hay que saber para pegar correctamente dos proposiciones con una de esas expresiones, y qué se puede deducir válidamente de una proposición compuesta que contenga una de ellas.

— Compárese "o come helado o toma gaseosa (pero no ambas cosas)", con "Puede comer helado o tomar gaseosa (o ambas cosas)". En el primer caso podemos deducir que no comió helado si sabemos que tomó gaseosa, pero en el segundo no. Pero si sabemos que no comió helado, en ambos casos podemos deducir que sí tomó gaseosa. Cuando aparece una "o" decimos que hay una disyunción, o sea una operación mental de combinar dos proposiciones en una sola proposición compuesta, que a veces se llama también "disyunción". La disyunción de dos proposiciones exige que por lo menos una de las dos sea verdadera.

— La disyunción de dos proposiciones puede ser exclusiva o excluyente cuando no permite que las dos proposiciones conectadas sean simultáneamente verdaderas; la conectiva correspondiente, llamada "o exclusiva" se expresa a veces por "o. . . o. . . ", "ya. . ., ya. . .", "o bien. . . , o bien. . .", ". . . o . . . pero no ambos", etc.

— Pero la disyunción también puede ser inclusiva o incluyente si permite que ambas proposiciones sean verdaderas; la conectiva correspondiente se expresa simplemente por ". . . o. . .", o por ". . . o. . ., o ambas cosas".

— Para pegar correctamente en un paso de argumentación dos proposiciones con una "o exclusiva" u "o. . . o. . ." necesitamos saber previamente que una de ellas es verdadera y sólo una, así no sepamos cuál es. Excluímos los casos en que ambas sean verdaderas o ambas falsas. Por ejemplo, si nos dan un número real x, podemos decir: "o x es racional, o x es irracional". Esa es una manera frecuente de empezar un episodio argumentativo: con una disyunción de todos los casos posibles mutuamente excluyentes. Si en cada uno de esos casos pruebo mi tesis, ya he probado esa tesis en general; por eso se llama "argumentación por casos", o "demostración por casos".

— Para pegar correctamente en un paso de argumentación dos proposiciones con una "o inclusiva", necesitamos saber previamente que por lo menos una de ellas es verdadera, así no sepamos cuál es. Sólo excluímos el caso en que ambas sean falsas. Por ejemplo, si nos dan un número real x, podemos decir: "o x es mayor o igual a cero, o x es menor o igual a cero". Es posible que si x es cero cumpla ambas condiciones, pero tiene que cumplir al menos una de ellas. Así también se puede empezar una argumentación por casos, aunque no sean excluyentes; lo importante es que cada elemento del conjunto sobre el que queremos generalizar corresponda al menos a uno de los casos enumerados.

— Habría un tercer tipo de "o" mucho menos frecuente, que podríamos llamar "o negativa", y que se podría expresar por ". . . o. . ., o ninguna de las dos cosas, pero no ambas". Por ejemplo, cuando digo: "Puedo comprar un dulce, o comprar un pan, pero no me alcanza la plata para ambos (aunque puedo no comprar ninguno de los dos)". Se llama también "o de Sheffer" por el apellido de quien la estudió más a fondo. Propiamente no corresponde a una disyunción, pues no exige que al menos una de las dos proposiciones sea verdadera. Se usa más bien entre proposiciones incompatibles, o sea que no pueden ser simultáneamente verdaderas. ¿Qué podríamos deducir de una frase que contenga esta "o negativa"? ¿Qué necesitamos saber para pegar correctamente dos proposiciones con una "o negativa" en un paso de argumentación? ¿Qué caso excluímos?

— Augusto De Morgan estudió a mediados del siglo XIX lo que se puede deducir si se niega una conjunción o una disyunción. Aunque los lógicos medievales lo sabían, no era fácil expresar las reglas de deducción correspondientes, que hoy llamamos "leyes de De Morgan". Piénsese en lo que se puede deducir si se sabe que es falso que dos condiciones se cumplen simultáneamente; o en lo que se deduce si se sabe que es falso que al menos una se cumpla. A partir de ejemplos concretos puede llegarse a formular reglas generales como estas:

1. De la negación de una conjunción de dos proposiciones se deduce la disyunción de las negaciones de las mismas, y viceversa.

2. De la negación de una disyunción de dos proposiciones se deduce la conjunción de las negaciones de las mismas, y viceversa. Saberse las reglas no es importante si uno mismo no ha llegado a convencerse de que eso es así y de que eso le permite hacer inferencias válidas mentalmente y por escrito.

Una posible inferencia inválida que se comete fácilmente es la de pasar la negación de una conjunción de dos proposiciones a la negación de cada una de las dos. Si sólo sé que un número entero no es a la vez par y primo, no puedo deducir que no es par y que no es primo, sino sólo que no es par, o que no es primo, o que no es ninguna de las dos cosas (este es un ejemplo de la "o negativa" o de Sheffer).

— "Ni raja ni presta el hacha" es un refrán popular que permite estudiar la conectiva "ni. . . ni. . .", llamada "negación conjunta" o "negación de Peirce", por el apellido de quien la estudió. La negación usual es un operador unario, pero la negación conjunta es un operador binario. ¿Qué podríamos deducir de una frase que contenga el "ni. . . ni. . ."? ¿Qué necesitamos saber para pegar correctamente dos proposiciones con una negación conjunta en un paso de argumentación? ¿Qué casos excluímos?

— De una frase que contenga una negación conjunta ("ni. . . ni. . .") puede deducirse la negación de una disyunción inclusiva si se piensa cuidadosamente y se utilizan las leyes de De Morgan.

— De una negación de una disyunción inclusiva (de una "o inclusiva") puede deducirse una negación conjunta de Peirce ("ni. . . ni. . ."), y de una negación de una conjunción puede deducirse una negación de Sheffer (una "o negativa").

— Si el profesor conoce bien las tablas de verdad de las conectivas usuales para la negación, la "y", la "o inclusiva" y la "o exclusiva", sería recomendable no enseñarles ni exigir su memorización, sino más bien ejercitar bien en clase las deducciones que se pueden hacer si se sabe que una de las dos o ambas proposiciones que están unidas por la conectiva respectiva son verdaderas, o que la proposición global lo es, y en qué casos se puede insertar correctamente esa conectiva; luego se puede asignar como ejercicio individual o por grupos construir la tabla de verdad a partir de esa familiaridad con la conectiva.

Si los alumnos están repitiendo las tablas de verdad de memoria ("La y es V,F,F,F"), no están aprendiendo lógica. Sería mejor cambiarles el orden de los valores de verdad, o poner el cero para "Falso" y el uno para "Verdadero", o "—" para "Falso" y "+" para "Verdadero", etc., de tal manera que tengan que pensar y no se puedan refugiar en la memorización.

— Se puede hacer notar que en algunos pasos de una argumentación es posible devolverse correctamente a la proposición anterior. Lo vimos por ejemplo en el caso de la negación de una conjunción y la disyunción de las dos negaciones, o en el caso de la negación de una disyunción y la conjunción de las dos negaciones. En estos casos estamos en presencia de una relación binaria del sistema conceptual lógico: la **equivalencia sintáctica** o equivalencia deductiva entre dos proposiciones. Esta relación es parecida, pero distinta de la **equivalencia semántica** o equivalencia de interpretación, que es otra relación lógica que no estudiaremos en detalle aquí, y que significa que si una de las dos proposiciones ligadas por esta relación es verdadera, la otra también, y si la una es falsa, la otra también. Estas dos equivalencias lógicas, la sintáctica y la semántica, también son distintas de la conectiva bicondicional "si y sólo si", que no es un relación binaria sino una operación binaria, y que estudiaremos en el siguiente bloque de objetivos específicos.

— Cuando podemos pasar correctamente de una a otra proposición en un paso de argumentación, pero no podemos devolvernos, estamos en presencia de otra relación binaria del sistema conceptual lógico: la **implicación sintáctica** o implicación deductiva entre esas dos proposiciones. Esta relación entre enunciados de una argumentación es distinta de la **implicación semántica** o de interpretación, que es otra relación lógica que no estudiaremos en detalle, y que significa que si la proposición que implica la otra es verdadera, la otra también tiene que serlo, pero si la primera es falsa, no sabemos nada acerca de la segunda. Estas dos implicaciones lógicas, la sintáctica y la semántica, también son distintas de la conectiva condicional "Si. . . , entonces. . .", que no es una relación sino una operación binaria, llamada a veces "implicación material", y que es el objeto principal de estudio en el siguiente bloque de objetivos.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

7. Distinguir las afirmaciones condicionales de las incondicionales o absolutas, y en las primeras el antecedente o condición, el consecuente o condicionado, y la conectiva condicional.

8. Distinguir las condiciones necesarias de las suficientes y de las que son a la vez necesarias y suficientes.

9. Relacionar las condiciones necesarias y suficientes con distintas formas de expresarlas en el lenguaje ordinario y con la simplificación lógica llamada implicación material o filoniana.

10. Dada una proposición condicional, distinguir las transformaciones que la cambian en su recíproca, en su contraria y en su contra-recíproca, y ejercitar las combinaciones de esas transformaciones.

CONTENIDOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Hemos estudiado las negaciones y los cuantificadores como operadores unarios de los sistemas lógicos conceptuales. Luego estudiamos algunos operadores binarios o conectivas lógicas que conectan dos proposiciones para formar una nueva. El estudio más sencillo fue el de la conjunción; el de la disyunción fue un poco más delicado. Pero el estudio más difícil es el de las proposiciones compuestas que tienen forma condicional, o sea de las que están unidas por una conectiva indicada por palabras como "Si. . . , entonces. . .", ". . . si. . .", etc., llamadas ambiguamente "implicaciones" o "implicaciones materiales" entre dos proposiciones.

Una primera ambigüedad está en que, como ya vimos, la palabra "implicación" puede referirse a varios tipos de relaciones sintácticas o semánticas, simétricas o antisimétricas, pero en el caso de la conectiva condicional mental se refiere más bien a una operación binaria o de dos puestos. Es un caso frecuente de ambigüedad que aparece cuando se confunde el sistema simbólico con el sistema conceptual. Una segunda ambigüedad está en llamar "implicación" no sólo a la operación binaria mental, sino a la expresión "Si. . . , entonces. . ." o a la flecha con la que suele abreviarse. Además, se llama a veces "implicación" no sólo a la operación, sino también al resultado: a la proposición compuesta de las otras dos, ya unidas con la implicación material. Este es otro caso de la frecuente ambigüedad que aparece cuando se confunde la operación activa con el resultado pasivo.

En una proposición compuesta de dos proposiciones conectadas por una conectiva condicional, una de las dos proposiciones (llamada "la condición") expresa precisamente un requisito o condición para que la otra (llamada "la condicionada") se cumpla. La condición puede estar de primera o de segunda, y por eso hay que ver qué es lo que se llama "el antecedente" y "el consecuente" de una condicional. Si la frase condicional empieza por "Si. . .", o tiene una flecha de izquierda a derecha en la mitad, la condición queda de antecedente y el condicionado de consecuente; pero si la frase condicional tiene el ". . . si. . ." en la mitad, o una flecha de derecha a izquierda, no es tan claro cuál de las dos proposiciones se deba llamar "antecedente" y cuál "consecuente".

— Hay que analizar las distintas maneras como en el lenguaje ordinario se conectan dos proposiciones para indicar este tipo de dependencia condicional de una con la otra, y pensar qué puede deducirse de unas u otras de esas frases compuestas conectadas por una conectiva condicional. Las expresiones que corresponden a las conectivas condicionales que se utilizan en el lenguaje ordinario y en el científico son múltiples, y expresan distintos tipos de condicionamiento: "Si. . . , . . .", "Si. . . , entonces. . .", ". . .implica. . .", ". . . si. . . , ", "Es suficiente que. . ., para que. . .,", "Condición suficiente para que. . . es que. . .", "Es necesario que. . ., para que. . .", "Condición necesaria para que. . . es que. . . ", "Es necesario y suficiente que. . . para que. . .", "Condición necesaria y suficiente para que. . . es que. . .", ". . . si y sólo si. . . ", "Siempre que. . ., . . .", ". . . siempre que. . .", "Cuando. . ., . . .", ". . . cuando. . .", "Sólo cuando. . . , . . .", ". . . sólo cuando. . .", "Siempre y cuando. . ., . . .", ". . . siempre y cuando. . .", "Si. . ., . . . y si no no", etc.

El estudio lógico y lingüístico de estas expresiones lleva más de 25 siglos, sin arrojar conclusiones definitivas. Lo importante es emprender uno mismo ese estudio, y analizar qué puede deducirse de proposiciones conectadas por algún tipo de conectiva condicional cuando se sabe que la condición se cumplió o no, y qué puede deducirse cuando se sabe que el condicionado se cumplió o no.

— Ya analizamos el caso de "Siempre que llego de primero, la puerta está con doble llave", ¿Qué dedujimos de que la puerta no estuviera con doble llave? Aceptemos que esta proposición compuesta es equivalente a la siguiente. "Si llego de primero, (entonces) la puerta está con doble llave". Pongámonos de acuerdo en expresar las proposiciones condicionales compuestas de dos proposiciones más simples en la siguiente forma convencional: empecemos por "Sí. . ."; pongamos la proposición que expresa la condición suficiente de primera, y la proposición condicionada de segunda (poniendo o no la palabra "entonces" en la mitad de las dos). Decimos que la condición suficiente es el antecedente de la proposición condicional (en este caso: "Yo llego de primero"), y que la proposición condicionada (o "el condicionado", en este caso: "La puerta está con doble llave") es el consecuente.

— Nótese que si insertamos el ". . . si. . ." en la mitad de dos proposiciones, la segunda es la condición suficiente, y la primera la condicionada (o "el condicionado"): "La puerta está con doble llave si llego de primero". Por eso es mejor no hablar de antecedente y consecuente en estos casos, sino sólo cuando la frase esté en su forma convencional, o sea cuando empiece por "Si. . .", y no cuando tenga el "si" hacia la mitad de la frase.

— Si se analiza con cuidado el párrafo anterior, se verá que tiene un "si" al comienzo, y que la segunda frase tiene un "sólo cuando", y luego un "y no cuando". Si Ud. entendió bien ese párrafo, fue porque ya tenía bastante bien entendidas las condicionales. (Ud. notó por supuesto que la última frase también era condicional si leyó con cuidado). ¿Qué puede decir de la última frase entre paréntesis? Estas experiencias de comprender el lenguaje ordinario un poco más refinado y de partir de la habilidad mental que ya tienen los alumnos para interpretar frases condicionales, son las que constituyen el comienzo por los sistemas concretos de que se habla en los programas de matemáticas de la renovación curricular. Por el contrario, en este caso comenzar por los sistemas simbólicos sería introducir una flecha para la implicación material, leer "$p \longrightarrow q$" como "p implica q", y escribir en el tablero la tabla de verdad de "$p \longrightarrow q$" para los cuatro casos de p y q. Así tal vez se ejercita la memoria, pero no se aprende lógica.

— Para simplificar las deducciones a partir de proposiciones condicionales que expresan una condición suficiente (sea o no necesaria), se suele pues utilizar para expresarlas la forma ya convenida que contiene la expresión "Si..., entonces. . .", la condición como antecedente y el enunciado condicionado como consecuente. Se supone que al afirmar este tipo de proposición condicional, lo único que se excluye es que el antecedente se cumpla sin que el consecuente se cumpla. Todos los demás casos se declaran posibles. Podría ser más claro para el oyente lo que quiere decir el que propone proposiciones compuestas de dos enunciados unidos por este tipo de conectiva condicional simplificada si el que las propone se tomara el trabajo de completar la frase condicional con expresiones como "y si no, no sé nada", o "y si no, no me comprometo a nada", o "y si no, todavía no he resuelto", etc.:

— Supongamos que la mamá le dice a la hija: "si comes helado, no tomas gaseosa (y si no comes, no he dicho nada)".

Supongamos que sí comió helado. Podemos deducir que no tomó gaseosa.
Supongamos que sí tomó gaseosa. Luego no comió helado.
Supongamos que no comió helado. No sabemos qué pasó con la gaseosa.
Supongamos que no tomó gaseosa. ¿Podemos deducir algo?

— Supongamos que la mamá le dice al hijo: "Si terminas la tarea, puedes ver televisión (y si no terminas, todavía no he resuelto)".
Supongamos que sí terminó la tarea. Puede ver televisión.
Supongamos que no lo dejan ver televisión. Es porque no ha terminado la tarea.
Supongamos que no ha terminado la tarea. No se sigue nada de esa suposición, pues en ese caso la mamá no había resuelto nada.
Supongamos que el muchacho está viendo televisión. No se puede deducir nada de ese hecho respecto a si terminó la tarea o no, pues la mamá no había resuelto si lo dejaba ver televisión antes de terminar la tarea o no.
La condición de terminar la tarea era suficiente para ver televisión, pero no era necesaria.

— Estas últimas afirmaciones pueden extrañar algo a los alumnos, pues por lo común los papás ponen condiciones que son más fuertes que las que se enuncian con "Si. . ., entonces. . .", o sea que son más fuertes que las condiciones suficientes. En los casos usuales estamos ante condiciones que son a la vez necesarias y suficientes, y que para mayor claridad se deberían enunciar terminando la frase con una expresión como "y si no, no", para que no haya duda. Supongamos ahora que el papá le dice al hijo: "Si terminas la tarea, puedes ver televisión (y si no, no)".
Supongamos que sí terminó la tarea. Puede ver televisión.
Supongamos que no lo dejan ver televisión. Es porque no ha terminado la tarea.
Supongamos que no ha terminado la tarea. Ahora sí se sigue que no puede ver televisión.
Supongamos que está viendo televisión. Ahora también se puede deducir que ya terminó la tarea.
En el lenguaje ordinario la conectiva "Si. . ., entonces. . . y si no, no" representa pues una bicondicional, o sea que el antecedente es condición necesaria y suficiente para que ocurra el condicionado. En el lenguaje de las matemáticas se suele poner ". . . si y sólo si. . ." en medio de las dos proposiciones conectadas por la bicondicional, pero entonces ya no se sabe cuál es el antecedente y cuál el consecuente, ni cuál es la condición y cuál el condicionado. Se pierde la noción

temporal correcta que tiene el alumno de que las condiciones se deben dar primero, y luego se puede dar el condicionado. Esa sucesión temporal se pierde en la simplificación que se hace en los sistemas lógicos usuales, en los que se piensa sólo en la verdad o falsedad de cada enunciado de la proposición condicional; en estos casos se toma siempre la expresión "Si. . . , entonces. . ." para indicar la conectiva mental, se toma el antecedente como condición suficiente, y el consecuente como condicionado, y se sobreentiende "y si no, no he dicho nada", más bien que lo que suelen sobreentender los alumnos: "y si no, no".

— Esta solución simplificada para el problema del significado de la conectiva condicional que liga los dos miembros de una proposición condicional se llama "implicación material" o "implicación filoniana", porque fue una ingeniosa simplificación inventada muy probablemente por un lógico griego llamado Filón. Es la que se usa casi siempre en matemáticas y en lógica formal. Como de costumbre, los matemáticos y los lógicos parten de los sistemas concretos del lenguaje ordinario y científico, y forman un modelo conceptual simplificado para poderlo estudiar mejor; en este caso simplifican el uso variado de las condicionales del lenguaje ordinario para decidirse por un solo tipo de implicación, la material o filoniana, que no depende del tiempo ni de la relación de causa a efecto que pueda tener la condición sobre el condicionado. De nuevo el sistema concreto del manejo de las condiciones en el lenguaje ordinario es mucho más complicado y sutil que el sistema matemático conceptual ya simplificado que utilizamos para manejar las condiciones suficientes en las matemáticas.

— Los ejemplos anteriores se pusieron el primero en boca de la mamá y el segundo en boca del papá con una segunda intención: el profesor Carlo Federici notó hace más de treinta años que aquí en Colombia los alumnos asocian más fácilmente la implicación material más suave con las condiciones que les ponen las mamás (que tienen implícito "y si no, todavía no he resuelto"), y asocian las condiciones más duras (que tienen implícito "y si no, no") con las que les ponen los papás. Habría pues una "implicación simple o de la mamá", que es más suave y corresponde a la implicación material simple, y otra "implicación doble o del papá", que es más fuerte y corresponde a la bicondicional o doble implicación material. (Pero ya vimos que hay también otros tipos de implicaciones que no son operaciones lógicas sino relaciones sintácticas o deductivas, simples y dobles, además de otras que son relaciones semánticas o de interpretación, simples y dobles).

— Es importante estudiar las condiciones suficientes que corresponden a las implicaciones materiales o filonianas simples, y distinguirlas de las condiciones necesarias. Estudiemos este caso:

1. Es necesario que tenga el carnet vigente para que entre a la biblioteca.
2. Yo tenía el carnet vigente.

¿Se deduce que entré a la biblioteca?

— Estudiemos este otro caso:

1. Es necesario que tenga el carnet vigente para que entre a la biblioteca.
2. Yo no tenía el carnet vigente.
3. Sí entré a la biblioteca.

¿Se deduce algo de 2 y 3? Si nos fijamos con atención, se puede deducir que el enunciado 1 era falso: en realidad no era tan necesario tener el carnet vigente, pues se puede uno "colar" sin que lo vean, o haciendo trampa, o convenciendo al portero. Sería sólo una "necesidad jurídica".

— Estudiemos este otro caso:

1. Es suficiente que compre una boleta para que entre al estadio.
2. No compré boleta.
¿Se deduce que no entré al estadio? No, porque pude haber entrado con pase de cortesía. Era suficiente tener boleta, pero no era necesario.

— Estudiemos este cuarto caso:

1. Es suficiente que compre una boleta para que entre al estadio.
2. No pude entrar al estadio.

¿Se deduce que fue que no compré boleta? Si estaba bien enunciada la condición suficiente 1, sí se deduce que no compré boleta: si compré la boleta y eso era suficiente para entrar, entré. Lo que pasa es que las condiciones que enunciamos no suelen ser tan precisas como las que se usan en lógica y en matemáticas. Si compré boleta pero no pude entrar al estadio (por ejemplo porque me dió un trastorno y me tuve que devolver aunque tuviera que perder la boleta), lo que se deduce es que estaba mal enunciada la condicional 1. Mejor enunciada, debería decir algo así como: "Para que entre al estadio es suficiente que compre una boleta y que no me pase nada desde que la compre hasta que entre al estadio".

Para firmar un contrato, entender una ley o un reglamento, etc., es muy importante saber qué se puede deducir de una proposición condicional y qué no, y qué diferencia hay entre condiciones necesarias y suficientes.

- Es conveniente ejercitar ante todo las deducciones y las transformaciones mentales con proposiciones condicionales que enuncien condiciones suficientes pero no necesarias, tanto en las matemáticas como en las ciencias naturales y en las situaciones de la vida cotidiana.

- Por ejemplo, en el sistema de los números enteros con la multiplicación y las relaciones multiplicativas, es suficiente ser divisible por cuatro para ser divisible por dos, pero no es necesario: seis es divisible por dos pero no por cuatro. En cambio, no sólo es suficiente tener exactamente cuatro divisores para ser primo, sino que también es necesario. El -1 no es primo porque tiene sólo dos divisores: $+1$ y -1; el 3 sí lo es porque tiene cuatro divisores, y el 6 no lo es porque tiene ocho.

- Es suficiente tener exactamente seis divisores para ser cuadrado perfecto. ¿Es necesario? (Compare el 4 y el 9 con el 16).

- Es suficiente que haya algunos elementos que vivan en un conjunto B pero no en A para que B no esté contenido en A. ¿Es necesario? (No: basta con que haya uno solo. ¡Cuidado con la "s" de "algunos"!).

- El cerebro parece transformar fácilmente una condicional transponiendo el orden del antecedente y el consecuente. "Si el perro ladra, suena el timbre" se convierte fácilmente en "Si suena el timbre, el perro ladra". Es como si el cerebro tuviera programado un operador mental **R** que transformara una condicional en su recíproca. Pero esta conversión de una condicional en su recíproca no es válida cuando la condición es sólo suficiente pero no necesaria.

También suele el cerebro convertir fácilmente una condicional en su contraria, negando el antecedente y el consecuente pero manteniendo el orden: "Si el perro ladra, suena el timbre", se convierte fácilmente en "Si el perro no ladra, no suena el timbre" (tal vez por haber completado mentalmente "y si no, no" al final del primer enunciado condicional). Es como si el cerebro tuviera programado otro operador **C** que transformara una condicional en su contraria. Esta conversión de una condicional en su contraria tampoco es válida cuando la condición es sólo suficiente pero no necesaria.

Si se piensa en la recíproca de la recíproca, o en la contraria de la contraria, se puede caer en la cuenta de que son equivalentes a la misma condicional original. Es como si se le aplicara un operador idéntico **I** que la dejara quieta (alegóricamente, es como si el cerebro pudiera considerar un "monstruo mansito" **I** que no le hace nada a la condicional a la que se le aplica). Pero trátese de pensar en la recíproca de la contraria, o en la contraria de la recíproca. No es claro cuál es. La contraria de la recíproca se llama "la contra-recíproca" (o a veces "la contrapositiva" de la original). No es fácil comprobar mentalmente que la recíproca de la contraria también es equivalente a la contra-recíproca, a pesar de haber hecho las transformaciones en orden inverso. Para comprobarlo es conveniente introducir taquigrafías y símbolos, ojalá en una primera instancia inventados por los alumnos, para luego compararlos con los símbolos usuales para las condicionales. En este caso, la aplicación de la contraria después de la recíproca daría la contra-recíproca. Es como si el cerebro tuviera programado un operador **K** que transformara una condicional en su contra-recíproca, y que cumpliera la ecuación $\mathbf{K} = \mathbf{C} \circ \mathbf{R}$.

Con estos dos operadores **C** y **R** que transforman una condicional en su contraria y en su recíproca, con el tercer operador **K** que cambia una condicional en su contra-recíproca, y además con el operador idéntico **I** que la deja quieta, es posible construir un grupo de cuatro operadores que se combinan en distintas formas sin salirse de esos cuatro operadores iniciales. Este ejercicio mental de combinar de distintas maneras estos cuatro operadores mentales es una actividad que permite desarrollar muy eficazmente el pensamiento formal.

OPERADORES SOBRE CONDICIONALES:

C Operador de contrariación que cambia una condicional en su contraria.

R Operador de reciprocación que cambia una condicional en su recíproca.

K Operador de contra-reciprocación que cambia una condicional en su contra-recíproca.

I Operador idéntico que deja quietas las condicionales.

Habría que estudiar con cuidado y ejercitar mentalmente las transformaciones representadas en la Figura 1, en donde el símbolo "$p \longrightarrow t$" significa: "Si el perro ladra, suena el timbre", etc. Para más detalles, se puede ver el artículo de Carlos E. Vasco, "Dos nuevos grupos Piagetianos en la Lógica Elemental", citado en la bibliografía de esta primera unidad. Allí se estudia el grupo IKRC formado por estos cuatro operadores sobre condicionales.

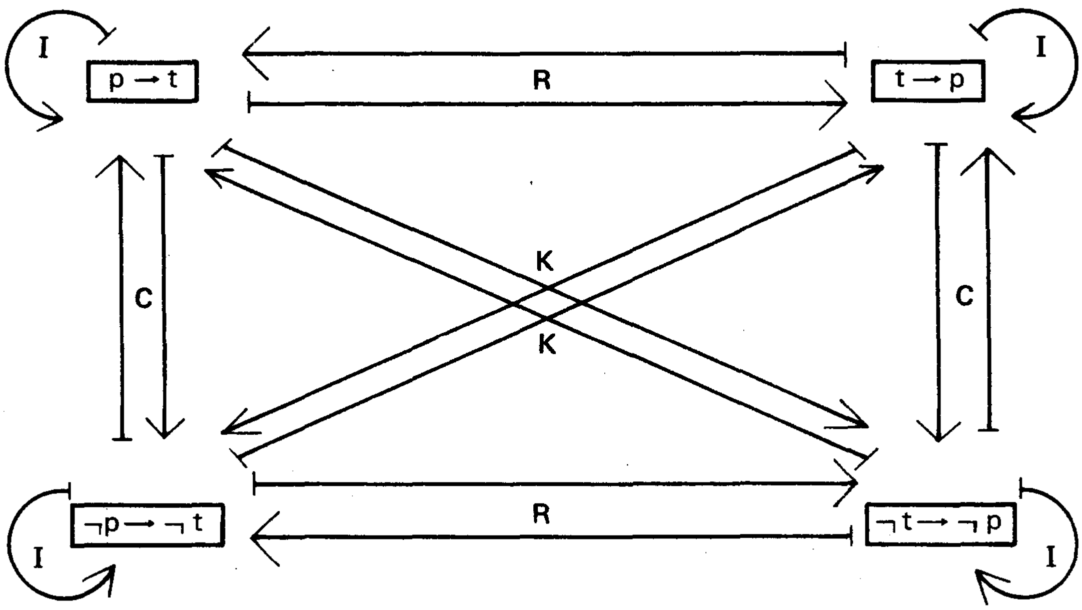


Figura 1: El grupo IKRC

OBJETIVOS ESPECIFICOS

11. Distinguir las afirmaciones cuantificadas de las no cuantificadas, y en las primeras distinguir las universales y las particulares, las afirmativas y las negativas, los cuantificadores, los predicados, las variables, las condiciones, las conectivas y las negaciones.

12. Dada una proposición afirmativa o negativa cuantificada existencial o universalmente, distinguir las transformaciones que la cambian en su contraria, en su contradictoria y en su alterna, y ejercitar las combinaciones de esas transformaciones.

CONTENIDOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

En esta actividad se trata de profundizar en el estudio que se inició a propósito del objetivo específico 5, cuando se hizo el "análisis químico" y el "análisis físico" de algunas proposiciones compuestas. Notábamos allá que una vez que se eliminaban de un episodio argumentativo las expresiones que indican una transición deductiva, como "luego", "por lo tanto", "de ahí se sigue que", etc., quedaba una lista de proposiciones casi siempre complejas, que tienen negaciones, cuantificadores y conectivas lógicas binarias. Observábamos que las negaciones y los cuantificadores actuaban como operadores unarios o de un puesto sobre una proposición simple o compuesta para formar otra más compleja, y que las conectivas lógicas actuaban como operaciones binarias entre dos proposiciones simples o compuestas para formar una nueva más compleja.

Vamos a estudiar ahora lo que pasa cuando las negaciones se combinan con los cuantificadores para producir proposiciones que podríamos llamar doblemente complejas. De alguna manera, el cerebro tiene que saberlas manejar para poder aprender a hablar bien, pero cuando tratamos de hacer consciente ese manejo, podemos ver lo fino y complejo que es, y lo difícil que es expresarlo en forma precisa.

Recordemos que hay cuantificadores restringidos a un conjunto referencial o universo del discurso ya limitado, como cuando digo: "Todo entero", o "Cada persona", etc. y cuantificadores generales que no restringen explícitamente el campo de variación de los posibles sujetos de los predicados que siguen, como cuando digo: "Hay algunas soluciones a la cuadrática $x^2 + 1 = 0$", en donde no digo en qué sistema numérico las debo buscar. Si restringiera el cuantificador a los números reales, la proposición sería falsa, pero si tomo además los números complejos, la proposición es verdadera, pues hay dos soluciones puramente imaginarias a esa ecuación que era insoluble en los reales (ver más adelante la unidad de sistemas construídos con números complejos).

Ya desde antiguo se notó que hay básicamente dos tipos de cuantificadores afirmativos mentales: el universal o general, que se representa verbalmente por "Todos", "Todo", "Cada uno", "Todos y cada uno", "Para cada", "Por cada", etc. y el particular o existencial, que se representa verbalmente por "Alguno", "Algunos" (con cuidado con la "s" del plural), "Hay", "Existe un", "Al menos uno", "Alguien", etc.

– Cuando se enuncia una condición o proposición abierta, el cerebro recorre los posibles sujetos de cierto conjunto referencial o universo del discurso, y si comprueba que cada uno de ellos cumple la condición, antepone el cuantificador universal a esa condición. Como ya vimos, el peligro está en sobregeneralizar, o sea en comprobar solamente con algunos casos, y luego lanzarse a afirmar la condición ya cuantificada universalmente. Por ejemplo, si veo que el 3 es primo, el 5 también, y el 7 también, me siento impulsado a afirmar que todos los impares son primos; si hubiera seguido hasta el 9 no habría cometido ese error. Si conozco dos o tres personas de otra nacionalidad u otra región del país que no me caen bien, es fácil lanzar una condena a todos los de esa nacionalidad o esa región, cometiendo una falacia de generalización inválida por no utilizar con cuidado el cuantificador universal.

En cambio, si parto del supuesto de que una proposición cuantificada universalmente es verdadera, por ejemplo porque la he comprobado en todos los casos o la he demostrado válidamente a partir de axiomas o postulados aceptados por todos, basta comprobar que el conjunto sobre el que se cuantifica no está vacío, para poder deducir válidamente que existe un elemento de ese conjunto que satisface la condición que aparece cuantificada universalmente.

Si no compruebo por separado que el conjunto sobre el que se cuantifica universalmente no está vacío, no puedo concluir nada. Aunque aceptara teóricamente que todas las aves fénix por definición resucitan de sus cenizas, no puedo concluir que hay al menos un ave fénix que resucita de sus cenizas.

– A veces el cerebro recorre los posibles sujetos del conjunto referencial o universo del discurso, y comprueba al azar que un elemento determinado cumple la condición dada. Entonces puedo cuantificar existencialmente esa condición. Veo por ejemplo que entre los números enteros el dos es primo y es par, y digo que hay un número primo par. No veo otros, pero por ejemplo, si hubiera mirado el -2, hubiera visto que también cumple la doble condición de ser a la vez primo y par. Pero eso no quita la verdad de mi afirmación cuantificada existencialmente: "Hay un número entero que es primo par", o "Existe por lo menos un número entero que es primo par", "Se da mínimo un entero primo par", etc.

En el lenguaje ordinario se suele decir: "Algunos cumplen", entendiendo que hay dos o más. En la simplificación lógica que se usa para determinar más precisamente el cuantificador existencial no se sobreentiende "dos o más", sino "uno o más", "al menos uno", "mínimo uno", etc. Hay que tener pues cuidado con esa "s" del plural en "algunos".

En el lenguaje ordinario cuando se dice que "algunos vinieron", se entiende que algunos no vinieron. Pero en la simplificación lógica que se usa para determinar más precisamente el cuantificador existencial no se sobreentiende que de "algunos sí" se deduzca que "algunos no". Hay que tener pues mucho cuidado con este modelo simplificado del cuantificador existencial que se usa en lógica y en matemáticas. El lenguaje ordinario es más complejo y sutil.

Puedo por ejemplo decir que: "Algunos enteros son primos pares", pues el +2 y el −2 lo cumplen; pero no puedo decir con verdad: "Algunos naturales son primos pares", pues el 2 es el único que lo cumple. Si digo: "Algunos números enteros tienen por lo menos dos divisores", eso no quiere decir que haya otros que tienen menos de dos. Los primos tienen cuatro, el +1 y el −1 tienen dos, y el cero tiene todos los que uno quiera; esto es así porque cualquier número entero n es divisor del cero: basta comprobar que $n \times 0 = 0$; por definición eso significa que el número n es divisor de otro: basta que haya algún entero que multiplicado por n dé el otro. En este caso "el otro" es cero, y el número que se necesita es el mismo cero (nadie ha dicho que tenga que ser distinto del otro). Por lo tanto, el cero también es divisor del cero, aunque no se pueda dividir cero por cero; una cosa son las relaciones y otra, las operaciones.

En particular, se puede ver claramente que la definición de la relación ". . . es divisor de. . ." incluye un cuantificador existencial:
"y es divisor de x si y sólo si existe por lo menos un z tal que $yz = x$".

— Las complicaciones empiezan cuando se combinan los cuantificadores con las negaciones: "No todos vinieron", "Todos dejaron de venir", "Es falso que algunos vinieron", "Algunos no vinieron", "Nadie vino", "No vino nadie", "No todos dejaron de venir", "No hay quien empiece", "Es falso que nadie empezó", etc. Esas combinaciones de cuantificadores con negaciones desafían al cerebro para descodificar adecuadamente esas frases tan complejas. Lo más importante es experimentar el poder del cerebro humano para entender esas sutilezas del lenguaje, y tratar de formarse un sistema conceptual simplificado que nos ayude a pensar mejor. Si para eso es útil escribir "Aes boca-arriba", y "Ees al revés": $\forall x$, $\exists y$, etc., está bien utilizar esos símbolos, pero no es necesario. Eso es sólo un sistema simbólico que puede ayudar o estorbar. Lo más importante es el sistema conceptual.

Pero eso no niega que los sistemas simbólicos son muy útiles para apoyar el razonamiento conceptual. Por ejemplo, desde la Edad Media se han utilizado las dos primeras vocales de "AFFIRMO" y "NEGO" (como se dice en latín "afirmo" y "niego") para expresar las frases cuantificadas. La "A" representa una frase afirmativa cuantificada universalmente, o "universal afirmativa", como "Todos vinieron" o "Cada uno cumplió" (también se puede decir que "Todos", "Cada uno", etc. son expresiones que representan el cuantificador universal afirmativo o de tipo "A"). La "I" representa una frase particular afirmativa, como "Alguien vino" o "Algunos cumplieron", llamada también existencial afirmativa, la "E" representa una frase universal negativa, como "Nadie vino" o "Ninguno cumplió", y la "O" una particular negativa, como "algunos no vinieron" o "Alguien no cumplió".

— Comencemos por la negación aplicada mentalmente **después** del cuantificador universal, pero que se enuncia verbalmente **antes** del mismo "No todos cumplen la condición"; "Es falso que cada uno cumpla la condición". El cerebro pasa fácilmente de "No todos vinieron" a "Alguien dejó de venir". Esa transformación es válida. Pero también el cerebro pasa fácilmente a decir "Algunos no vinieron". Pero esa no es una transformación válida, como se puede comprobar si uno se fija en la "s" del plural en "algunos". Basta con que uno sólo no haya venido para poder afirmar que no todos vinieron. No hacen falta dos o más. La transformación válida sería: "Hubo alguien que no vino", "Al menos uno no vino", "Mínimo uno dejó de venir", etc. Este cuantificador se llama "particular negativo" o "existencial negativo". Las frases que lo contienen se llaman particulares negativas, y se denotan por la letra "O".

— Tampoco sería válido concluir que "Algunos sí vinieron" a partir de que "algunos no vinieron". Ordinariamente se concluye así, pero en la simplificación lógica que estamos utilizando, "algunos no vinieron" es compatible con que nadie haya venido, y por lo tanto no se puede deducir que algunos sí vinieron.

— Estudiemos ahora la negación aplicada mentalmente **después** del cuantificador existencial, pero que se enuncia verbalmente **antes** del mismo. “No hay quien cumpla la condición”, “Es falso que alguien cumpla la condición”. El cerebro pasa fácilmente de ellas a: “Ninguno la cumple”, “Todos dejan de cumplirla”, o “De cada uno puedo decir que no la cumple”, etc. Esas transformaciones son válidas.

“Ninguno”, “Nadie”, etc. es pues la negación del cuantificador existencial, y se suele llamar “cuantificador existencial negado” o “cuantificador universal negativo”; las frases que lo contienen se llaman universales negativas y se denotan con la letra “E”.

— Nótese que en “No hay ninguno” se enuncia una doble negación, pero esa doble negación sirve más bien para enfatizar la negación que para eliminarla. Esta negación enfática es una peculiaridad del español que no se usa en otros idiomas. Si digo “Es falso que nadie vino”, esa doble negación sí se puede eliminar, y concluir: “Luego alguien vino”. Pero si digo “No vino nadie”, no puedo eliminar las dos negaciones y decir: “Luego alguien vino”. Hay que tener pues cuidado con la doble negación enfática para no confundirla con la negación del cuantificador existencial.

— La negación también puede enunciarse verbalmente **después** del cuantificador universal, lo que quiere decir que mentalmente se aplica a la condición **antes** de cuantificarla: “Todos dejan de cumplir”, “De cada uno puedo decir que no cumplió”. En este caso, la combinación es equivalente a la negación del cuantificador existencial o “universal negativo”: “Nadie”, “Ninguno”, etc. (Tipo “E”).

— La negación también puede enunciarse verbalmente **después** del cuantificador existencial, lo que quiere decir que mentalmente se aplica a la condición **antes** de cuantificarla: “Hay alguien que no cumple”, “Mínimo uno dejó de cumplir”, “Algunos no cumplieron”, etc. Este cuantificador se llama “particular negativo” o “existencial negativo”, y es distinto de la negación del existencial o “universal negativo”. Las frases existenciales negativas o particulares negativas se denotan con la letra “O”.

— Se puede jugar un juego llamado “ ¡A que no me contradice!”, para ver qué es lo mínimo que hay que afirmar para contradecir una proposición cuantificada. Yo digo: “Todo número entero tiene por lo menos cuatro divisores. ¡A que no me contradice!”. Usted debe decir algo que me contradiga, pero que no se vaya al otro extremo. Si dice: “Ningún número tiene cuatro divisores”, eso es demasiado; si dice: “Hay uno que no tiene sino dos”, eso sí me contradice. Yo digo: “Hay números primos pares. ¡A que no me contradice!”. Si Usted dice: “Hay primos que no son pares”, eso no me contradice. Si dice: “Ningún primo es par”, eso sí me contradice.

— Una vez que se distingan bien las contradictorias, que son las que se niegan mutuamente diciendo lo mínimo posible, de las contrarias, que en alguna manera parecen irse al otro extremo, es posible caer en la cuenta de que la contradictoria de la contradictoria es equivalente a la misma proposición original, y que la contraria de la contraria también es equivalente a la misma original.

— Parece que el cerebro tuviera programado un operador **C** que transformara una proposición cuantificada en su contraria, y otro operador **N** que transformara una proposición cuantificada en su negativa o contradictoria. Parece que el cerebro también puede considerar un operador idéntico **I** que no le hace nada a las proposiciones cuantificadas, de tal manera que la contraria de la contraria sea la misma original, es decir: $\mathbf{C} \circ \mathbf{C} = \mathbf{I}$, y que la negativa de la negativa (o sea la contradictoria de la contradictoria) sea la misma original, es decir: $\mathbf{N} \circ \mathbf{N} = \mathbf{I}$.

— ¿Pero qué será la contraria de la contradictoria? ¿Y la contradictoria de la contraria? ¿Dará lo mismo aplicar esos dos operadores **C** y **N** en cualquier orden a una proposición cuantificada?

— Convengamos en que la proposición de tipo I es la alterna de la de tipo A (a veces llamada “subalterna” de la A), y que la de tipo O es la alterna de la de tipo E. Así es posible pensar activamente esas transformaciones y comprobar que la contraria de la contradictoria (o sea la contraria de la negativa) es la alterna, y que la contradictoria de la contraria (o sea la negativa de la contraria) también es la alterna. Es como si además de los tres operadores **C, N, I,** el cerebro tuviera programado un cuarto operador **A** que transforma una proposición cuantificada en su alterna, de tal manera que $\mathbf{C \circ N = A}$ y $\mathbf{N \circ C = A}$.

– Con esos tres operadores de contradicción o negación **N**, de contrariación **C**, y de alternación **A**, más el operador idéntico o "monstruo mansito" **I** que no le hace nada a las proposiciones cuantificadas, es posible construir un grupo de cuatro operadores que se combinan en distintas formas sin salirse de esos cuatro operadores iniciales. Ejercitar esas transformaciones mentales es otro tipo de actividad que contribuye al desarrollo del pensamiento formal en los adolescentes. Para ello se podrían estudiar las transformaciones representadas en la Figura 2 y ejercitarlas mentalmente. Para completar la información, se puede ver también el artículo de Carlos E. Vasco "Dos nuevos grupos Piagetianos en la Lógica Elemental", ya mencionado arriba y citado en la bibliografía de esta primera unidad. Allí se estudia el grupo INAC formado por estos cuatro operadores sobre proposiciones cuantificadas.

OPERADORES SOBRE PROPOSICIONES CUANTIFICADAS

C Operador de contrariación que cambia una proposición cuantificada en su contraria.

A Operador de alternación que cambia una proposición cuantificada en su alterna.

N Operador de negación o contradicción que cambia una proposición cuantificada en su negativa o contradictoria.

I Operador idéntico que deja quietas las proposiciones cuantificadas.

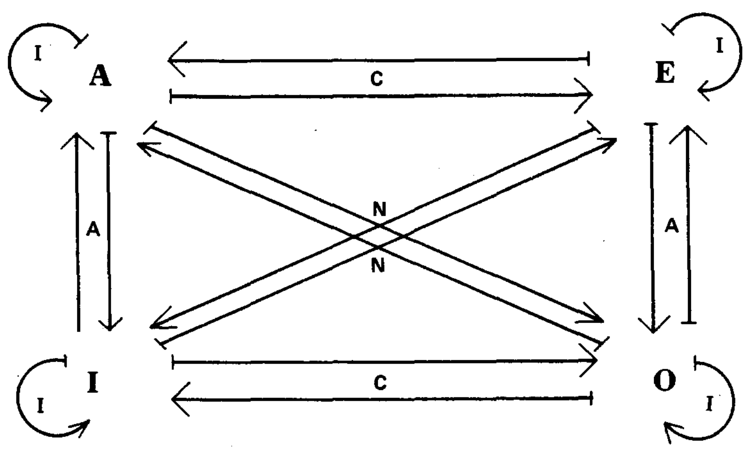


Figura 2: El grupo INAC

OBJETIVOS ESPECIFICOS

13. Dado un argumento para sustentar una afirmación o tesis, detectar si tiene supuestos o hipótesis explícitos u ocultos, si es directo o indirecto, si tiene uno o varios pasos y cuáles son.

14. Dado un paso de argumentación, detectar en qué regla de inferencia se basa la transición de un enunciado a otro, si esa regla es válida o no, y si está bien aplicada en ese caso particular o no.

15. Detectar esquemas de argumentación directa y estrategias para encontrar argumentos para apoyar una tesis.

16. Detectar esquemas de argumentación falaz o sofística y su empleo en la propaganda, la argumentación informal y aún en la formal.

CONTENIDOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Ya en la primera actividad se analizaron algunos episodios argumentativos para ver de qué enunciados y de qué pasos mentales estaban compuestos, y cómo esos pasos mentales a veces eran válidos y a veces no lo eran.

Distinguimos entre la certeza subjetiva que tenemos acerca de una hipótesis o de una conclusión, la verdad de esa hipótesis o de esa conclusión, y la validez o corrección de la argumentación que pasa de unas hipótesis a una conclusión, independientemente de la certeza y de la verdad de unas y otras.

Ensayamos a hacer disecciones analíticas de las argumentaciones, para detectar los eslabones de la cadena argumentativa, y vimos que cada eslabón consta de un paso mental y un enunciado que es el resultado de ese paso mental. El paso es el que puede ser válido o correcto, y el resultado el que puede ser verdadero. La argumentación es válida o correcta si todos y cada uno de sus pasos es válido correcto.

Generalmente el paso de uno a otro enunciado requiere que el proponente acuda a **otros enunciados anteriormente explicitados** por él, o a otros que estén **apenas implícitos,** llamados **supuestos.**

1) Juan es mayor que María.
2) María es mayor que Sebastián.
3) Luego Juan es mayor que Sebastián.

Aquí el paso 3) se salta a la conclusión con base en un enunciado implícito, que es el que expresa que la relación ". . . es mayor en edad que. . ." es transitiva, como debe serlo toda relación de orden.

Si la transitividad no se cumple, no es posible deducir 3) de 2). Tómese el siguiente ejemplo paralelo:

a) J es perpendicular a M.
b) M es perpendicular a S.
c) Luego J es perpendicular a S.

Dibújese un ejemplo en una hoja de papel, y se verá que siempre que a) y b) sean verdaderos, J es paralela a **S**, y no perpendicular. La relación no es transitiva. (Si se busca el modelo en la realidad y no en el dibujo, es posible que en la misma mesa o escritorio se encuentre el ejemplo de tres rectas, la primera perpendicular a la segunda, la segunda a la tercera, y la primera a la tercera. Pero el hecho de que eso se dé en un caso, no prueba la conjetura de que la relación sea transitiva; pero un sólo caso en el que no se dé la transitividad sí refuta esa conjetura). Supongamos ahora que a partir del enunciado 3) se da un cuarto paso:

4) Sebastián es menor que Juan.

En el paso del 3) al 4) hay otro enunciado implícito que expresa algo así como que las relaciones ". . . es mayor que. . ." y ". . . es menor que. . ." son recíprocas; dicho de otra manera, que de "a es mayor que b" se deduce que "b es menor que a", y viceversa. Esto parece obvio, pues el nombre de la relación recíproca es muy conocido; pero si el paso fuera de "Alberto es el suegro de Bernardo", el nombre de la relación recíproca de ". . . es suegro de. . ." puede no ser tan fácil de recordar.

Las hipótesis implícitas suelen ser "cosas que todo el mundo sabe", que parecen tan obvias que ninguno de los interlocutores piensa explícitamente en ellas; por lo menos el que propone el argumento cree que su interlocutor las sabe. Pero también pueden ser cosas que el proponente sabe que son falsas, pero supone que el interlocutor las cree, y utiliza esas hipótesis implícitas para engañarlo. Así suelen ser los argumentos de los vendedores, de los estafadores, etc. Para probar que la pomada que venden quita el dolor muscular, miran si la persona es rica o pobre, y le dicen que es fabricada en Suiza o que la preparan los indios amazónicos. ¿Cuáles son las hipótesis implícitas en esa argumentación? Así como la argumentación para convencer al cliente de que compre el producto puede ser directa, así sea inválida, también puede ser indirecta, en el sentido de que si no compra el producto, le pasa algo grave. "Si Ud. no compra este seguro de vida, se va a morir y a dejar a su familia en la ruina".

En ese caso la hipótesis implícita es lo que la persona piensa: "Yo no quiero dejar a mi familia en la ruina". Si piensa en no comprar el seguro, esto lo llevaría a una contradicción con esa hipótesis implícita. Luego debe comprarlo. ¿Es válida esta argumentación?

La argumentación, directa trata de dar argumentos que lleven directamente a la conclusión, mientras que la indirecta parte de la suposición de que la conclusión es falsa, para llevar a una contradicción. En la actividad siguiente estudiaremos más despacio ese tipo de argumentación.

Por ahora concentrémonos en la argumentación directa.
Supongamos que está clara la tesis que queremos probar.
Una primera tarea es la de encontrar argumentos para probarla. Si sabemos cuáles son las hipótesis de las que partimos, como suele suceder en los teoremas acerca de los sistemas geométricos, numéricos, analíticos, etc., la tarea se simplifica un poco, pues por lo menos se sabe que hay que utilizar esas hipótesis para iniciar los argumentos que pretenden probar la tesis. Aun así, suele ser difícil saber cómo se empieza. En ese caso se pueden ensayar casos particulares, para ver por qué lo que se afirma siempre se cumple.

Otra estrategia es empezar en reversa de la conclusión que se quiere probar, para ver si así se acerca uno un poco más a las hipótesis, y puede completar la cadena argumentativa que permita pasar de las hipótesis a la conclusión.

Por ejemplo, supongamos que queremos probar que la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°. Ya hemos "bailado el triángulo" pintándolo en el suelo y barriendo cada ángulo con el pie, y nos hemos encontrado mirando para el otro lado al regresar al punto de partida. Ahora queremos probar que eso no es una coincidencia, sino que eso siempre tiene que pasar en la geometría euclidiana.

Sabemos que por un punto dado se puede trazar una paralela a una recta dada. Ensayamos como recta la de la base y pasamos una paralela por el vértice superior.

Recordemos una de las propiedades de las paralelas: que los ángulos alternos internos entre paralelas son iguales de amplios (ver Figura 3).

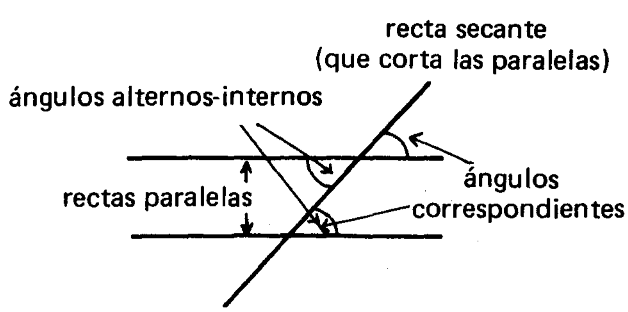


Figura 3

Si en la Figura 4 miramos ahora los tres ángulos formados bajo la paralela superior, y los comparamos con los tres ángulos interiores del triángulo, vemos que efectivamente las amplitudes de los ángulos alrededor del vértice que están bajo la nueva recta paralela tienen que sumar 180°, y que corresponden precisamente a las amplitudes de los tres ángulos interiores del triángulo.

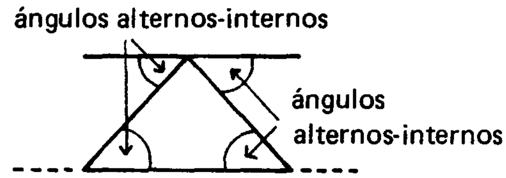


Figura 4

Si hubiéramos ensayado a trazar la paralela al lado izquierdo que pasa por el vértice derecho (o la paralela al lado derecho que pasa por el vértice izquierdo) y hubiéramos prolongado la base, también hubiéramos podido probar el teorema, aunque ahora tendríamos que haber recordado otra propiedad de las paralelas: que los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales de amplios.

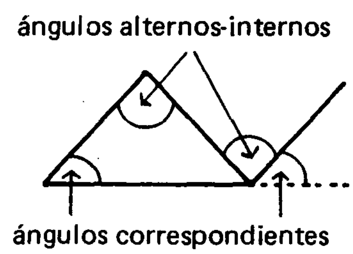


Figura 5

Lo difícil es que se le ocurra a uno trazar las paralelas. Pero si habíamos hecho el ejercicio de recortar varios triángulos en papel, y de cortarles dos de las puntas y tratar de armar un sólo ángulo con ellas y la punta restante, tal vez se nos hubiera ocurrido más fácilmente trazar la paralela a un lado por el vértice opuesto.

En las argumentaciones de la vida ordinaria no es tan fácil saber cuáles son las hipótesis, ni cuáles pueden ser las primeras jugadas del diálogo argumentativo.

Pero generalmente las argumentaciones suelen ser cortas, de uno o dos pasos, y esos "islotes argumentativos" son más fáciles de recorrer que las demostraciones largas de la geometría o del álgebra elemental.

Tomemos un ejemplo breve de la vida real:

1. Si yo hubiera roto el florero, le hubiera echado la culpa a mi hermanito.
2. Pero él es el que me está echando la culpa a mí.
3. Luego él fue el que rompió el florero.

La primera hipótesis explícita la podemos aceptar, pues se trata nada menos que de una confesión del mismo proponente: "Por evitarme un castigo soy capaz de decir una mentira y hacer castigar a mi hermanito".

(¿Qué tal?)

La segunda hipótesis parece ser cierta en el caso de que se trata, pues los papás pueden comprobar que efectivamente el hermano menor está acusando al mayor.

Pero hay una hipótesis oculta, que es probable que sea falsa: que el hermano pequeño es igual de hipócrita al grande.

Y a propósito, el grande no cae en la cuenta de que apenas pronuncia la frase 3, ya le está echando la culpa al hermanito, luego por la hipótesis 1 él mismo se condena por su propia boca: él fue el que rompió el florero. Esta habilidad para recordar qué fue lo que se dijo, para no dejar que la persona se contradiga impunemente, para adivinar las hipótesis ocultas y ver si son verdaderas o falsas, y para detectar los pasos argumentativos inválidos, es lo más valioso que se puede aprender en estas actividades de lógica. Por eso deben estar distribuídas durante el año escolar, y ojalá no sólo en matemáticas sino en todas las áreas, las charlas del director del grupo, y las discusiones acerca de los conflictos sociales, deportivos y disciplinarios.

OBJETIVO ESPECIFICO

17. Analizar el esquema de argumentación indirecta o por el absurdo y aplicarlo a enunciados difíciles de demostrar directamente.

CONTENIDOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Ya vimos en la actividad anterior que si uno quiere demostrar una tesis T, uno puede partir de las hipótesis, de los postulados o axiomas, y de las premisas, para tratar de llegar directamente a la conclusión (que es la misma tesis que se quería demostrar). Vimos que también se puede tratar de demostrar la tesis indirectamente, llevando paso a paso a quien la niegue hasta hacerlo caer en una contradicción o un absurdo. Por eso llamamos "argumentación directa" a la que pasa directamente de las premisas a la conclusión, y "argumentación indirecta" o "por el absurdo", o también "reducción al absurdo" a la otra manera de probar una tesis indirectamente, o sea a través de llevar a un absurdo la negación de la tesis que se quería probar.

Tal vez la primera vez que se utiliza la prueba indirecta es en 8º grado, en donde se trata de probar que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado, o lo que es equivalente, de demostrar que la raíz cuadrada de 2 no puede ser la razón de dos números naturales. Por eso decimos que $\sqrt{2}$ es "irracional" (o sea "no racional").

Para probarlo se suponía que $\sqrt{2}$ era racional, o sea que sí era la razón entre dos números naturales n y m; de allí se partía para mostrar que la unicidad de la descomposición en factores primos fallaría, pues en un lado el exponente de 2 sería par y en el otro impar. Eso sería un absurdo, luego el oponente no tiene más remedio que aceptar que la suposición de que $\sqrt{2}$ sí era racional era falsa, luego la tesis inicial era verdadera.

En los libros tradicionales se prueba la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos partiendo también de la negación de la tesis, la que se agrega ahora como la suposición adicional de que $\sqrt{2}$ sí es racional, y que se expresa con la fracción m/n, en donde m y n son primos entre sí, o sea que no pueden tener divisores comunes distintos del $+1$ y el -1.

Después de una serie de manipulaciones que exigen saber que el cuadrado de un par es par, y que si el cuadrado es par, el número original también lo es, se llega a que 2 es divisor de m y también de n, lo que contradice la suposición orignal de que m y n eran primos entre sí.

Esa contradicción es suficiente para que quien proponga que la raíz cuadrada de 2 es racional, se sienta totalmente refutado y tenga que aceptar que no lo es.

Pero este esquema mental de la argumentación indirecta no es tan sencillo como el de la argumentación directa, ni el cerebro queda tan convencido de la demostración indirecta como de la directa. Es cuestión de familiaridad con el esquema, de práctica de demostración de teoremas por ese método indirecto, y de discusión sobre la convicción o certeza intuitiva que genera el argumento por reducción al absurdo.

En la práctica se trata de demostrar una tesis T a partir de ciertas hipótesis, por ejemplo H, J, K.

Después de algunos ensayos, fracasamos en encontrar una manera de probar directamente la tesis de la manera usual, o sea partiendo de esas tres hipótesis hacia adelante, y de T hacia atrás, hasta llegar a empatar correctamente una cadena deductiva que demuestre T a partir de H, J, K. Al fracasar con la prueba directa, intentamos probarla por el absurdo. Comenzamos por negar T, y añadimos esa suposición $\neg$T como una nueva hipótesis a las tres hipótesis que ya teníamos. Intentamos ahora partir de esas cuatro hipótesis H, J, K, $\neg$T, para ver si logramos llegar a una contradicción. Lo que haríamos en este caso sería partir de algunas de las cuatro hipótesis, por ejemplo de H, J, y $\neg$T para probar una proposición S, y luego partir de otras, por ejemplo J, K y $\neg$T para probar $\neg$S, con lo que habríamos llegado a la contradicción S y $\neg$S; o también podríamos partir de dos de las antiguas hipótesis y de la nueva $\neg$T, por ejemplo partir de H, J, $\neg$T, para llegar a contradecir la otra hipótesis, en este caso K; para ello, buscamos deducir $\neg$K a partir de H, J, $\neg$T, y como ya teníamos K, llegamos a la contradicción de que K y $\neg$K. Luego al menos una de las cuatro hipótesis era falsa. No eran ni H, ni J, ni K, luego era $\neg$T. Pero si $\neg$T resultó falsa, es porque T era verdadera.

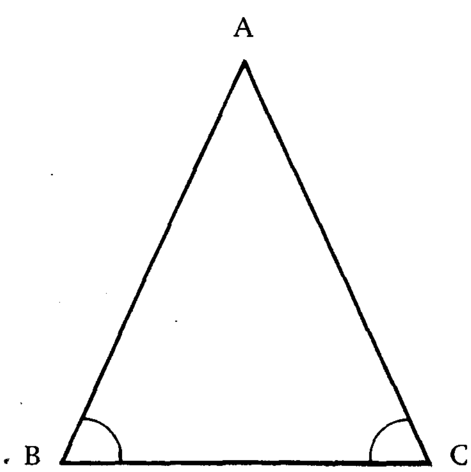
Es pues un esquema complejo y que requiere cuidado y atención, especialmente porque en los libros no aparecen los últimos pasos, sino que cuando se llega a la contradicción (en nuestro caso a que S y $\neg$S, o a que K y $\neg$K), el autor se da por satisfecho y no escribe explícitamente los últimos pasos de la reducción al absurdo; así el lector queda más inseguro todavía acerca del valor probatorio de esa demostración indirecta.

Por ejemplo, la sexta proposición del libro primero de los elementos de Euclides supone que se tiene un triángulo con dos ángulos iguales de amplios, o sea un triángulo isógono; se trata de probar que ese triángulo isógono tiene que tener también iguales de largos los dos lados opuestos a esos dos ángulos iguales de amplios, o sea que es un triángulo isósceles.

Supongamos que aceptamos el siguiente postulado de congruencia de triángulos, que llamaremos P. (A veces lo llaman "LAL" por hablar de Lado-Angulo-Lado):

P: Si tengo un triángulo ABC, y si luego me dan un segundo triángulo XYZ que tenga dos lados respectivamente iguales de largos a dos de los lados del primer triángulo, y si además el ángulo comprendido entre esos dos lados del segundo triángulo es igual de amplio al ángulo comprendido entre los dos lados correspondientes del primer triángulo, el segundo triángulo es congruente con el primero, o sea que cae perfectamente bien sobre el primero después de una serie de traslaciones, rotaciones o reflexiones. Por lo tanto, el segundo triángulo XYZ tiene en realidad los tres lados iguales de largos a los tres lados del primer triángulo ABC, y también los tres ángulos iguales de amplios, la misma área, etc.

Dibujemos un triángulo isósceles genérico. Pongámosle los letreros A, B, C, a las puntas o vértices, y hablemos del triángulo ABC:



Tenemos pues como primera hipótesis el postulado P.

Tenemos además una segunda hipótesis que podemos llamar H.

H: El triángulo ABC es isósceles, o sea tiene dos ángulos iguales de amplios; en nuestro caso genérico:

H: amplitud (ABC) = amplitud (ACB).

Es difícil probar directamente la tesis de que:

T: longitud (AB) = longitud (AC).

Supongamos entonces la negación de esa tesis:

$\neg$T: longitud (AB) $\neq$ longitud (AC),

y agreguémosla como una tercera hipótesis a P y H.

De esa tercera hipótesis deducimos que un lado es más largo que el otro. Supongamos que el más largo es AB. (Si no fuera AB, seguiríamos adelante en la misma forma partiendo de que el más largo era AC).

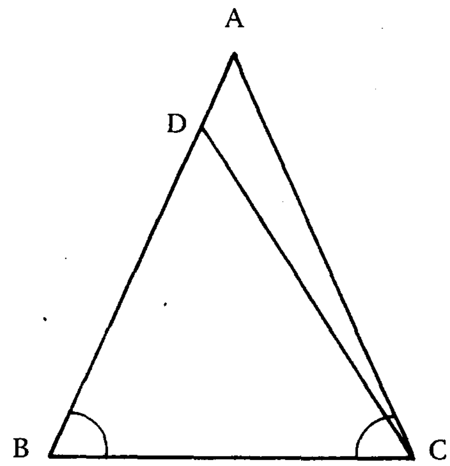
Q: longitud (AB) > longitud (AC).

Como AB es más largo, podemos marcar en AB un punto D de tal manera que BD sea igual de largo al lado más pequeño AC, y tiene que sobrar un segmento DA, por pequeño que sea (¿Quién nos garantiza que siempre podemos hacer esa especie de "resta de segmentos"? Esto parece obvio, pero Euclides se toma el trabajo de demostrarlo en una proposición anterior).

R: longitud (BD) = longitud (AC).

Unamos ahora D con C para formar el nuevo segmento DC. (El primer postulado de Euclides nos garantiza que siempre podemos unir dos puntos diferentes por medio de un segmento de recta). Así tenemos un nuevo triángulo DCB, que es más pequeño que ABC, y por lo tanto:

S: DCB no es congruente con ABC.
Supongamos que el dibujo queda así:



Miremos ahora el triángulo BDC que se formó a la izquierda, y el triángulo original ABC, para ver si podemos aplicar la hipótesis P, y así contradecir la conclusión intermedia S.

Comparamos los dos lados BD y BC de BDC, con los lados AC y CB de ABC. Vemos que cumplen las condiciones de P, pues la proposición R garantiza que BD es igual de largo a AC, y CB es el mismo segmento BC, y por lo tanto CB y BC son iguales de largos; además, por la hipótesis H sabemos que el ángulo DBC es lo mismo de amplio que el ángulo ACB, pues la amplitud de un ángulo no depende de la longitud de los segmentos que lo limitan, y por eso podemos decir que:
amplitud (ACB) = amplitud (DBC).

Por lo tanto sí podemos aplicar la hipótesis P, y concluir que el triángulo BDC es congruente con el triángulo ABC; pero eso sería $\neg$S:
$\neg$S: DCB es congruente con ABC.

Habríamos probado que el triángulo más pequeño sí era congruente con el más grande, o sea S y $\neg$S, y eso es un absurdo.

Luego no puede ser verdad que las hipótesis P, H, $\neg$T sean todas tres verdaderas; como aceptamos P y H, la que es falsa tiene que ser $\neg$T, luego T es verdadera, y esa era la tesis que queríamos probar.

Trate ahora Usted mismo de probar por el absurdo la proposición recíproca a la sexta del libro primero de los Elementos de Euclides: Suponga que tiene un triángulo con dos lados iguales de largos, o sea un triángulo isósceles. Pruebe que ese triángulo tiene que tener también iguales de amplios los dos ángulos opuestos a esos dos lados iguales de largos, o sea que el triángulo es isógono.

Procure explicitar todos los pasos, llegar a una contradicción, y seguir hasta el final de la argumentación. Es una manera efectiva de apropiarse del esquema de demostración por el absurdo, que tanta importancia tiene en las matemáticas, y que desarrolla tan efectivamente las habilidades superiores del pensamiento formal. Nada menos que la habilidad de razonar formalmente sobre proposiciones, independientemente de si son verdaderas o falsas, y llegar a conclusiones interesantes.

Compárese el esquema de reducción al absurdo con la frase: "Si T no es verdad, yo soy Napoleón".

Por una parte, es obvio que yo no soy Napoleón: $\neg N$. Por otra parte, en caso de que Ud. suponga $\neg T$, se seguiría N, y tendríamos la contradicción de que a la vez N y $\neg N$; luego no se puede suponer $\neg T$, sino T.

En forma parecida demuestran los matemáticos que el conjunto vacío $\emptyset$ está contenido en cualquier conjunto A, vacío o no vacío.

Sea T esa tesis. Supongamos la negación de esa tesis $\neg T$; es decir, supongamos que $\emptyset$ no está contenido en A. Luego existe por lo menos un elemento x que está en el vacío pero no en A (por definición de la relación "está contenida en"). Se sigue que existe por lo menos un elemento x que está en el vacío, y que existe por lo menos un elemento (ese mismo) que no está en A (por la distribución del cuantificador existencial sobre la "y"). Por la regla de desprendimiento de cualquiera de las dos proposiciones que estén conectadas por una "y", concluímos que existe por lo menos un elemento x que está en el conjunto vacío. Pero esto contradice la definición misma de conjunto vacío, que exige que en $\emptyset$ no pueda vivir ningún elemento. Por lo tanto, la premisa auxiliar $\neg T$ es inaceptable, y hay que aceptar la tesis T.

Para entender esta demostración, es decir, no sólo para repetirla de memoria o para afirmar dogmáticamente que el conjunto vacío está contenido en todos los conjuntos, es necesaria una buena dosis de pensamiento abstracto y de razonamiento formal. Es de esperar que los alumnos que, guiados por un buen profesor, ducho él mismo en el pensamiento formal, hayan seguido durante todo el 9o. grado las propuestas y actividades de esta unidad, tengan ya al fin del año las habilidades de pensamiento necesarias para estas y otras muchas acrobacias intelectuales igualmente importantes y satisfactorias.

Unidad II

SISTEMAS CON NUMEROS REALES

Introducción

Esta unidad continúa desarrollando los sistemas con números reales cuyo estudio se inició en octavo grado. El propósito principal es el de ofrecer oportunidades para que los estudiantes incrementen el desarrollo de procesos y habilidades de pensamiento, para completar su formación integral, y para que adquieran conocimientos básicos sobre algunas álgebras y sobre análisis matemático, de modo que les sean útiles y los motiven y habiliten para continuar aprendiendo.

En consecuencia, las actividades que se proponen, aún con materiales muy sencillos, buscan desarrollar lo que llamamos álgebra mental, álgebra verbal y álgebra simbólica. En la lectura introductoria a la unidad 2 de octavo grado se expusieron estos conceptos. El álgebra mental tiene que ver con la construcción, coordinación, organización, "reversación" y manejo mental de los conceptos y con la posibilidad de emplearlos para resolver problemas sin recurrir todavía a la escritura de símbolos. Esta actividad mental es más importante y útil que la aplicación puramente mecánica de fórmulas para resolver ejercicios. El álgebra verbal tiene que ver con la expresión del álgebra mental a través del lenguaje usual o a través del lenguaje matemático. La comunicación verbal ayuda a precisar las ideas y su organización. Es pedagógicamente recomendable que, por lo menos al principio, se permita a los estudiantes comunicar sus ideas con sus propios recursos de lenguaje y que el maestro y los compañeros les ayuden a precisarlo y a hacerlo más riguroso y universal. El álgebra simbólica está más relacionada con la manipulación de símbolos y de fórmulas para obtener determinados resultados. Ha sido una meta buscada por maestros y estudiantes durante muchos años, pero lograda sólo por una minoría, tal vez porque ni el álgebra mental ni el álgebra verbal han sido trabajadas como propósitos explícitos de la educación matemática, al menos no por la mayoría de los profesores.

Cuando en el primer párrafo de ésta introducción se mencionan algunas álgebras, además de las álgebras mental, verbal y simbólica, se hace relación también al álgebra de números reales y al álgebra de funciones. Cuando el álgebra usual se usa como herramienta simbólica para el sistema conceptual de los números reales con sus operaciones y relaciones, los términos como x, r^2, $\sqrt{a^2 + b^2}$, etc., representan números reales todavía no determinados. Pero cuando el álgebra se usa como herramienta simbólica para el sistema conceptual de las funciones sobre números reales con sus operaciones y relaciones de orden superior, los términos como x, x^2, $\sqrt{x^2 + y^2}$, etc., representan funciones de una o dos variables (en este caso la función idéntica, la función cuadrado, la función valor absoluto o distancia de (x, y) al origen, etc. Aún cuando en el trabajo práctico se pase inadvertidamente de la una a la otra, hay que distinguirlas para poder aplicar coherentemente los códigos de manejo de los símbolos como apoyos al manejo conceptual y no como un mero juego mecánico ininteligible.

Al principio de la unidad se retoma la reflexión sobre las relaciones de conmensurabilidad y de inconmensurabilidad iniciada en el grado anterior. A partir de esa reflexión se construyen nuevos operadores reales como el número áureo y su inverso.

Se explicitan algunos tipos de utilización de los símbolos algebráicos y se desarrollan actividades para avanzar hacia el manejo de los operadores unarios y de las operaciones binarias con números reales todavía no determinados. Otro aspecto importante es el relacionado con la formulación, análisis y solución de problemas. La unidad termina con actividades que hacen ver la necesidad de construir nuevos números y nuevos sistemas numéricos para trabajar problemas cuya solución no es posible en los sistemas numéricos estudiados en la Educación Básica.

El tiempo que se dedique al desarrollo de la unidad y el grado de profundidad con que se aborden los contenidos, dependen de factores propios de cada grupo y de cada profesor. Algunos grupos necesitarán más tiempo y otros menos. Algunos profesores recortarán temas y otros los ampliarán. La evaluación será un buen auxiliar para que se tomen las decisiones más convenientes.

Objetivos generales

- Incrementar el desarrollo de procesos y de habilidades de pensamiento que favorezcan el desarrollo de la mente y el acceso a principios básicos de álgebra y de análisis matemático.
- Proponer y emplear recursos didácticos que permitan expresar, recrear y representar conceptos matemáticos.
- Profundizar en el conocimiento de los números reales, de las operaciones y de las relaciones que surgen en los sistemas que se forman con ellos.
- Avanzar en la búsqueda de procedimientos para la formulación y solución de problemas con números reales.
- Reconocer la existencia de problemas cuya solución rebasa los sistemas construídos con números reales.
- Integrar temas tratados en los grados anteriores sobre relaciones, operadores y funciones.
- Apoyar procesos de participación de los alumnos, de discusión de los temas, de autoevaluación y de evaluación colectiva.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

18. Afianzar los conceptos de conmensurabilidad y de inconmensurabilidad como relaciones entre longitudes.
19. Avanzar en el conocimiento de los reales como operadores que amplían o reducen longitudes, o que trasladan la recta real.
20. Analizar el empleo de algunos símbolos para representar números todavía no determinados y para representar operaciones o transformaciones y relaciones.
21. Articular el paso de las operaciones binarias con números reales ya determinados a operaciones binarias con números reales todavía no determinados.
22. Incrementar habilidades para ubicar en una recta, primero mentalmente, y luego en una gráfica, los posibles valores de un número real todavía no determinado.

CONMENSURABILIDAD - INCONMENSURABILIDAD

Uno de los problemas que ha tenido que resolver la humanidad a través de los siglos es el de medir. Los avances científicos y tecnológicos le han permitido progresivamente medir mayor número de magnitudes y hacerlo cada vez con mayor exactitud.

La historia de las acciones y los acuerdos realizados para la definición de la longitud de un metro y para la elaboración y adopción de los patrones correspondientes, permite analizar algunos avances logrados, por ejemplo, respecto de la precisión.

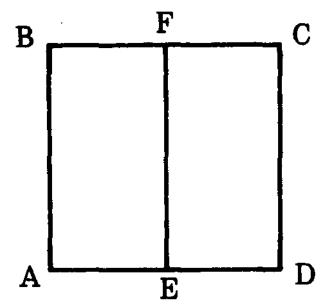
En la base de esas actividades de medición cada vez más precisa, hay conceptos importantes que se trabajaron en 8º grado y que conviene recordar y complementar. Son los conceptos de longitudes conmensurables y de longitudes inconmensurables.

Partimos de la idea de que, en la práctica, todas las longitudes son medibles, es decir, mensurables. Consideramos la mensurabilidad de una longitud como la posibilidad de ser medida, es decir: sometida a medición.

Aceptado ese postulado vienen otras cuestiones importantes: ¿cuáles son las unidades, los instrumentos y los procedimientos empleados en la medida de las longitudes?

En forma similar a como se trabajó el tema en el 8º grado, en la medición de una longitud por medio de otra se toma como unidad una de las longitudes o algún múltiplo o algún submúltiplo de ella; como instrumentos: regletas, o polígonos recortados en papel o cartulina y como procedimientos la comparación por superposición en algunos casos y en otros por yuxtaposición.

Establecidos esos criterios podemos proponer y comentar algunas actividades orientadas a reforzar los conceptos que se tienen sobre la relación de conmensurabilidad y sobre la inconmensurabilidad entre longitudes.

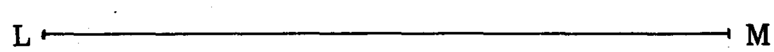


Por medio de la línea $\overline{EF}$ el cuadrado ABCD está dividido en dos rectángulos congruentes AEFB y EDCF.

Verifiquemos la conmensurabilidad práctica de las longitudes a partir de algunas líneas del cuadrado y de los rectángulos que acabamos de mencionar. En esta actividad vamos a hacer las mediciones empleando copias de los polígonos en papel; por ahora no empleamos ni reglas ni cintas graduadas.

Es posible encontrar o medir el perímetro del cuadrado empleando como unidad la longitud de uno de los lados. Con varias copias del cuadrado se puede verificar si la longitud de una línea dada es igual a la suma de las longitudes de sus lados; también se puede determinar sobre una recta dada, una longitud igual al perímetro del cuadrado. Hagamos dos ejercicios sencillos:

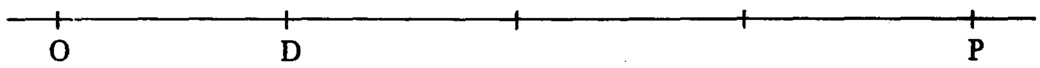
1) Verificar si la longitud del segmento de recta $\overline{LM}$ es igual a 4 veces la longitud de uno de los lados del cuadrado (por ejemplo la de $\overline{AD}$).



La respuesta es NO. Su longitud es 3 veces la del lado $\overline{AD}$.

2) Determinar sobre la recta un segmento de longitud igual al perímetro del cuadrado ABCD.

Respuesta:



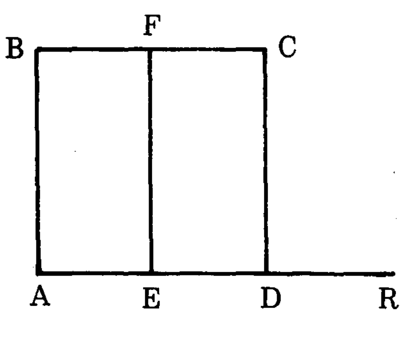
Sabemos que es posible resolver ambos ejercicios. Lo importante es observar que tanto la longitud del segmento $\overline{LM}$ como la de $\overline{OP}$ (que es igual al perímetro del cuadrado) resultaron ser múltiplos de la longitud del lado, y que ésta última longitud se tomó como unidad para medir las longitudes mayores.

Decimos que podemos medir exactamente la longitud del segmento $\overline{LM}$ y el perímetro, utilizando como unidad de medida la longitud del lado. Sea μ = longitud ($\overline{AD}$). Entonces la medida de la primera es 3μ y la de la segunda es 4μ.

Decimos que la longitud de $\overline{LM}$ es conmensurable con la de $\overline{AD}$, y también que el perímetro del cuadrado ABCD es conmensurable con la longitud de cualquiera de sus lados.

En el mismo cuadrado ABCD prolonguemos ahora la base $\overline{AD}$, y marquemos un punto R de tal manera que $\overline{AD} = \overline{ER}$

Tratemos de medir la longitud de $\overline{AR}$ utilizando de nuevo como unidad de longitud la del lado $\overline{AD}$, que llamamos μ.



Encontramos que $\overline{AR}$ no puede medirse exactamente, o sea que $\overline{AR}$ no contiene un número entero de veces la unidad μ.

En ese caso se recurre al empleo de submúltiplos de la unidad μ.

Como $\overline{AE} = \overline{ED}$, podemos tomar como nueva unidad μ' la longitud de $\overline{AE}$.

Ahora tenemos que la longitud del lado $\overline{AD}$ es exactamente $2\mu'$, y la de $\overline{AR}$ exactamente $3\mu'$.

Un submúltiplo de la longitud del lado $\overline{AD}$ nos ha permitido medir exactamente tanto a $\overline{AD}$ como a $\overline{AR}$.

Decimos que la longitud de $\overline{AR}$ es conmensurable con la de $\overline{AD}$, aunque la primera no sea exactamente medible con la de $\overline{AD}$ utilizada directamente como unidad.

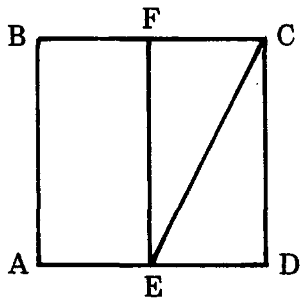
Equivalentemente podemos decir que la longitud de $\overline{AR}$ es 3/2 de la de $\overline{AD}$ lo que abreviamos: $\overline{AR} = 3/2\ \overline{AD}$, o sea que las podemos relacionar por medio de un número racional.

También podemos decir que 3 veces la de $\overline{AD}$ es exactamente igual a 2 veces la de $\overline{AR}$ lo que abreviamos: $2\ \overline{AR} = 3\ \overline{AD}$.

(Técnicamente habría que distinguir entre el segmento $\overline{AD}$ y la longitud del segmento $\overline{AD}$, $|\overline{AD}|$, y escribir $|\overline{AR}| = 3/2\ |\overline{AD}|$ y $2\ |\overline{AR}| = 3\ |\overline{AD}|$. El profesor decidirá el grado de precisión notacional que quiera exigir a sus alumnos, ojalá a través de discusiones con ellos y de comparaciones entre las formas propuestas de notación que los alumnos propongan y las que el profesor y los textos utilicen).

De los casos analizados y de muchos otros se llega al acuerdo de que cuando dos longitudes se pueden medir exactamente empleando una de ellas o alguno de sus submúltiplos como unidad y obteniendo múltiplos enteros de ella, entonces se dice de esas dos longitudes que son conmensurables. También se puede decir que entre esas dos longitudes existe la relación de conmensurabilidad, o que la una es conmensurable con la otra.

Volvamos sobre el cuadrado ABCD y tracemos una de las diagonales del rectángulo EFCD.

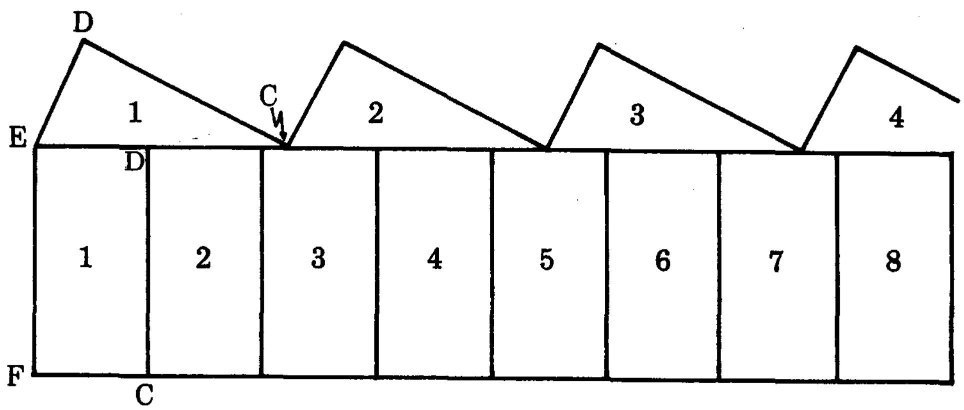


¿Será conmensurable la longitud de la diagonal $\overline{EC}$ del rectángulo con la longitud del lado $\overline{ED}$ del mismo rectángulo?

Se pueden usar copias del triángulo ECD recortadas en papel.

Si se comprueba que la longitud de la diagonal $\overline{EC}$ no es múltiplo de la longitud del lado $\overline{ED}$, entonces se busca un múltiplo de la longitud de la diagonal que coincida con algún múltiplo de la longitud del lado.

La figura siguiente indica una forma de hacerlo.



Si se continúa el ejercicio, se comprueba que 7 veces la longitud de la diagonal es aproximadamente igual a 16 veces la longitud del lado. Esto permite afirmar que $7\overline{EC} \doteq 16\overline{ED}$. (Recordemos que el símbolo $\doteq$ lo hemos utilizado para expresar la relación ". . . es aproximadamente igual a. . .") Si la longitud de la diagonal $\overline{EC}$ se simboliza por d y la del lado $\overline{ED}$ se simboliza por ℓ., se puede afirmar: $7d \doteq 16\ \ell$, de donde se deduce que: $d \doteq 16\ (\ell/7)$. Tenemos entonces que la longitud de la diagonal d, es aproximadamente igual a dieciseis veces un séptimo de la longitud ℓ. Si hacemos $\ell/7 = u$ podemos escribir: $d = 16u$. En esa forma se consigue medir aproximadamente la longitud d con otra unidad que es un séptimo de la unidad inicial ℓ.

Si $d = 16\ (\ell/7)$, entonces $d = (16/7)\ \ell$. Si efectuamos la división 16/7 y aproximamos 57 diezmilésimas a 6 milésimas, encontramos que $d = 2.286\ \ell$. Obtenemos así el operador 2.286 que aplicado a la longitud del lado ℓ produce la longitud de la diagonal d. Si tomamos como nueva unidad u' una milésima de ℓ,
$\ell = 1000\ u'$ y $d = 2286\ u'$.

En la práctica la medición ha sido posible y se puede afirmar que las dos longitudes en cuestión son conmensurables. Pero hay que anotar algo importante: estrictamente hablando se puede probar teóricamente que la longitud de la diagonal de este rectángulo no es múltiplo de la longitud del lado $\overline{ED}$ ni de alguno de sus submúltiplos. La conmensurabilidad de la diagonal con el lado del rectángulo que obtuvimos utilizando un séptimo del lado como unidad, se obtuvo por una aproximación. Al hacer la gráfica más cuidadosamente se puede apreciar que las coincidencias de los extremos no son exactas. Para resolver problemas con fines prácticos hay que utilizar muchas veces ese tipo de aproximaciones.

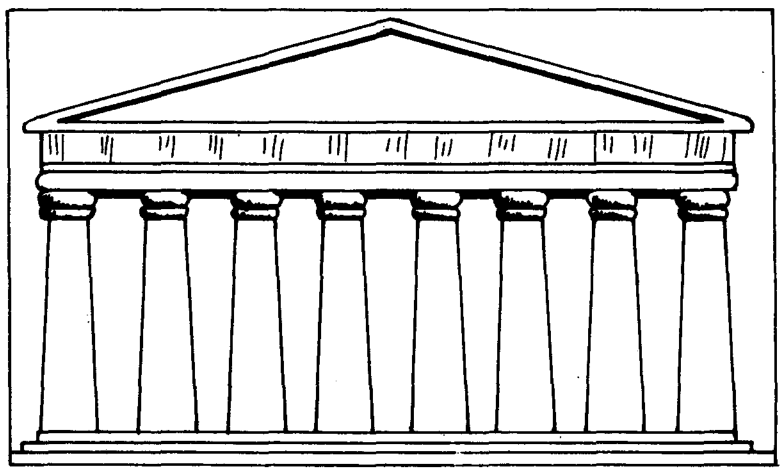
Pero en el trabajo teórico, en condiciones ideales, podemos prescindir de esa necesidad de aceptar aproximaciones y exigir que la conmensurabilidad de dos longitudes tenga que ser exacta. Si insistimos en ese rigor teórico, podemos demostrar que hay parejas de longitudes que no se pueden medir una con la otra, ni aún utilizando submúltiplos muy pequeños de una de ellas como unidad. Esto se expresa diciendo que las longitudes en cuestión son inconmensurables. Con esa exigencia la diagonal del rectángulo EFCD y su lado $\overline{ED}$ son un ejemplo de dos longitudes inconmensurables.

Formulemos unas conclusiones que pueden servir para animar nuevas discusiones sobre el tema:

- En la práctica, las operaciones de medición que realizamos permiten afirmar que entre dos longitudes existe siempre la relación de conmensurabilidad. Las mediciones son, en general, aproximaciones, por muy refinados que sean los instrumentos y las técnicas empleadas. El reto que se afronta cada vez, es el de obtener muy buenas aproximaciones y reducir el margen de error.
- En la teoría, si se exigen condiciones ideales de precisión para la solución analítica de los problemas, nos encontramos con casos en los cuales la medida de la longitud no puede hacerse con un número entero de submúltiplos de la unidad inicial, por pequeños que sean. Esto obliga a expresar la longitud mediante un número irracional (o mediante un decimal no periódico). En esos casos se dice que las longitudes en cuestión son inconmensurables.

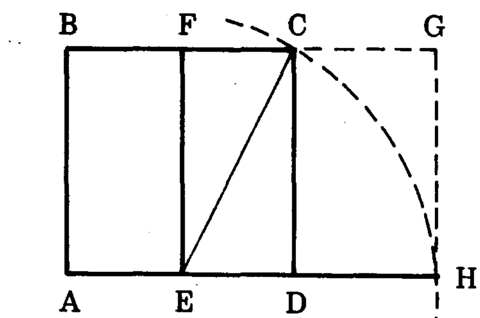
OTROS OPERADORES REALES

El interés por las mediciones exactas está relacionado con diversos valores que la humanidad ha tenido en alta estima. Entre esos valores están la capacidad de resolver problemas que requieren precisión, pero también la de crear obras armoniosas, estéticamente valiosas por las proporciones entre sus partes. Una de esas obras es el Partenón de Atenas.



Entre los aspectos que lo han hecho famoso está la razón entre el largo y el ancho de su fachada. El rectángulo idealizado en el que está inscrita la fachada se conoce como rectángulo áureo o rectángulo de oro. Largo y ancho en este caso, son dos magnitudes inconmensurables en el sentido teórico estricto analizado anteriormente, aunque en la práctica siempre es posible construir un rectángulo con lados conmensurables que el ojo no podría distinguir de un verdadero rectángulo áureo, teóricamente perfecto.

Recordemos el cuadrado ABCD, los dos rectángulos y la diagonal trabajados anteriormente. A partir de ellos podemos construir el rectángulo áureo, analizar la proporción áurea y construir el número áureo y su inverso multiplicativo.



¿Cómo se construye el nuevo rectángulo ABGH a partir del cuadrado ABCD y de la diagonal $\overline{EC}$?

Se puede decir que con la ayuda del compás se traslada la longitud de la diagonal $\overline{EC}$ sobre la prolongación del lado $\overline{AD}$, a partir del punto E. Así se obtienen el punto H y el segmento $\overline{AH}$

que son claves en la construcción del rectángulo ABGH, del número áureo y de la formulación de la proporción áurea.

A ese nuevo rectángulo, el ABGH se le califica de áureo porque entre las longitudes de su largo y de su ancho existe, como veremos, una razón especial. ¿Cuáles son los lados del nuevo rectángulo?

El ancho es el mismo del cuadrado inicial, es decir: $\overline{CD}$. (Podría decirse también que el ancho es $\overline{AB}$, o $\overline{GH}$. ¿Por qué).

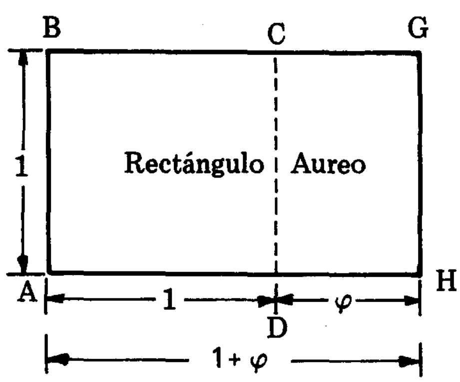
El largo es la longitud de $\overline{AH}$ y se obtiene adicionando la longitud de un medio del lado del cuadrado y la de la diagonal $\overline{EC}$. Recordemos que hemos construído $\overline{EH} = \overline{EC}$. Según la figura $\overline{AH} = \overline{AE} + \overline{EH}$. También se puede expresar el largo $\overline{AH}$ como igual a la suma de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DH}$ donde $\overline{AD}$ es un lado del cuadrado inicial y $\overline{DH}$ es igual a la diagonal $\overline{EH}$ menos $\overline{ED}$ que es un medio del lado del cuadrado.

Suprimamos unas líneas en la figura y destaquemos los rectángulos ABGH y DCGH. Observemos que el ancho del primero es el largo del segundo y que son rectángulos semejantes. Si esa tesis se cumple, entonces sus lados son proporcionales. Luego:

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{AD} + \overline{DH}}$$

Esta igualdad de razones es del tipo $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ donde

c = a + b; entonces tenemos una proporción áurea.



Observemos nuevamente el rectángulo áureo y analicemos unas sustituciones que podemos realizar y que nos permiten llegar a otra formulación de la proporción áurea.

Si se considera el lado del cuadrado igual a 1, el segmento $\overline{DH}$ igual a φ y $\overline{AD} + \overline{DH} = 1 + \varphi$, entonces la proporción se transforma en:

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{\varphi + 1}$$

de donde se obtiene la ecuación: $\varphi^2 + \varphi = 1$, y por consiguiente: $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$.

La solución positiva de esa ecuación es el número áureo.

Se tiene $\varphi = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ o sea: $\varphi = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

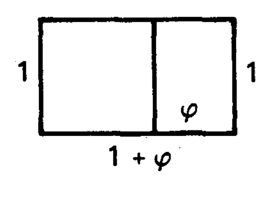
Al efectuar las operaciones se obtiene aproximadamente: $\varphi = 0.618\ldots$ **Este es el número áureo.**

El número φ puede considerarse como un operador real que aplicado a una longitud que se quiere tomar como el largo de un rectángulo áureo, obra como reductor y produce el ancho que debe tener ese rectángulo. Es decir: ancho del rectángulo = $\varphi \bullet$ (largo del rectángulo).

A partir del operador reductor φ y de la función inverso multiplicativo se puede obtener otro operador real, un ampliador, simbolizado por φ^{-1} o por $1/\varphi$. Entonces $1/\varphi = 1/0.618$, de donde resulta que $1/\varphi \doteq 1.618$. Es interesante comprobar que si al número áureo se le suma 1 también se obtiene su recíproco (o inverso multiplicativo): $\varphi + 1 = 1/\varphi$.

El número φ^{-1} puede considerarse como un operador ampliador que al ser aplicado al ancho de un rectángulo áureo produce el largo del mismo. Entre ese ancho y ese largo existe la razón áurea. También se dice que el número áureo, la unidad y el ancho y el largo mencionados están en la proporción áurea.

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1}{1 + \varphi}$$



En resumen, de un rectángulo se dice que es un rectángulo áureo cuando la razón de su ancho a su largo es la razón áurea que es aproximadamente igual a la razón de 0.618 a 1.

En la práctica, un rectángulo de 1m de largo y 61.8 cm de ancho (que por lo tanto tiene lados conmensurables), es indistinguible de un rectángulo áureo teóricamente perfecto de una unidad de largo y φ de ancho, cuyos lados son inconmensurables.

En la motivación para el conocimiento del número áureo pueden emplearse cartulinas o tarjetas postales de las que tienen las dimensiones de un rectángulo áureo (el ancho es el de 61.8% del largo).

También se puede recurrir a los conocimientos de historia de Grecia y a los conocimientos de arte adquiridos en Educación Estética. La oportunidad es propicia para anunciar el trabajo de dibujo que se desarrollará en Geometría.

El estudio del número áureo, su importancia y aplicación en las obras de arte inducen a hablar de gusto por la armonía, por la estética, no sólo en las cosas que se ven o se crean, sino en la vida misma, en la forma de pensar, en el manejo de las relaciones humanas, etc.

En esta forma se fomenta un ambiente propicio para el razonamiento organizado, para las argumentaciones y refutaciones, y se va desarrollando integradamente la unidad de lógica que aparece al comienzo de este programa.

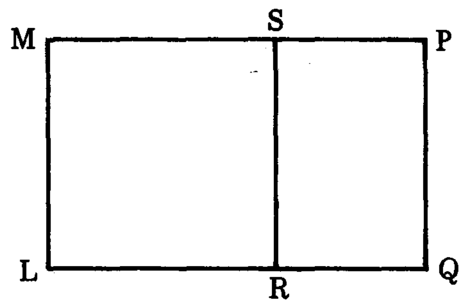
Como aplicación de lo aprendido sobre el rectángulo áureo es conveniente que trabajen integradamente con el área de Educación Estética en la parte de plástica, o que sencillamente apliquen lo aprendido para elaborar cuadros, tarjetas u otros trabajos. Con una buena motivación los alumnos pueden ampliar el tema con lecturas u otras actividades extraclase. La revista 'Muy Interesante' tiene un artículo sobre la Estética y las Matemáticas. Es la No. 59 de septiembre de 1990.

Otros ejercicios que pueden sugerirse a los alumnos son:

- Realizar los dibujos, operaciones y análisis necesarios para afirmar o negar que el cociente entre la longitud de un lado de un pentágono regular y la de una de sus diagonales es aproximadamente igual al número áureo φ, es decir, 0.618.

Lo que resulta pedagógicamente útil e interesante, es que los estudiantes realicen un proceso de búsqueda, que hagan conjeturas, que las discutan, que las comparen con las que hacen otros compañeros, que las sometan a prueba y vayan desarrollando su capacidad para "descubrir" o acceder a los conocimientos. El maestro no tiene que dar una forma determinada para resolver un problema. Su papel más importante es el de mantener vivo el interés y adecuado el ambiente para que los estudiantes se desarrollen y aprendan.

- Construir un rectángulo áureo, dividirlo en un cuadrado y un rectángulo y analizar si el nuevo rectángulo es también un rectángulo áureo. Continuar dividiendo los nuevos rectángulos y tratar de establecer algunas conclusiones.



Sea LMPQ un rectángulo áureo. El segmento SR es paralelo al lado menor del rectángulo y lo divide en un cuadrado y un rectángulo.

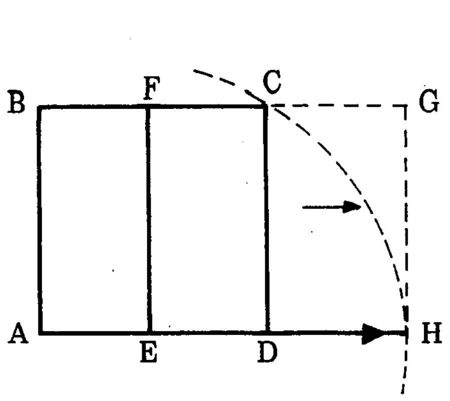
¿El nuevo rectángulo RSPQ es también áureo? ¿Cómo continuaría el proceso?

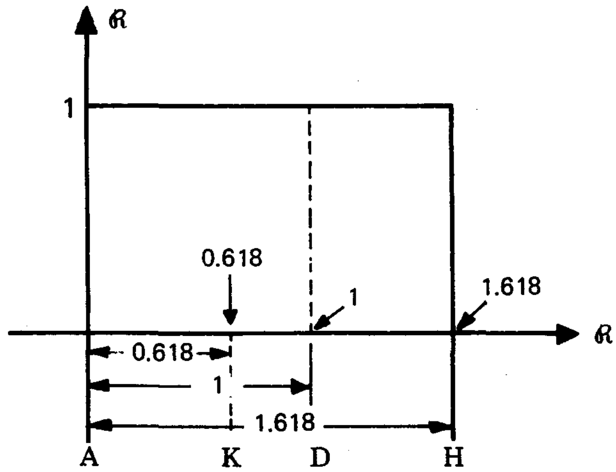
DIVERSAS CONCEPCIONES DE φ Y DE $\varphi + 1$

Al número áureo, como a los demás números reales, se les puede considerar como operadores, o como longitudes de segmentos, o como puntos sobre una recta graduada.

A continuación se comentan algunas de las formas de concebir el número real φ.

Volvamos a la figura que empleamos para la construcción del rectángulo áureo. Fijemos la esquina inferior izquierda de dicho rectángulo en el origen de un sistema de coordenadas cartesianas cuyos ejes son rectas reales. Fijemos además el lado izquierdo del rectángulo sobre el semi-eje positivo de las ordenadas, y fijemos el lado inferior sobre el semi-eje positivo de las abscisas.





En la gráfica es posible observar que la aplicación del operador multiplicativo 1.618 tiene el efecto de desplazar el lado terminal derecho $\overline{CD}$ de la figura cuadrada más hacia la derecha, hasta caer en $\overline{GH}$, o sea de ampliar el segmento unidad (que va de 0 a 1) a la nueva base del rectángulo (que va de 0 a 1.618).

También se puede decir que utilizamos el número real como operador trasladador (aditivo) para correr toda la recta real hacia la derecha, de manera que el punto D (que identificamos con el 1) caiga en el punto H (que identificamos con 1 + φ).

Se observan también 0.618 y 1.618 como longitudes de segmentos sobre el eje de las abscisas y como puntos sobre el mismo. La facilidad para cambiar de la concepción de los reales como puntos del eje de las abscisas a verlos como longitudes de segmentos que comienzan en el origen, o como operadores ampliadores o reductores del segmento unidad (o de cualquier otra longitud), o como trasladadores de puntos de la misma recta, es uno de los principales logros que se pretenden con estas actividades guiadas por el enfoque de los reales como operadores activos.

Cuadro resumen

El cuadro siguiente ayuda a tener una visión global de las diversas formas como hemos construído y/o utilizado los dos operadores reales φ y 1 + φ.

1 + φ	como operador ampliador (multiplicativo):	amplía $\overline{AD}$ a $\overline{AH}$
φ	como operador reductor (multiplicativo):	reduce $\overline{AD}$ a $\overline{AK}$
1 + φ	como operador trasladador (aditivo):	traslada A a H
φ	como operador trasladador (aditivo):	traslada D a H (y A a K)
1 + φ	como longitud de segmento:	longitud de $\overline{AH}$
φ	como longitud de segmento:	longitud de $\overline{AK}$
1 + φ	como punto:	el punto H
φ	como punto:	el punto K

"Entender los números reales" es conocer estas y otras islas de un gran archipiélago conceptual, el Archipiélago Real, y moverse con facilidad de unas a otras.

DISTINTOS MODOS DE EMPLEO DE LOS SIMBOLOS ALGEBRAICOS

Una de las actividades más practicadas por profesores y alumnos de secundaria, es la de la manipulación de los símbolos algebráicos. El programa de 9º grado incluye este tema, pero busca superar el manejo puramente mecanicista de los símbolos.

De ahí que la propuesta da gran importancia a la construcción, coordinación y estructuración mental de los conceptos. Esas operaciones y la capacidad de reversarlas son básicas para el álgebra mental de que se habla en la segunda unidad de 8º y que conviene expresar empleando el lenguaje ordinario y luego el lenguaje matemático. La manipulación de los símbolos es posterior al trabajo con los conceptos.

De acuerdo con el enfoque del área para el tratamiento de los contenidos es decir, el enfoque de sistemas, tenemos que distinguir símbolos para elementos —pueden ser constantes o variables—, símbolos para operaciones y transformaciones que también pueden ser constantes o variables, y símbolos para relaciones que también las hay constantes y variables. Hay que distinguir además si los símbolos se están empleando para un álgebra de números reales o un álgebra de un sistema de funciones. Una actitud permanente de discriminación y análisis del significado del simbolismo ayuda a identificar para qué se están empleando los símbolos y con ello a superar una de las causas por las cuales no se aprenden matemáticas en secundaria.

En el lenguaje usual y en los libros de texto se presentan algunas ambigüedades que el estudiante debe poder resolver. A continuación se amplían estas ideas.

. **Símbolos para números o para funciones**

— Una letra como la x puede ser un símbolo para un número particular como 3, o 5. En ese caso se está dentro de un álgebra de números reales. Pero también puede ser un símbolo para la función idéntica que notamos "id" y que a cada número real le hace corresponder el mismo real, y la x estaría ahí como guardando un puesto para todos y cada uno de los números reales. En ambos casos la x es una variable pero en cada uno tiene un significado diferente.

— Unos símbolos constantes como $3, -1, 8, -\pi$ o φ pueden simbolizar números sencillamente, o también funciones constantes: depende del álgebra que se esté trabajando.

— El símbolo x^2 puede considerarse como un símbolo para un número fijo todavía no determinado que se transforma en un término constante cuando la x se reemplaza por un número y ese número se eleva al cuadrado.

También puede considerarse a x^2 como una expresión simbólica bastante usual para el operador que transforma un número en su cuadrado. En el primer caso se le da a x un valor ya determinado, se eleva el cuadrado, y se obtiene un valor también ya determinado. El término x^2 representa pues cada uno de esos posibles cuadrados: un cuadrado genérico. En el segundo caso se analiza esa misma posibilidad de insertarle cualquier número real como argumento para pensar en el término como símbolo de una función: la función cuadrado. Paralelamente a la primera interpretación, desde el punto de vista algorítmico el término x^2 podría representar el resultado ya estático de la instrucción de elevar el número x al cuadrado, y paralelamente a la segunda interpretación podría representar la instrucción misma.

— Expresiones como $x + 1$ también tienen una interpretación que depende del álgebra que se esté trabajando. En un álgebra de números reales puede representar un número todavía no determinado que queda fijo tan pronto se reemplace la x por una constante, es decir, por un número específico. Pero en un álgebra de operadores $x + 1$ puede significar el trasladador $+ 1$ hacia la derecha, que a todo número x lo desplaza una unidad más hacia la derecha en la recta real.

Desde el punto de vista algorítmico, en el primer caso, $x + 1$ representa el resultado, y en el segundo la instrucción misma de sumar 1 al número dado x.

. **Símbolos para funciones o para relaciones**

— Hay otras expresiones simbólicas cuya interpretación puede resultar ambigua. La expresión $y = x^2$ puede interpretarse como una proposición, como una relación o como una función. Como proposición tiene una interpretación obvia basada en la presencia de la igualdad. Es una ecuación o sea una condición en dos variables que permite inferir, por ejemplo que y no tomará valores negativos, y que será verdadera o falsa dependiendo de los valores que se utilicen en lugar de x e y. Como relación, $y = x^2$ es una abreviatura muy compacta para expresar la relación ". . . es cuadrado de. . ." Como función, $y = x^2$ es una expresión simbólica para la función cuadrado o el operador "cuadrador".

Desde el punto de vista algorítmico $y = x^2$ también puede entenderse como "bautizar y" al resultado x^2, o almacenar en la casilla o memoria "y" ese resultado.

— La expresión $x \longmapsto x^2$ se emplea también para simbolizar la función cuadrado, pues indica muy gráficamente que esa función se "traga" un valor x y produce o devuelve su cuadrado, es decir, x^2.

— En cambio la expresión $y \geqslant x^2$ se interpreta como expresión de una inecuación, una desigualdad, una condición en dos variables, y en el álgebra de los reales no hay razón para interpretarla como símbolo de un operador o función. Es un símbolo para una cierta relación entre dos números, una condición que será verdadera o falsa dependiendo de los valores que se utilicen en lugar de x e y. Desde el punto de vista algorítmico estas expresiones relacionales como $y \geqslant x^2$ se pueden interpretar también como un cierto tipo de operadores, llamados "operadores relacionales", que producen un uno cuando los argumentos x e y cumplen la condición $y \geqslant x^2$ y producen un cero en caso contrario.

Estos operadores relacionales se utilizan para modificar el flujo de control de un programa de computador, y están asociados a las llamadas "cláusulas condicionales" (IF, WHILE, UNTIL, . . . *si. . . , mientras. . . , hasta que. . .*) de los lenguajes de programación.

Ya habíamos dicho que los símbolos para los elementos pueden ser constantes o variables. Por ejemplo, en la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$, la "x" es una variable pues representa un número todavía no determinado. Pero su solución positiva, el número áureo φ, cumple que $\varphi^2 + \varphi - 1 = 0$. En este caso "$\varphi$" es una constante, pues representa un número ya determinado.

Veamos ahora que para expresar operaciones y relaciones también se pueden emplear constantes y variables. Los símbolos "+", "–", "x", "÷" para las operaciones de adición, sustración, multiplicación y división son constantes, pues representan operaciones bien conocidas. Pero si trabajamos un sistema de números reales con una operación todavía no determinada que llamamos operación "estrella", y lo simbolizamos por $(\mathbb{R}, \star)$, el símbolo "$\star$" para esa operación es variable. Los símbolos $<, \leqslant$, L, $\underline{L}$ de las relaciones de orden aditivo y multiplicativo en $\mathbb{N}$ son constantes. Pero si trabajamos una relación cualquiera R en un sistema natural $(\mathbb{N}, R)$ y afirmamos que a está relacionado con b, simbolizado como aRb, esta "R", que indica la relación es una variable, pues representa una relación todavía no determinada.

El maestro y los estudiantes pueden continuar este análisis y observar muchos otros casos y aspectos. Lo que se desea es que los estudiantes tengan gran claridad sobre lo que significan los símbolos que manipulan y sobre la manera de aprovecharlos para ahorrar tiempo y facilitar el trabajo que realizan.

HACIA OPERACIONES BINARIAS CON NUMEROS NO DETERMINADOS

El paso de operaciones binarias con números ya determinados a esas mismas operaciones con números todavía no determinados requiere, en primer lugar, que los estudiantes tengan conceptos claros sobre cada una de las operaciones. En segundo lugar, requiere que no confundan el concepto de la operación misma como transformación mental, con la técnica empleada para hallar el resultado.

Para conocer los logros de los estudiantes al respecto y para detectar algunas de las dificultades que tengan, se propone el siguiente ejercicio.

El curso se pone de acuerdo sobre cuáles operaciones binarias va a trabajar. Por ejemplo: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. Acuerdan también un intervalo dentro del cual van a trabajar; por ejemplo los números reales entre –10 y 10.

Los estudiantes pueden organizarse de a dos. En cada pareja uno de los integrantes dice y escribe dos números que van a ser los operandos; (puede escribir uno solo y en ese caso se considera que los dos operandos son iguales).

El compañero toma esos números, les aplica una de las operaciones convenidas y entrega el resultado a quien determinó los números. El debe "descubrir" cuál fue la operación realizada por su compañero y justificar su respuesta. Si no están de acuerdo deben dialogar, intercambiar sus criterios al respecto, consultar sus apuntes y pedir ayuda al profesor o a los compañeros. Las operaciones pueden realizarse mentalmente, o por escrito o con ayuda de una calculadora. Después de un tiempo prudencial los integrantes de cada pareja pueden cambiar de roles.

Para finalizar puede realizarse una plenaria en la cual las parejas presentarán su experiencia, los logros y las dificultades.

Los alumnos y el maestro estarán atentos a los informes para analizarlos críticamente y hacer las preguntas, las aclaraciones y las complementaciones que consideren necesarias.

El propósito de este ejercicio es contribuir a que los estudiantes entiendan las operaciones como máquinas mentales que transforman los números que se les entregan, y también a que desliguen el concepto de la operación, de las técnicas que se emplean para hallar el resultado de aplicarla.

Así se espera que cuando del término constante $5 + \sqrt{2}$, (que pueden expresar como aproximadamente igual a 6.4142) pasen al término variable $x + \sqrt{y}$, entiendan que, en ese caso, es más importante identificar y entender la función del operador que saca la raíz cuadrada, y la del operador binario que suma, que encontrar un número real ya determinado como resultado. Cuando hayan entendido esto, estarán en capacidad de reemplazar la expresión $x + \sqrt{y}$ por una sola letra, que puede ser por ejemplo z.

Este tipo de reflexiones ayuda a evitar problemas a los estudiantes de este grado, para quienes puede resultar extraño que si de un número x se resta un número y, el resultado se exprese como $x-y$. Al principio algunos interpretan el término $x-y$ como símbolo de una operación por realizar y tienen dificultades para olvidarse de la forma externa del término y manejar "$x-y$" como símbolo de un único número real w, que sería el resultado de esa operación indicada. Tendríamos pues $z = x + \sqrt{y}$, $w = x - y$.

Así pues pueden entender que en este caso $zw = (x + \sqrt{y})(x-y)$, y que la manipulación simbólica del lado derecho que produce el término $x^2 - xy + x\sqrt{y} - y\sqrt{y}$ permite encontrar otra manera (en este caso más laboriosa) de obtener el mismo resultado zw. A su vez, zw puede manejarse como un solo número r, el resultado de ese producto: $r = zw$.

Otro caso ya conocido por los alumnos es el del cuadrado de una suma. Si se trabaja con números ya determinados, la operación tiene como resultado un número ya determinado y por consiguiente un sólo término constante. Ejemplo: $(5 + 3)^2 = (8)^2 = 64$. Si se trabaja con números todavía no determinados, la operación tiene como resultado otro número todavía no determinado que se expresa mediante un término compuesto de variables y símbolos de operadores. Ejemplo:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Se espera que los alumnos identifiquen en ambos casos el efecto de aplicar la función cuadrado a una suma y que concluyan que dependiendo de lo que entre a esa máquina, el resultado puede ser un número ya determinado o un número todavía no determinado, y que la respuesta se expresa en el primer caso con un término constante, y en el segundo con un término compuesto, en el cual hay variables. Otra manera de considerar esa expresión es como dos listas de instrucciones o algoritmos diferentes que siempre dan el mismo resultado.

De acuerdo con lo analizado en el punto anterior, acá también hay que relacionar los términos con las funciones. Una expresión como $\frac{1}{x} + 1$ puede resultar ambigua. Si se trata del álgebra de números reales, entonces simboliza genéricamente la suma del recíproco de un número x con el 1. Pero si se está usando esta álgebra para representar un sistema de funciones, entonces $\frac{1}{x}$ representa la función recíproco y $\frac{1}{x} + 1$ representa la suma de la función recíproco con la función constante 1, o las instrucciones: sacar el recíproco al número dado x, y a ese resultado sumarle 1.

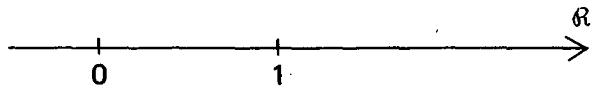
En ese caso la x puede ser cualquier número real diferente de 0, (¿Por qué x no puede tomar el valor 0?).

Un caso más: en el álgebra de los números reales la expresión $x + x^2$ puede representar un número que está compuesto por la suma de un número y su cuadrado. En cambio, en el álgebra de funciones puede representar la suma de la función idéntica con la función cuadrado. Además puede interpretarse como las instrucciones: tomar el número x, elevarlo al cuadrado y luego sumar el número y su cuadrado.

La evaluación ayuda a que los estudiantes se den cuenta de que el paso de operaciones con números conocidos a operaciones con variables o números desconocidos requiere la aceptación de ciertas condiciones y un cierto grado de generalización. Esto transforma una evaluación como forma de obtener y asignar calificaciones en instrumento que ayuda a comprender cómo van los procesos de construcción de los conocimientos y los de desarrollo personal y social.

BUSCANDO CRITERIOS PARA UBICAR NUMEROS REALES

En 8º grado se vió cómo si se prescinde del carácter activo de los operadores reales es posible ubicarlos sobre una recta, llamada recta real, una vez que se ha fijado un origen y una distancia unitaria hacia la derecha.



Mediante la aplicación de procedimientos geométricos principalmente, se han ubicado en una recta números reales como:

$\pi,\ \sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 1/2\sqrt{2},\ 1/\varphi,\ \frac{1}{1+\varphi},$

y otros reales fijos o ya determinados.

Después de hacer esas ubicaciones es necesario "retar", en el buen sentido de la palabra, a los estudiantes para que "descubran" cómo ubicar a: $-\pi$, $-\sqrt{3}$, $-(\sqrt{3}+\sqrt{5})$, etc., para que vayan más allá, a establecer criterios para la ubicación de números reales todavía no determinados como: las dos raíces cuadradas de un número real cualquiera o números reales representados por términos simples como: x, x^2, x^3, o por términos compuestos como
$x+\sqrt{5}$, $x+\sqrt{y}$, con $y \geqslant 0$.

Estos problemas, asumidos como "retos amigables", contribuyen a que los alumnos desarrollen procesos y habilidades para interpretar los problemas de modo que identifiquen: datos conocidos, preguntas por resolver y procesamiento que pueden realizar con los datos conocidos para encontrar respuestas a las preguntas. El reto puede orientarse a que los alumnos trabajen primero mentalmente, que luego verbalicen lo que han hecho, y que finalmente empleen símbolos escritos para expresar el manejo que han hecho del problema y para expresar la respuesta.

Ello implica un ejercicio de razonamiento organizado y de aplicación de la lógica, tanto durante el trabajo mental interior, como en sus manifestaciones externas a través del lenguaje hablado o escrito.

El desarrollo de procesos y habilidades para lograr ese tipo de razonamiento y ese tipo de comunicación precisa es un objetivo primordial de la educación matemática y, en el momento presente, constituye una auténtica introducción a la Informática y con ella al empleo inteligente de los computadores. Al contrario de lo que algunas personas pueden pensar, la Informática, sus aplicaciones y con ellas el estudio de lenguajes de programación en computadores, requieren personas con una gran capacidad para interpretar, analizar, visualizar soluciones posibles y desarrollar paso a paso los problemas. No es suficiente aprender a utilizar unos programas en las máquinas, ni aplicar fórmulas mecánicamente, ni tener habilidad para copiar respuestas. Las personas deben tener solvencia para trabajar los problemas mentalmente, verbalmente y por escrito, independientemente de si trabajan con máquinas o no.

Algunos ejemplos para el establecimiento de los criterios que permitan ubicar números reales en una recta, primero mentalmente y luego en una gráfica, pueden ser útiles.

Un primer criterio es que se necesita tener claros y presentes ciertos conocimientos adquiridos en grados anteriores. Entre esos conocimientos están:

. Una letra puede representar un número real cualquiera positivo o negativo, racional o irracional.
. Todo cuadrado es un número positivo.
. El cubo de un número positivo es positivo y el de un número negativo es negativo.
. Todos los números reales positivos tienen dos raíces cuadradas, una positiva y una negativa.
(En el trabajo con los alumnos puede continuarse esta lista).

Otro criterio tiene que ver con la forma como interpretamos los términos de estos problemas. En primer lugar los consideramos como números fijos aunque todavía no determinados; los reemplazamos por un número ya determinado, efectuamos las operaciones indicadas en cada caso y ubicamos el resultado sobre una recta. Eso lo podemos hacer para todos los casos que estimemos necesario. En segundo lugar, interpretamos los términos como funciones y pensamos en todos los valores que ellas puedan tomar: hacemos generalizaciones. Por eso la respuesta en unos casos será toda la recta y en otros casos un semi-eje u otro subconjunto apropiado de la recta real.

Problema 1

Determinar primero mentalmente, y luego sobre una gráfica en cuáles puntos de la recta se pueden ubicar los números reales representados por x y por $-x$.

. **Datos conocidos:**

La letra x representa un número real, y la expresión —x representa su opuesto o inverso aditivo. Ese número real x puede ser 0 o cualquier positivo o cualquier negativo. Puede ser racional o irracional. Si un número real es positivo, su opuesto es negativo (y viceversa). El opuesto del cero es el mismo cero: $-0 = 0 = +0$.

. **Proceso que se puede seguir:** Analizar casos que son claves, como dar dos o tres valores positivos, dos o tres negativos, y el valor cero.

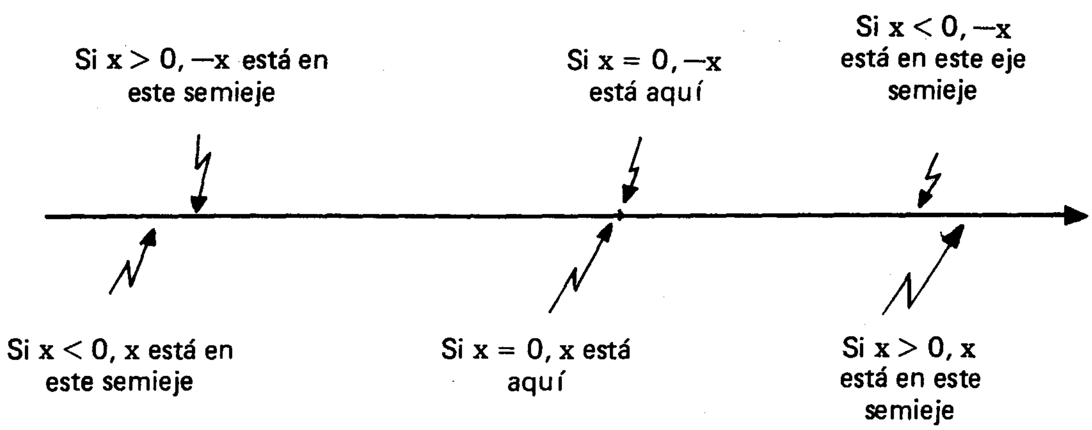
— Si $x = 0$, entonces el número x se ubica en el origen de la recta, y, —x también.
— Si $x > 0$, es decir si x es positivo, entonces x se ubica a la derecha de 0 en un punto que depende del mayor o menor valor de x, y, —x se ubica a la izquierda a la misma distancia del origen.
— Si $x < 0$, es decir, si x es negativo entonces el número x se ubica a la izquierda de 0 a una distancia que depende del mayor o menor valor de x, y, —x se ubica a la derecha a la misma distancia del origen.

Cuando se hayan estudiado estos u otros casos, se busca alguna conclusión apropiada, que puede ser por ejemplo:

El punto adecuado para representar el número real x depende del valor de x y puede ser cualquiera de los que están en la recta. El punto adecuado para representar —x depende del valor de x y puede ser también cualquiera de los que están en la recta.

. **Respuesta:**

Se puede expresar gráficamente así:



Conviene hacer notar a los estudiantes que oculto bajo la x encontramos cualquier número real que a su vez puede estar representado por un símbolo de constante (con un signo que identifica al número como positivo o negativo). Si esta idea queda clara ahora, se evitan muchas dificultades que aparecen más tarde cuando se hacen problemas sobre valor absoluto o sobre sus aplicaciones.

Para la clase se puede elaborar un material sencillo: unas tarjetas que en su primera cara tienen escrita una x y en la segunda cara un número real cualquiera. (Como son casos diferentes, las x podrían distinguirse con subíndices así x_1, x_2, x_3, etc. Pero también puede dejarse la x todas las veces, o la y, o la z, etc.).

Representemos varios casos:

Primer paso: Hay varias tarjetas; cada una oculta un número fijo, es decir un posible valor de x.

x	x	x	x	x	x

Segundo paso: volteemos las tarjetas para ver cuál es el número que está oculto.

3	0	−1	π	$-\sqrt{2}$	−0.5

Tercer paso: concluímos que la x es lugarteniente del cero, de números positivos o de números negativos. En particular, que en lugar de x pueden estar también los números reales negativos; que x no siempre es positivo, y que —x no siempre es negativo.

Problema 2:

Ubicar primero mentalmente y luego sobre una gráfica los posibles valores de un número real representado por x^2.

. **Datos conocidos:**

— El término x^2 representa un número real positivo donde x puede ser positivo, negativo o cero.

. **Proceso que se puede seguir:**

— Analizar que en este caso sólo se tienen como valores de x^2 el cero y los reales positivos.
— Caer en la cuenta, o sea inferir, que entonces no hay posibilidad de ubicar números representados por x^2 en el semi-eje negativo.
— Ubicar mentalmente el número en un punto del semi-eje positivo, incluído el origen. Que el número esté en el origen, esté cerca o esté lejos del origen depende del valor de x.

Respuesta:

La conclusión a que se llega puede representarse así:

0 $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$

Para todo x, si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \geqslant 0$

Si se presentan dificultades para entender el manejo de los signos se puede recurrir a una actividad complementaria en la cual los estudiantes puedan apropiarse de la idea de que si bien entre los valores de x^2 no existe ningún número negativo, entre los números que son como "la materia prima" para esa x^2 sí pueden estar todos los negativos.

Como material auxiliar se pueden elaborar unas tarjetas en las cuales se emplean las dos caras. En una cara de la tarjeta aparece el cuadrado de un número real y en la otra cara aparecen —como se muestra en el dibujo siguiente— los dos números cuyo cuadrado es el que está en la primera cara de la tarjeta.

Ejemplos de las tarjetas en su primera cara:

$x^2 = 4$	$x^2 = 0$	$x^2 = 0.25$

La segunda cara de estas tres tarjetas sería:

$x = 2$ $(2)(2) = 4$	Caso especial $x = 0 = -0$ $(0)(0) = 0$	$x = 0.5$ $(0.5)(0.5) = 0.25$
$x = -2$ $(-2)(-2) = 4$		$x = -0.5$ $(-0.5)(-0.5) = 0.25$

Esta es sólo una muestra de las tarjetas que se sugieren. El profesor y los alumnos pueden hacer muchas más o ampliarlas o modificarlas, etc.

Finalmente se pueden proponer conclusiones como la siguiente: el problema pregunta por todos los posibles valores de x^2.

Podríamos decir que pregunta por el mundo de las x^2. Sabemos que ese es un mundo en donde sólo viven el cero y los positivos. Pero ¡ojo! también sabemos que la "materia prima" está en el mundo de las x en donde viven todos los reales negativos, el cero y todos los reales positivos.

En el tratamiento de los problemas lo importante es que cada alumno viva el proceso completo, que ensaye, que discuta, que reconozca los aciertos y las equivocaciones, que proponga soluciones y las pruebe, que varíe las preguntas, etc.

Los conocimientos adquiridos o afianzados a través de la solución de problemas como los anteriores son básicos para el trabajo con funciones, principalmente cuando se requieran el dominio y el recorrido.

La evaluación debe realizarse permanentemente con propósitos como el de comprender cómo van los procesos de desarrollo personal y social y con ellos el de aprendizaje. Los resultados de un grupo indican si se pueden desarrollar las actividades como están sugeridas o hay que modificarlas; si se exigen todos los problemas, o se dejan algunos opcionales, etc.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

23. Afianzar los conocimientos sobre operaciones unarias o funciones de una sola variable, en particular los inversos aditivo y multiplicativo, y el valor absoluto.

24. Analizar la composición de operadores como operación básica del análisis.

CONTENIDOS BASICOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

OPERADORES UNARIOS

Los temas de los operadores unarios y de la composición de esos operadores han sido tratados ya en otros sistemas numéricos cuando se construyeron los operadores multiplicadores naturales (como el doble del triple); los operadores racionales (como la mitad de la cuarta parte) y la adición de enteros (como correr tres para adelante y después dos para atrás). También en las unidades de geometría y medición se ha trabajado la composición de movimientos rígidos en el plano (como primero reflejar y después rotar).

Se puede iniciar con ejercicios que requieran activar en la mente los conceptos, su explicitación verbal y su aplicación práctica.

Los alumnos pueden recordar, verbalizar y simbolizar sus conceptos respecto de operadores como el doble —llamado también "dos veces" o "duplicador"—, el triple, la mitad, el idéntico. Recordar así mismo las notaciones convenidas en los grados anteriores para las simbolizaciones respectivas:

2( ) para: "el doble", "dos veces", o "duplicador".
3( ) para: "el triple", "tres veces", o "triplicador".
$\frac{1}{2}$( ), 0.5, 50%, para "la mitad", o "un medio".
+1 ( ), + ( ), o ( ) para: "una vez", "el idéntico".
para el que deja los números o magnitudes como estaban.

Ya hemos trabajado estos operadores en los naturales, en los enteros, en los racionales y en los reales. Si se han logrado los objetivos correspondientes es de esperar que cuando los alumnos escuchen los nombres de estos operadores o lean las notaciones correspondientes, activen su cerebro, queden a la expectativa de cuál es el número al cual se los van a aplicar y, tan pronto lo conozcan puedan efectuar la operación mentalmente, para encontrar rápidamente el resultado, verificarlo y expresarlo en forma verbal, gráfica o numérica. El desarrollo mental, psico-social y motor requerido para lograr ese tipo de desempeños es un propósito general de la educación a cuyo logro contribuye la educación matemática activa guiada por el enfoque de operadores.

Hay otros operadores unarios cuyo conocimiento y aplicación queremos extender a los sistemas construídos con números reales. Entre ellos están: el inverso aditivo llamado también opuesto, el inverso multiplicativo o recíproco, y el valor absoluto.

OPERADORES INVERSOS

Unas preguntas iniciales pueden servir para introducir el tema. ¿Por qué se estudian los operadores inversos? ¿Para qué se crean esos operadores? ¿Cuántos se pueden crear?

Ojalá todos, alumnos y maestros, den sus respuestas a las anteriores y a otras preguntas. A continuación se incluyen algunas ideas con el propósito de aportar elementos a la discusión pero también para que sean complementadas por profesores y alumnos.

En cuanto a las preguntas por qué y para qué se crean y se estudian los operadores inversos, se sugieren enseguida algunas respuestas desde el punto de vista del desarrollo integral de los alumnos y también desde el punto de vista de la educación matemática.

Desde el punto de vista del desarrollo integral, diríamos que una capacidad humana que hay que cultivar es la reversibilidad del pensamiento, que como se ha expresado en estos programas y en el marco general, tiene que ver con la posibilidad de deshacer física o mentalmente una acción, de devolverse hasta el punto de partida, de anular los efectos de una operación, para recorrer hacia atrás —en reversa— los pasos de un proceso, operación o algoritmo que se han recorrido hacia adelante. La construcción, comprensión y aplicación de los operadores inversos es un tema que permite realizar actividades orientadas a desarrollar el pensamiento reversible.

Desde el punto de vista de la educación matemática, una respuesta es que los operadores inversos se crean y estudian para resolver situaciones que de otra manera resultan insolubles.

La respuesta a la pregunta "cuántos operadores se pueden crear" constituye un tema interesante de discusión entre los alumnos. Es una oportunidad más para que tomen conciencia de que estamos desarrollando un proceso de construcción de operadores y de números que puede continuar mientras haya problemas y necesidad o interés por resolverlos.

En 7º grado se trataron propiedades de algunas operaciones binarias, como la propiedad modulativa y la invertiva. Acá encontramos nuevamente que el tema de los inversos nos lleva necesariamente a trabajar también el tema del módulo o elemento neutro en cada operación.

— El Inverso Aditivo u Opuesto

Este operador tiene que ver con la operación adición de números enteros, racionales, reales y complejos y con el número 0 como módulo que es de la adición en esos sistemas numéricos.

Podemos mirar en reversa y ver que cuando se trabajan sistemas numéricos en los cuales el conjunto de objetos es $\mathbb{N}$ no existen los opuestos o inversos aditivos. Se acepta sencillamente que para deshacer la adición existe otra operación, la sustracción y que cuando se ha efectuado la adición y se desea regresar al cero, lo que hay que hacer es tomar el total y restarle el mismo total o ir restando uno a uno los sumandos, de modo que, si las operaciones quedan bien hechas, el resultado final es cero.

Se acepta también que en ese sistema hay "restas imposibles", aquellas en las cuales el minuendo es mayor que el sustraendo. ¿Le gustaría hacer una lista de las situaciones que quedarían sin resolver si las matemáticas no fueran más allá de esos sistemas?

Sigamos recordando algo de lo que hemos hecho en otros grados. Ante esa y otras dificultades creamos un sistema con nuevos números y nuevas reglas para las operaciones, de modo que sea posible la solución de los problemas encontrados.

En un lenguaje metafórico podríamos decir que nos pasamos a otro país, al país de los números enteros, que simbolizamos con $\mathbb{Z}$. Recordemos que la construcción de sistemas en los cuales $\mathbb{Z}$ es el conjunto de objetos se efectuó en 7º grado y tengamos en cuenta el proceso que se llevó a cabo.

Sabemos que los objetos en ese caso son: los números enteros positivos, los números enteros negativos y el cero. En esos sistemas se puede emplear la adición para pasar de un entero cualquiera al cero, es decir que dado un número entero $-c$ es posible encontrar otro número entero c con la característica de que la suma de los dos es 0. Empleando tres tarjetas podemos precisar la idea así:

Primera cara de las tarjetas:

$\boxed{z} + \boxed{y} = \boxed{0}$

Segunda cara de las tarjetas:

$\boxed{-c} + \boxed{+c} = \boxed{0}$

Ejemplo 1

$\boxed{z} + \boxed{y} = \boxed{0}$

$\boxed{+5} + \boxed{-5} = \boxed{0}$

Como z es el número positivo, +5, entonces para regresar al cero se le suma un negativo especial: el −5.

$(+5) + (-5) = 0$

Ejemplo 2

$$\boxed{z} + \boxed{y} = \boxed{0}$$

$$\boxed{-10} + \boxed{+10} = \boxed{0}$$

Como z es el número negativo −10, entonces para regresar al cero se le suma un entero especial: el +10.

(−10) + (+10) = 0

Ejemplo 3

$$\boxed{z} + \boxed{y} = \boxed{0}$$

$$\boxed{0} + \boxed{0} = \boxed{0}$$

Como z es el número 0, entonces se trata de un caso muy especial, en el cual se está en el origen mismo y para quedarnos ahí debemos sumar cero: 0 + 0 = 0.

Los estudiantes pueden continuar desarrollando y analizando más ejemplos hasta cuando lleguen a conclusiones como las siguientes:

– La ecuación $z + y = 0$ expresa que la suma de dos números todavía no determinados es cero.

– En la ecuación $z + y = 0$ se sabe que ambos números pueden ser cero, o que uno de los números es positivo y el otro es negativo pero todavía no se sabe cuál está de primero, el positivo o el negativo.

– Para cada número entero positivo existe un número entero negativo que es su opuesto, y para cada número entero negativo existe un número entero positivo que es su opuesto.

– El opuesto de cero es el mismo cero.

Hemos empleado las variables z, y, para representar un número y su opuesto. También se pueden emplear dos variables como z, −z en donde una de las dos representa un número positivo y la otra su opuesto que es negativo, pero tampoco se sabe cuál está primero. Es posible que z represente el negativo y −z el positivo. El – lo que expresa es que uno es el opuesto del otro.

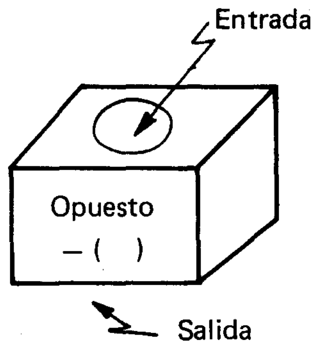
Este análisis del operador opuesto en $\mathbb{Z}$ es aplicable a los sistemas numéricos construídos con $\mathbb{Q}$ y con $\mathbb{R}$.

En sistemas numéricos con $\mathbb{Q}$ también se considera el opuesto o inverso aditivo de los números racionales. Entonces en la expresión que se elija para expresar lo que sucede, por ejemplo $x + y = 0$ las variables x, y pueden ser reemplazadas también por números racionales como $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$, o como −0.25 y 0.25.

En sistemas numéricos con $\mathbb{R}$ están los opuestos de todos los números reales. Entonces en la ecuación $x + y = 0$ las variables pueden reemplazarse por números reales ya determinados como:

$\pi, -\pi$ o por: $-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Tratemos de expresar gráficamente el efecto de aplicar el operador opuesto o inverso aditivo, a números reales, estén o nó ya determinados.



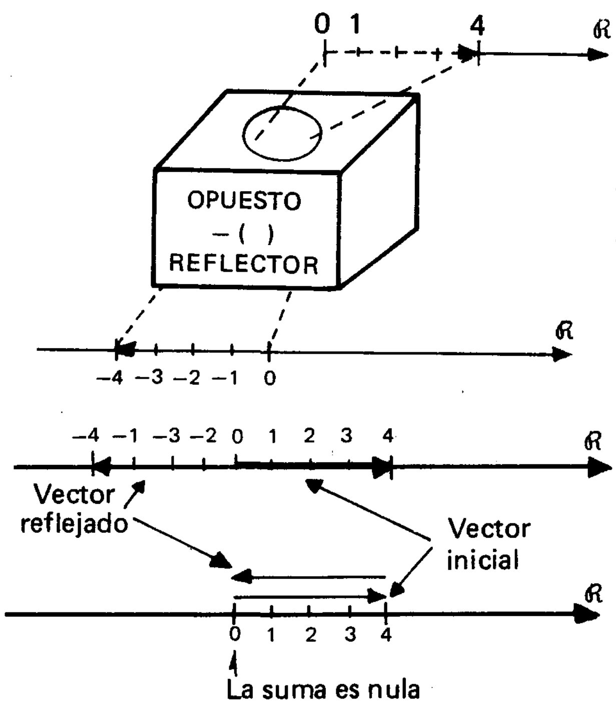
El operador opuesto se materializa en una caja que tiene una entrada y una salida.

El operador recibe cualquier número real y lo transforma en su opuesto.

Se puede trazar una recta real como conjunto de salida y otra como conjunto de llegada. Sobre cada recta se marca el origen y se ubican el cero y el uno. Los números reales positivos como vectores o trasladadores se representan con flechas orientadas de izquierda a derecha y los negativos de derecha a izquierda. Lo que se quiere expresar es que el operador "opuesto" o "–(   )" recibe una flecha, invierte el sentido de la flecha pero conserva el tamaño. Por eso, entrega una flecha que comparada con la que entró tiene la misma longitud, pero sentido opuesto. No estamos pensando en los números reales como puntos estáticos sobre la recta, sino en las flechas como símbolos de los vectores o trasladadores activos.

Si consideramos que las flechas tienen la cola fija en el origen de la recta real, el opuesto –(   ) actúa como un reflector, pues refleja las flechas que miran hacia la derecha como si hubiera un espejo transversal en el origen, y las deja mirando hacia la izquierda, y a las flechas que miran hacia la izquierda las refleja y quedan mirando hacia la derecha, conservando en ambos casos su longitud.

Caso 1: Con números reales como vectores dinámicos.



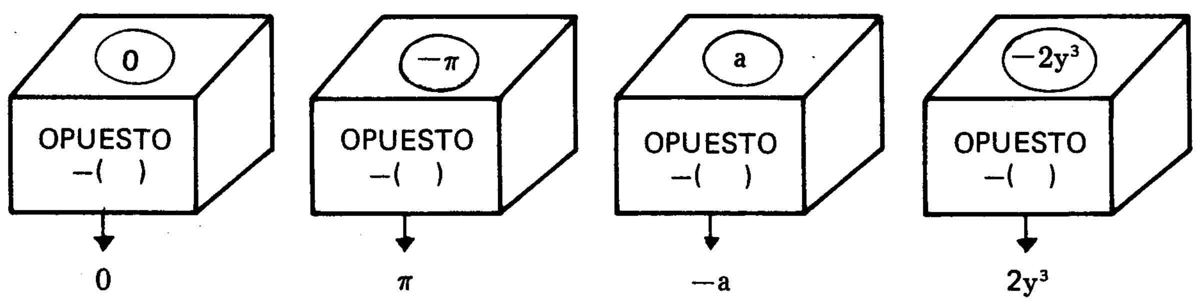
Si a un vector positivo de 4 unidades se le aplica el operador opuesto, se obtiene un vector negativo de 4 unidades.

La suma del vector inicial y el vector opuesto o reflejado es el vector nulo o vector cero.

Caso 2: Con números reales como puntos estáticos.

Se coloca en la entrada del operador un número real estático. El operador lo acepta, lo transforma en su opuesto y por la salida se obtiene como respuesta el opuesto del número que entró. Esto puede aplicarse a todos los números reales.

En cada caso entra un número real.



En cada caso sale el número real opuesto al que entró.

Se puede comprobar que cualquier número sumado con su opuesto conduce a cero. Ejemplos:

$$a + (-a) = 0; \quad -2y^3 + 2y^3 = 0$$

Esta propiedad es útil en la resolución de ecuaciones y acá debe quedar muy bien entendida y fundamentada. Tradicionalmente términos como $-a$ y a se han denominado términos semejantes opuestos o simplemente términos opuestos.

Cuando se haya logrado una conceptualización adecuada del tema del opuesto aditivo, podemos hacer que los alumnos escriban sus conclusiones primero con expresiones del lenguaje usual y luego con las notaciones más propias del lenguaje matemático.

En algunos casos se puede llegar incluso a emplear expresiones como:

en la adición con números reales se cumple que:

Por cada número real,	existe otro número real;	tal que la suma de ambos es cero.
$\forall x, \ x \in \mathbb{R}$	$\exists y, \ y \in \mathbb{R}$	$x + y = 0$

Pero esto puede ser el punto de llegada: nunca el punto de partida.

– **El Inverso Multiplicativo o Recíproco**

Este operador se introduce cuando se trabaja la multiplicación en sistemas con $\mathbb{Q}$ y en sistemas con $\mathbb{R}$. Ahora el módulo es el uno. Entonces el inverso multiplicativo o recíproco nos debe permitir emplear la multiplicación para regresar al uno desde cualquier número al cual hemos llegado por multiplicación.

En los sistemas construídos con $\mathbb{N}$ y en los construídos con $\mathbb{Z}$ no existen los inversos multiplicativos o recíprocos. En esos sistemas se deshace la multiplicación por medio de otra operación, la división. Se acepta también que la división no está totalmente definida en esos sistemas y por eso se dice que hay "divisiones imposibles". Para resolver dificultades como esas se construyen nuevos sistemas, nuevos países, unos con $\mathbb{Q}$ y otros con $\mathbb{R}$.

En esos sistemas el reto es emplear una multiplicación para anular el efecto de otra multiplicación. Expresemos esa idea con ayuda de tres tarjetas así:

Primera cara de las tarjetas:

$$\boxed{\omega} \times \boxed{z} = \boxed{1}$$

Segunda cara de la tarjetas:

$$\boxed{-1} \times \boxed{-1} = \boxed{1}$$

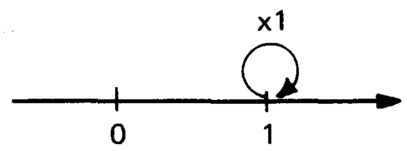
Las tarjetas pueden interpretarse diciendo que ω, z son dos números que multiplicados entre sí dan como producto 1. Alguien puede dar ejemplos sencillos en donde tanto ω como z valen 1 y ver que se cumple.

Otros pueden señalar que cuando ω vale -1 y z vale -1 también se cumple que el producto es 1.

Eso está bien pero no basta. El reto es encontrarle a cada uno de los infinitos números que pueden colocarse en lugar de ω, un número que pueda colocarse en lugar de z con la condición de que el producto de los dos sea 1.

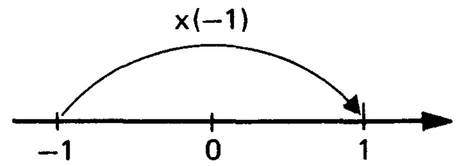
En 7º grado, en la Unidad II se trabajó la construcción de los inversos multiplicativos de los números racionales diferentes de cero. Extendamos a los números reales las conclusiones que ya conocemos para los racionales.

Podemos representar sobre una recta lo que hemos dicho sobre los recíprocos de los números 1 y −1.



1 es el recíproco de 1

$$1 \times \boxed{1} = 1$$



−1 es el recíproco de −1

$$-1 \times \boxed{-1} = 1$$

Encontramos que el 1 es a la vez su recíproco y que el −1 también es su recíproco.

Unas tarjetas nos facilitan la realización de ejercicios en los cuales hay que determinar el recíproco de un número real conocido:

Primera cara de las tarjetas

$$\boxed{\omega} \times \boxed{z} = \boxed{1}$$

$$\boxed{\omega} \times \boxed{z} = \boxed{1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Segunda cara de las tarjetas

$$\boxed{\tfrac{1}{4}} \times \boxed{4} = \boxed{1}$$

$$\boxed{6} \times \boxed{?} = \boxed{1}$$

$$\boxed{-\sqrt{2}} \times \boxed{?} = \boxed{1}$$

$$\boxed{-\pi} \times \boxed{?} = \boxed{1}$$

¿Es posible obtener una conclusión sobre la forma de simbolizar un número y su recíproco?

La conclusión podría ser que si ω, z representan un número y su recíproco, entonces puede decirse que $z = \frac{1}{\omega}$, o que $\omega = \frac{1}{z}$. Pero también puede concluírse que para hallar el recíproco de un número basta dividir el 1 entre ese número. Así se obtiene lo que puede simbolizarse como:

Recíproco de π es $\frac{1}{\pi}$;

recíproco de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es $\frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

Se acostumbra también expresar los recíprocos así:

$$(\pi)^{-1}, \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}$$

Otra conclusión es que $\frac{1}{\pi}$ es el recíproco de π y a su vez π es el recíproco de $\frac{1}{\pi}$.

Como se vió en el programa de 8º grado, si se consideran los reales positivos como ampliadores o reductores, el inverso del ampliador π sería el reductor $1/\pi$ o π^{-1}.

En ese sentido se podría escribir

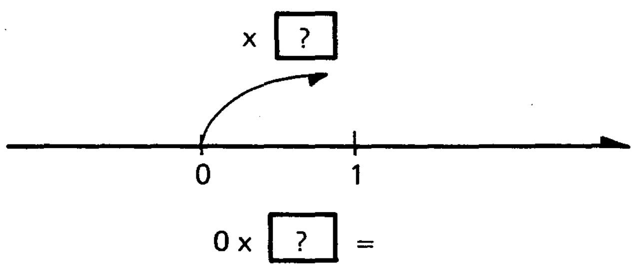
$\pi^{\leftarrow} = \frac{1}{\pi}$ o $\pi^{\leftarrow} = \pi^{-1}$.

— ¿Qué pasa con el cero?

¿Tiene el número real cero un inverso multiplicativo?

Para responder esta pregunta tenemos que determinar si existe un número real que multiplicado por cero de como resultado 1. Si ese número existe, entonces será el recíproco o inverso multiplicativo de cero. Si, por el contrario no existe, entonces decimos que el cero no tiene recíproco o inverso multiplicativo.

$0 \times \boxed{?} = 1$ No existe un número real que colocado en lugar de "?" lleve a 1 por medio de la multiplicación.



el número 0 no tiene recíproco.

Esta idea es importante y parece que hay que trabajarla expresamente. La experiencia de varios años con diferentes grupos de estudiantes muestra que no la deducen de algo que todos repiten a menudo: "cero multiplicado por cualquier número da cero". Parece que ese conocimiento se olvida cuando se trata de responder preguntas como esta: ¿La multiplicación en $\mathbb{R}$ es invertiva?

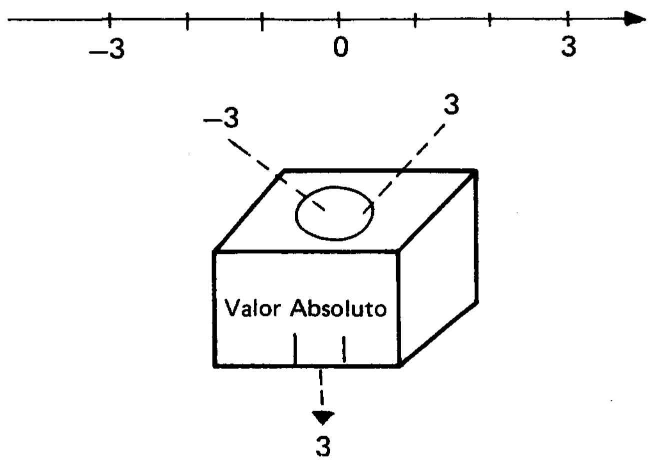
— El Operador Valor Absoluto

Conocemos el operador valor absoluto de un número como aquel operador que indica cuál es la distancia de un punto cualquiera de la recta al origen. El operador valor absoluto puede considerarse también como un medidor de distancias ya que eso es lo que hace. Por eso el valor absoluto de un número distinto de cero siempre es positivo; como los resultados de su aplicación son distancias, se expresan siempre con números positivos, nunca con negativos.

El resultado sólo es cero cuando el argumento del valor absoluto es cero.

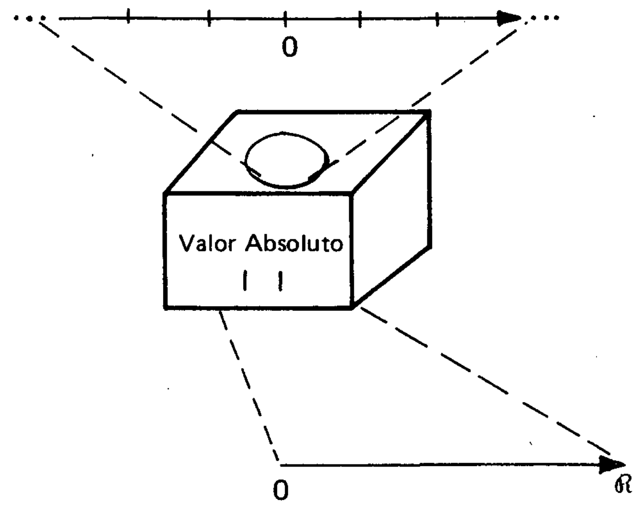
Observemos los números que están representados sobre una recta y apliquémosles el operador valor absoluto.

Ensayemos primero con dos números particulares el +3 y el −3.



En ambos casos el resultado es el número positivo 3. O sea que: $|3| = 3$, y $|-3| = 3$.

Entra todo el eje real y se le aplica el operador VALOR ABSOLUTO.



Como salida sólo se obtiene el semieje positivo a partir de cero.

Lo anterior puede interpretarse diciendo que si a un número positivo o al cero se le aplica el operador valor absoluto lo deja quieto, pero que si se le aplica a un negativo lo transforma en su opuesto. También puede decirse que si a uno le piden el valor absoluto de un número positivo ya tiene respuesta porque es el mismo número y si le piden el valor absoluto de un negativo sí tiene que hacer una transformación que es aplicarle el opuesto o reflector $-(\ \ )$.

Esto es lo que en los textos se simboliza con expresiones como:

Valor abs. de x es x, si x es $\geqslant 0$,

$$|x| = x \text{ si } x \geqslant 0,$$

y,

valor abs. de x es $-x$, si $x < 0$.

$$|x| = -x \text{ si } x < 0.$$

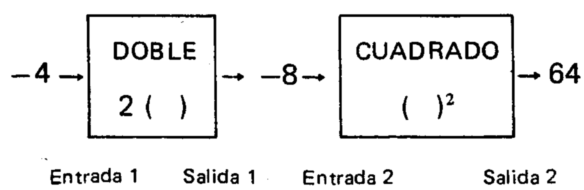
¿Qué sucede cuando el valor absoluto se considera como una función cuyo dominio son todos los reales?
Empleemos un gráfico para buscar la respuesta.

Se puede concluir que en ese caso el recorrido o rango de la función es el semi-eje positivo.

COMPOSICION DE OPERADORES UNARIOS

Como introducción al tema los estudiantes pueden realizar mentalmente algunos ejercicios de aplicación sucesiva de operadores. Si después del trabajo mental verifican el proceso con ayuda de una calculadora tendrán la oportunidad de afianzar más sus conceptos sobre lo que hacen los operadores.

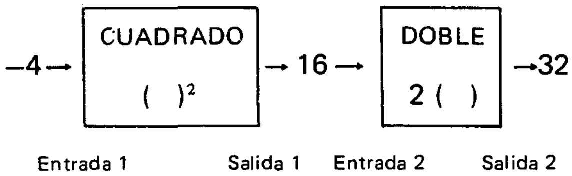
Un ejercicio puede ser tomar el número −4 y aplicarle el operador doble y el operador cuadrado, en ese orden. ¿Qué se obtiene al final? Para responder la pregunta analicemos el siguiente esquema en el cual los operadores se representan por un rectángulo.



Se obtiene el cuadrado del doble.

Entonces se ha aplicado el cuadrado después del doble. Esto se puede simbolizar así: C∘D. Esta expresión puede leerse: el cuadrado después del doble o más natural: el cuadrado del doble. El símbolo ∘ es el mismo que hemos empleado en geometría para simbolizar la composición de los operadores que producen movimientos rígidos en el plano.

¿Cuál será el resultado si se cambia el orden de los operadores? (Es decir, si el ejercicio fuera hallar el doble del cuadrado de −4).



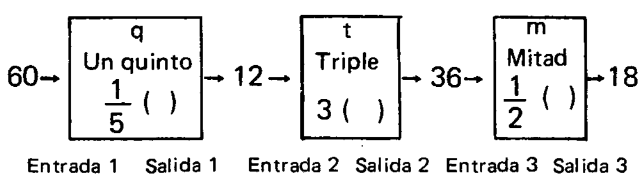
Se obtiene el doble del cuadrado.

La comparación de los resultados de estos y de otros ejercicios que ideen maestros y alumnos ayudará a reconocer la importancia del orden en que se apliquen los operadores.

Es necesario tener presente qué entra y qué sale del operador en cada caso. El número que se obtiene como resultado de aplicar el primer operador es el que se toma como entrada para el segundo operador.

Otros ejemplos pueden provocar más reflexiones. Hallar la mitad de los tres quintos de 60. Según las reflexiones hechas para los ejercicios anteriores tenemos que aplicar el operador $\frac{3}{5}$ a 60 y al resultado obtenido aplicarle el operador $\frac{1}{2}$.

El operador $\frac{3}{5}$ puede descomponerse en dos: el triple de un quinto. Se tienen así tres operadores para aplicar en cadena:



El resultado final es 18 que se ha obtenido como la mitad del triple de un quinto de 60. Hemos iniciado esa expresión nombrando en primer lugar el último operador que se aplicó, a continuación el penúltimo, luego el primero y finalmente el número al cual se le aplicó la composición de esos tres operadores. Otra forma de expresar esa cadena de operadores es: la mitad compuesta con el triple y con un quinto. Más abreviadamente: m∘t∘q,

¿Se cambiará el resultado si se varía el orden de aplicación de los operadores? ¿A qué conduce q∘m∘t de 60? ¿y t∘q∘m? Con estudiantes motivados la resolución de este tipo de preguntas es un juego mental muy interesante que se puede verificar con la calculadora.

Los ejemplos de composición de operadores que hemos realizado y los demás que trabajen en clase permiten introducir una discusión sobre el "país de los operadores unarios" en el cual estamos trabajando. Los elementos son operadores con una sola boca, o sea funciones de una sola variable. La operación que estamos trabajando es la composición. ¿Cuántos elementos puede tener el conjunto de los operadores unarios? ¿Cuáles son? ¿De qué propiedades goza la operación composición en el "país" o más exactamente en un sistema con operadores unarios? ¿Qué relaciones se dan en este sistema? ¿Cuáles son los símbolos empleados para representar elementos, operaciones y relaciones en este sistema?

La búsqueda de respuestas a las anteriores preguntas es un trabajo en el que los participantes pueden ir descubriendo ideas básicas del análisis matemático. No es necesario responder de una vez todas las preguntas pero sí es bueno tenerlas presentes e ir detectando ideas claves para resolverlas.

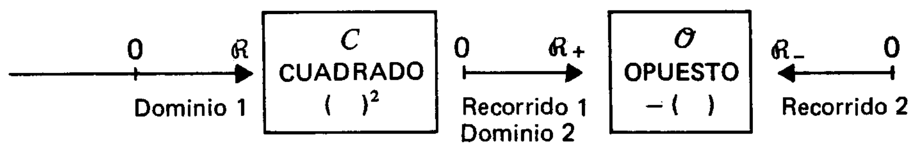
A manera de ejemplo tratemos de responder la pregunta siguiente ¿es conmutativa la composición de operadores?

En los ejercicios numéricos desarrollados anteriormente encontramos un caso en el que si se cambia el orden de los operadores que se componen se altera el resultado. Encontramos otro caso en el que el resultado es el mismo con cualquier orden en los operadores. ¿Entonces qué conclusiones sacamos? ¿Es conmutativa? ¿No es conmutativa? En principio los estudiantes pueden decir que unas veces sí y otras veces no. De esas respuestas se puede pasar al significado que tiene en Matemáticas la afirmación de que una operación tiene o cumple una propiedad. Como se exige que se cumpla siempre, sin excepciones, entonces llegarán a la conclusión de que la composición de operadores unarios no es conmutativa.

Comprendido lo anterior puede estudiarse la composición de los operadores unarios considerados como funciones en las cuales el dominio de la primera función es el conjunto $\mathcal{R}$.

Supongamos que se trata de encontrar el opuesto del cuadrado. Podemos simbolizarlo de varias maneras: $\mathcal{O} \circ \mathcal{C}$, $-(\quad) \circ (\quad)^2$. Si las funciones opuesto y cuadrado se designan, en la forma tradicional, con las letras f, g respectivamente, entonces podríamos simbolizar la composición que estamos tratando por: $f \circ g$. Aspectos importantes para la discusión, es que expresiones como $f \circ g$ tienen sentido cuando se refieren a funciones; la composición no se aplica entre números. ¿Qué significaría 2 compuesto con 3?

Los estudiantes aplicarán sus conocimientos sobre funciones para determinar dominio y recorrido o rango en cada caso. Un esquema que algunos pueden elegir es el siguiente:



Función Cuadrado: el dominio es $\mathcal{R}$, el recorrido son los reales positivos incluído el cero, lo simbolizamos por $\mathcal{R}_+$.

Función Opuesto: el dominio es $\mathcal{R}_+$ y el recorrido son los reales negativos incluído el cero, los simbolizamos por $\mathcal{R}_-$.

Los reales positivos, $\mathcal{R}_+$ son a la vez recorrido de la primera función y dominio de la segunda.

En este caso importa fundamentalmente el análisis cualitativo de los ejercicios. En otros grados y en otras unidades se ha hecho un tratamiento exhaustivo del procedimiento para encontrar el dominio y el rango o recorrido de funciones como el cuadrado.

Conviene inducir el desarrollo de ejercicios que lleven a "descubrir" que la composición de funciones de una variable es diferente de la multiplicación de las funciones. Veamos unos ejemplos:

COMPOSICION

El opuesto del cuadrado de x es:

$-((x)^2) = -x^2$

El triple del cuadrado de x es:

$3(x)^2 = 3x^2$

MULTIPLICACION

El opuesto de x por el cuadrado de x es:

$(-x)(x^2) = -x^3$

El triple de x por el cuadrado de x es:

$(3x)(x^2) = 3x^3$

Es fácil llegar a la conclusión de la importancia y de la utilidad que tiene un manejo cuidadoso del lenguaje y de las notaciones matemáticas.

Las evaluaciones, tanto individuales como colectivas, deben colocar a los estudiantes en situaciones en las cuales puedan revisar el proceso que han seguido en el estudio de los operadores unarios, tomar conciencia de la mayor o menor solvencia que poseen para referirse al tema y para formular, analizar, criticar y resolver ejercicios sobre los operadores y su composición. Ese mismo conocimiento logrado les permitirá señalar, desde su punto de vista, cuáles aspectos del tema necesitan mayor profundización.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

25. Analizar algunas relaciones de orden aditivo y algunas de orden multiplicativo en sistemas formados con números naturales, enteros, racionales y reales.

26. Explicitar las características de algunos sistemas construídos a partir del conjunto de los números reales, con miras a reconocer su estructura.

27. Analizar, a partir de problemas insolubles en $\mathbb{R}$, algunas limitaciones de los sistemas construídos con números reales.

CONTENIDOS BASICOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Ordenar y seriar son operaciones que parecen conaturales a la actividad humana. Tanto es así que los niños las realizan espontáneamente y los adultos les exigimos que aprendan en un orden determinado los números de contar, los días de la semana, los meses del año, etc. En esos casos se trabajan, aún cuando no se expliciten, relaciones como: ". . . precede a. . .", ". . . es sucesor de. . .".

En este grado los alumnos poseen ya los conocimientos necesarios para que analicen las relaciones de orden aditivo y multiplicativo con los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y para que saquen conclusiones sobre lo que sucede en cada caso.

En esa misma línea de analizar globalmente los temas estudiados se proponen actividades que ayuden a los estudiantes a reconocer algunos sistemas de números reales que tienen estructura de grupo.

LOS SISTEMAS ORDENADOS CON $\mathbb{N}$

Todos hemos trabajado los números naturales ordenados de menor a mayor con un orden que podemos llamar "orden natural", pero que también se conoce como orden aditivo. Cualquier persona sabe, desde la primaria, expresar cómo se va obteniendo la serie. Sabemos y afirmamos que también existe el orden multiplicativo entre los números naturales, pero el diagrama que muestra ese orden es menos conocido.

A continuación se presenta un cuadro comparativo entre dos ordenaciones de $\mathbb{N}$, una aditiva y otra multiplicativa. Los diagramas y las consideraciones que se hacen pretenden ayudar a detectar semejanzas y diferencias entre las dos ordenaciones. Los diagramas son una adaptación de los de Hasse: se omiten los bucles que indican la propiedad reflexiva y las flechas que indican la propiedad transitiva cuando se pueda transitar por un punto intermedio.

1. ORDEN ADITIVO

Entre las cuatro relaciones de orden aditivo conocidas: $<$, $\leqslant$, $>$, $\geqslant$, escogemos la relación de orden amplio ". . . es mayor o igual a. . .". Trabajamos entonces el sistema relacional ($\mathbb{N}$, $\geqslant$).

2. ORDEN MULTIPLICATIVO

Entre las cuatro relaciones de orden multiplicativo conocidas: L, L̲, ⅃, ⅃̲, escogemos la relación de orden amplio ". . . es múltiplo o igual a. . .". Trabajamos, entonces el sistema relacional ($\mathbb{N}$, ⅃̲).

Hagamos un diagrama y analicémoslo

$$0\bullet \longrightarrow \bullet 1 \longrightarrow \bullet 2 \longrightarrow \bullet 3 \longrightarrow \bullet 4 \longrightarrow \cdots$$

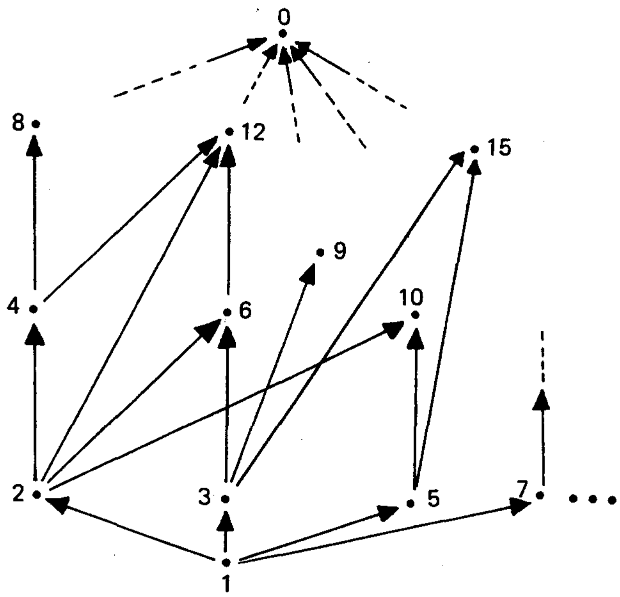
Se obtiene un diagrama lineal

Según la relación $\geqslant$, el conjunto $\mathbb{N}$ tiene un primer elemento que es menor que todos. Es el cero. Además, si tomamos un subconjunto, no vacío de $\mathbb{N}$, siempre es posible identificar el primero, el menor de todos y ordenar los demás. Por ejemplo el $\{22, 10, 3, 7\}$ sabemos que todos son mayores que 3 y por consiguiente 3 es el primero de ese subconjunto según esa relación. Esto se puede verificar con muchos ejemplos. Por lo anterior se afirma que el orden simbolizado por $(\mathbb{N}, \geqslant)$ es un BUEN Orden en $\mathbb{N}$. También se dice que $\mathbb{N}$ está bien ordenado por la relación $\geqslant$.

Como la serie continúa indefinidamente, afirmamos que no hay un número natural que sea mayor que todos. Es decir que no hay un último número natural en esta ordenación aditiva.

Todas las posibles parejas de números están relacionadas, pues siempre es posible decir si son iguales o si uno es mayor que el otro. Por esta razón se dice que la relación $\geqslant$ produce un orden total en $\mathbb{N}$.

Hagamos un diagrama y analicémoslo.



Se obtiene un diagrama arbolar

Según esta relación $\lrcorner$, el conjunto $\mathbb{N}$ tiene un elemento que precede a todos los demás. Es el 1. Todos los naturales, incluído el 1, son múltiplos de 1. Tomemos el conjunto $\{22, 10, 3, 7\}$ y veamos qué sucede. Resulta que en ese conjunto no hay ningún número del cual todos sean múltiplos. Entonces no hay un primer elemento de ese conjunto según el orden multiplicativo que estamos trabajando. Eso mismo puede verificarse en muchos otros subconjuntos de $\mathbb{N}$. Por eso se dice que $(\mathbb{N}, \lrcorner)$ no es un Buen Orden en $\mathbb{N}$. También se dice que $\mathbb{N}$ no está bien ordenado por la relación $\lrcorner$.

Si consideramos que el cero es múltiplo de todos los números naturales incluído él mismo, entonces podemos afirmar que con la relación $\lrcorner$ los números naturales tienen un número que les sigue a todos. Ese número es el cero. Podemos afirmar también que el cero es el último de los naturales en el orden multiplicativo $(\mathbb{N}, \lrcorner)$. Pero antes de llegar al cero, en cada rama del diagrama hay puntos suspensivos que indican que faltan muchísimos números por insertar. ¿Cuántos?

No todas las parejas de números están relacionadas. Por ejemplo 28 y 5 no están relacionadas porque 28 no es múltiplo de 5 ni 5 de 28. Esto permite afirmar que el orden que produce en $\mathbb{N}$ la relación $\lrcorner$ no es total sino parcial. Surge el

Si se toma un subconjunto como:
{1, 2, 4, 6, 7, 8} y se mira con el microscopio teórico del orden aditivo, se puede ver que entre 2 y 4 falta el 3 y que entre 4 y 6 falta el 5. Esto porque en una lista de números naturales ordenada aditivamente siempre es posible saber si faltan algunos y cuáles son.

¿Cuál diagrama se obtiene cuando $\mathbb{N}$ se ordena bajo la relación $\leqslant$? ¿Qué varía con respecto al caso ya analizado con $\geqslant$?

interés por estudiar números primos, números compuestos, múltiplos, mínimo común múltiplo, etc.

Si se toma un subconjunto como:

{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12} y se mira con el microscopio teórico del orden multiplicativo, se puede ver que entre el 2 y el 8 falta el 4, y que sobre el 2 y el 3 y debajo del 12 falta el 6. Esto porque en un sistema de números naturales ordenado multiplicativamente también es posible saber si faltan algunos (aunque por otras razones) y cuáles son.

¿Cuál diagrama se obtiene cuando $\mathbb{N}$ se ordena bajo la relación L? ¿Qué varía con respecto al caso ya analizado con ⅃ ?

En esta unidad tiene aplicación lo estudiado en grados anteriores, particularmente en octavo, sobre el tema de las relaciones. Un análisis cuidadoso permite afirmar que tanto la relación $\leqslant$ como la ⅃ cumplen las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Es importante observar que el cumplimiento de esas propiedades es independiente de que la organización resultante sea lineal o arbolar.

SISTEMAS ORDENADOS CON $\mathbb{Z}$

Las relaciones de orden aditivo en $\mathbb{Z}$ son bien conocidas. Los diagramas correspondientes se emplean con mucha frecuencia en los libros. Los diagramas de $\mathbb{Z}$ con una relación de orden multiplicativo son mucho menos frecuentes. A continuación se incluyen algunos elementos de análisis y de comparación entre dos relaciones de orden en $\mathbb{Z}$, una aditiva y otra multiplicativa.

1. ¿AL TENER TODOS LOS NEGATIVOS, SEGUIRA HABIENDO ORDEN ADITIVO?

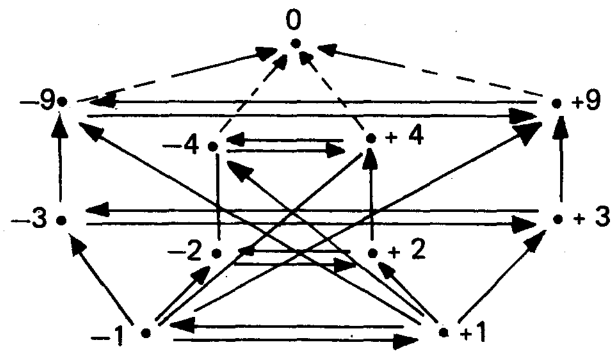
Tratemos de extender a los números enteros $\mathbb{Z}$ la relación de orden amplio ". . . es mayor o igual que. . ." ($\mathbb{Z}$, $\geqslant$) que ya estudiamos en ($\mathbb{N}$, $\geqslant$).

$$\cdots \bullet -2 \longrightarrow \bullet -1 \longrightarrow \bullet\, 0 \longrightarrow \bullet\, 1 \longrightarrow \bullet\, 2 \cdots$$

Se obtiene una representación lineal.

2. ¿AL TENER TODOS LOS NEGATIVOS, SEGUIRA HABIENDO ORDEN MULTIPLICATIVO?

Tratemos de extender a los números enteros $\mathbb{Z}$ la relación de orden amplio ". . . es múltiplo o igual a. . ." ($\mathbb{Z}$, ⅃), que ya estudiamos en ($\mathbb{N}$, ⅃).



Se obtiene una representación ramificada con muchos cruces.

No hay un entero que sea menor que todos; por eso se dice que ($\mathbb{Z}, \geqslant$) no está bien ordenado. Si se escoge el subconjunto de los enteros positivos, entonces sí hay primer elemento y se dice que el sistema ($\mathbb{Z}^+, \geqslant$) está bien ordenado.

No hay un único entero del cual todos los demás sean múltiplos: tanto el +1 como el −1 parecen cumplir esa condición.

Las flechas que se cruzan entre un entero cualquiera distinto de 0 y su opuesto aditivo muestran que ya no se cumple la antisimétrica para la relación "... es múltiplo o igual a...":
$-3 \neq +3$, y $-3 \lrcorner +3$, pero también $+3 \lrcorner -3$.

Este contraejemplo refuta la conjetura de que $\lrcorner$ es antisimétrica en el sistema ($\mathbb{Z}, \lrcorner$).

SISTEMAS ORDENADOS CON $\mathbb{Q}$

Cuando tratamos de extender las relaciones de orden al conjunto de los racionales, se presentan importantes diferencias si se las compara con esas mismas relaciones en $\mathbb{N}$ y en $\mathbb{Z}$.

1. ¿AL TENER TODOS LOS RACIONALES SEGUIRA HABIENDO ORDEN ADITIVO?

En los números racionales, la relación de orden amplio "... es mayor o igual que..." ($\mathbb{Q}, \geqslant$) sigue siendo muy importante y útil.

El diagrama no puede hacerse de modo que incluya todos los números de un subconjunto, ya que entre dos números racionales siempre habrá por lo menos otro que es la semisuma de los dos.

No hay un racional menor que todos; tampoco hay uno mayor que todos.

Pero dados dos números racionales cualesquiera, siempre es posible ordenarlos según la relación de orden aditivo que estamos considerando. Además se cumplen los requisitos para que ($\mathbb{Q}, \geqslant$) tenga estructura de orden, a saber que la relación sea: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

2. ¿AL TENER TODOS LOS RACIONALES SEGUIRA HABIENDO ORDEN MULTIPLICATIVO?

En los números racionales, las relaciones de orden multiplicativo tanto amplio como estricto carecen de interés y de utilidad.

Nadie se pregunta, por ejemplo, si 2 es múltiplo o divisor de 1/3. ¿Quién estudia ($\mathbb{Q}, \lrcorner$)? Sabemos que multiplicativamente todos los números racionales pueden ser múltiplos de todos, y que exceptuando el cero todos pueden ser divisores de todos. (Es conveniente comprobar estas afirmaciones utilizando las definiciones de esas relaciones).

En el sistema formado con el conjunto de los números racionales y la relación de orden multiplicativo, "... es múltiplo o igual a...", no tienen interés temas como: números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo. Si tratamos de definir esos conceptos extendiendo las definiciones que eran útiles en ($\mathbb{N}, \lrcorner$) y ($\mathbb{Z}, \lrcorner$) vemos que en ($\mathbb{Q}, \lrcorner$) todos los racionales (excepto el cero) parecen estar tan relacionados con todos los demás, que esas definiciones resultan inaplicables o inútiles.

SISTEMAS ORDENADOS CON $\mathbb{R}$

En el sistema en el cual el conjunto numérico es el de los reales y las operaciones son las de adición, multiplicación, sustracción y división, se cumple que a cualquier par de números x, y le corresponde una suma y un producto; si $x \neq y$, a esa pareja le corresponden dos diferencias, y si además son diferentes de cero, dos cocientes. Si estudiamos las dos diferencias, vemos que si $x > y$, $x - y$ es un número positivo. Consideremos ($\mathbb{R}, +, \times, -, \div, <, \leqslant, >, \geqslant$).

En este sistema las relaciones de orden aditivo tienen interés y utilidad especiales para el análisis y la solución de problemas que no se presentaban en los sistemas en los cuales el conjunto numérico era $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ en donde los problemas relacionados con el anterior o con el siguiente de un número tienen soluciones conocidas y aceptadas sin mayores controversias. Ya en los sistemas con $\mathbb{Q}$ y el orden aditivo se presentan problemas como los de no saber cómo definir cual sería (o si no existe) el número siguiente de un número dado, y el de tener que aceptar aproximaciones en el trabajo con decimales periódicos, en casos como este: $0.33 < \frac{1}{3}$, pero $0.67 > \frac{2}{3}$. (0.33 y 0.67 son aproximaciones, de 0.333. . .y de 0.666. . . respectivamente. Además, 0.666. . . = 2• (0.333. . .))

Al pasar de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ a sistemas con $\mathbb{Q}$ o con $\mathbb{R}$, el conjunto se amplía y aparecen nuevas situaciones que hacen interesante y retador el manejo del orden aditivo. Por ejemplo, dado un subconjunto de números fraccionarios o reales, importa saber si tiene un primer elemento que sea menor que todos y si tiene otro que sea el último o mayor que todos. Si tiene primero pero no tiene último y viceversa.

Por ejemplo cuando se habla de los números reales comprendidos entre 2 y 3, ¿se incluyen el 2 y el 3?, ¿se incluye uno de los dos pero no el otro?, ¿se excluyen ambos?. ¿Es posible tener un buen orden y/o un orden total?

Cuando se habla de los fraccionarios mayores que cero, ¿tiene este conjunto un primer elemento, o no?

Si se toma el número real que notamos $\sqrt{2}$, los fraccionarios menores que él no tienen último elemento, y los mayores que él no tienen primer elemento.

Es necesario que los estudiantes se vayan interesando por estos "problemas abstractos e inútiles" para que el estudio de temas como el de los intervalos en $\mathbb{R}$, temas de las Matemáticas de los grados 10º y 11º, esté motivado por necesidades teóricas como las de saber qué análisis se hacen de esos problemas y qué soluciones se les han dado históricamente. Sin sentir esas necesidades teóricas, no se va a desarrollar el pensamiento formal de los jóvenes.

Como complemento del estudio de las relaciones de orden aditivo en los sistemas con los números reales, los alumnos pueden discutir el tema de las relaciones de orden multiplicativo en los mismos sistemas. Seguramente llegarán a conclusiones similares a las obtenidas cuando se analizaron las mismas relaciones en sistemas con $\mathbb{Q}$ como conjunto numérico, o sea que un número real cualquiera diferente de cero resulta divisor de todos los demás y múltiplo de todos, excepto del cero:

$x \,\underline{\llcorner}\, y$ quiere decir que hay un real z tal que

$$xz = y.$$

$x \,\underline{\lrcorner}\, y$ quiere decir que hay un real w tal que

$$x = wy.$$

Verificar con cuidado cuándo se cumplen estas condiciones, sin atender a la prescripción de que no se puede dividir por cero, es un ejercicio de disciplina mental y de pensamiento abstracto que es valioso por su efecto formativo, independientemente de su utilidad inmediata.

ALGO MAS SOBRE LAS ESTRUCTURAS DE LOS SISTEMAS

El desarrollo del enfoque de sistemas se ha hecho a través del tratamiento práctico de los temas más que con el manejo de una teoría muy formal, abstracta o rigurosa de las estructuras matemáticas.

Que los alumnos tomen conciencia de las propiedades que se cumplen y de las que no se cumplen en las operaciones y en las relaciones al ser trabajadas en $\mathbb{N}$, en $\mathbb{Z}$, etc, nos ha interesado más que el desarrollo de una teoría sobre estructuras de semi-grupo, grupo, anillo, etc.

Si lo anterior se ha logrado, entonces ahora es fácil organizar actividades para que los alumnos vayan tomando conciencia acerca de algunas características de las estructuras de esos sistemas con los que han trabajado, y que por lo menos se enteren de los nombres con los que se abrevian ciertas combinaciones frecuentes de propiedades de los sistemas.

Es claro que es más importante saber qué significan conceptualmente esas propiedades, reconocerlas y demostrar que se cumplen o que no se cumplen, que saber los nombres con los que se abrevian sus combinaciones. Pero saberlos no hace ningún daño mientras no se comience por dar definiciones formales de las estructuras respectivas. Se debe partir de que los alumnos mismos vayan detectando regularidades que aparecen repetidamente en sistemas que se van haciendo familiares o concretos para ellos.

En octavo grado se estudió el sistema de traslaciones con la operación composición y se reconoció y analizó la estructura de grupo abeliano que posee dicho sistema. El análisis de esa misma estructura en sistemas como el de los enteros con la adición, $(\mathbb{Z}, +)$ y los reales también con la adición $(\mathbb{R}, +)$ se dejó como sugerencia.

Anteriormente hicimos paralelos entre sistemas relacionales; podemos buscar también algún paralelo entre sistemas operacionales con $\mathbb{R}$, uno con la adición y otro con la multiplicación. En ese paralelo se destacan aspectos del conjunto, propiedades de la operación y estructura del sistema.

$\mathbb{R}$ CON LA ADICION: $(\mathbb{R}, +)$

- El conjunto $\mathbb{R}$ posee un elemento, el 0, que actúa como módulo de la operación.
- En $\mathbb{R}$ por cada elemento existe otro que actúa como su opuesto o inverso aditivo: sumado con el otro, da el módulo.

En este sistema la adición:

Es clausurativa
Es asociativa
Es modulativa
Es invertiva

Por consiguiente el sistema tiene estructura de grupo. Además la adición es conmutativa, y con esa propiedad podemos decir en forma más completa que la estructura del sistema $(\mathbb{R}, +)$ es de grupo abeliano.

$\mathbb{R}$ CON LA MULTIPLICACION: $(\mathbb{R}, \times)$

- El conjunto $\mathbb{R}$ posee un elemento, el 1, que actúa como módulo de la operación.
- En $\mathbb{R}$ es posible encontrar el recíproco o inverso multiplicativo de todos los números reales diferentes de cero. Con el cero hay problemas: carece de recíproco. ¿Por qué?

En este sistema la multiplicación:

Es clausurativa
Es asociativa
Es modulativa
No es invertiva.

Por no cumplir la invertiva, el sistema $(\mathbb{R}, \times)$ no tiene estructura de grupo sino de semigrupo (por las dos primeras propiedades) y de monoide (por las tres primeras). Además es semigrupo y monoide conmutativo o abeliano porque la multiplicación es conmutativa.

Algunos aspectos del paralelo pueden ser aprovechados para que los alumnos incrementen su habilidad en el manejo de los argumentos. El caso concreto se presenta con el cero en la multiplicación, que es la causa para que la multiplicación en $(\mathbb{R}, \times)$ no sea invertiva; por consiguiente también es la causa de que este sistema no llene todos los requisitos para que su estructura sea de grupo.

Lo importante del análisis sobre el manejo de los argumentos es que un sólo caso es suficiente para que no exista la propiedad. No cuenta para nada el que el resto de los infinitos números reales tenga recíproco; como para el cero no existe recíproco, no se cumple la propiedad invertiva de la operación.

Los jóvenes de este grado pueden encontrar interesante y divertido el hecho de buscar contraejemplos para refutar afirmaciones generales (cuantificadas universalmente) que ellos mismos u otras personas hacen. Pueden comprobar que es fácil refutar una afirmación universal, pero difícil probarla y que es fácil probar una afirmación de existencia (cuantificada existencialmente), pero difícil refutarla. Estos ejercicios lógicos distribuídos durante todo el grado, desarrollan integradamente la unidad de Formas de Razonamiento y Métodos de Demostración.

Para continuar con el estudio de algunos sistemas operacionales en $\mathbb{R}$ podemos buscar una solución: eliminar el cero que causa el problema y acomodar el conjunto para ver qué pasa con el sistema. Al nuevo conjunto pertenecen todos los reales excepto el cero. Una forma de notarlo es indicando la resta entre los conjuntos $\mathcal{R}$ y (0) así: $\mathcal{R} - (0)$.

Para abreviar, podemos definir un nuevo conjunto $\mathcal{R}^*$ como $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} - (0)$. A $\mathcal{R}^*$ lo llamamos "el conjunto de los reales no nulos".

En esas condiciones se puede conjeturar que en un sistema formado con el conjunto que acabamos de definir ya no debe haber problemas. Entonces resulta interesante otro paralelo:

$\mathcal{R}^*$ CON LA ADICION ($\mathcal{R}^*$, +)

- El conjunto $\mathcal{R}^*$ carece del 0 que era el que actuaba como módulo en la adición.
- En el conjunto $\mathcal{R}^*$ por cada elemento existe otro que actúa como su opuesto.

En este sistema la adición:

No es clausurativa
Es asociativa
No es modulativa
Es invertiva
Es conmutativa

Por consiguiente el sistema ($\mathcal{R}^*$, +) no tiene estructura de grupo, ni de semigrupo ni de monoide.

$\mathcal{R}^*$ CON LA MULTIPLICACION ($\mathcal{R}^*$, x)

- El conjunto $\mathcal{R}^*$ posee un elemento, el 1, que actúa como módulo en la multiplicación.
- En $\mathcal{R}^*$ por cada elemento existe otro que actúa como su recíproco.

En este sistema la multiplicación:

Es clausurativa
Es asociativa
Es modulativa
Es invertiva
Es conmutativa

Por consiguiente el sistema ($\mathcal{R}^*$, x) tiene estructura de grupo abeliano.

En atención al enfoque constructivista y a la metodología activa que proponemos y tratamos de dinamizar, es bueno hacer notar que en estos paralelos se está verificando el cumplimiento de las propiedades porque se asume que los conceptos correspondientes a las mismas se han venido construyendo desde la primaria.

El análisis del paralelo puede generar discusiones interesantes. Veamos algunos aspectos debatibles.

El primero sería profundizar en el análisis de lo que sucedió con el conjunto $\mathcal{R}^*$ fijando la atención en el conjunto mismo para ver por qué funciona muy bien con la multiplicación, pero presenta problemas con la adición.

Un segundo aspecto puede ser lo que sucede con el cero, fijando la atención en este elemento:

- Si la operación del sistema es la adición, entonces el cero es imprescindible;
- Si la operación del sistema es la multiplicación, entonces el cero es inadmisible.

Un tercer aspecto puede estar relacionado con la afirmación de que en ($\mathcal{R}^*$, +) no se cumple la propiedad modulativa. Si hay dudas al respecto se puede recurrir a los contraejemplos, porque de lo que se trata es de refutar el cumplimiento de una propiedad y para eso basta encontrar un caso. Pensemos en el siguiente caso con una pareja conocida de números reales, π y $-\pi$. Tratemos de sumar $(-\pi) + \pi$. Si no existe el cero, ¿cuál es la respuesta?

Es posible que alguien analice también el cuidado que hay que tener para evitar hacer generalizaciones sin una verificación cuidadosa de los "casos críticos" que pueden presentarse. Con frecuencia en los sistemas en donde aparecen el 0 y el 1 hay que verificar qué sucede en esos casos antes de afirmar o negar algo sobre las operaciones, sobre las propiedades, o sobre la estructura de los sistemas.

Para estimular los procesos de pensamiento formal, los alumnos pueden buscar un concepto general sobre un sistema cuya estructura es de grupo. Llegarán a conclusiones como:

- Se necesitan un conjunto de objetos y una operación binaria. En ese conjunto debe existir un elemento que sirva de módulo para todos los elementos del conjunto con respecto a esa operación y debe haber además un inverso por cada elemento.

- Se necesita verificar que en ese conjunto la operación sí cumple al menos cuatro propiedades: clausurativa, asociativa, modulativa e invertiva.

Cuando se ha entendido eso, se ve que para la estructura de grupo no importa si el conjunto es de números, o de traslaciones o de permutaciones. Tampoco importa cuál sea la operación; lo que importa es lo que pasa cuando la operación, se realiza con parejas o ternas arbitrarias de elementos, y la existencia de ciertos elementos privilegiados (módulos, inversos) con respecto a esa operación.

OTROS ASPECTOS DE LOS SISTEMAS

Si los alumnos tienen interés, pueden preguntarse por la relación o la compatibilidad entre los sistemas ordenados y los sistemas operacionales. Por ejemplo, ¿qué tienen que ver $(\mathbb{R}, +, \times)$ y $(\mathbb{R}, \leqslant)$?

¿Es posible trabajar un sistema que tenga a la vez operaciones y relaciones?

Si buscamos respuestas para esa pregunta llegaremos a la conclusión de que no sólo es posible, sino que esa es la forma real y habitual en que trabajamos esos sistemas.

Es fácil encontrar argumentos:

- Cuando aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición, lo que estamos haciendo es ligar las dos operaciones y comprobar que son compatibles: $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$. ¿Será verdad además, que la adición distribuye sobre la multiplicación?

- Cuando aplicamos la ley de la monotonía o ley uniforme, lo que hacemos es relacionar la adición y el orden aditivo:
  si $a > b$, entonces, $a + c > b + c$ para cualquier real c.
  ¿Será verdad que si $a > b$, $a \bullet c > b \bullet c$ para cualquier real c?

Podemos pués considerar sistemas que simbolizamos con expresiones como $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$, o $(\mathbb{R}, +, \times, -, \div, \leqslant, \geqslant, <, >)$, y añadir operaciones unarias o de un sólo puesto como $-(\ )$, $(\ )^{-1}$: $(\mathbb{R}, +, \times, -, \div, -(\ ), (\ )^{-1}, \leqslant, \geqslant, <, >)$.

En general tenemos siempre sistemas con varias operaciones y relaciones.

Los alumnos pueden buscar, o inventar otros sistemas para analizarlos y obtener información respecto de su dinámica interna, y por consiguiente alguna idea sobre su estructura, así no sepan el nombre de esa estructura (o así no tenga nombre).

En cuanto a los sistemas numéricos podrían trabajar $(\mathbb{R}^+, +, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, +, \times)$. ($\mathbb{R}^+$ se emplea para representar el conjunto de los números reales estrictamente positivos, es decir: los reales sin el cero y sin los negativos, $\mathbb{Q}^*$ se emplea para simbolizar el conjunto de los "números racionales no nulos". Es decir: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$).

PROBLEMAS SIN SOLUCION EN $\mathbb{R}$

En cada sistema numérico que estudiamos podemos resolver determinados problemas y nos quedan algunos sin resolver. Estos últimos han sido un estímulo para el ingenio y la creatividad del hombre, hasta el punto de llevarlo a crear nuevos conjuntos numéricos y nuevas leyes para las operaciones, con el fin de conseguir soluciones a sus interrogantes. Así en $(\mathbb{Z}, +)$ encontramos respuesta para problemas insolubles en $(\mathbb{N}, -)$; en $(\mathbb{Q}^*, \div)$ resolvemos problemas que no tienen solución en $(\mathbb{Z}^*, \div)$ ni en $(\mathbb{N}^*, \div)$, etc.

¿Qué sucede en los sistemas en los cuáles $\mathbb{R}$ es el conjunto numérico y las operaciones son la potenciación y sus inversas?

Se han establecido reglas para hallar potencias, raíces y logaritmos de números reales. Pero hay casos en que esas reglas no funcionan cuando se trata de calcular ciertas potencias, de extraer ciertas raíces o de sacar ciertos logaritmos a cantidades negativas.

Puede proponerse a los alumnos que analicen y busquen todos los casos que puedan presentarse en el siguiente problema: Determinar las raíces cuadradas de un número real cualquiera x.

Al resolver el problema los alumnos se encontrarán con conjeturas como las siguientes, que se obtienen empleando mecánicamente la notación para las raíces cuadradas:

$+\sqrt{5}$ es la raíz cuadrada positiva de 5

$-\sqrt{5}$ es la raíz cuadrada negativa de 5

$+\sqrt{-5}$ es la raíz cuadrada positiva de -5

$-\sqrt{-5}$ es la raíz cuadrada negativa de -5.

Los dos últimos casos requieren una atención especial. Si los estudiantes toman conciencia de la situación planteada, se ahorrarán muchas dificultades más adelante. El signo clave es el menos que está bajo el radical.

Para encontrar los posibles valores de $+\sqrt{-5}$ y $-\sqrt{-5}$ sería necesario obtener un número cuyo cuadrado fuera negativo. ¿Es eso posible en $\mathbb{R}$? ¿Existe en $\mathbb{R}$ algún número cuyo cuadrado sea negativo?

Eso no es posible en los sistemas trabajados hasta ahora. Estamos ante un problema que no tiene solución en los sistemas con $\mathbb{R}$. Hay otros casos aparentemente sencillos pero cuya solución requirió la creación de nuevos números, nuevas operaciones con otras leyes, y por consiguiente de nuevos sistemas con nuevas estructuras. De eso trata la próxima unidad.

En el desarrollo de esta unidad se han aplicado ideas básicas sobre el enfoque de sistemas y dentro de él sobre el enfoque de operadores. Se han dado pistas para hacer un recorrido por diversos sistemas relacionales y operacionales. El maestro puede facilitar un ambiente de confianza para que los alumnos asuman las actividades y los problemas que se plantean (y todos los que ellos propongan) como retos que les exigen una determinada solvencia en el manejo de los temas estudiados anteriormente.

En los resultados que obtengan hallarán, tanto los alumnos como el maestro, indicadores de cómo van los procesos de motivación, de aprendizaje, de autoexigencia, de desarrollo del pensamiento, de capacidad para trabajar en grupo y para justipreciar el trabajo propio y el de los demás. En esas condiciones los alumnos pueden solicitar ayuda cuando la necesitan, los maestros pueden programarla en el momento oportuno, y todos pueden reconocer y disfrutar los logros alcanzados.

Esta actitud de responsabilidad compartida es la que va transformando la concepción y las prácticas evaluativas de modo que el interés por el estudio sea más profundo que el simple deseo de obtener una buena calificación.

Unidad III

INTRODUCCION A LOS SISTEMAS CON NUMEROS COMPLEJOS

Introducción

Cada unidad puede considerarse especial por diversas razones. Un factor de motivación para los estudiantes es conocer esas razones. Sobre esta unidad podemos decir, que en primer lugar, inicia el estudio de los sistemas que se construyen con los números complejos, uno de los conjuntos numéricos cuya invención originó grandes controversias entre los matemáticos. Ante la necesidad teórica de crear nuevos números para resolver cierto tipo de ecuaciones de segundo grado, surgieron esas controversias debido a la imposibilidad de crearlos sin violentar reglas matemáticas vigentes en otros sistemas numéricos y a la dificultad de ciertas mentes para aceptar lo nuevo. Para muchas personas resulta un tanto difícil aceptar que los números negativos puedan ser considerados como cuadrados de otros números y que por consiguiente tengan raíces cuadradas; y esa posibilidad no puede descartarse de entrada si se quieren construir los números complejos.

En segundo lugar esta unidad puede también considerarse como muy especial porque ofrece una oportunidad para estimular ciertos procesos de pensamiento superior, acicatear la mente para que viva la "experiencia mental" de crear entes matemáticos y de organizarlos en sistemas conceptuales con un soporte material mínimo o sin él. En otros casos como cuando se trabajó con los números naturales y con los racionales fue relativamente fácil encontrar situaciones de la vida real que sirvieron como sistemas concretos familiares para la elaboración de los conceptos. Todo parecía "más natural", no se estaba contraviniendo ninguna ley matemática. Sinembargo esa ventaja aparente encerraba un obstáculo epistemológico claro: se podía pasar de un sistema numérico a otro sin tomar mayor conciencia de lo que ese paso implicaba. En cambio al pasar de los sistemas con números reales a los sistemas con números complejos el paso es tan fuerte que es imposible darlo sin tener consciencia de él.

Ojalá esa circunstancia sea aprovechada por alumnos y profesores para intensificar la capacidad de reflexión y de análisis, para estimular la creatividad, la capacidad de argumentación y de organización coherente de las ideas y la flexibilidad de pensamiento para pasar de un sistema a otro teniendo presentes las reglas válidas en cada uno.

Se proponen dos formas de construcción de los nuevos números:

- Construcción de los números imaginarios puros como raíces de un cierto tipo de ecuaciones de segundo grado. Esta es la construcción más abstracta y teórica; es también, en líneas generales, la más difundida en los libros de álgebra del bachillerato.

- Construcción de los números complejos a partir de operadores rotores y de operadores ampliadores (o reductores). Las rotaciones, las multiplicaciones, las composiciones sirven como sistemas concretos (por ser ya conocidos) para los nuevos sistemas conceptuales. Esta es la menos conocida de las dos propuestas.

No se avanza en las operaciones clásicas con números complejos por falta de espacio. Afortunadamente ese tema, en cuanto a la manipulación de símbolos y a la aplicación de leyes, se encuentra desarrollado en cualquier texto de álgebra de secundaria.

Si con el desarrollo de las actividades acá propuestas los alumnos intensifican su actividad cerebral y avanzan en el desarrollo de su pensamiento, se justifica la inclusión de esta unidad en el programa.

Objetivos generales

- Aprovechar esta oportunidad para incrementar el gusto por las actividades que requieren el pensamiento superior.

- Contribuir a formar un ambiente propicio para la construcción de los números complejos a partir de la actividad mental.

- Construir los números complejos de maneras diferentes y explorar alternativas para su representación gráfica y su simbolización formal.

- Tomar consciencia de las distintas formas, ya estáticas, ya dinámicas de definir nuevos sistemas numéricos y de relacionarlos entre sí.

- Formular interrogantes, buscar pistas para su solución, analizarlos y resolverlos con el apoyo del profesor y con la consulta bibliográfica.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

28. Explicitar y analizar el hecho de que en Matemáticas es posible crear números, operaciones y sistemas para superar limitaciones de otros sistemas conocidos.

29. Construir números cuyo cuadrado es negativo, como raíces de ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 + c = 0$, con $c > 0$, que son insolubles en $\mathbb{R}$.

CONTENIDOS BASICOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

El primer objetivo de esta unidad busca una toma de consciencia sobre las posibilidades que hay en Matemáticas de ejercer el poder de la voluntad y la mente humanas para:

- crear nuevos conceptos, conjuntos, operaciones, relaciones sistemas, . . .

- ampliar o modificar conceptos construídos o adoptados anteriormente.

- mantener la coherencia entre lo que se crea y lo ya existente.

- encontrar progresivamente soluciones para problemas que son insolubles en los sistemas conocidos.

Esta toma de consciencia resulta oportuna justamente antes de realizar la construcción de los números imaginarios, de los números complejos y, con ellos, de nuevos sistemas numéricos.

Los alumnos pueden recordar cómo a medida que hemos ido avanzando en el desarrollo de los Programas de Matemáticas encontramos ciertos problemas cuya solución ha requerido la construcción de nuevos entes y sistemas matemáticos. En la creación de cada nuevo sistema confluyen fuerzas antagónicas: por una parte el respeto a los conceptos, operaciones y relaciones establecidos en los sistemas conocidos, y por otra la necesidad y el interés sentidos por las personas, de buscar y crear respuestas a los problemas que se van presentando y cuyo tratamiento es imposible mientras no se creen nuevos objetos matemáticos en nuevos micromundos.

En la creación de los enteros (en 7º grado) se buscaba evitar las "restas imposibles", pero para ello había que violentar la idea de que los números se emplean para contar objetos manipulables o que son cardinales de conjuntos finitos. Se necesita un acto consciente de la inteligencia y de la voluntad para crear los nuevos números, para redefinir las operaciones y las relaciones y para articular el nuevo sistema con el anterior o los anteriores, según sea el caso.

También puede analizarse esa actividad creadora en el caso de introducir los racionales y los reales. Algunas lecturas sobre la historia de las matemáticas pueden emplearse como ayudas para la reflexión y la discusión.

Acá van algunas ideas en ese sentido. Un matemático alemán de la corriente intuicionista, Leopold Kronecker (1823-1891), pronunció una frase que ha pasado a la historia por el mensaje que encierra sobre las matemáticas como creación de la mente humana: "Dios creó los números naturales. Todo lo demás es obra de los hombres". Esta idea, aunque a primera vista cae muy bien a los constructivistas, se queda corta, ya que los números naturales como números de contar, o como cardinales de conjuntos finitos, también son obra de los hombres.

Piaget documentó las laboriosas construcciones cardinales y ordinales ("clasificaciones y seriaciones") que van haciendo los niños en la construcción de los números naturales, y la dificultad que tienen en coordinarlas en un sistema coherente que corresponda a lo que los adultos llamamos la "aritmética elemental". Como en las culturas antiguas, también los niños crean nuevas construcciones mentales: los números naturales con sus operaciones y sus relaciones.

Otro aspecto es la resistencia que se produce ante la idea de nuevas creaciones matemáticas. Al respecto la historia nos cuenta que:

- Los números negativos fueron considerados inicialmente como falsos, inútiles, sordos o absurdos.

- Los griegos hacían cálculos con números racionales positivos, pero no los consideraban como números sino como razones entre números.

- En la Edad Media se llamó "números sordos" a radicales como $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. El mismo nombre de "irracionales" no parece ser muy lisonjero, pues además de negar que sean razones entre enteros, parece también negarles que sean razonables.

Una sugerencia metodológica es la de aprovechar la discusión de este tema entre los alumnos para motivarlos por la construcción de los números imaginarios y de los complejos como nuevos objetos que van más allá de los negativos, los racionales y los irracionales. Inicialmente se tenían como algo sospechoso, hasta el punto de que Leonhard Euler (1707-1783) expresó que números como $\sqrt{-1}$ "no son nada ni menos que nada, lo cual los hace necesariamente imaginarios o imposibles".

¿COMO RESOLVER ECUACIONES DEL TIPO $x^2 + c = 0$, CON $c > 0$?

En 8º grado los alumnos trabajaron este tipo de ecuaciones cuando $c \neq 0$, y analizaron los dos casos que se pueden presentar, es decir, cuando $c > 0$ y cuando $c < 0$. Conviene que recuerden lo que se analizó para el caso que nos interesa ahora y para el cual se dijo que no hay ningún número real que sea solución de la ecuación $x^2 + c = 0$.

El análisis de casos particulares de ecuaciones como $x^2 + 4 = 0$ puede ayudar. Más que recordar de memoria lo que sucede, es necesario que los estudiantes trabajen la ecuación, y se encuentren con que si proceden simbólicamente y aplican las reglas del álgebra ya conocidas, obtendrán una sucesión de pasos como la siguiente:

$x^2 + 4 = 0$. Es la ecuación dada.

$x^2 = -4$. Se le resta 4 a cada miembro de la ecuación.

$x_1 = +\sqrt{-4}$ Se designa con x_1 una raíz cuadrada "positiva" de -4.

$x_2 = -\sqrt{-4}$ Se designa con x_2 una raíz cuadrada "negativa" de -4.

En las dos últimas expresiones está la clave de la cuestión:

$$x_1 = +\sqrt{-4}, \text{ y, } x_2 = -\sqrt{-4}$$

Signo negativo bajo un radical de índice 2

Quienes se den cuenta de que para resolver el ejercicio hay que encontrar un número cuyo cuadrado sea negativo, y de que ninguno de los reales cumple esa condición, tomarán consciencia del problema y encontrarán justificada la creación de los nuevos números: los imaginarios.

HACIA LOS NUMEROS IMAGINARIOS COMO RAICES DE CIERTAS ECUACIONES CUADRATICAS

Para resolver el problema hay que aplicar la capacidad creadora de la mente, salir del sistema de los números reales y construir otros sistemas en donde existan números y operaciones tales que las ecuaciones que nos ocupan tengan solución. En esta unidad sugerimos varios procedimientos para realizar esa construcción. Se trabaja en primer lugar el procedimiento más conocido, el que aparece generalmente en los textos de álgebra, y después se presentan otros menos difundidos y, por consiguiente, menos trabajados en el bachillerato. La razón para presentarlos en ese orden es más práctica que lógica: trabajar inicialmente con lo que la mayoría de los maestros hace, para invitarlos luego a buscar nuevos caminos.

Ese procedimiento más conocido resuelve el problema en el nivel del pensamiento formal, a partir de definiciones y de proposiciones que se acuerdan, se introducen y se tienen en cuenta en la manipulación de los símbolos.

Volvamos a las expresiones que teníamos para x_1 y x_2 y veamos los pasos que se dan y los acuerdos que se establecen:

Primer acuerdo: es posible extraerles dos raíces cuadradas a los números reales negativos. Ensayemos primero con lo que antes correspondía a la raíz cuadrada positiva. Ahora no sabemos si es positiva en el sentido usual, pero sigamos llamándola "positiva" entre comillas:

$x_1 = +\sqrt{4(-1)}$ Se factoriza -4 en $4(-1)$

$x_1 = +\sqrt{4}(+\sqrt{-1})$ La radicación distribuye sobre la multiplicación.

$x_1 = +2(+\sqrt{-1})$ La raíz cuadrada positiva de 4 es 2.

Segundo acuerdo: La raíz cuadrada "positiva" de -1 es la unidad imaginaria y se simboliza por i. Luego:

$x_1 = +2(+i)$ Se sustituye $+\sqrt{-1}$ por el símbolo i.

$x_1 = 2i$ Se obtuvo la raíz cuadrada "positiva" de -4.

Para obtener la raíz cuadrada "negativa" los pasos son similares:

$x_2 = -\sqrt{4(-1)}$ Se factoriza -4 en $4(-1)$

$x_2 = -\sqrt{4}(\sqrt{-1})$ La radicación distribuye sobre la multiplicación.

$x_2 = -2(\sqrt{-1})$ La raíz cuadrada negativa de 4 es -2.

$x_2 = -2i$ Se sustituye $(\sqrt{-1})$ por el símbolo i.

Se obtuvo la raíz cuadrada "negativa" de -4.

Hemos encontrado 2i y $-2i$ como soluciones de la ecuación $x^2 + 4 = 0$. Conviene observar que en este caso $c = 4$ y que 2 y -2 son las raíces cuadradas de 4.

Luego la pregunta sobre cómo resolver este tipò de ecuaciones ya tiene una respuesta: es posible resolverlas así:

$x_1 = +\sqrt{c}\cdot\sqrt{-1}$; $x_1 = +\sqrt{c}(i)$; o sea:
$x_1 = +i\sqrt{c}$.

$x_2 = -\sqrt{c}\cdot\sqrt{-1}$; $x_2 = -\sqrt{c}(i)$; o sea:
$x_2 = -i\sqrt{c}$.

Se extiende a los números negativos la operación de extracción de raíces cuadradas, operación que hasta ahora había estado restringida a los números positivos y al cero.

Para el desarrollo de las operaciones lo que se hace es descomponer el número negativo al cual se le va a extraer la raíz en el producto del opuesto del negativo por menos uno. Eso hace que en los cálculos aparezca la unidad imaginaria cuyos símbolos usuales son: i, $\sqrt{-1}$.

Para continuar avanzando, los estudiantes pueden preguntarse cuestiones como ¿qué hay más allá de la unidad imaginaria i? El maestro puede sugerirles que busquen la forma de determinar algunas potencias enteras y positivas de i:
i^2, i^3, i^4, $-i$, $-i^2$, $-i^3$, $-i^4$. . . (Los exponentes son números enteros positivos).

Para que el ejercicio tenga valor formativo debe llevar a los estudiantes a identificar:

- Las definiciones, los símbolos, las fórmulas nuevas que aplican.
- Las definiciones, operaciones, propiedades, fórmulas que extienden de otros sistemas al nuevo: factorización, potenciación, radicación, etc.
- Los conceptos que reelaboran: Es el caso del concepto de la relación "... es raíz cuadrada de..." El dominio y el rango o recorrido son ahora diferentes de los considerados cuando esta relación se trabajó en los números reales. El dominio era restringido a los reales positivos y al cero; ahora incluye a todos los reales, y en particular incluye a -1, algo inadmisible según las definiciones anteriores. El rango o recorrido incluye ahora los nuevos números, los imaginarios.
- Es también el caso de la función "cuadrado": hay que redefinirla. El dominio toma ahora los números imaginarios y todos los reales; en particular incluye a i (es decir: $\sqrt{-1}$) para que tenga sentido considerarlo como preimagen y para que sea posible transformar ese nuevo elemento aplicándole el operador que produce su cuadrado. Por extensión, el dominio incluye también a $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{\pi}$, y general $\sqrt{x}$ con $x < 0$. El rango o recorrido incluye ahora los negativos; en particular incluye a -1 como el cuadrado de i ($i^2 = (\sqrt{-1})^2$); $i^2 = -1$. Por extensión, el rango incluye a cualquier número negativo, ya que -1 puede ser considerado como uno de los factores de cualquier número negativo. Es obvio que todos estos "hechos matemáticos" contrarían las leyes de los sistemas construídos con números reales. Por eso hay que salirse de ellos y construir otros sistemas donde lo que antes era una violación de las leyes o un desconocimiento de los conceptos propios del sistema, ahora es una operación acorde con las leyes y la dinámica del nuevo sistema.

Como más adelante se sugieren otras estrategias para construir los números imaginarios y los complejos, no nos detenemos más por ahora; pero si los estudiantes lo desean, pueden consultar los textos del álgebra usuales, ya que casi todos presentan este tema a partir de definiciones dadas aunque generalmente omiten el proceso de su construcción.

Como se dijo anteriormente, el procedimiento presentado requiere el pensamiento formal y lo ejercita, pero no exige ni emplea el enfoque de operadores para una construcción activa de los nuevos números, ni utiliza el enfoque de sistemas que parte de sistemas concretos o familiares al alumno (así sean ya muy abstractos), para construir mentalmente el nuevo sistema conceptual y luego los sistemas simbólicos apropiados.

Por eso la invitación es para que en los objetivos siguientes construyamos los imaginarios y los complejos a partir de actividades y conceptos ya conocidos.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

30. Construir operadores que aplicados a un vector en cualquier posición inicial en el plano lo hagan girar, sin variar su longitud, con diversas amplitudes y sentidos.

31. Asociar el rotor de media vuelta con la "unidad negativa" -1, y el de un cuarto de vuelta con la "unidad imaginaria" i, y analizar los resultados de aplicarlos sucesivamente a un vector dado.

32. Construir operadores compuestos que aplicados a un vector lo hagan girar un cierto ángulo y amplíen o reduzcan su longitud.

33. Construir un sistema rotacional de coordenadas polares y representar en él puntos del plano mediante el radio vector y el ángulo de rotación.

34. Generalizar la construcción de rotores ampliadores y de rotores reductores, y proponer alternativas para su representación en el plano y para su simbolización formal.

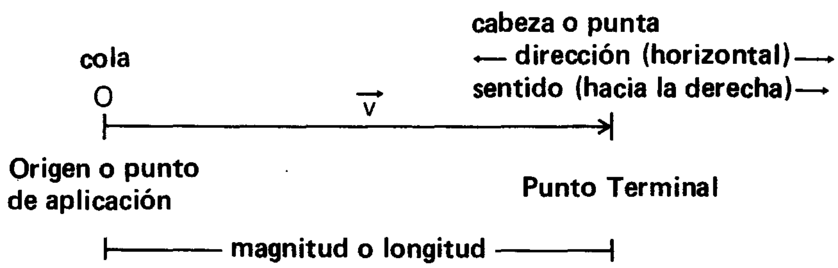
CONTENIDOS BASICOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

La metodología activa y el enfoque constructivista con que se trabajan estos programas exigen que el tema de la construcción de los números complejos y las operaciones que entre ellos se realizan, se relacionen con la representación de puntos en el plano, con las rotaciones, las traslaciones y las homotecias. Esta forma de introducirlos tiene además la ventaja de que los estudiantes aprenden así los números complejos en situaciones más directamente relacionadas con la física, en la cual tienen, como lo verán cuando estudien electricidad y magnetismo, importantes aplicaciones.

Un concepto previo que necesitamos es el de vector. Aún cuando no se ha hecho una unidad sobre vectores, sí se ha tratado un concepto de vector relacionado con las traslaciones (ver objetivos 45 y 46 de 8º grado) y se ha hecho un desarrollo del mismo en temas como: las traslaciones en la recta y en el plano, la representación de los enteros, los racionales y los reales sobre una recta y el estudio de los efectos de algunos operadores.

Lo importante es tener siempre presente que un vector es una construcción conceptual activa, que hasta ahora se ha considerado como un operador trasladador que "corre" o "se lleva" la recta, el plano o el espacio sin perder la dirección inicial. La palabra "vector" en latín significa "llevador" o "acarreador", y está relacionada con "vehículo". Los vectores viven pues en los sistemas conceptuales; en cambio, las flechas, letras, números con signo, parejas o triplas ordenadas que los representan viven en los sistemas simbólicos que se inventan para manejar mejor los sistemas conceptuales respectivos y para comunicarnos más precisamente acerca de nuestras construcciones mentales.

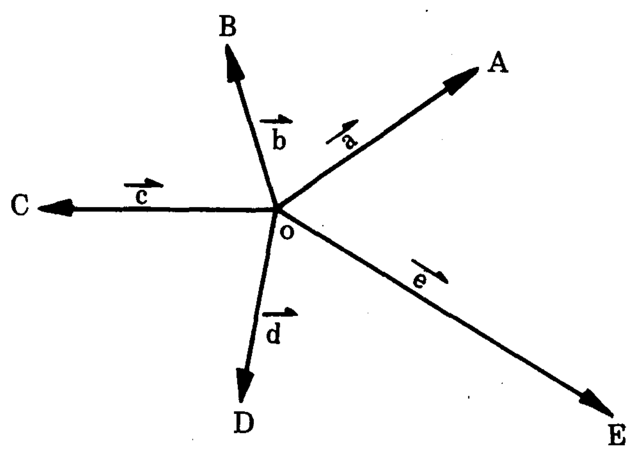
Para representar vectores en el plano se han empleado flechas en las que es importante tener en cuenta: la dirección, el sentido y la longitud o magnitud de cada una de ellas; y, en algunos casos puede ser importante el punto de origen o de aplicación.



Los alumnos pueden discutir preguntas que les permitan refrescar y complementar sus conocimientos sobre el tema:

¿A cuáles magnitudes se las conoce como magnitudes vectoriales? ¿Cómo se representan esas magnitudes? ¿Cuándo se dice de dos vectores que son iguales? ¿Cuándo se dice que son opuestos? ¿Qué es un vector nulo? Esa discusión, y las consultas que hagan los estudiantes en libros de física y de matemáticas por ejemplo, aportarán ideas claves para el manejo que se hará de los vectores en las actividades siguientes. En ellas será necesario rotar vectores, trasladarlos, ampliar o reducir su longitud, y efectuar operaciones entre ellos; pero en esas actividades el interés no es hacer teoría sobre vectores, sino utilizarlos como un sistema familiar o concreto (por ser ya conocido y manejado) para la construcción del sistema conceptual de los números complejos.

En un plano dado, determinemos un punto fijo O al que llamamos origen. Entonces todos los puntos de ese plano quedan determinados por los vectores geométricos que trasladarían el punto de origen al punto respectivo.



Si O es el punto fijo considerado como origen en el plano, entonces los puntos A, B, C, D y E quedan determinados por los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, y $\vec{e}$, respectivamente.

Los mismos vectores también pueden designarse por: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OE}$, respectivamente.

De la rotación de figuras en el plano (ampliamente trabajada en los grados 6º, 7º, y 8º) pasamos ahora a la rotación de vectores.

Sea O un punto fijo llamado origen y sea $\vec{v}$ un vector cuyo origen coincide con el punto O y que tiene cualquier posición. Vamos a hacerlo girar en ángulos de diferente amplitud, a observar y a analizar los resultados. Como material de apoyo pueden emplearse recortes de cartulina: un cuadrilátero para materializar el plano y una flecha para materializar el vector. El origen O del plano se señala con un chinche, por ejemplo, y con él se fija la cola de la flecha que representa el vector $\vec{v}$. Acordamos que los giros o rotaciones del vector se harán en sentido positivo, es decir, el sentido contrario al de las manecillas del reloj. Los alumnos pueden producir rotaciones con ángulos de la amplitud que deseen y hacer los análisis que les parezcan pertinentes. Por razones prácticas, dentro del desarrollo del tema que nos ocupa, vamos a centrar la atención sobre los efectos de producir rotaciones de 180°, 90°, 270° y 360°. Para simbolizar el operador que rota los vectores, u operador rotor, empleamos la letra R, y para indicar la amplitud del ángulo en cada caso escribimos el número de grados como subíndice. Para evitar dificultades tipográficas omitimos, en el subíndice, el símbolo "o" que nos indica que la unidad de medición es el grado. Los rotores que vamos a aplicar se notarán así: R_{180}, R_{90}, R_{270}, R_{360}.

La intencionalidad de estas actividades de rotar objetos es la de proporcionar a los alumnos ocasiones múltiples de detectar regularidades de esas acciones y captar "lo que es lo mismo" en ellas. Esto permite que interioricen esas acciones como operadores mentales que producen rotaciones y que llamamos "rotores".

Como acción parece diferente darle un cuarto de vuelta al lápiz en sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj, pero dejando fijo el extremo que tiene el borrador, o hacerle algo parecido a una hoja de papel dejando fija la esquina inferior izquierda, o dejando fijo el centro, etc., pero el cerebro puede construir un rotor mental de un cuarto de vuelta en sentido positivo, o de +90 grados, y esa construcción es la meta que se pueden proponer el alumno y el profesor.

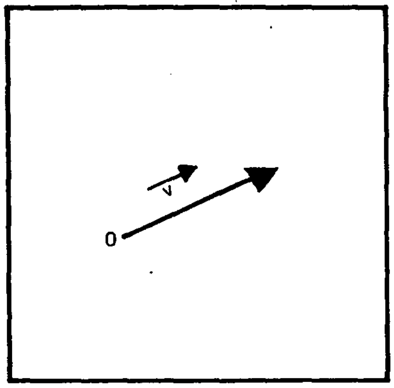
Ya hemos encontrado en 8º grado algunos de estos rotores mentales (objetivos 49-66 de 8º grado), como el que hace dar un cuarto de vuelta (en sentido positivo) al objeto al que se le aplique, el que hace dar media vuelta, etc.

Habíamos utilizado notaciones como C y R_{90} para el rotor de un cuarto de vuelta; M y R_{180}, para el de media vuelta, T y R_{270} para el de tres cuartos de vuelta, y hasta habíamos encontrado un rotor nulo que no hace nada a las figuras, que habíamos notado R_0.

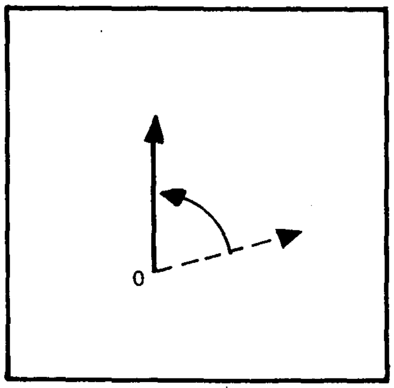
Los alumnos pueden proponer otras notaciones, como: $rotor_{90}$ ( ), rot [90°] ( ), $rotor_c$ ( ), RCTOV ( ), RCV ( ), etc.

Una observación sobre estas cinco notaciones: cada una se diferencia de las otras por los signos empleados y por la forma de organizarlos, pero se identifican en que todas representan el mismo operador rotor que hace girar 90 grados en sentido positivo a un objeto todavía no determinado, pero cuyo "puesto" en la notación se indica con los paréntesis vacíos.

A medida que los alumnos manipulan el material, van teniendo la experiencia concreta de las rotaciones, lo que les permite reforzar el concepto de los números como operadores mentales; éstos se van construyendo a través de la internalización, el análisis y la coordinación de nuestras acciones, y a través de la confrontación con lo que hacen y piensan los demás.



Plano de rotaciones, origen del plano y posición inicial de la flecha que representa el vector $\vec{v}$.



El sentido de este giro es el que consideramos "sentido positivo".

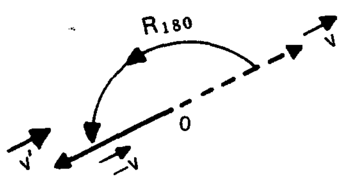
Al producirse la rotación, la flecha que representa el vector cambia de posición, excepto en su origen.

Empleamos arcos y flechas como ayudas visuales para que podamos trabajar más fácil los rotores como operadores mentales.

Las rotaciones antes mencionadas y sus correspondientes resultados se representan en las gráficas siguientes. Las flechas en trazos discontinuos indican la posición inicial del vector rotado.

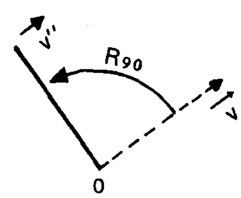
Los arcos visualizan las rotaciones y, las flechas en línea gruesa representan el resultado de la rotación respectiva.

Caso R_{180}:



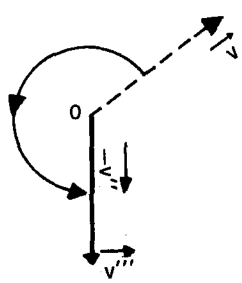
El arco muestra que el vector $\vec{v}$ giró 180 grados en el plano. El vector $\vec{v}'$ es el resultado. ¿Es esta una rotación de π radianes?
Es $\vec{v}' = -\vec{v}$?

Caso R_{90}:



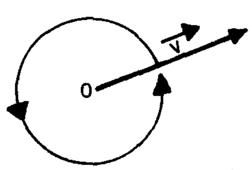
El arco muestra el giro de 90° en el plano. El vector $\vec{v}''$ es el resultado. ¿Es esta una rotación de $\pi/2$ radianes?

Caso R_{270}·



¿Coinciden este giro en el plano y su resultado con los de girar 3/4 de vuelta o $3\pi/2$ radianes? ¿Es $\vec{v}''' = -\vec{v}''$?

Caso R_{360}



¿Coinciden este giro en el plano y su resultado con los de aplicar R_0? ¿Es $\vec{v} = -\vec{v}'$?

¿Qué relaciones pueden establecerse entre ciertos pares de vectores, por ejemplo, entre el inicial $\vec{v}$ y el obtenido por R_{180}?

A medida que los alumnos vayan aplicando los rotores y produciendo las rotaciones, irán surgiendo seguramente los comentarios y los análisis. En general debe observarse que la flecha de cartulina, como objeto material, es la misma en los cuatro casos, pero que el vector que ella representa es diferente cada vez que su dirección, su sentido o ambos, resulten diferentes de los del vector inicial. Es importante analizar con los alumnos por qué en las ilustraciones hechas anteriormente el vector resultante de R_{180} se ha marcado con $-\vec{v}$, por qué el vector resultante de R_{360} se ha marcado con $\vec{v}$, y por qué en los otros dos casos los vectores resultantes se han marcado el uno con $\vec{v}''$ y el otro con $-\vec{v}''$.

Los siguientes son aspectos especialmente importantes dentro del análisis de las cuatro rotaciones que venimos estudiando. Si los alumnos por sí mismos, caen en la cuenta de ellos, hay que destacar esos aspectos observados; de lo contrario hay que procurar que los identifiquen, y que comenten sus características.

- En cada caso hay que identificar claramente tres cosas: el vector inicial, el rotor que lo hace girar y el vector resultante.

- Dentro del enfoque de operadores es un reto y una ventaja el valorar y destacar la parte activa de cada rotación, para lo cual se han empleado los arcos en las gráficas.

- ¿Qué diferencias se presentarían si los rotores aplicados hicieran girar el vector en el mismo sentido en que giran las manecillas del reloj, que dentro de nuestros acuerdos es el sentido negativo?

- Como rotor activo R_{360} es diferente de R_0. El primero, R_{360}, hace que el vector al cual se aplica dé una vuelta completa con centro en el origen. En cambio R_0 como rotor no produce movimiento alguno. Pero el resultado de aplicar R_{360} si es el mismo que el de aplicar R_0. Este hecho es el que generalmente se tiene en cuenta para considerar que $R_{360} = R_0$. Por la tendencia a trabajar destacando los resultados más que los procesos; sucede que una vez producida la rotación, perdemos de vista la parte dinámica de ella y nos fijamos sólo en la posición del vector resultante. En ese sentido únicamente es que podemos escribir:
  $R_0 = R_{360} = R_{-360} = R_{720} = R_{-720}$, etc.

- El resultado de aplicar R_{180} a un vector $\vec{v}$ es un vector $\vec{v}'$ opuesto al inicial $\vec{v}$. Por eso es apropiado designarlo por $-\vec{v}$:
  $R_{180}\ (\vec{v}) = \vec{v}' = -\vec{v}$.

- El resultado de aplicarle R_{360} es el mismo vector inicial $\vec{v}$. Por eso lo hemos designado también por $\vec{v}$: $R_{360}\ (\vec{v}) = \vec{v}$.

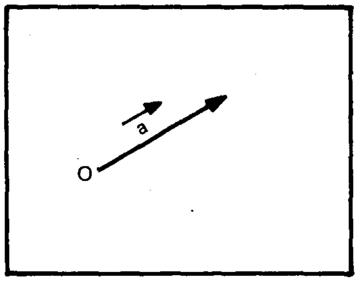
- El resultado de aplicarle R_{90} es un vector perpendicular al inicial. Se ha designado con $\vec{v}''$: $R_{90}\ (\vec{v}) = \vec{v}''$.

- El resultado de aplicarle R_{270} es un vector perpendicular al inicial. Es fácil comprobar que tiene la misma dirección y sentido contrario al obtenido por R_{90}. Se ha designado con $-\vec{v}''$, por ser el opuesto de $\vec{v}''$:
  $R_{270}\ (\vec{v}) = -\vec{v}''$.

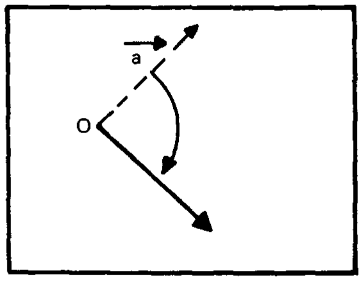
Es posible que los alumnos se interesen por producir y caracterizar rotaciones con cualquier amplitud para el ángulo, y, con cualquier posición inicial para el vector. Pueden continuar empleando el material concreto para algunos ejercicios más, pero debe llegar un momento en el que realicen y coordinen mentalmente las rotaciones sin requerir el soporte del material físicamente manipulable. En esa coordinación mental de las rotaciones pueden buscar respuestas a preguntas como las siguientes: ¿Es posible producir rotaciones con cualquier valor numérico entero para las amplitudes de los ángulos medidas en grados? ¿Para cualquier valor numérico racional? ¿Para cualquier valor numérico real? ¿Hay alguna diferencia en la realidad si se miden las amplitudes de las rotaciones en fracciones de vuelta, o en radianes? ¿Habría que introducir alguna diferencia en la notación de los rotores? (Piense en qué sería R_1, si no supiéramos en qué sistema métrico estamos viviendo: ¿un rotor de un grado? ¿de una vuelta? ¿de un radián? ¿Cuáles son las características de las rotaciones y de los resultados si los rotores hacen girar el vector en sentido negativo? Supongamos que el ángulo de rotación es mayor que 360°. ¿Habrá algún rotor con ángulo menor que 360° que produzca el mismo efecto que el otro rotor que tenía un ángulo mayor que 360°? ¿Qué resulta si el ángulo es de 405°, o de 450°, o de 675°? ¿Se trabaja siempre con un vector de magnitud o longitud unidad, o es posible variar su longitud?

A continuación van unas ideas para apoyar la búsqueda de respuestas para la pregunta sobre las rotaciones en sentido negativo, es decir, en el mismo sentido en que giran las manecillas del reloj.

Se realiza una actividad que emplea los mismos materiales de la anterior y que aplica otros rotores que hacen girar ángulos de 180°, 90°, 270° y 360°, pero ahora en sentido negativo, que simbolizamos o notamos respectivamente como R_{-180}, R_{-90}, R_{-270} y R_{-360}. Los alumnos podrán notar varias diferencias entre esta actividad y la anterior: en los rotores que se aplican, en las rotaciones que se producen, y en los resultados que se obtienen.



Plano de rotaciones, origen del plano y posición inicial de la flecha.

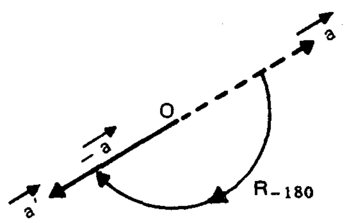


El sentido en que se produjo esta rotación es el negativo.

Como en la actividad anterior, la flecha punteada recuerda la posición inicial del vector, el arco permite visualizar la acción misma de rotar, y la flecha con línea gruesa representa el resultado.

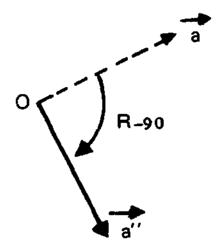
El desarrollo y los resultados del trabajo de los alumnos pueden representarse en gráficas como las siguientes:

Caso R_{-180}:



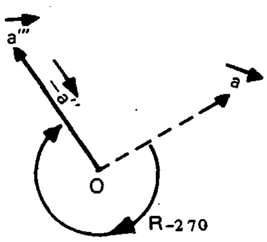
La parte dinámica es la rotación de 180º en el sentido convenido, el resultado es el vector opuesto al inicial: $R_{-180}(\vec{a}) = \vec{a}' = -\vec{a}$

Caso R_{-90}:



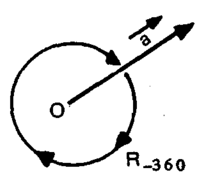
¿Hay alguna rotación en sentido positivo que sea equivalente a esta?

Caso R_{-270}:



El rotor R_{-270} hace que el vector inicial gire 3/4 de vuelta en el plano en el sentido de las manecillas del reloj.
¿Es $R_{-270}(\vec{a}) = \vec{a}''' = -\vec{a}''$.
¿Qué rotor con sentido positivo es equivalente a R_{-270}?

Caso R_{-360}:

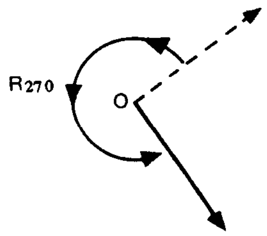


¿En qué se parecen y en qué se diferencian R_0, R_{-360} y R_{360}?

Si cada alumno ha aplicado los ocho rotores anteriormente explicados (o los 9 si se agrega R_0), y ha elaborado las gráficas correspondientes, estará en capacidad de relacionar los diferentes casos y de identificar diferencias y coincidencias entre ellos. Algunas preguntas pueden ayudarles a sacar conclusiones: ¿Desde el punto de vista dinámico hay entre estos rotores dos o más que al ser aplicados al vector inicial produzcan el mismo giro? ¿Desde el punto de vista estático, es decir, el de los vectores resultantes, hay algunas parejas de rotores que puedan considerarse como equivalentes?

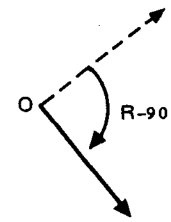
Comparemos por ejemplo el caso R_{270} con el caso R_{-90}:

Caso R_{270}:



Es clara la diferencia entre R_{270} y R_{-90} como rotaciones activas.

Caso R_{-90}:



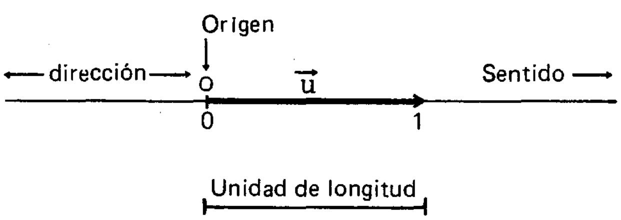
Es igualmente claro que el resultado de R_{-90} es el mismo de R_{270}.

Podría concluírse que el resultado final de girar 270º en sentido positivo es el mismo que el de girar 90º en sentido negativo. ¿Qué sucedería si no se tuvieran acuerdos sobre la orientación de los rotores y cada uno pudiera aplicarlos en el sentido que le pareciera?

¿Cuáles otras parejas de rotores distintos, producen un mismo resultado?

CONSTRUYAMOS LOS NUMEROS COMPLEJOS COMO ROTORES

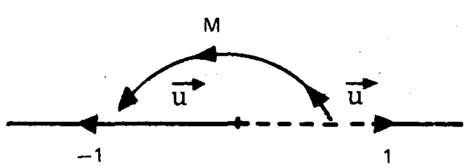
Las actividades realizadas anteriormente, las preguntas resueltas, las no resueltas, y aún aquellas cuya respuesta no nos satisface plenamente, nos preparan para la actividad que proponemos a continuación:



La unidad positiva 1 queda simbolizada mediante una flecha que representa el vector unidad $\vec{u}$.

Trabajamos en un plano en el cual elegimos un punto fijo 0 como origen. Tracemos en él la recta que conocemos como "eje de las abscisas" o "eje de las x" y que por consiguiente pasa por 0 y tiene una dirección estandarizada, (la horizontal), un sentido elegido como positivo (de izquierda a derecha), y un segmento unidad determinado (que está marcado en sus extremos con el cero en el origen y el uno en el extremo derecho).

En estas condiciones apliquemos al vector unidad $\vec{u}$ el rotor R_{180}, llamado también "M" o "de media vuelta", que ya comprobamos que transforma el vector al cual se le aplica en el vector opuesto.



R_{180} hace que $\vec{u}$ gire 1/2 vuelta en el plano. La punta de $-\vec{u}$ señala el punto −1.

Tenemos tres operaciones que aplicadas al vector unitario, simbolizado por $\vec{u}$ o por +1, producen el mismo resultado: el −1 como vector. Las tres operaciones son:

. aplicarle el reflector en el origen de la recta.
. multiplicarlo por −1.
. aplicarle el rotor simbolizado por R_{180} o por M.

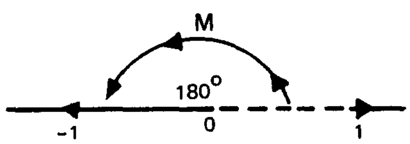
$Ref\,\ell\,(\vec{u}) = -\vec{u}$		$Ref\,\ell\,(+1) = -1$	
$(-1)\bullet(\vec{u}) = -\vec{u}$		$(-1)\bullet(+1) = -1$	
$R_{180}\,(\vec{u}) = -\vec{u}$		$R_{180}\,(+1) = -1$	
$M\,(\vec{u}) = -\vec{u}$		$M\,(+1) = -1$	

De acuerdo con estos resultados **vamos a considerar la operación de multiplicar por -1 en un plano, como la aplicación de un rotor de media vuelta en sentido positivo.** (En otras actividades habíamos considerado a -1 como un punto en la recta real o como un segmento orientado que va de 0 a ese punto, es decir, a -1; y, también convinimos en considerar que multiplicar por -1 en una recta, es como aplicar el reflector activo que refleja el segmento orientado $+1$ mediante un espejo colocado en el origen).

Hemos encontrado pues un resultado básico para la construcción de los números complejos: **la nueva interpretación de la expresión "multiplicar por -1" como rotar media vuelta** (o 180º, o π radianes) **en sentido positivo.**

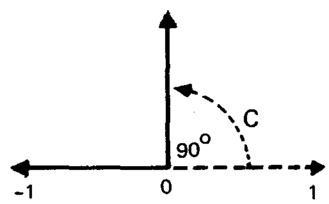
Ahora recordemos que la clave para resolver ecuaciones de la forma $x^2 + c = 0$ con $c > 0$, está en encontrar a -1 como el cuadrado de un número. Ya avanzamos un paso porque hemos construído a -1 como el rotor que hace girar media vuelta en sentido positivo, **pero todavía no tenemos razones para afirmar que -1 es el cuadrado de algún número; eso es lo que queremos encontrar.** ¿Existirá algún rotor que aplicado dos veces a cualquier vector produzca el mismo resultado que aplicarle al mismo vector el rotor -1? Sí existe y es fácil encontrarlo. Es el rotor que se simboliza por C o por R_{90} y que hace girar al vector sobre el cual se aplica, un cuarto de vuelta (o 90º o $\pi/2$) en sentido positivo.

Resultado esperado:



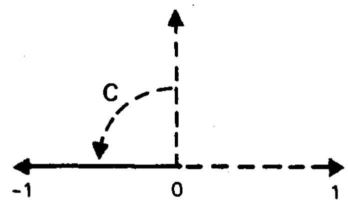
¿Se podrá llegar al vector -1 por composición de dos rotaciones iguales?

1a. rotación por C:



Primero se le aplica al $+1$ una rotación de 90º, es decir, se aplica C al vector $+1$

2a. rotación por C:



Al resultado obtenido se le aplica otra vez C y se llega al vector -1.

Aplicando al vector unitario (en posición estandarizada) **el rotor C dos veces seguidas, producimos en el plano la rotación necesaria para obtener el vector -1** (también en la posición estándar). Empleemos la notación convenida en 8º grado para la composición de rotaciones, y expresemos con diferentes niveles de simbolización lo que hemos encontrado:

Aplicando dos veces C al vector $+1$ se obtiene el vector -1.

C **después de** C, aplicado a $+1$, da -1.
C **compuesto con** C, aplicado a $+1$, produce -1.
$(C \circ C)(+1) = -1$, o también $C(C(+1)) = -1$.

Hemos visto pues que sí hay una manera de considerar que multiplicar por -1 es lo mismo que aplicar el rotor M a un vector. Si pensamos en el número -1 como operador activo, podemos identificarlo con el rotor de media vuelta M. Ahora bien como el rotor de un cuarto de vuelta C aplicado dos veces también da M, o sea -1, podemos escribir: $C \circ C = C^2 = M = -1$. **Tenemos ahora que imaginarnos un nuevo número que corresponda al rotor C, así como el -1, la "unidad negativa", corresponde al rotor M.** A ese nuevo número lo podemos llamar "**unidad imaginaria**" y simbolizarlo por una "i".

Tendríamos entonces que **multiplicar por i es como rotar un cuarto de vuelta en el sentido positivo**, y por lo tanto multiplicar dos veces por i es como multiplicar por -1, o sea rotar media vuelta en ese mismo sentido:

$i \bullet (i \bullet (+1)) = C(C(+1)) = M(+1) = -1$,
o también:
$(i \bullet i)(+1) = (C \circ C)(+1) = M(+1) = -1 = (-1)(+1)$.

Por lo tanto podemos decir que **el cuadrado de i**, que corresponde a $C^2 = C \circ C$, **debe ser -1**, que a su vez corresponde a M: $i^2 = i \bullet i = -1$, pues $C^2 = C \circ C = M$.

Hemos inventado un "número imaginario", la unidad imaginaria i, que elevada al cuadrado da −1.

Por lo tanto, podemos decir que una de las raíces cuadradas de −1 es i, pues $i^2 = -1$ ¿Puede haber otra raíz cuadrada de −1? (Busque otro rotor que aplicado dos veces sea equivalente a M, y esa sería otra raíz cuadrada imaginaria de −1).

Para continuar con la construcción de otros números imaginarios debemos establecer explícitamente algunos acuerdos.

- Primero: consideramos la composición del rotor C consigo mismo como una multiplicación de factores iguales, ya que esta técnica, conocida para hallar el cuadrado de un número, nos permite usar la notación: $C^2 = C \circ C = M$.
- Segundo: identificamos M con el número real −1 como operador, y, C con el número imaginario i como operador.
- Tercero: suponemos que una raíz cuadrada de −1 es un número que podemos notar "$\sqrt{-1}$". Por lo tanto podemos escribir: $i = \sqrt{-1}$, aunque esta igualdad tiene un problema: da la falsa impresión de que i es la única raíz cuadrada de −1.
- Cuarto: en la igualdad $(C \circ C)\ (+1) = -1$ reemplazamos la operación composición "∘" por la "nueva multiplicación" de números imaginarios que hemos inventado para que corresponda a la composición de operadores y reemplazamos el rotor C por el número que buscamos: i o $\sqrt{-1}$. Entonces tenemos: $(i \bullet i)\ (+1) = -1$, o $(\sqrt{-1}) \bullet (\sqrt{-1})\ (+1) = -1$.
- Quinto: en el sistema simbólico para el nuevo sistema numérico que estamos construyendo no se admite que: $(\sqrt{-1}) \bullet (\sqrt{-1}) = \sqrt{(-1) \bullet (-1)} = +\sqrt{1}$. Es decir, no se cumple una ley que sí rige en los sistemas con números reales. En general, para el nuevo sistema convenimos en que con $x > 0$, $y > 0$ se tiene que $(\sqrt{-x}) \bullet (\sqrt{-y}) \neq \sqrt{xy}$. (Tener presente este acuerdo ayuda a evitar errores muy frecuentes al efectuar productos entre números complejos y por supuesto entre números imaginarios).
- Sexto: Extendemos al nuevo sistema numérico dos leyes ya conocidas en otros sistemas: Primera: el producto de dos factores iguales se considera como su cuadrado; Segunda: el operador cuadrado anula el operador raíz cuadrada.

Establecidos los anteriores acuerdos podemos escribir:

$$i \bullet i = i^2 = (\sqrt{-1}) \bullet (\sqrt{-1}) = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

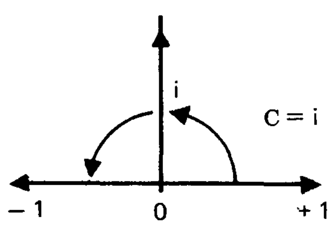
Hemos encontrado que efectivamente el cuadrado del número i, o $\sqrt{-1}$ es −1. Ya podemos afirmar que −1 es un cuadrado, y que i, o $\sqrt{-1}$ es una de sus raíces cuadradas.

Dos conclusiones de las construcciones anteriores son:

El cuadrado de la unidad imaginaria i, es la unidad negativa −1.
Una raíz cuadrada de la unidad negativa −1, es la unidad imaginaria i.

¿Con qué estamos asociando la unidad imaginaria i?

Retomemos una de las gráficas que hicimos anteriormente:



i como rotor C, e i como vector perpendicular al vector +1.

Observemos que la gráfica muestra un sistema de ejes perpendiculares en el plano (ortogonales), que tienen las direcciones estandarizadas para el eje de las abscisas o eje de las x y para el eje de las ordenadas o eje de las y.

Resumiendo la construcción hecha hasta ahora, podemos afirmar que la "unidad imaginaria", simbolizada por $\sqrt{-1}$ o por i se puede considerar desde varios puntos de vista:

a: Como un rotor que hace girar 90º. Es una concepción dinámica de i. Los arcos en la gráfica recuerdan a i como rotor.

b: Como un vector que al aplicarle el rotor i produce el vector -1. Este vector i puede tomarse también como resultado de aplicar el rotor i al vector $+1$, o vector unitario inicial. La flecha dibujada sobre el eje conocido como "eje de las y" recuerda a i como vector.

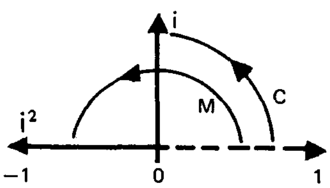
c: Como una raíz cuadrada de -1. Hemos llegado a la conclusión de que: $\sqrt{-1} = i$. ¿Habrá otra raíz? Recordemos que el operador "raíz cuadrada" en los reales no era un operador unívoco, ya que producía dos raíces diferentes cuando se le aplicaba a un número real positivo.

d: Como un número que elevado al cuadrado produce -1.

Para complementar lo anterior, observemos la gráfica y preguntémonos: ¿Es posible asociar a i con un punto del plano? ¿El mejor candidato no sería el punto donde termina la flecha? ¿Cuáles serían las coordenadas reales de ese punto? ¿Tal vez 0 y $+1$? ¿Cuál sería su representación como pareja ordenada? ¿Será $(0,1)$? ¿Se le podrá dar un nuevo nombre al eje sobre el que se ubica el vector i? ¿El mejor nombre no sería "eje imaginario"? Interrogantes como estos pueden surgir en la clase y ser fuente de motivación para los alumnos; para el profesor pueden ser maneras de evaluar las actitudes de sus alumnos, su habilidad para razonar y debatir, y su creatividad para inventar nombres y símbolos.

¿Con qué estamos asociando la unidad negativa -1?

Tratemos de explicitar ahora cómo se asocia la unidad negativa -1 con distintas construcciones conceptuales y con distintas representaciones gráficas.



i^2 como rotor y como vector.

En esta gráfica la "unidad negativa" tiene la representación estándar conocida ya en los sistemas de números reales, es decir sobre el semieje negativo de las x.

La unidad negativa -1 puede considerarse:

a: Como un rotor que hace girar 180º en sentido positivo.

b: Como un vector resultante de aplicar el rotor M al vector unitario $+1$. Podría además pensarse como un vector que al aplicarle el rotor M produce el vector $+1$.

c: Como el cuadrado de la unidad imaginaria i o $\sqrt{-1}$, es decir considerarla como i^2 o $(\sqrt{-1})^2$.

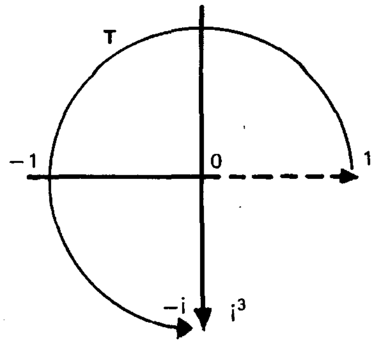
d: Como un punto del plano cuyas coordenadas son ya bien conocidas: -1 y 0. Su expresión como pareja ordenada es $(-1, 0)$.

e: Como un segmento orientado opuesto al segmento orientado unitario $\vec{u}$ o $+1$.

Habíamos dejado pendiente una pregunta:

¿Habrá otros rotores que aplicados al vector $+1$ produzcan como resultado el vector -1?

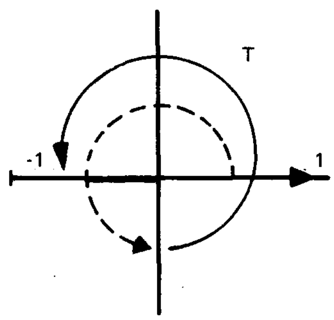
Podemos analizar a qué conduce la aplicación del rotor de tres cuartos de vuelta en el sentido positivo, que simbolizamos con T o con R_{270}.



i^3 como rotor y como vector.

La gráfica muestra que R_{270} aplicado al vector unitario lo hace girar 3/4 de vuelta y produce como resultado estático un vector que podemos notar −i por ser opuesto al que habíamos notado i. Hemos encontrado así el opuesto de la unidad imaginaria.

Apliquemos de nuevo a −i el rotor T. ¿Qué sucede?



Volvemos a caer en −1:

$T(-i) = -1.$
$T(T(+1)) = (T \circ T)(+1) = T^2(+1) = -1 = M(+1)$

Podemos pues decir que si identificamos a −1 como operador con el rotor T tenemos:

$(-i) \bullet (-i) = (-i)^2 = -1$
pues $T \circ T = T^2 = M$.

Hemos encontrado otra raíz cuadrada de −1 es: −i. Sabíamos que $i^2 = -1$, y ahora sabemos también que $(-i)^2 = -1$. Por eso teníamos ciertas reservas de escribir $i = \sqrt{-1}$, pues esta igualdad daba la impresión de que i era la raíz cuadrada de −1, como si hubiera una sola. Pero ahora tenemos otra raíz cuadrada de −1, es −i, y también podríamos escribir: $-i = \sqrt{-1}$. Pero entonces $-i = \sqrt{-1} = i$ y tendríamos que $-i = i$, lo cual es falso: −i corresponde a T, pero i corresponde a C; −i es el opuesto de i, y si consideramos a i como el vector resultante de aplicar C a +1, i apunta hacia arriba, y −i hacia abajo.

¿Podríamos escribir:

"$i = +\sqrt{-1}$" y "$-i = -\sqrt{-1}$"? Podría ser una notación convencional, pero no sabemos qué quiere decir "positivo" y "negativo" cuando hablamos de los números imaginarios i y −i.

¿Con qué estamos asociando el número imaginario −i?

En resumen podemos afirmar que el número simbolizado por −i se asocia:

a: Con un rotor que hace girar 270°. Esta es una concepción activa de −i.

b: Con el vector opuesto a i. Esta es una concepción estática de −i.

c: Con el cubo de la unidad imaginaria, ya que rotar 270° equivale a multiplicar tres veces por i, es decir:
$(i) \bullet (i) \bullet (i) = [(i) \bullet (i)] \bullet (i) = -1 \bullet (i) = -i,$
pero además:
$(i) \bullet (i) \bullet (i) = i^3$, luego $-i = i^3$.

Esta es una concepción activa de i y de −i; pero una vez que uno olvida que son operadores, puede considerar $i^3 = -i$ en forma estática.

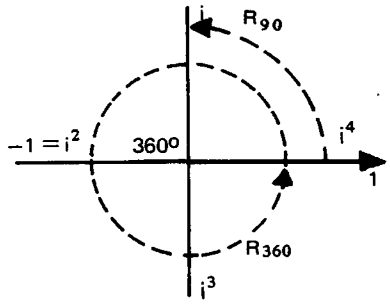
d: Con un punto del plano cuyas coordenadas son 0 y −1. Su notación como pareja ordenada es (0, −1).

e: Con otra raíz cuadrada de −1 que podríamos notar "$-\sqrt{-1}$".

Surgen otros interrogantes: ¿Podría pensarse a −i, o $-\sqrt{-1}$ como un vector tal que al aplicarle el rotor i produce el vector +1? ¿Podría asociarse

$-i$ con el vector resultante de aplicar un rotor de 90º en sentido negativo?

Hay otra pregunta que surge lógicamente en este punto de proceso: ¿qué se obtiene cuando se aplica un rotor de 360º? Produzcamos la rotación, es decir, apliquemos el R_{360} y analicemos los resultados de esa rotación.



La unidad positiva se asocia con un rotor de una vuelta.

El rotor de 360º aplicado al vector unidad lo hace girar una vuelta completa con lo cual lo regresa a su posición inicial, es decir: produce nuevamente el vector unidad.

Como rotar 360º es equivalente a la aplicación sucesiva de cuatro rotaciones de 90º, podemos decir que aplicar R_{360} es equivalente a multiplicar cuatro veces por i o $\sqrt{-1}$; es decir aplicar R_{360} es equivalente a multiplicar por + 1, y por lo tanto:

$$(\sqrt{-1}) \bullet (\sqrt{-1}) \bullet (\sqrt{-1}) \bullet (\sqrt{-1}) = +1,$$

o, $i \bullet i \bullet i \bullet i = i^4 = +1$.

Apliquemos R_0 al vector unitario. ¿Cuál es el resultado? ¿En qué se parecen y en qué se diferencian los procesos y los resultados de aplicar R_{360} y R_0 al vector unitario? ¿Desde cuál punto de vista (el dinámico o el estático) podemos afirmar que R_{360} es equivalente a R_0?

¿Desde cuál punto de vista podemos decir que $i^4 = +1$, el dinámico o el estático? Consideremos: $R_{360} = R_{90} \circ R_{90} \circ R_{90} \circ R_{90}$ y escribamos $R^4_{90} = R_{360} = R_0$, y asociemos esa ecuación con $i^4 = +1$.

Una vez que nos olvidemos del carácter activo del i como rotor de un cuarto de vuelta, podemos también considerar las expresiones:

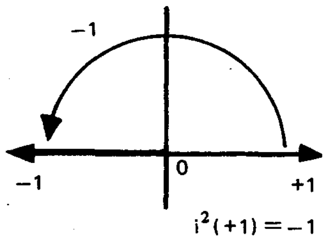
$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = +1$	$i^3 \bullet i = +1$
$i \bullet i^2 = -i$	$i^2 \bullet i = -i$	$i \bullet i^3 = +1$	$i^2 \bullet i^2 = +1$

como resultados estáticos de multiplicar los nuevos números, los imaginarios, entre sí. Hagamos una tabla de multiplicar:

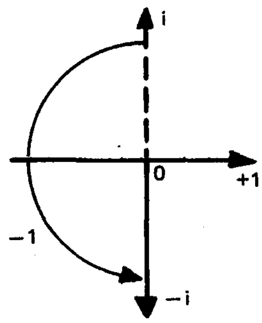
x	+1	i	−1	−i
+1	+1	i	−1	−i
i	i	−1	−i	+1
−1	−1	−i	+1	i
−i	−i	+1	i	−1

El profesor puede proponer la tabla con sólo unos pocos resultados ya escritos, y pedir a los alumnos que la completen.

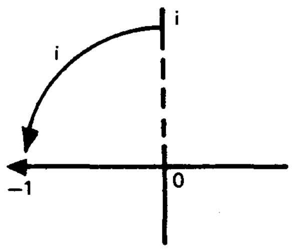
Para ello conviene hacer ejercicios como los que señalan las gráficas siguientes, en donde se trabaja con i, $-i$, -1 y $+1$, como rotores activos y como vectores estáticos.



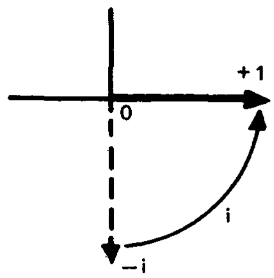
Rotor -1 aplicado a vector $+1$ produce vector -1.



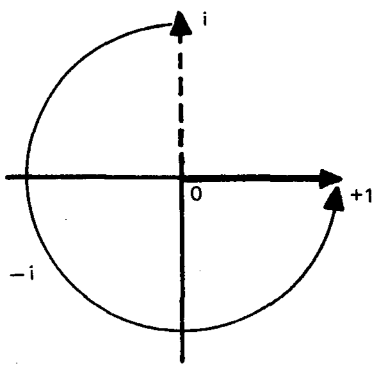
Rotor -1 aplicado a vector i produce vector $-i$.



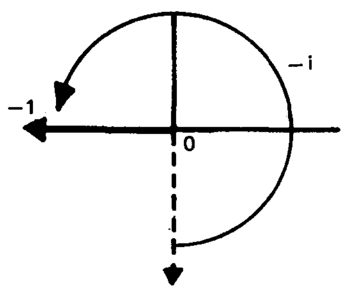
Rotor i aplicado a vector i produce vector -1.



Rotor i aplicado a vector $-i$ produce vector $+1$.



Rotor $-i$ aplicado a vector i produce vector $+1$.



Rotor $-i$ aplicado a vector $-i$ produce vector -1.

Las gráficas se hicieron teniendo en cuenta que:

a) La aplicación del rotor -1 produce un giro de 180º en sentido positivo.
b) La aplicación del rotor i produce un giro de 90º en sentido positivo.
c) La aplicación del rotor $-i$ produce un giro de 270º en sentido positivo.

¿Podemos considerar que la aplicación del rotor $-i$ produce un giro de 90º en sentido negativo? ¿Cambia algo en los resultados?

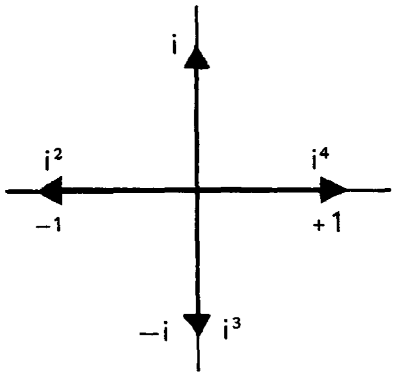
El resumen de las situaciones representadas en las gráficas es el siguiente:

como rotor "activo" o como "número multiplicador"
como vector "quieto", punto o "número estático".
como vector "quieto", punto o "número estático".

$(-1) \bullet 1 = -1$,	el rotor -1 transforma el vector quieto $+1$ en el vector "quieto" -1.
$(-1) \bullet i = -i$,	el rotor -1 transforma el vector quieto i en el vector "quieto" $-$i.
$(\ i) \bullet i = -1$,	el rotor i transforma el vector "quieto" i en el vector "quieto" -1.
$(-i) \bullet i = 1$,	el rotor $-$i transforma el vector "quieto" i en el vector "quieto" 1.
$i \bullet (-i) = 1$,	el rotor i transforma el vector "quieto" $-$i en el vector "quieto" 1.
$(-i) \bullet (-i) = -1$,	el rotor $-$i transforma el vector "quieto" $-$i en el vector "quieto" -1.

Hemos construído los números i, -1, $-$i, $+1$ (o sea i, i^2, 1^3, i^4) como operadores que aplicados a un vector en un plano lo hacen girar determinado ángulo. Entre esos números hay dos, $+1$ y -1, que ya conocíamos en otros sistemas, y otros dos: i y $-$i, que son nuevos.

Integremos en una gráfica los cuatro resultados obtenidos:



Se observan los vectores "estáticos" o "ya quietos"; resultantes de las aplicaciones de los distintos rotores. La gráfica ayuda a recordar los resultados pero no dice nada sobre el proceso para llegar a ellos. También podemos pensar sólo en los puntos señalados por las flechas, y pensar en $+1$, i, -1, $-$i, como esos cuatro puntos del plano, con coordenadas
$(+1, 0)$, $(0, +1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$.

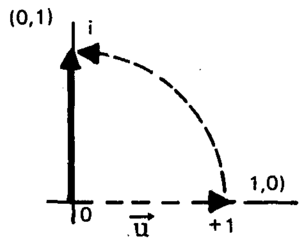
Pero también podemos pensar en ellos como cuatro nuevos números de un nuevo sistema de números más amplio que el de los números reales, es el sistema que vamos a llamar de los **números complejos.**

Hay muchas otras preguntas que se harán seguramente los alumnos y que son fuente de motivación para que continúen aprendiendo. Entre esas preguntas están: ¿Es posible obtener raíces cuadradas de la unidad imaginaria i? ¿Qué resulta si al vector unidad se aplican R_{45}, R_{135}, R_{225}, R_{315}, R_n, donde n es un número entero? ¿Es posible aplicar los rotores a vectores cuya longitud sea diferente a la unitaria? ¿Existen operadores que simultáneamente roten el vector y hagan variar su longitud? En las actividades que se desarrollen en clase, por iniciativa del maestro y de los alumnos, y en las que se proponen en esta unidad irán encontrando respuestas a esos y a otros interrogantes, o por lo menos algunas "pistas" para encontrarlas.

OPERADORES QUE HACEN ROTAR UN VECTOR Y MODIFICAN SU LONGITUD

Un interrogante planteado anteriormente se refiere a la posibilidad de variar la longitud del vector al cual se aplican los rotores. Para responderlo acudimos al tema de las homotecias desarrollado en los grados anteriores, especialmente en 7º y 8º. Si extendemos las homotecias de polígonos a los vectores, podemos aplicarle homotecias al vector unidad para variar su longitud ya sea ampliándola o reduciéndola. Retomemos la expresión "factor de conversión", para referirnos a **los operadores que actúan sobre un vector,** y explicitemos el hecho de que esos operadores **son los números reales.** Sea b un número real, es decir $b \in \mathbb{R}$, sea R_α un rotor que hace girar un ángulo entre 0° y 360° (es decir: $0^\circ \leqslant \alpha < 360^\circ$), y sea $\vec{u}$ el vector $+1$, ¿Qué se obtiene si a $+1$ se le aplican un rotor R_α y un operador real b determinados? Ensayemos con $b = 1$ y $\alpha = 90^\circ$.

Caso 1: $b = 1$, $R_\alpha = R_{90}$

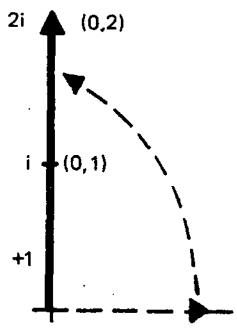


En este caso ya conocido podemos afirmar que aplicar b es como aplicar el operador idéntico, y que $R_\alpha = C$: $1 \bullet (R_{90}(\vec{u})) = 1 \bullet i = i$.

De la aplicación de los dos operadores a $\vec{u}$ se obtiene el vector i.

Veamos otros casos:

Caso 2: $b = 2$, $R_\alpha = R_{90}$

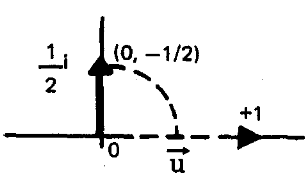


Primero rotemos por C y luego ampliemos con $b > 1$:

$2 \bullet (R_{90}(\vec{u})) = 2 \bullet (i) = 2 \bullet i = 2i$.
El resultado es 2i, o sea el duplo de la unidad imaginaria i. ¿Qué se obtiene si R_{90} se aplica después del duplicador $2 \bullet (\ \ )$?

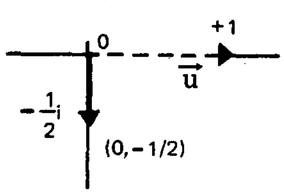
Ensayemos ahora con un reductor:

Caso 3: $b = 1/2$, $R_\alpha = R_{90}$



$b < 1$, (pero $b > 0$):
$1/2 \bullet (R_{90}(\vec{u})) = 1/2 \bullet (i) = 1/2 \bullet i = 1/2i$.
El resultado es 1/2i. ¿Qué se obtiene si $b = 0$? ¿Y qué si $b < 0$?.

Caso 4: $b = -1/2$, $R_\alpha = R_{90}$

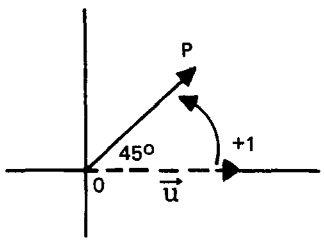


$b < 1$, más aún, $b < 0$:

$(-1/2) \bullet (R_{90}(\vec{u})) = (-1/2) \bullet i = -1/2i$.
El resultado es $-1/2i$. ¿Qué se obtiene aplicando primero $-1/2$ a $\vec{u}$ y luego R_{90}? ¿Y aplicando $-1/2$ después de R_{270}?

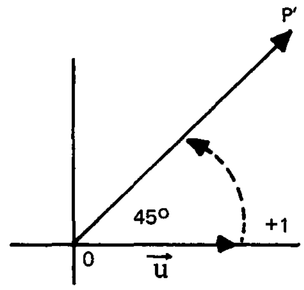
Los casos analizados permiten inferir un procedimiento para obtener todos los números de la forma bi con $b \in \mathbb{R}$ que son los que se conocen "números imaginarios puros". Al eje de coordenadas sobre el cual se ubican, se lo suele llamar "eje imaginario". ¿Qué se obtiene si para los anteriores valores de b el rotor hace girar un ángulo de 45º?

Caso 1 bis: $b = 1$, $R_\alpha = R_{45}$



Al vector $\vec{u}$ se le aplicó un operador compuesto: el idéntico 1 • y el R_{45}.

Caso 2 bis: $b = 2$, $R_\alpha = R_{45}$



Al vector $\vec{u}$ se le aplicó un operador compuesto: el ampliador 2 • y el R_{45}.

¿Cuál será una forma adecuada y práctica para designar el resultado? ¿Nombrar el vector y señalar su dirección? ¿Dar las coordenadas que corresponden a la cabeza del vector?

Dos observaciones importantes:

– Los números que estamos construyendo tienen dos números característicos o parámetros: un factor de conversión que hemos simbolizado por b, y un rotor o girador simbolizado por R_α y cuyo ángulo de giro hemos especificado en cada caso. En otras palabras los nuevos números tienen dos parámetros; un operador que afecta la magnitud del vector, y un rotor girador R_α que determina el ángulo con respecto al semieje real positivo.

– ¿A cuál operación sobre i corresponde la aplicación de un rotor de 45º? Recordemos que rotar 2 veces 90º equivale a elevar i al cuadrado. Además 45º es 90º/2.

¿Equivaldrá el rotor de 45º a la aplicación del operador $\sqrt{i}$, o sea; $\sqrt{\sqrt{-1}}$, o, $\sqrt[4]{-1}$?

– ¿Habrá otra raíz cuadrada de i? ¿Cuántas raíces cuartas de –1 podríamos encontrar?

– ¿Qué se obtiene si se continúan estudiando más casos con muchos valores reales para el operador b y diferentes valores para el ángulo de rotación α?

Los procedimientos metodológicos que hemos desarrollado para construir los números imaginarios y los complejos nos permiten entenderlos de varias formas: como raíces de cierto tipo de ecuaciones de segundo grado, como rotores activos, como vectores o como números ya quietos. Pero todavía no los hemos inventado a partir de la composición de traslaciones. Esa es una alternativa que conduce fácilmente a la suma generalizada de números complejos y números reales y al grupo aditivo correspondiente. Si el maestro lo considera conveniente puede trabajarla, y llegar así en forma activa a la expresión usual de un número complejo z como a + bi, con a, b en $\mathbb{R}$

COORDENADAS ROTACIONALES O POLARES

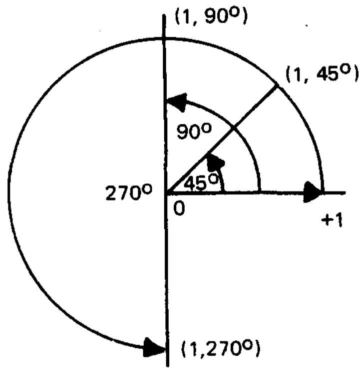
Ya estamos en capacidad de aplicar al vector unitario los operadores que lo hacen rotar sin modificar su longitud y también los que además de hacerlo rotar la modifican.

Hemos asociado algunos de los números construídos, -1, i, i^2, $2i$, $-1/2i$, con puntos del plano. Para ello empleamos tanto las flechas ya quietas como las coordenadas cartesianas que ya conocemos. ¿Será posible ubicar en el plano esos mismos números pero teniendo en cuenta los dos parámetros reales con que los hemos construído?

En particular será posible ubicar:

- ¿La unidad imaginaria i empleando sólo el vector +1 y el ángulo de 90°?
- ¿El opuesto de la unidad imaginaria −i empleando sólo el vector +1 y el ángulo de 270°?
- ¿Una raíz cuadrada de i, es decir: $\sqrt{i}$, empleando sólo el vector +1 y el ángulo de 45°?

Como en los tres casos el vector es el unitario, podemos elegir un punto de origen, determinar una semirrecta orientada y señalar sobre ella la unidad de medida. Luego se pueden ubicar los números en el plano como se muestra en la gráfica siguiente:

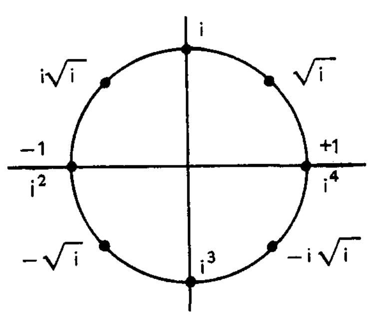


En la gráfica están representados, de acuerdo con el sistema de coordenadas polares, los números que hemos designado con $\sqrt{i}$, i y −i. La notación (1,45°) en ese punto del plano indica que ahí se ubica el número que se obtiene cuando el vector unitario gira 45°, es decir, que ahí se representa el número $\sqrt{i}$.

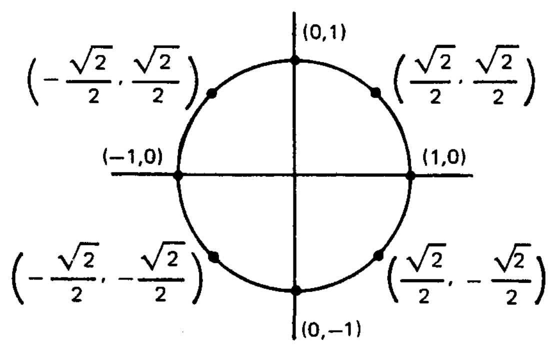
¿Qué significan las notaciones (1,90°) y (1,270°)? ¿Dónde se ubicarían y cuáles serían los números representados por: (1,135°), (1,180°), (1,225°), (1,315°), (1,30°), (1,60°), (1,1°)? Es fácil observar que los puntos representados pertenecen a una circunferencia de radio unitario; es decir: son todos equidistantes del polo u origen.

Ya que hemos llegado a esta nueva forma de representar números en un plano conviene que la relacionemos con otras representaciones ya conocidas.

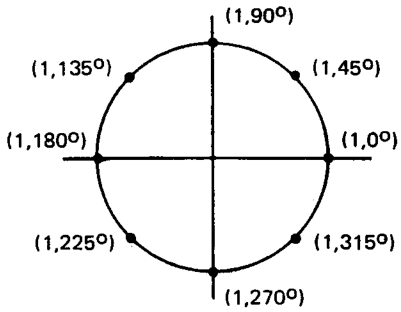
Representemos varios números en diferentes sistemas simbólicos:



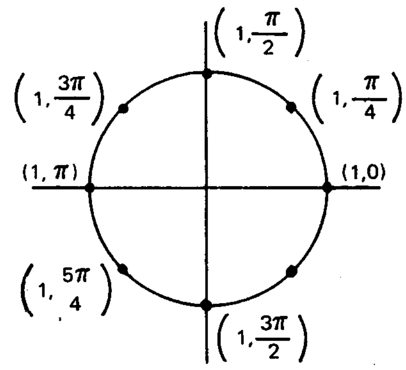
Como números complejos en el plano complejo



Como puntos del plano en coordenadas cartesianas



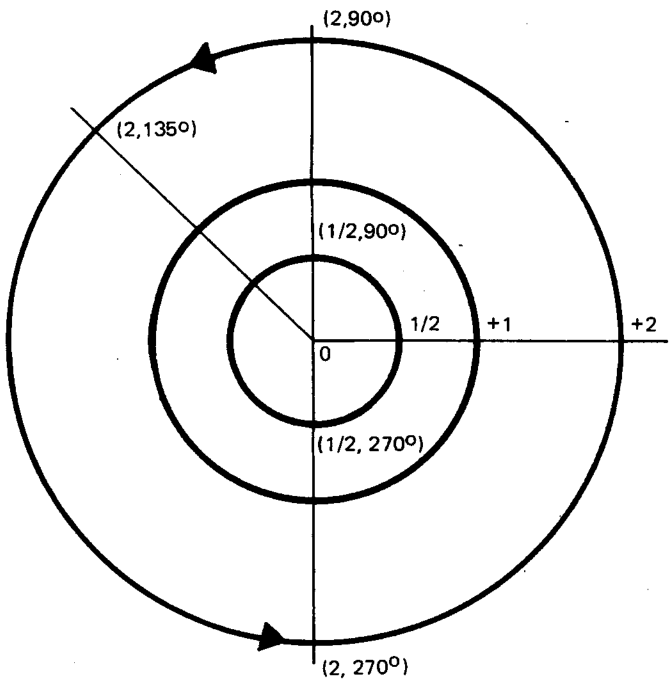
Como puntos del plano en coordendas polares o rotacionales en grados



Como puntos del plano en coordendas polares o rotacionales en radianes

Como tenemos ejemplos de varios nombres para un mismo punto, conviene suscitar el análisis y la reflexión sobre las características de la representación de los puntos en cada sistema y sobre el cambio de acuerdos que hacemos al pasar de un sistema a otro. ¿Es $(0, 1) = (1,90°)$? ¿Es $i = (0,1) = (1,90°)$? La respuesta seguramente va a ser **no**. Pero lo interesante es encontrar por qué surgieron las preguntas y entender que si bien es verdad que como símbolos o como nombres son diferentes, también es igualmente cierto que todos están designando el mismo punto del plano.

Representemos algunos números de los que obtuvimos al hacer girar un vector que no es el unitario: representemos por ejemplo: $2i, \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2}i, -2i, 2i\sqrt{i}$.



La gráfica muestra tres circunferencias: una de radio unidad, otra de radio igual a 2 y otra de radio igual a $\frac{1}{2}$.

Para ubicar los puntos es necesario hacer una interpretación de los dos parámetros del número que se va a representar. Así $2i$ se interpreta como un radio igual a 2 y un ángulo de 90°.

Hay que tener cuidado al representar en el plano números como $-\frac{1}{2}i$. Sabemos que el radio vector es siempre positivo, luego el signo "—" tiene que afectar a toda la expresión $\frac{1}{2}i$, o afectar sólo a la i. En el primer caso sería así: $-(\frac{1}{2}i)$, y ya sabemos que ese es el opuesto de $\frac{1}{2}i$. En el segundo caso el signo "—" tiene que afectar sólo a la i. Sería así: $\frac{1}{2}(-i)$, y ya sabemos que $-i$ se obtiene con una rotación de 270° y que es opuesto a i.

¿Qué hay que analizar en especial, para ubicar el número $2i\sqrt{i}$? Lo primero es reconocer a 2 como el valor del radio y lo segundo es interpretar a i $\sqrt{i}$ como la composición de una rotación de 90º y otra de 45º, rotaciones que son equivalentes a una sola de 135º.

Si recordamos la forma como hemos representado los números en el plano, nos damos cuenta de que al final lo que interesa es el radio vector y el ángulo, es decir la distancia entre el punto que representa el número y el origen y además el número de grados que gira el radio vector.

El procedimiento puede generalizarse para representar cualquier número obtenido al aplicarle al vector unitario operadores de la forma bR_α con $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, y con $0° \leqslant \alpha < 360°$. El trabajo con ángulos de más de 360º no se aborda acá para no extender demasiado el programa de este grado 9º. La notación bR_α puede interpretarse como: aplicar al vector + 1 un ampliador (o reductor) b después de aplicarle un rotor que lo hace girar $\alpha°$. ¿Será $bR_\alpha = R_\alpha b$?

A medida que hemos representado los números hemos ido elaborando un nuevo sistema de coordenadas respecto del cual es necesario explicitar:

Primero: Elegimos un punto del plano que llamamos **"origen"** o **"polo"** del sistema y que identificamos con 0.

Segundo: Tomamos una recta fija en la posición estándard (horizontal) que pasa por el polo u origen y que está orientada en sentido positivo. Esa recta se denomina **"eje polar"**.

Tercero: Determinamos una **unidad** de medida sobre el eje polar.

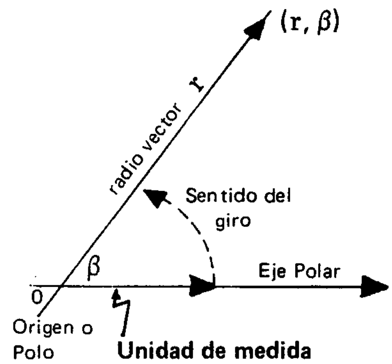
Cuarto: En cada caso tenemos en cuenta el vector resultante de la rotación y lo designamos con el nombre de **"radio vector"**. Se simboliza con la letra **r** y su magnitud se considera como el **módulo** o valor absoluto del número complejo.

Quinto: Acordamos un **sentido** que se considera "positivo" para la aplicación de los rotores; para el caso es el mismo convenido en las actividades anteriores: el opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj.

Sexto: Establecemos que la **posición** de un punto P del plano queda determinada cuando se conocen la magnitud del **radio vector** y la amplitud del **ángulo** $\alpha°$. Esos dos valores **r** y $\alpha°$ se conocen como las **"coordenadas polares"** del punto P del plano.

Séptimo: Decidimos que las coordenadas polares del punto P forman una **pareja ordenada** notada como **(r, $\alpha°$)**. En esas condiciones la primera componente de la pareja corresponde al radio vector y la segunda al ángulo en grados. También es muy frecuente escribir sólo **(r, β)** con el ángulo β dado en **radianes:** (1,45º) o (1, $\pi/4$).

Al sistema descrito anteriormente e ilustrado con esta gráfica se lo conoce como "sistema de coordenadas polares", tal vez porque la ubicación de cada punto se expresa con su distancia al "polo" y con su "posición angular" respecto del eje polar, en grados o en radianes.



Si se tiene en cuenta que en el proceso de construcción de los números complejos son muy importantes los operadores rotores, el sistema podría también llamarse de **"coordenadas rotacionales"**.

Para terminar la actividad conviene que los alumnos se pregunten si pueden formular algunas conclusiones generales respecto de la construcción y la representación de los nuevos números.

Las siguientes conclusiones están entre las que se les pueden ocurrir:

— La aplicación de operadores de la forma bR_α al vector unitario, con $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, y, $0° \leqslant \alpha < 360°$ conduce a la construcción de infinitos números que denominamos: **números complejos.**

— Un número complejo puede ser representado, en un plano, en un sistema de coordenadas polares o rotacionales, mediante un radio vector y un ángulo de rotación.

Un tema de consulta opcional para los alumnos sería el de las operaciones entre números complejos simbolizados en forma polar.

El estudio de los sistemas con números complejos se continuará en los grados posteriores.

Unidad IV

FUNCIONES, ECUACIONES Y POLINOMIOS

Introducción

En esta unidad continuamos el estudio de las funciones y el de las tablas y gráficas correspondientes, siguiendo el enfoque que explicitamos en la introducción de la UNIDAD II de 8º grado, cuya lectura recomendamos para lograr un contexto global de la propuesta metodológica para este tema. También conviene estudiar, dentro de la misma unidad de octavo grado, las lecturas que llevan los siguientes títulos:

- Lectura introductoria. Ecuaciones de primero y segundo grado: El manejo de expresiones algebráicas como símbolos de funciones.
- Las cuadráticas puras.
- La cuadrática completa.
- Apéndice 1: Completar el cuadrado geométricamente.
- Apéndice 2: El método de partir, cuadrar y restar.

Esta Unidad de 9º grado supone que los alumnos ya están familiarizados con las funciones de gráfica lineal y con las cuadráticas, y con las ecuaciones asociadas a éstas; por eso avanzamos con la función cúbica, empezando por la función de volumen hasta llegar a la construcción de la **función cúbica general.** Así abordamos el problema de hallar los ceros de las funciones cúbicas o raíces de las ecuaciones correspondientes. Como en el grado 8º, estos problemas aparecen primero como "adivinanzas" que expresan la ecuación en el lenguaje del álgebra verbal, y luego se pasan a la "taquigrafía" matemática convencional. Sin embargo, cuando la expresión simbólica tiene más de dos términos, no resultará siempre fácil "adivinar" los valores de x que la satisfacen, y será entonces necesario utilizar algunas técnicas especiales para hallar el conjunto de las soluciones. Esto es lo que motiva para aprender esas técnicas y apreciar el poder de la notación simbólica.

También se propone aquí el estudio de la función exponencial y el de su inversa, exigiendo esto último la revisión de las condiciones que debe cumplir una función para que su inversa también lo sea.

Objetivos generales

- Construir el concepto de función cúbica y reconocer que toda función cúbica general puede expresarse como la adición de una función de volumen, una función de área, una función lineal y una función constante.
- Desarrollar destrezas de cálculo simbólico para la solución rigurosa o aproximada de algunas ecuaciones de tercer grado.
- Construir los conceptos de función exponencial y función logarítmica e interpretar el significado de los términos que intervienen en sus correspondientes expresiones simbólicas.
- Formular y resolver problemas ingeniosos y prácticos que permitan la utilización de los conceptos anteriores.

Objetivos específicos, contenidos y sugerencias metodológicas

OBJETIVOS ESPECIFICOS

35. Reconocer las funciones de volumen, las funciones cúbicas puras y las funciones cúbicas generales y explicar mediante ejemplos la acción de dichas funciones al aplicárselas a sus argumentos.

36. Reconocer y plantear situaciones en las que los cambios se describan apropiadamente con una función cúbica y dar la expresión simbólica de ésta.

37. Reconocer que toda función cúbica general puede expresarse como la adición de una función de volumen, una función de área, una función lineal y una función constante.

38. Representar gráficamente funciones cúbicas generales.

39. Hallar aproximaciones por exceso y por defecto a raíces cúbicas, tanto por métodos gráficos como por métodos algorítmicos mentales, escritos o con ayuda de calculadora.

40. Resolver y formular problemas relacionados con funciones cúbicas.

41. Relacionar las ecuaciones cúbicas con las funciones cúbicas y resolverlas en casos especiales.

CONTENIDOS BASICOS

El estudio de la función cúbica general se puede iniciar con las funciones de volumen. El volumen de un cubo de lado ℓ se halla elevando ℓ al cubo.

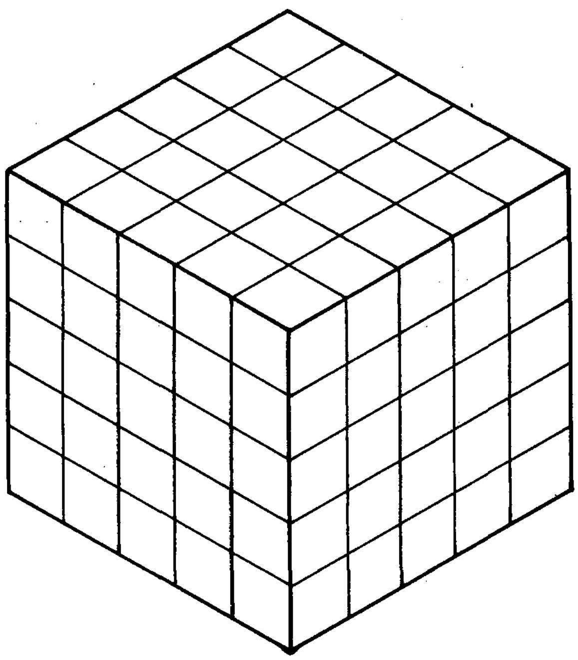
Si los valores que toma el lado ℓ son enteros positivos se tendrá una función definida de $\mathbb{Z}^+$ en $\mathbb{Z}^+$ que transforma la longitud del lado de un cubo en el volumen de ese mismo cubo.

$\ell^{\cancel{3}} = 5$ cm

$V = \ell^3$

$V = (5 \text{ cm})^3$

$V = 125 \text{ cm}^3$



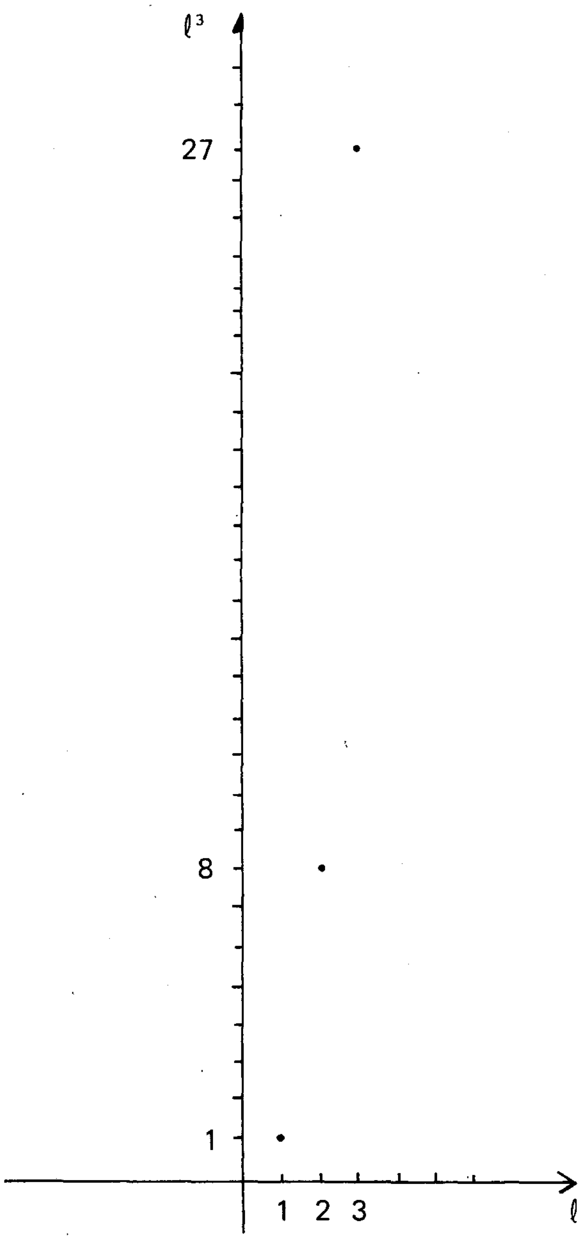
La gráfica correspondiente estará constituída por la representación de puntos aislados de la forma (ℓ, ℓ^3) en el plano cartesiano.

Si ℓ toma valores reales positivos, la función estará definida de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y la gráfica resultará una línea contínua formada por la representación de los puntos (ℓ, ℓ^3) en el plano cartesiano.

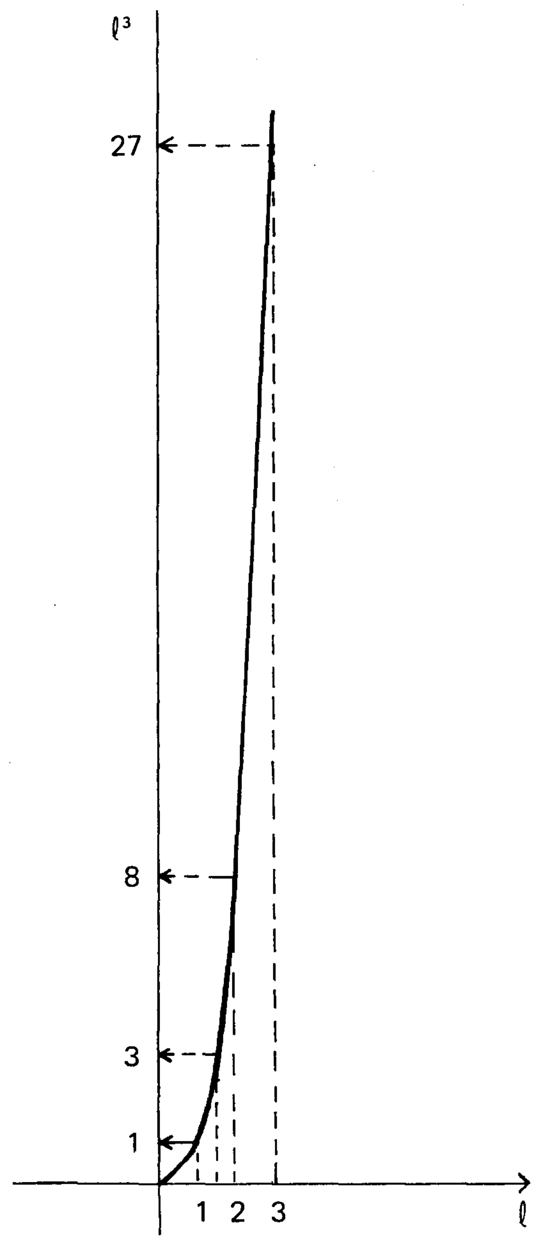
El efecto de la función cúbica lo vamos a visualizar en cada caso mediante dos de sus representaciones: las tablas y las gráficas.

Como ejemplo tomemos el último caso, el de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y observemos la tabla para algunos valores de la función:

x	0.1	0.2	0.3	0.5	1	1.5	2	3	4	6	7	8	. . .
x^3	0.001	0.008	0.027	0.125	1	3.375	8	27	64	216	343	512	. . .



$$f\square: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$$
$$\ell \longmapsto \ell^3$$

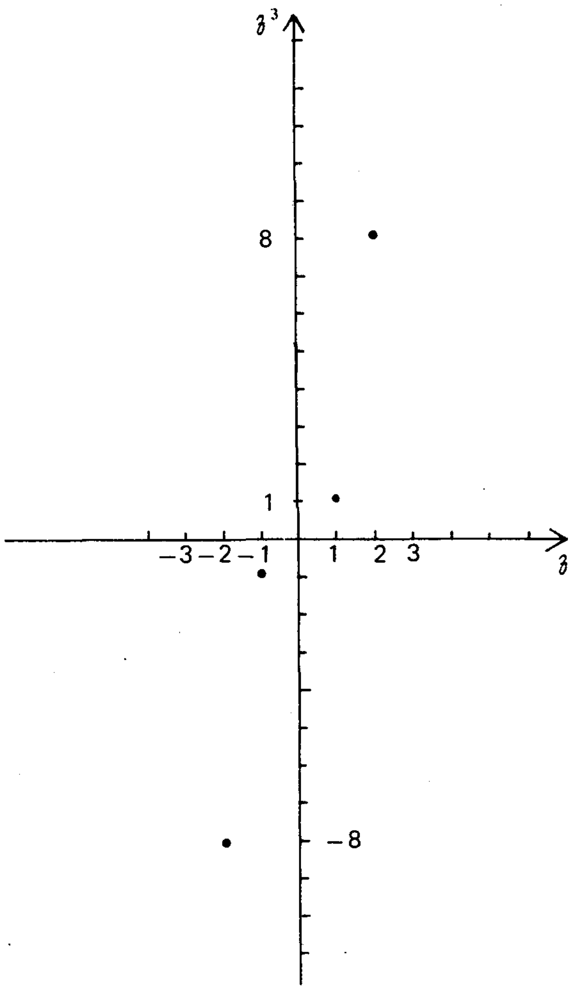


$$f\square: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$\ell \longmapsto \ell^3$$

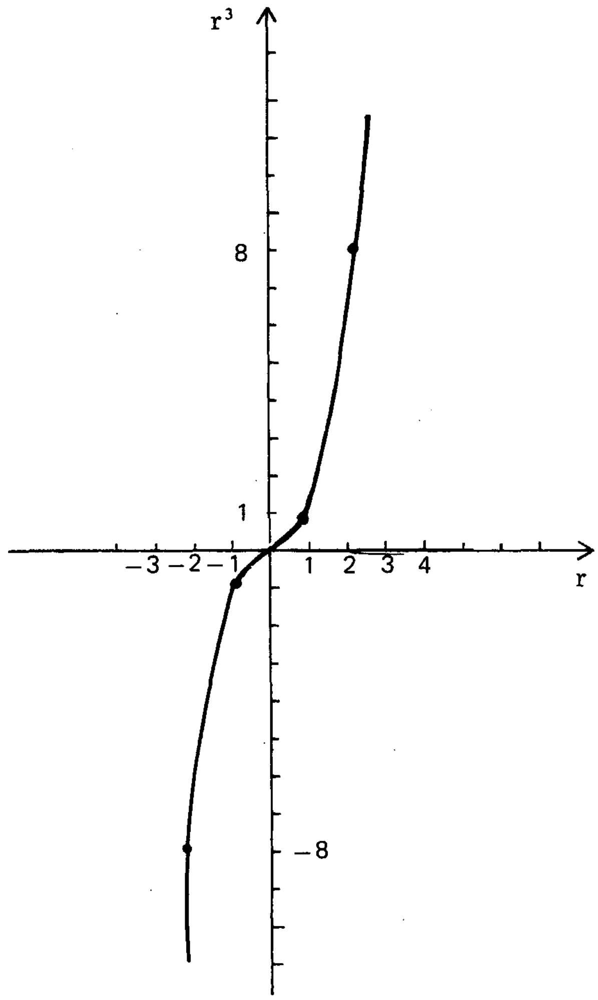
Es fácil ver como, para valores de los argumentos de la función mayores que cero, las imágenes toman valores cada vez mayores. En la gráfica de la derecha podemos observar cuánto sube la vertical hasta cortar la curva y cruzar para encontrar la imagen correspondiente.

Para avanzar en el estudio de la función cúbica, se considera la función que a cada número entero lo envía en su cubo. Así se obtienen puntos de la forma $(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}^3)$ que al representarlos en el plano cartesiano producen la gráfica de puntos discretos correspondientes.

Si se considera la misma función en los números reales, la gráfica correspondiente a los puntos (r, r^3) resultará ser una curva contínua simétrica con respecto al origen. En efecto si se hace una rotación de media vuelta con centro en el origen (0, 0) las ramas de la curva rotada coinciden con las de la curva original.



$$f_{\square}: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\mathfrak{z} \longmapsto \mathfrak{z}^3$$

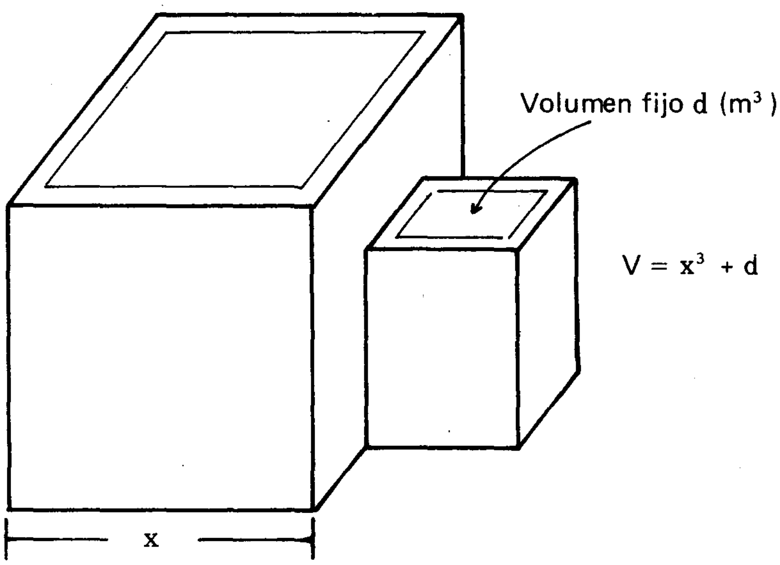


$$f_{\square}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$r \longmapsto r^3$$

Como muchas funciones de volumen se pueden expresar sólo con un coeficiente y una variable al cubo, a éstas las podemos llamar "cúbicas puras"; el término correspondiente podría ser ax^3, cl^3, At^3, etc., y la ecuación correspondiente podría ser $y = ax^3$, $v = cl^3$, $z = At^3$, etc.

– Consideremos ahora una función de volumen y una función constante expresadas por las ecuaciones $y = x^3$ para la cúbica, e $y = d$ para la constante.

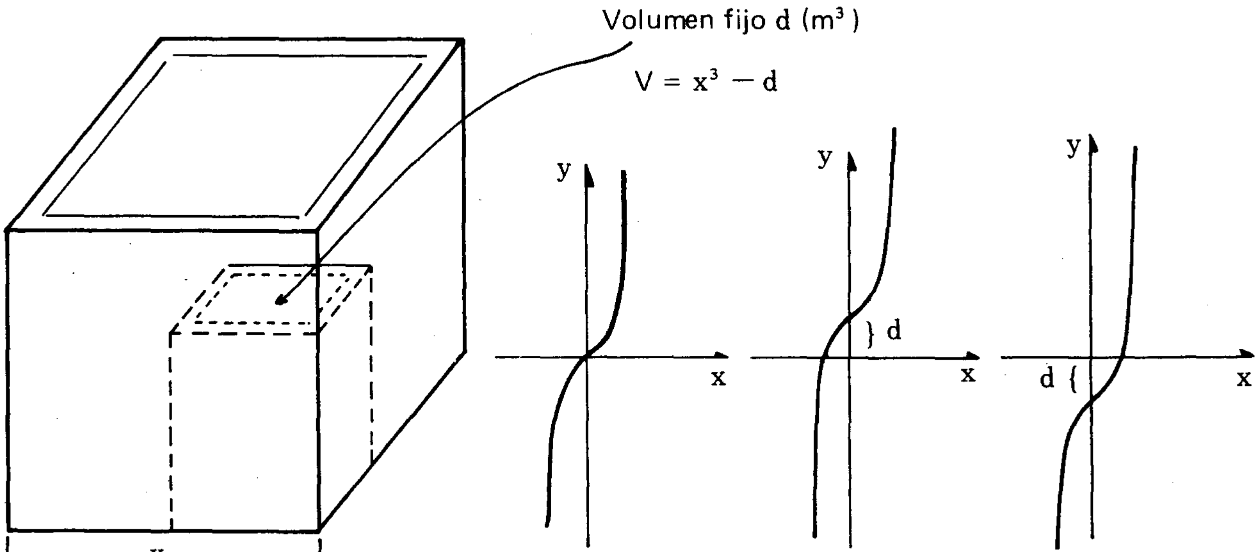
Supongamos que x^3 es el volumen de un tanque cúbico de lado x que vamos a construir, y que d es el volumen fijo de un tanque ya construído que va a quedar al lado del nuevo. Entonces tiene sentido sumar los volúmenes de los dos tanques. Para encontrar el valor total del volumen, tomemos las dos funciones y adicionémoslas.



Las imágenes de la nueva función se pueden expresar por el término $x^3 + d$. Ahora la gráfica de esta nueva función de volumen expresada por la ecuación $y = x^3 + d$ se desplaza una distancia d hacia arriba.

— Consideremos nuevamente un tanque cúbico cuyo volumen es x^3 y dentro de éste otro tanque de volumen fijo d. Si nos interesamos en el volumen que queda cuando al del tanque cúbico le quitamos el del otro tanque, este nuevo volumen estará dado por la función cuya ecuación es $y = x^3 - d$.

Entonces la gráfica se desplazará una distancia d hacia abajo y las imágenes serían de la forma $x^3 - d$.



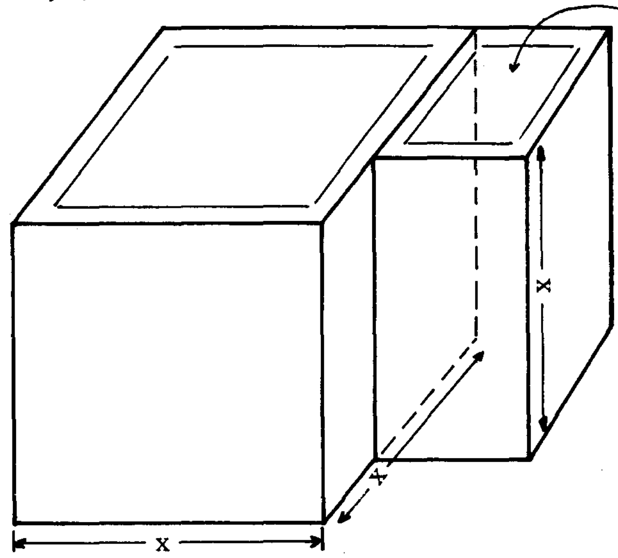
$f\square : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$

$f\square, d\uparrow : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3 + d$

$f\square\, d\downarrow : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3 - d$

Estas dos funciones pueden considerarse como la suma de una función cúbica pura y una función constante (la representada por d en el primer caso y la representada por $-d$ en el segundo pues $x^3 + (-d) = x^3 - d$).

– Podemos considerar un tanque cúbico de lado x y otro tanque de altura también x, cuyas caras horizontales son dos secciones fijas, de área c (m^2). El volumen del primero es x^3 y el del segundo será cx. Así el volumen total estará dado por la suma de las dos funciones anteriores.

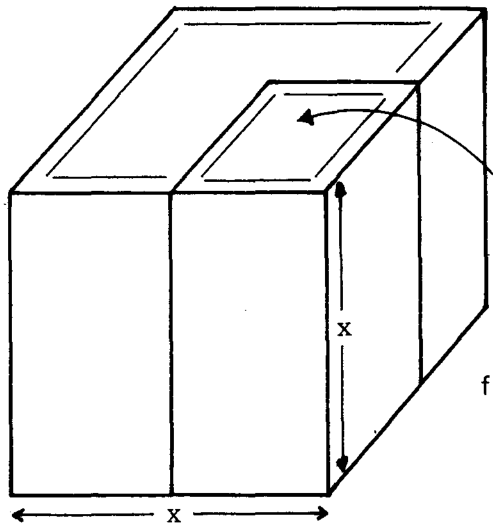


Sección fija c (m^2)

$$V_1 = x^3 + cx$$

Si consideramos que el segundo tanque está adentro del primero y el volumen que nos interesa es el no ocupado por el tanque de sección fija, este volumen será:

$$V_2 = x^3 - cx$$



Sección fija c (m^2)

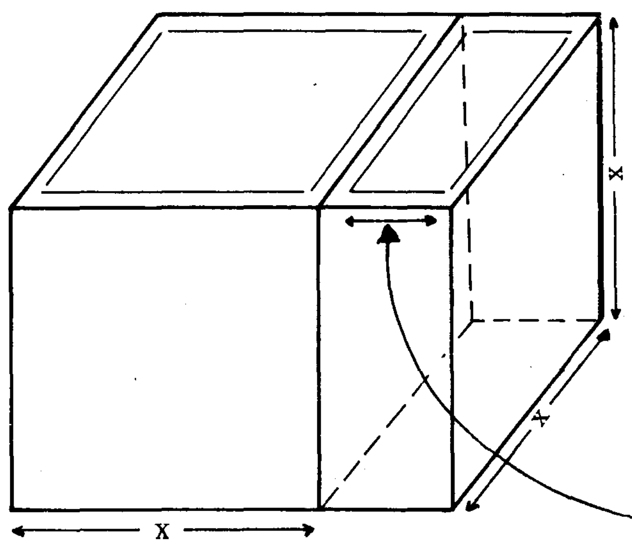
En estos dos casos vemos que la función volumen que obtuvimos es la suma de una función cúbica pura y una función lineal (la representada por cx en el primer caso, y la representada por – cx en el segundo pues $x^3 + (-cx) = x^3 - cx$).

– Supongamos que hay que construir un tanque con dos compartimientos uno cúbico de lado x y otro de anchura fija b (m) y con las otras dos dimensiones iguales a x.

Nos interesa encontrar la ecuación de la función del volumen total del tanque con sus dos compartimientos.

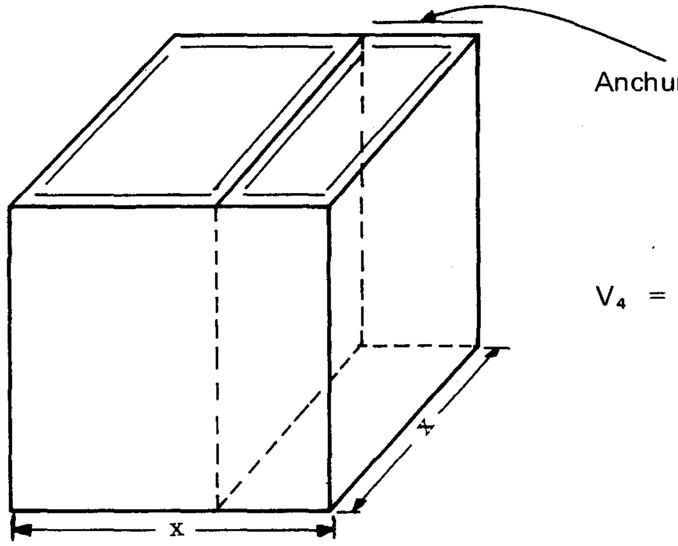
Para el primer compartimiento del tanque la ecuación es $y = x^3$ y para el segundo compartimiento del tanque tendremos que el volumen está representado por la función cuya ecuación es $y = bx^2$. Entonces el volumen total se puede expresar como:

$$V_3 = x^3 + bx^2$$



anchura fija b (m)

Si en este último caso nuestro interés es el de separar, dentro de un tanque cúbico de lado x, un compartimiento de anchura fija b y con las otras dos dimensiones iguales a x, el volumen del otro compartimiento del tanque cúbico se puede expresar como:



$$V_4 = x^3 - bx^2$$

En estos dos últimos casos la función volumen obtenida es la suma de una función cúbica pura y de una función cuadrada, la representada por bx^2 en el primer caso, y la representada por $-bx^2$ en el segundo, pues

$$x^3 + (-bx^2) = x^3 - bx^2$$

— Pasemos ahora a otro tipo de situación diferente que también nos llevará a otro tipo de función cúbica.

Para hacer el armazón de un cubo se dispone de 12 varillas de longitud x, pero alguien decide quitarle a cada varilla un pedazo cuya longitud es e, esto con el fin de elaborar otra armazón cúbica más pequeña. En este caso el volumen del armazón que se puede construir con las varillas de longitud $x-e$ está dado por la expresión:

$$y = (x - e)^3$$

Si en el caso anterior a cada varilla original más bien se le añade una varillita de longitud fija e, entonces la función de volumen estará expresada por la ecuación $y = (x + e)^3$.

La representación gráfica de estas dos últimas funciones de volumen se puede obtener a partir de la gráfica de la función cúbica pura; para el caso de $y = (x-e)^3$ basta con desplazar dicha gráfica una distancia e hacia la derecha del eje y, el punto (o, o) de la curva original será ahora (e, o). Para cada punto de la gráfica desplazada, el valor de x se incrementa en e, pero el valor de la primera función en el punto inicial (x, o) es en cada caso el mismo valor de la nueva función en el punto ya desplazado (x + e, o). Parecería que se debe utilizar la expresión $(x + e)^3$ pero si se ensaya la gráfica de $x \longmapsto (x + e)^3$ se observa que la curva aparece corrida hacia atrás. Este hecho permite escribir la función representada por la gráfica desplazada una distancia e hacia la derecha como:

$$\begin{aligned} f\square,\vec{e}: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x-e)^3 \end{aligned}$$

La imagen de cualquier elemento del dominio se escribe como:

$$\begin{aligned} f\square,\vec{e}\,(x) &= (x-e)^3 \\ &= (x-e)(x-e)^2 \\ &= (x-e)(x^2 - 2xe + e^2) \\ &= x^3 - 3x^2e + 3xe^2 - e^3 \end{aligned}$$

o sea como:

$$f\square,\vec{e}\,(x) = x^3 - 3ex^2 + 3e^2x - e^3$$

Esta expresión es de la forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ con}$$

$$a = 1, \quad b = -3e, \quad c = 3e^2, \quad d = -1$$

Si la gráfica de la función cúbica pura se desplaza ahora una distancia e hacia la izquierda del eje y, la nueva función representada es aquella que a cada elemento del dominio lo envía en la imagen $(x + e)^3$. Esto permite escribir la función representada por la gráfica desplazada una distancia e hacia la izquierda, como:

$$f\square, \overleftarrow{e}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x + e)^3$$

La imagen de cualquier elemento del dominio se escribe como:

$$\begin{aligned} f\square, \overleftarrow{e}\,(x) &= (x + e)^3 \\ &= (x + e)\,(x + e)^2 \\ &= (x + e)\,(x^2 + 2xe + e^2) \\ &= x^3 + 3x^2 e + 3xe^2 + e^3 \end{aligned}$$

y finalmente

$$f\square, \overleftarrow{e}\,(x) = x^3 + 3ex^2 + 3e^2 x + e^3$$

Esta expresión también es de la forma

$ax^3 + bx^2 + cx + d$

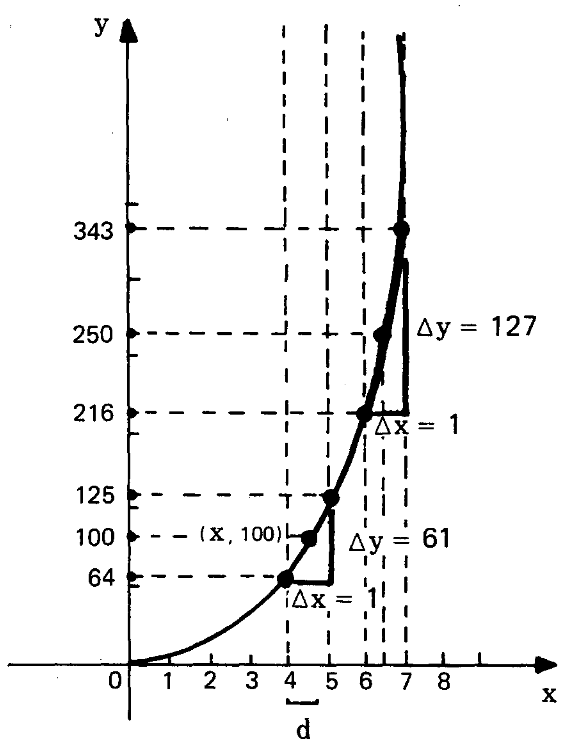
ahora con

$a = 1,\quad b = 3e,\quad c = 3e^2,\quad d = 1$

A una función que pueda expresarse con un término como: $ax^3 + bx^2 + cx + d$ (o con una ecuación como $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) la llamamos "función cúbica general". La función "cúbica pura" tendría sólo la forma ax^3, o sea que los coeficientes b, c, y d serían todos iguales a cero.

El estudio de las funciones cúbicas se puede aprovechar para hallar aproximaciones a raíces cúbicas por exceso y por defecto. Veamos algunos ejemplos:

1– ¿Cuál es la longitud aproximada de la arista de dos tanques cúbicos cuyas capacidades son de 100 m^3 y de 250 m^3 respectivamente?



Para solucionar este ejercicio es posible que el primer intento sea hacer ensayos de **cálculo mental** para llegar después de varios titubeos (algunos de ellos sorprendentes) a ubicar la raíz cúbica entre los dos enteros positivos consecutivos correspondientes. Esto puede crear la necesidad de elaborar la lista de los primeros números cúbicos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 ...
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331 ...

Una vez precisada la parte entera de la raíz se pueden hacer algunas estimaciones para la parte decimal y utilizar la calculadora para verificarlas.

— La representación gráfica de la función cúbica también puede ser útil para resolver este tipo de ejercicios. Podemos considerar una rama de una curva que no tenga mucha "comba" como si fuera recta; para decirlo más precisamente podemos considerar la recta entre dos puntos de la curva como una buena aproximación a la rama de la curva entre esos dos puntos. Según la comba de la curva, la recta va a estar por encima o por debajo de la curva.

En la porción de la curva que representa la función cúbica entre 4 y 5 que hemos considerado como "recta" encontramos los puntos (4,64), (x, 100) y (5,125). Llamemos "incremento vertical", simbolizado Δy, la diferencia entre los dos números cúbicos consecutivos (valores de la función) entre los cuales está el número cuya raíz cúbica se desea hallar; en este caso el incremento vertical es $\Delta y = 125 - 64 = 61$. Llamemos "incremento horizontal", simbolizado Δx, la diferencia entre las abscisas correspondientes. La diferencia entre la abscisa que buscamos (raíz cúbica de 100) y la abscisa del punto de partida, llamémosla d. Esta diferencia va a ser menos que uno y por lo tanto va a representar la parte decimal de la raíz buscada. Llamemos $y_\circ$ a la ordenada del punto de partida del segmento de recta; en este caso, $y_\circ = 64$

Entonces tenemos:

$$\frac{y - y_\circ}{d} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

o también

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\, d + \underbrace{y_\circ}_{\text{ordenada del punto de partida}}$$

Para el caso del tanque cúbico cuyo volumen es de $100 m^3$ tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 125 - 64 = 61 \\ \Delta x &= 5 - 4 = 1 \\ y &= 100 \\ y_\circ &= 64 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 100 &= 61\, d + 64 \\ 36 &= 61\, d \\ d &= \frac{36}{61} = 0.59 \doteq 0.6 \end{aligned}$$

La arista del tanque es aproximadamente igual a 4m + 0.6 m = 4.6 m. Si verificamos hallando $(4.6)^3$ encontraremos que $(4.6)^3 = 97.3$; luego este valor de la arista es una buena aproximación por defecto a la raíz cúbica de 100.

Para el caso del tanque cúbico cuyo volumen es de $250 m^3$ tendremos:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 343 - 216 = 127 \\ \Delta x &= 7 - 6 = 1 \\ y &= 250 \\ y_\circ &= 216 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} y &= 127d + 216 \\ 250 &= 127d + 216 \\ 34 &= 127d \\ d &= \frac{34}{127} = 0.267 \doteq 0.3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos ensayar como arista una longitud aproximada de 6m + 0.3m = 6.3 m

Verifiquémoslo hallando el cubo de 6.3:

$(6.3)^3 = 250.047$; luego 6.3 es una buena aproximación por exceso a la raíz cúbica de 250, y la longitud de la arista del tanque de 250 m es de 6.3 m aproximadamente.

2— Veamos otro ejemplo: En un tanque cúbico de 8.5 m de arista ¿Cuántos metros cúbicos de miel de caña se pueden depositar? La forma más inmediata de encontrar la respuesta puede ser hallando $8.5^3 = 614.1$

Podría resultar más fácil proceder por aproximación invirtiendo el proceso anterior:

En este caso d = 0.5; vamos a encontrar $f(x + d)$:

$f(x) = 512$; $\quad f(x + 1) = 729$, $\quad$ entonces:

$$\begin{aligned} f(x + d) &= [f(x + 1) - f(x)] \bullet d + f(x) \\ &= \Delta y \bullet d + y_\circ \\ f(x + d) &= [729 - 512] \bullet 0.5 + 512 \\ f(x + d) &= (217)(0.5) + 512 = 108.5 + 512 \\ f(x + d) &= 620.5 \end{aligned}$$

Comparando este valor con el valor de $8.5^3 = 614.125$, vemos que pudimos encontrar una buena aproximación por exceso al valor del cubo de 8.5

El problemita anterior también puede solucionarse utilizando la ecuación de la función cúbica general, y considerando como punto de partida $(x_o, y_o) = (8{,}512)$;

entonces
$y = (x_o + d)^3 = x_o^3 + 3x_o^2\, d + 3x_o\, d^2$

Cuando d es positivo y menor que 1, d^2 y d^3 son más pequeños que d, y podemos pasarlos por alto en una primera aproximación.

$y = x_o^3 + 3x_o{}^2\, d + \cancel{3x_o d^2} + \cancel{d^3}$

$y \doteq 512 + 3 \times 64 \times 0.5$ calculamos este valor

$512 + 3 \times 64 \times 0.5 = 512 + 96 = 608$

entonces $y \doteq 608$

Para obtener un valor más próximo, se puede calcular también el término $3x_o d^2$:

$3x_o d^2 = 3 \times 8 \times 0.25 = 6,$

entonces $y = 608 + 6 = 614$

Ya obtenemos la parte entera completa (Queda faltando sólo el término d^3, que es 0.125, la parte decimal del cubo de 8.5).

3– Se necesitan dos tanques cúbicos para depositar 10000 m^3 y 100000 m^3 de líquido. ¿Cuál debe ser aproximadamente la longitud de las aristas de cada tanque?

En estos dos casos el volumen es un múltiplo de 1000; entonces bastaría hallar la raíz cúbica del otro factor y multiplicarla por la raíz cúbica de 1000 que es 10.

a) $\sqrt[3]{10000} = 10\sqrt[3]{10}$; $\sqrt[3]{10}$ está entre 2 y 3

$10 = (27-8)\,d + 8$

$10 = 19d + 8$

$d = \dfrac{2}{19} \doteq 0.11$

$\sqrt[3]{10} \doteq 2.11$

$\sqrt[3]{10000} \doteq 10 \times 2.11 = 21.1$

Como $21.1^3 = 9\,393.93$ podemos considerar que 21.1 es una buena aproximación por defecto a la raíz cúbica de 10000.

b) $\sqrt[3]{100\,000} = 10\sqrt[3]{100} \doteq 10 \times 4.6 \doteq 46$

Como $46^3 = 97\,336$; 46 es una buena aproxi- aproximación por defecto a la raíz cúbica de 100 000 (Ensaye con 47^3).

4– La longitud de la arista exterior de un tanque cúbico es de 10 m y por eso está marcado por fuera (equivocadamente) "1000 m^3" Pero la arista por dentro es sólo de 9.7 m. ¿Cuántos metros cúbicos de líquido pierdo cada vez que lo mando llenar si la factura de cobro viene por 1000 m^3?

$9.7^3 = (10 - 0.3)^3 \doteq 10^3 - 3 \times 10^2 \times 0.3$
calculemos este valor:
$10^3 - 3 \times 10^2 \times 0.3 = 1000 - 300 \times 0.3 =$
$1000 - 90$ entonces $9.7^3 \doteq 910$.
La pérdida es aproximadamente igual a 90 m^3 (Es un poco menos: calcule el siguiente término $3 \times 10 \times 0.3^2$).

Para continuar con el estudio de las ecuaciones y particularmente con el de las cúbicas es conveniente leer en el programa de 8º unidad 2, la lectura introductoria: **Ecuaciones de primero y segundo grado: El manejo de expresiones algebráicas como símbolos de funciones.**

Las ecuaciones cúbicas, como las de primero y segundo grado, pueden considerarse también como adivinanzas; en los casos más fáciles la solución se halla mentalmente; a medida que la adivinanza se complica, los mismos alumnos experimentarán la necesidad de escribir símbolos.

Veamos algunos ejemplos:

A. ¿Puedes encontrar números que restados de su cubo den como resultado cero?
La anterior adivinanza también podría formularse así: ¿Es posible encontrar números cuyos cubos sean iguales a ellos mismos? ¿Cuáles son estos números?

El conjunto de las soluciones para éstas adivinanzas es $\{-1, 0, 1\}$

Las expresiones algebráicas correspondientes serían $n^3 - n = 0$, o $p^3 = p$

– El doble del cubo de un número es igual al doble de dicho número ¿cuál es el número?

Nuevamente el conjunto de las soluciones es $\{-1, 0, 1\}$

Este tipo de adivinanzas del álgebra verbal podrían resumirse mediante la expresión simbólica:

$ax^3 + x = 0$ o $ax^3 + cx = 0$

B. ¿Qué número desaparece si su cubo se duplica y a ese duplo le resto 16?

Esta adivinanza se "adivina" fácilmente transformándola así:

¿Cuál es el número cuyo cubo duplicado es igual a 16?

La transformación simbólica pasa de $2x^3 - 16 = 0$ a $2x^3 = 16$.
Este otro tipo de adivinanzas del álgebra verbal podrían resumirse mediante la expresión simbólica: $ax^3 + d = 0$.

C. ¿Cuál es el número cuyo cubo es el duplo de su cuadrado?

¿Cuál es el número cuyo cubo es igual al cuadrado de su duplo?

¿Cuál es el número cuyo cubo es igual al opuesto del cuadrado de su duplo?

La expresión simbólica que resume a este otro tipo de adivinanzas es:

$ax^3 + bx^2 = 0$.

Las adivinanzas de tipo $ax^3 + cx + d = 0$ dieron lugar a concursos matemáticos en Italia en el siglo XVI. Tartaglia fue por un tiempo el único que podía resolverlas. Cardano publicó la solución en 1545, y ya todos podemos resolverlas si tenemos un poco de paciencia.

(La adivinanza general
$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ se puede resolver reduciéndola a la anterior).

Esta forma de resolver las ecuaciones cúbicas considerándolas como adivinanzas podría utilizarse para cualquier ecuación lineal o cuadrática; bastaría pasar la ecuación al lenguaje del álgebra verbal.

Sin embargo cuando la expresión simbólica tiene más de dos términos, no resultará siempre fácil "adivinar" los valores de x que la satisfacen, y será entonces necesario utilizar algunas técnicas especiales para hallar el conjunto de las soluciones. Esto es lo que motiva para aprender esas técnicas y apreciar el poder de la notación simbólica.

El número de elementos del conjunto de las soluciones de una ecuación depende del grado de ésta; dicho grado está dado por el exponente del término de mayor exponente. Así las ecuaciones lineales son de grado uno, las cuadráticas de grado dos y las cúbicas de grado tres. Entonces el conjunto de las soluciones tendrá máximo uno, dos o tres elementos respectivamente. Estos elementos son llamados los ceros o las raíces de la ecuación.

En el caso de las ecuaciones lineales se tiene una sola raíz.

Ejemplo: $3x - 6 = 0$, la raíz es 2.

En el caso de las ecuaciones cuadráticas el conjunto de las soluciones puede tener un elemento cuando las dos raíces son reales e iguales, o puede tener dos elementos cuando dichas raíces son diferentes.

Las raíces pueden ser números reales o números imaginarios.

Ejemplos:

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$. Factorizamos:
$(x + 3)(x + 2) = 0$ El conjunto de las soluciones es $\{-3, -2\}$

b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ Factorizamos:
$(x - 2)(x - 2) = 0$ cuando $x = 2$. El conjunto de soluciones se reduce a $\{2\}$
En este caso se dice que 2 es una raíz doble.

c) $x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{(4) \cdot (-3)}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{-3}}{2}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{-3} = 1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$$

$$x_1 = 1 + \sqrt{3}\,i; \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$$

Para las ecuaciones cúbicas vamos a encontrar tres posibles raíces o ceros. Los valores de las tres raíces pueden ser todos diferentes; puede haber dos raíces iguales (raíces dobles) y en casos especiales las tres raíces pueden tener el mismo valor (raíces triples).

Como en el caso de las ecuaciones cuadráticas los valores de las raíces pueden ser números reales o números imaginarios. A estos valores se les acostumbra llamar raíces o ceros reales, y raíces o ceros imaginarios.

Veamos algunas formas de hallar los ceros de ecuaciones cúbicas.

— Por inspección

Cuando se ha llegado a tener suficiente familiaridad con ellas, para algunas ecuaciones de dos términos "la inspección" u observación atenta de la ecuación puede sugerir el valor de una de las raíces.

Ejemplos:

a) $x^3 + x = 0$ Se puede captar rápidamente que la ecuación se cumple cuando $x = 0$.

b) $x^3 - x = 0$ Se ve que el cero y el uno son raíces. (El -1 es más difícil de obtener por inspección).

c) $2x^3 - 2x^2 = 0$ En este caso el conjunto de las soluciones es $\{0, 1\}$

d) $x^3 + 1 = 0$ Cuando $x = -1$

e) $8 - x^3 = 0$ cuando $x = 2$.

Cuando se trata de una expresión de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, podría ser suficiente en algunos casos, verificar si corresponde al cubo de la suma o al cubo de la diferencia de dos términos de la forma $(x + n)$ o $(x - n)$.

Ejemplos:

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
se puede verificar que
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$
$(x + 1)^3 = 0$ cuando $x = -1$, en este caso las tres raíces tienen el mismo valor y el conjunto de las soluciones es $\{-1\}$

b) $8x^3 + 60x^2 + 150x + 125 = 0$
$8x^3 + 60x^2 + 150x + 125 = (2x + 5)^3$
$(2x + 5)^3 = 0$ cuando $x = -2.5$

Si la expresión no corresponde a $(x + n)^3$ o $(x - n)^3$, todavía podría corresponder a un producto de la forma

$(x \pm n)(x^2 + bx + c)$

Ejemplos:

c) $x^3 + x^2 - 2x = 0$
$x(x^2 + x - 2) = 0$; como
$x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ entonces
$x(x + 2)(x - 1) = 0$
cuando x toma valores en el conjunto $\{-2, 0, 1\}$

d) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$
$x(x^2 + 5x + 6) = 0$;
$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$
$x(x + 3)(x + 2) = 0$;
cuando x toma valores en el conjunto $\{-3, -2, 0\}$

— Por ensayo de divisiones enteras del término independiente:

Ejemplos:

a) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$
Factores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$
Para $x = 1$: $(1)^3 - 2(1)^2 - 5(1) + 6 =$
$1 - 2 - 5 + 6 = 0$, 1 es una raíz
$x = -1$: $(-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 =$
$-1 - 2 + 5 + 6 = 8$ no sirve
Para $x = 2$: $(2)^3 - 2(2)^2 - 5(2) + 6 =$
$8 - 8 - 10 + 6 = -4$ no sirve
$x = -2$: $(-2)^3 - 2(-2)^2 - 5(-2) + 6 =$
$-8 - 8 + 10 + 6 = 0$, -2 es otra raíz
Para $x = 3$: $(3)^3 - 2(3)^2 - 5(3) + 6 =$
$27 - 18 - 15 + 6 = 0$, 3 es la otra raíz

Las raíces o ceros de la ecuación son los elementos del conjunto $\{-2, 1, 3\}$.

b) $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = 0$
Factores de 12: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$.
Para $x = 1$: $(1)^3 - 5(1)^2 + 10(1) - 12 =$
$1 - 5 + 10 - 12 = -6$ no sirve
$x = 2$: $(2)^3 - 5(2)^2 + 10(2) - 12 =$
$8 - 20 + 20 - 12 = -4$ no sirve

Para $x = 3$: $(3)^3 - 5(3)^2 + 10(3) - 12 =$

$27 - 45 + 30 - 12 = 57 - 57 = 0$,

3 es una raíz

Ensayando con los otros factores de 12 no da cero el valor de la expresión.

– Por división por un factor $(x \pm n)$ una vez hallada la primera raíz por cualquier método:

a) Supongamos que en el ejempo anterior: $x^3 - 5x^2 + 10x - 12 = 0$, ya encontramos la primera raíz $x_1 = 3$
Ya sabemos que $(x - x_1)$, o en este caso $(x - 3)$, es uno de los factores de $x^3 - 5x^2 + 10x - 12$

Podemos dividir esa expresión por $x - 3$:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -5x^2 & +10x & -12 & x-3 \\ \cline{5-5} -x^3 & +3x^2 & & & x^2 - 2x + 4 \\ \cline{1-2} & -2x^2 & +10x & & \\ & +2x^2 & -6x & & \\ \cline{2-3} & & 4x & -12 & \\ & & -4x & +12 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 5x^2 + 10x - 12$

$= (x - 3)(x^2 - 2x + 4)$

$= 0, x_1 = 3$

Basta ahora buscar las raíces de

$x^2 - 2x + 4 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$$

$x = 1 \pm \sqrt{-3}$

$x_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$, $x_3 = 1 - \sqrt{3}\,i$

o por el método de "partir, cuadrar y restar" (ver programa de 8º. grado):

$$x^2 - 2x + \overset{1}{4}$$

$$+1 \pm \sqrt{-3}$$

b) $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$

Factores de 5: ± 1

Para $x = -1$: $(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 + 5 = 0$

Por lo tanto, una raíz es $x_1 = -1$. Dividimos por $x + 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -3x^2 & +x & +5 & x+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & & & x^2 - 4x + 5 \\ \cline{1-2} & -4x^2 & +x & & \\ & +4x & +4x & & \\ \cline{2-3} & & 5x & +5 & \\ & & -5x & -5 & \\ \cline{3-4} & & 0 & 0 & \end{array}$$

$x^3 - 3x^2 + x + 5 =$

$(x + 1)(x^2 - 4x + 5)$, $x_1 = -1$

Basta ahora encontrar las raíces del factor $x^2 - 4x + 5$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} =$$

$$2 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

$x_2 = 2 + i$

$x_3 = 2 - i$

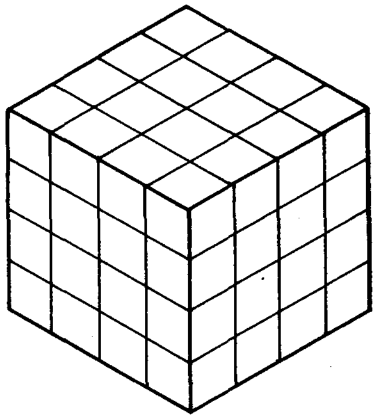
Por el método de "partir, cuadrar y restar":

$$x^2 - 4x + \overset{4}{5}$$

$$2 \pm \sqrt{-1}$$

SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Conviene iniciar el estudio de las funciones cúbicas con ejercicios que consistan en hallar el volumen de algunos cubos conociendo la longitud del lado. Si se presentan dificultades para calcular el volumen, pueden construirse algunos cubos ya sea con cubitos de azúcar u otro material disponible en el plantel. Muy pronto los alumnos encuentran que la función cúbica simplifica el trabajo de contar los cubitos de azúcar, de madera, de material acrílico, etc. Basta con elevar al cubo el número de cubitos que tiene el lado de una de las capas o de una de las aristas de dicho cubo.



Número de cubitos de una capa = 4 x 4 = 16
Número de cubitos de las 4 capas = 4 x 16 = 64

$V = 4^3$

$V = 4 \bullet 4 \bullet 4 = 64$

Es importante que los alumnos aprecien la diferencia entre el volumen de un cubo de lado ℓ ($\ell \in \mathbb{Z}^+$) y el de otros cubos de lado $\ell + 1$, $\ell + 2$, $\ell + 3$, $\ell + 4$, etc. También es importante observar cómo varía el volumen de un cubo cuando la longitud del lado está comprendida entre 0 y 1 es decir $0 < \ell < 1$, $\ell \in \mathbb{R}^+$, con pasos de 0.1.

Puede ser útil consignar y ordenar los resultados en tablas como:

ℓ (cm)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20 ...
ℓ^3 (cm^3)	1000	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6859	8000 ...

ℓ (cm)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
ℓ^3 (cm^3)	0.001	0.008	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.512	0.729	1

Otra tabla como la siguiente permite hacer una apreciación un poco más completa de la forma como varía la función volumen y permite ubicar algunos puntos en el primer cuadrante de un plano cartesiano para trazar la gráfica aproximadamente de la función cúbica pura.

ℓ (cm)	0	0.2	0.3	0.5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
ℓ^3 (cm^3)	0	0.008	0.027	0.125	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000 ...

De esta tabla y su representación gráfica cartesiana podrían obtenerse algunas observaciones que adquirirían mayor significación con ejercicios como:

– Si duplicamos la longitud **a** del lado de un cubo, ¿cuál será la relación entre el volumen del "nuevo cubo" y el volumen del cubo inicial?

– Si queremos obtener un cubo cuyo volumen sea la mitad del volumen del "antiguo cubo", ¿cuál es el operador que debemos aplicarle al lado del antiguo cubo para obtener el lado del nuevo?

– Si le sacamos la mitad a la longitud **b** del lado de un cubo, ¿cuál será la relación del volumen del "nuevo cubito" y el volumen del cubo inicial?

– Si deseamos duplicar el volumen de un cubo, ¿cuál es el operador que debe aplicarse a la longitud inicial del lado para obtener la del nuevo lado? (Este es uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas).

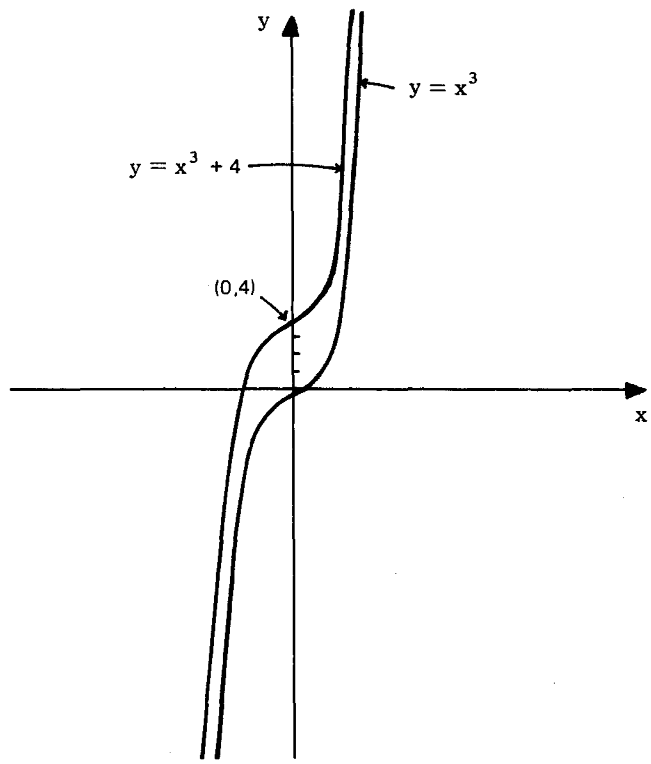
Una vez se considere la función cúbica, expresada por el término x^3 o por la ecuación $y = x^3$, en los números reales, y se haga su representación gráfica, conviene observar lo que sucede al tomar valores mayores que cero, o valores menores que cero del dominio de la función. Las imágenes correspondientes al primer caso son valores cada vez mayores, lo que hace que esta rama de la curva crezca positivamente; en el segundo caso los valores de las imágenes son cada vez menores, y la otra rama de la curva decrece (o crece negativamente) en forma simétrica a la anterior.

Esta simetría no corresponde a una reflexión en un espejo plano sino a una simetría rotacional. Si se hace una rotación de media vuelta con centro en el origen (0, 0), el punto (1, 1) coincide con (−1, −1); el punto (2, 8) con (−2, −8); el punto (2.5, 15.625) con (−2.5, −15.625), etc. se podría considerar la simetría también como una reflexión de cada punto en un imaginario "espejo puntual" colocado en el origen.

Por eso se dice que el simétrico del punto (1, 1) es (−1, −1) el de (2,8) es (−2, −8), el de (2.5, 15.625) es (−2.5, −15.625) es decir que para cualquier punto (x, y) de la gráfica de la función, el punto $(-x, -y)$ también está sobre la gráfica.

Para el estudio de las funciones de la forma $y = x^3 + b$ conviene partir de ejemplos como los sugeridos en los contenidos básicos y trabajar también a partir de la gráfica de la función cúbica pura, proponiendo ejercicios como:

- Si la gráfica de la función cúbica pura se desplaza 4 unidades hacia arriba ¿qué pasa con el valor de las imágenes? ¿Cuál es la expresión para la función que representa la curva desplazada?



En la gráfica anterior se puede observar que la distancia vertical entre un punto de la curva de $y = x^3$, y la de su trasladado en la curva de $y = x^3 + 4$ es siempre la misma, es decir que el valor de cada una de las imágenes de la nueva función aumenta 4.

A partir de situaciones como las propuestas en los contenidos básicos y de las reflexiones hechas para el caso anterior los alumnos pueden inferir cuál sería la función correspondiente a la curva cuando el desplazamiento se efectúa 4 unidades hacia abajo.

Para el estudio de las funciones $y = (x - e)^3$ e $y = (x + e)^3$ se pueden presentar los dos ejercicios del armazón de un cubo que se propusieron en los contenidos básicos. Pero también es conveniente e interesante realizar algunas construcciones de cubos que respondan a ejercicios como:

— Con cubitos de madera de 1 cm de arista o con cubitos de azúcar, construir un cubo de 2 cm de lado (pegar los cubitos para que el cubo no se desarme). A partir de este cubo armar el de 3 cm de lado y observar las placas y barras, formadas con cubitos, que van agregándose al cubo inicial para transformarlo en el nuevo cubo.

Observarán que para completar éste último es necesario colocar otro cubito en una esquina.
Para diferenciar las placas y las barras se pueden pintar con tizas de diferentes colores. Así encontrarán que el nuevo cubo está formado por:

. el cubo inicial (2^3)
. tres placas de cuatro cubitos (3×2^2),
. tres barras de dos cubitos (3×2),
. un cubito

El número total de cubitos es 27, o sea 3^3 cubitos. El nuevo cubo representa $(2 + 1)^3$ y el número total de cubitos se puede expresar así:

$$27 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$

Se sabe que $(x + e)^3 =$

$x^3 + 3ex^2 + 3e^2 x + e^3$ para este caso

$x = 2$, $e = 1$ entonces $3e = 3$; $3e^2 = 3$

$e^3 = 1$

— Construir, a partir de un cubo cuya arista es de 3 unidades de longitud, un cubo cuya arista tenga 2 unidades más de longitud que el cubo inicial.

Una vez construído el nuevo cubo, se puede descomponer en las siguientes piezas (o viceversa)
. el cubo inicial (3^3),
. tres placas formadas por dos capas de 9 cubitos cada una ($3 \times (2 \times 9)$),
. tres barras formadas por tres capas de 4 cubitos cada una ($3 \times (3 \times 4)$),
. un cubo formado por 8 cubitos.

Es grato verificar que la suma del número total de cubitos que forman las "ocho piezas" es igual a $125 = 5^3$.

$$\begin{aligned}(3+2)^3 &= 3^3 + 3 \times (2 \times 9) + 3 \times (3 \times 4) + 8\\ &= 3^3 + 3 \times 3^2 \times 2 + 3 \times 3 \times 2^2 + 2^3\\ &= 27 + 54 + 36 + 8 = 125\end{aligned}$$

Así hemos utilizado la expresión de la función cúbica general para hallar la imagen de 5 a partir de la imagen de 3.

También es posible obtener el cubo de 3 a partir del cubo de 5 construído anteriormente. Para ello será necesario quitar un cubito de 8 de una esquina, y luego desmontar tres piezas de 25×2 menos 5×4 cubitos, o sea quitar 98 cubitos en total, $125 - 98 = 27$.

$$\begin{aligned}(5-2)^3 &= 125 - 8 - 3 \times (5^2 \times 2 - 5 \times 2^2)\\ &= 125 - 8 - 3 \times 5^2 + 3 \times 5 \times 2^2\\ &= 125 - 3 \times 5^2 \times 2 + 3 \times 5 \times 2^2 - 8\\ &= 125 - 150 + 60 - 8 = 125 - 98\\ &= 27\end{aligned}$$

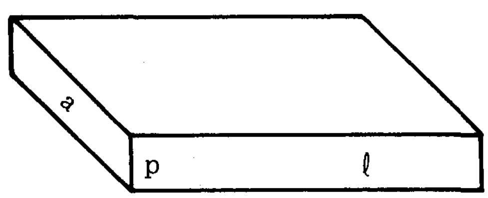
Para hallar el cubo de la suma o de la diferencia de dos términos se puede utilizar la expresión de la función cúbica general:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

— La función cúbica pura se puede utilizar en la solución de problemas como:

Si se construyen cajas rectangulares que tienen el doble de ancho que de profundidad y el doble de largas que de anchas, ¿cuál será el volumen de éstas cajas?

La proporción entre los lados puede expresarse así:



$1 : 2 :: 2 : 4$
$p : a :: a : \ell$
$V(p, a, \ell) = p \cdot a \cdot \ell$

Podemos expresar las tres dimensiones a partir de una de ellas.

$V(p) = p \times 2p \times 4p = 8p^3$

$V(a) = \frac{1}{2} a \times a \times 2a = a^3$

$V(\ell) = \frac{1}{4}\ell \times \frac{1}{2}\ell \times \ell = \frac{1}{8}\ell^3$

En general si la "proporción" entre los lados es conocida el volumen se calcula con una función cúbica pura del tipo ax^3.

— Otros problemas propuestos por el docente y aquellos que formulen los alumnos seguramente le darán gran interés y sentido al estudio de las funciones cúbicas.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

42. Reconocer la función exponencial y explicar mediante ejemplos la acción de dicha función al aplicársela a sus argumentos.

43. Reconocer y plantear situaciones en las que los cambios se describan apropiadamente con una función exponencial y dar la expresión simbólica de ésta.

44. Representar gráficamente funciones exponenciales.

CONTENIDOS BASICOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Consideremos el caso de una fábrica cuyo reto consiste en duplicar cada año su producción a partir de cierta producción inicial p que traía de los años anteriores. Durante el primer año del Plan de Duplicación Anual, la producción deberá ser $p = 2\,p_o$; durante el segundo año, $p_2 = 2\,(2\,p_o) = 2^2 p_o$; durante el tercero, $p_3 = 2(2^2 p_o) = 2^3 p_o$, y así sucesivamente hasta el n-esímo año, en el que la producción será $p_n = 2(2^{n-1}\,p_o) = 2^n p_o$.

Este proceso de cambio en la producción se puede expresar mediante una función cuya ecuación podría ser $p_t = 2^t p_o$, donde p_t indica la producción durante el año t. El subíndice t sirve pues para indicar que estamos hablando de la producción en el tiempo t. También podemos indicar lo mismo si escribimos p(t): $p(t) = 2^t p_o$. En estas fórmulas, p_o es la producción inicial, que es una constante conocida en cada caso concreto.

¿Qué pasaría si la ecuación fuera $p(t) = 1^t p_o$? (o sea si la base fuera 1)

Ensayemos a calcular la producción en el 1º, 2º y 3er. año:

$p(1) = 1^1 p_o = p_o$

$p(2) = 1^2 p_o = p_o$

$p(3) = 1^3 p_o = p_o$

En lugar de una fábrica ambiciosa se trataría de otra que prefiere mantener constante su producción todos los años; podríamos expresar esto mediante una función cuya ecuación sería ahora $p(t) = 1^t p_o$ o simplemente $p(t) = p_o$, es decir que para cualquier valor de t, la producción es siempre la misma p_o. Estaríamos pues en presencia de una función constante.

¿Qué pasaría si la base fuera 3, $p(t) = 3^t p_o$?

Veamos:

$p(1) = 3^1 p_o = 3p_o$

$p(2) = 3^2 p_o = 9p_o$

$p(3) = 3^3 p_o = 27p_o$

Vemos que la función exponencial con base 3 crece más rápidamente que la que tiene base 2, propuesta inicialmente.

Ensayemos con la que tiene base 10.

$p(t) = 10^t p_o$

$p(1) = 10^1 p_o = 10p_o$

$p(2) = 10^2 p_o = 100p_o$

$p(3) = 10^3 p_o = 1000p_o$

¡El crecimiento es tremendamente rápido!

En particular cuando $p_o = 1$ la ecuación de la función, para la producción de la fábrica de que se habló inicialmente, es $p(t) = 2^t$

Si $p_o = 100$, $p(t) = 100 \bullet 2^t$

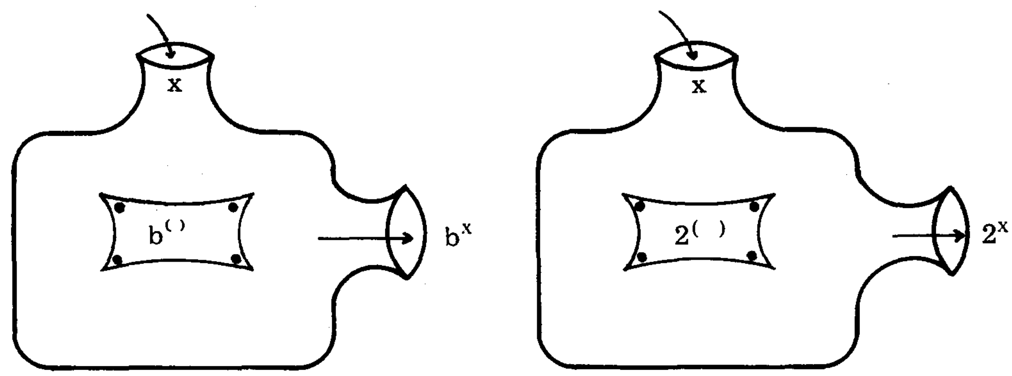
Situaciones como la anterior se pueden modelar con un tipo especial de funciones llamadas **exponenciales.** Estas funciones tienen la particularidad de que dado un número fijo **b** llamado **base** que se suele tomar mayor que uno, transforman a cualquier número real dado x en el resultado de elevar la base b al exponente x.

La función $f_{b()}$ o $b^{()}: x \longrightarrow b^x$ se puede notar

$b\uparrow(\ \ )$, $b\hat{}(\ \ )$, $exp_b(\ \ )$.

Cuando el número fijo b es un entero positivo y los valores de x son enteros positivos, se tendrá una función definida de $\mathbb{Z}^+$ en $\mathbb{Z}^+$ que transforma a x en una potencia de b: precisamente en la potencia x de b.

Máquinas exponenciales



Para b todavía no determinado

Para b = 2

Figura 1

Observemos la tabla para la función cuya ecuación es $y = 2^x$, $x \in \mathbb{Z}^+$, o sea para la función exponencial cuando la base b es $b = 2$:

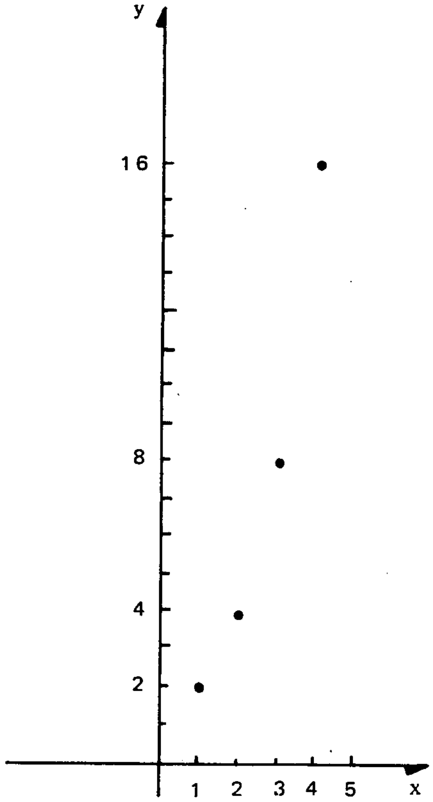
x	1	2	3	4	5 . . .
2^x	2	4	8	16	32 . . .

La gráfica correspondiente estará constituída por puntos aislados de la forma $(x, 2^x)$ en el plano cartesiano (ver figura 2).

Si x toma valores reales positivos la función estará definida de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y la gráfica resultará una línea continua formada por la representación de los puntos $(x, 2^x)$ en el plano cartesiano (ver figura 3).

Observemos la tabla para $y = 2^x$, $x \in \mathbb{R}^+$:

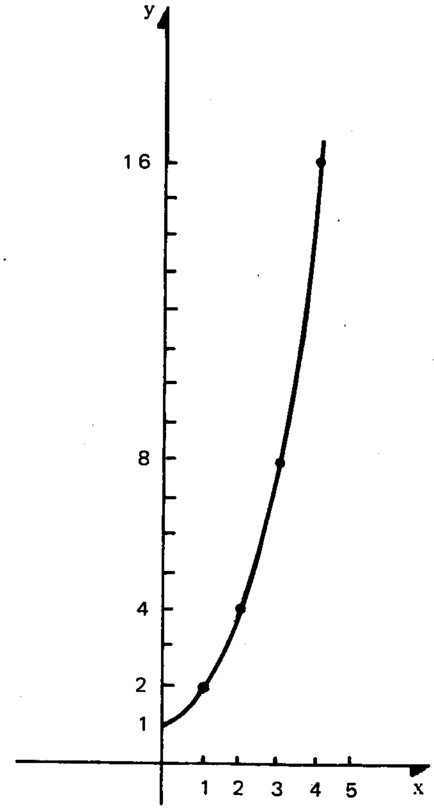
x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	. . .
2^x	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$	$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}$		$\sqrt{8}$	$\sqrt{32}$		
	1.41	1.58	2	2.82	5.65	8	. . .



$f_{2^{()}}: \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$

$x \longmapsto 2^x$

Figura 2



$f_{2^{()}}: \mathcal{R}^+ \longrightarrow \mathcal{R}^+$

$x \longmapsto 2^x$

Figura 3

Cuando x toma valores en $\mathcal{R}$ la función estará definida de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}^+$ y la gráfica resultará una línea continua formada por la representación de los puntos $(x, 2^x)$ en el plano cartesiano (Ver Figura 4).

Veamos la tabla y la representación gráfica de $y = 2^x, x \in \mathcal{R}$:

x	2^x
-2	$2^{-2} = \frac{1}{4}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$	$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
0	1
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$
1	2
2	4
$\vdots$	$\vdots$

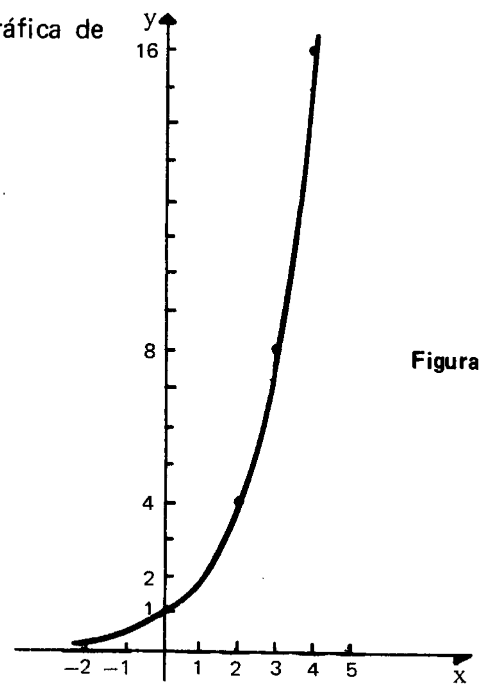


Figura 4

$f_{2^{()}}: \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}^+$

$x \longmapsto 2^x$

Es posible que antes de abordar el estudio de la función exponencial, convenga repasar las propiedades de los exponentes, incluyendo los exponentes racionales. Entre otras, pueden verificarse igualdades como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad ;$$

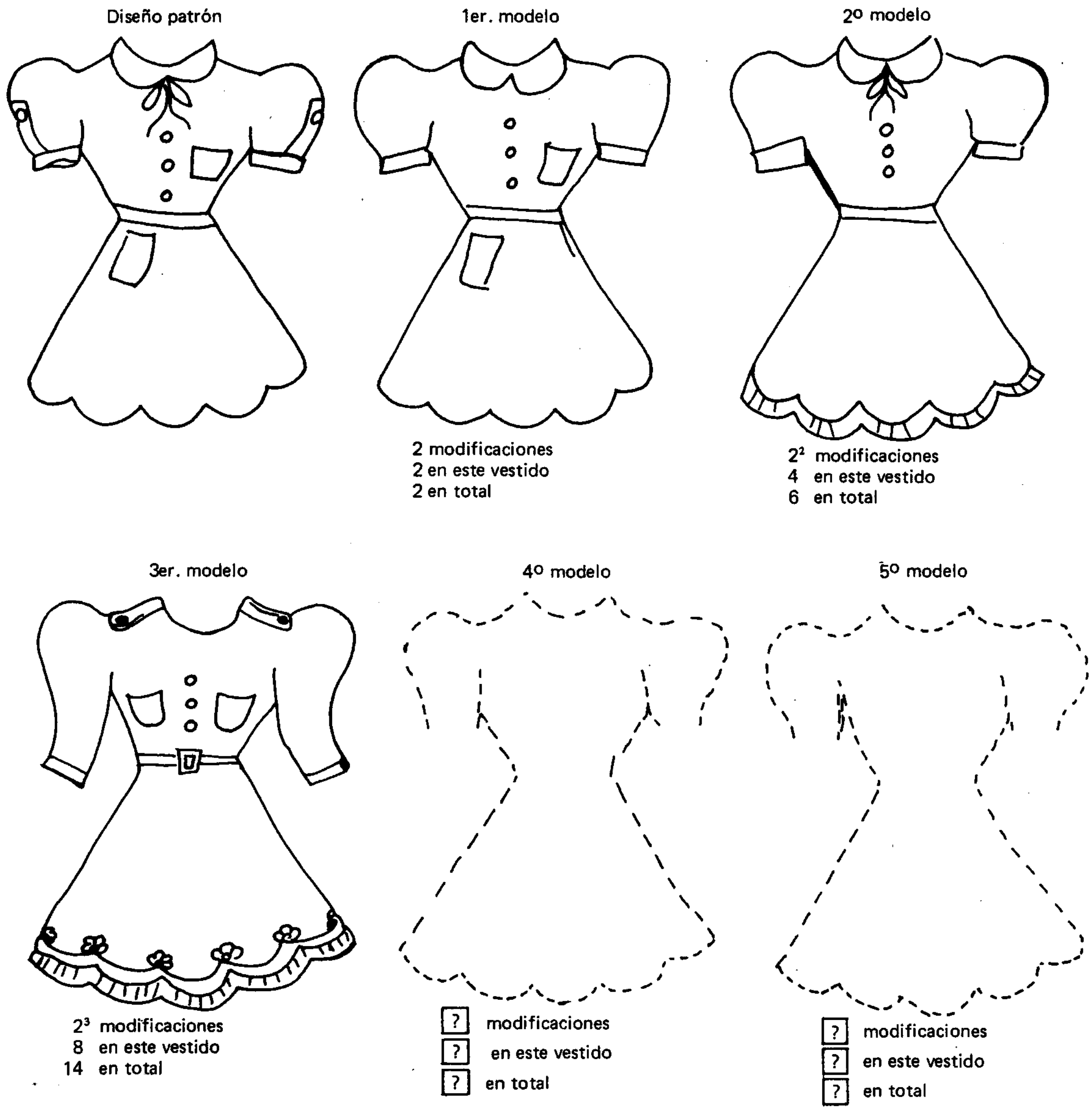
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{b^n}{a^n}$$

También pueden proponerse ejercicios, para hallar el valor de x, como los siguientes:

$8^x = 32$; $(2^3)^x = 32$; $6^{2x} = 216$; $2^{x+4x} = \frac{1}{8}$

Otro problema que puede motivar la presentación de funciones exponenciales podría ser:

– Un diseñador de modas debe elaborar 6 modelos nuevos en un plazo de 3 semanas. Para ello dispone de un diseño patrón que le permite agregar, cambiar de sitio o suprimir accesorios para variar los modelos. En su primer modelo modifica dos accesorios del patrón y de aquí en adelante modifica dos accesorios del patrón inicial por cada uno de los que modificó en el modelo anterior. Para obtener el último modelo ¿cuántas modificaciones tiene que hacer respecto al patrón inicial? ¿Cuál es el número total de modificaciones (con respecto al diseño inicial) que hizo en todos los modelos?



Trate de detectar un esquema que se vaya repitiendo, y busque la manera de expresarlo simbólicamente.

— Si en el problema anterior el diseñador hace un sólo cambio en el primer modelo y de aquí en adelante hace dos cambios por cada uno de los anteriores, ¿cuál será ahora el número de modificaciones del último modelo con respecto al patrón inicial? ¿Cuántos en total?

Obsérvese que en el primer problema, el número de modificaciones sucesivas para obtener cada modelo es 2, 4, 8, 16, 32 y 64. El número de modificaciones del sexto modelo, que en este caso es el último, es 64, que es lo mismo que 2^6, y el número total de modificaciones es 126, o sea $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$. (compare 126 con el doble del último número, o sea 64).

En el segundo problema, empezando con una modificación, se tendrán 1, 2, 4, 8, 16, 32 modificaciones sucesivas. El número de modificaciones del último modelo es $32 = 2^{6-1}$. En total se tendrán 63 modificaciones o sea
$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$.
(Compare 63 con el doble del último número, o sea 32).

En estas actividades, el objetivo importante desde el punto de vista cognitivo no es aprender fórmulas y manipular símbolos, sino construir los esquemas conceptuales que se van detectando en los cálculos sucesivos. El esfuerzo de cálculo es mecánico y puede hacerse con calculadora de mano; pero el esfuerzo de captar un patrón que se repite lo tiene que hacer el cerebro de cada alumno. Cuando haya captado un esquema conceptual (así todavía no sea muy elaborado), tratará de expresarlo verbalmente y luego con símbolos algebráicos, para apoyarse en ellos con el fin de contrastar su esquema hipotético con el que se va produciendo de hecho con los cálculos sucesivos. El sistema simbólico debe apoyar y aclarar la producción conceptual, no bloquearla.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

45. Repasar cuándo una relación binaria de un conjunto a otro está totalmente definida o no; cuándo es sobreyectiva, funcional, inyectiva o biyectiva.

46. Identificar la relación inversa de algunas relaciones funcionales.

47. Reconocer las condiciones que debe tener una función para que su inversa sea funcional.

48. Reconocer la inversa de la función exponencial y explicar mediante ejemplos la acción de dicha función al aplicársela a sus argumentos.

49. Representar gráficamente funciones logarítmicas.

CONTENIDOS BASICOS Y SUGERENCIAS METODOLOGICAS

Antes de estudiar la función logarítmica conviene recordar los conceptos mencionados en estos dos primeros objetivos que fueron trabajados en 8o. grado (objetivos 99 y 100).

Con respecto a las relaciones funcionales es fácil reconocerlas por su esquema de lectura, ya que en él cabe un artículo definido antes de la palabra que designa la relación.

Si consideramos la expresión ". . . es logaritmo en base diez de. . .", es válido cambiarla por ". . . es **el** logaritmo en base diez de. . ." introduciendo el artículo definido **el**; pero si escribimos ". . . es **un** logaritmo en base diez de. . .", sería fácil que nos interpretaran el artículo indefinido **un** como si estuviéramos insinuando que hay más logaritmos en base diez para ese número.

Esta inferencia no sería correcta pues cualquier número real positivo tiene un único logaritmo real en base diez.

También podemos considerar la relación "... es doble de. . ." y ver si es correcto modificarla por ". . . es **el** doble de. . ." o por ". . . es **un** doble de. . .". Es fácil constatar lo poco usual de esta relación sin el artículo definido **él**, ya que las proposiciones relacionales particulares donde ella aparece son del tipo: 14 es **el** doble de 7; $\frac{6}{5}$ es el doble $\frac{3}{5}$, etc. Este hecho evidencia el carácter funcional de dicha relación.

¿Cuál es la acción inversa de duplicar?

Es necesario pensar en la operación que "saca la mitad", pues si al duplo de algo le sacamos la mitad se vuelve a aquel "algo" que se tenía inicialmente

$$7 \xmapsto{2x} 14 \xmapsto{\frac{1}{2}x} 7$$

Vemos que sacar la mitad después de duplicar da lo mismo que no hacer nada. Entonces la relación asociada a la operación **sacar la mitad,** que es ". . . es **la** mitad de. . .", es la relación inversa de ". . . es **el** doble de. . .". En este caso la relación inversa también es funcional porque admite el artículo definido **la**.

Si consideramos la relación "... es raíz cuadrada de. . .", se puede constatar que si introducimos el artículo indefinido **una**, resulta correcta la expresión "... es una raíz cuadrada de. . ." cuando el recorrido de la relación es $\mathbb{R}$. Así la proposición "-3 es **una** raíz cuadrada de 9", es correcta y la expresión "+3 es **una** raíz cuadrada de 9" también es correcta.

En estos casos, la inferencia que hace el cerebro a partir de la expresión "es **una** raíz. . .", o sea que hay más de una, es también correcta. Pero piense en "0 es **una** raíz cuadrada de 0".

La expresión es formalmente correcta, pero la insinuación de que hay más raíces cuadradas de cero resulta falsa.

Este tipo de razonamiento preciso, este tipo de distinciones entre lo que se dice y lo que se infiere de lo dicho, esta finura lingüística que detecta diferencias entre los artículos, los cuantificadores y las conectivas, son más importantes para la formación lógica del alumno que el uso de tablas de verdad o de abreviaturas simbólicas para las conectivas y los cuantificadores.

Con este tipo de precisiones se va desarrollando durante todo el año la primera unidad sobre formas de razonamiento y métodos de argumentación.

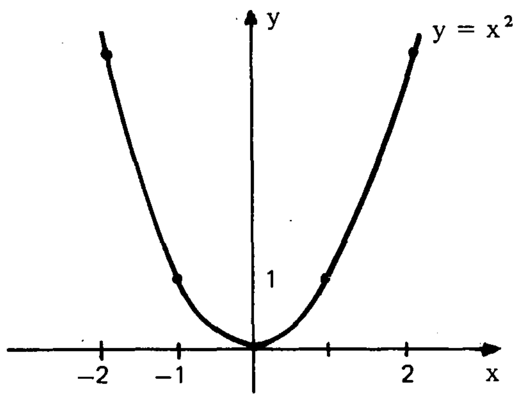
Volviendo al caso de la relación "... es raíz cuadrada de. . .", vemos que si se toma todo $\mathbb{R}$ como recorrido, la relación no es funcional, porque cualquier preimagen en $\mathbb{R}^+$ tiene dos imágenes: la raíz cuadrada positiva y la raíz cuadrada negativa.

¿Es la inversa de esta relación, funcional?

Basta volver atrás y mirar las funciones cuadráticas, y en particular las cuadráticas puras, para ver que la relación ". . . es **el** cuadrado de. . ." sí es funcional, aunque no sea inyectiva.

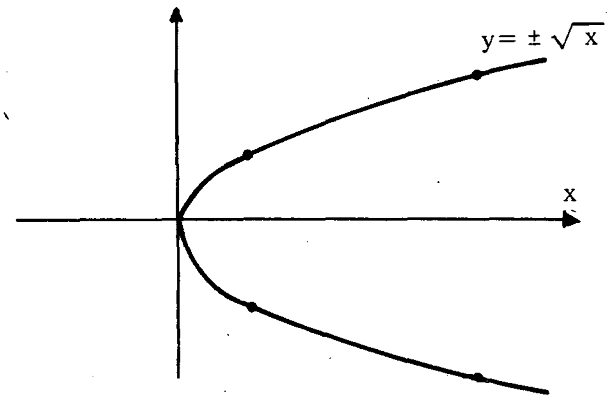
A partir de un ejemplo como el anterior se empieza a reconocer la necesidad de que una función sea inyectiva para que su inversa pueda ser función.

Veamos las gráficas correspondientes a una función cuadrática pura y a su inversa.



$f \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x^2$

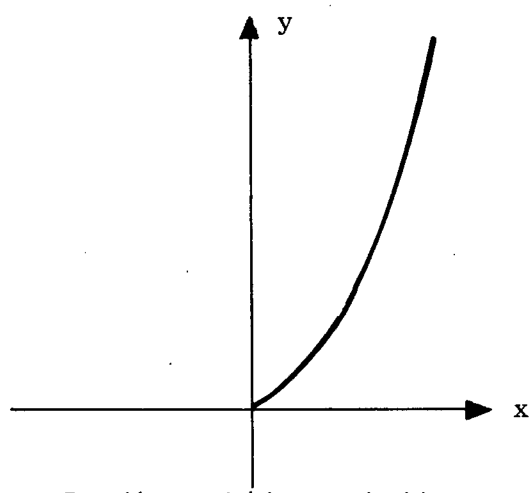
No es una función inyectiva



$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \pm\sqrt{x}$

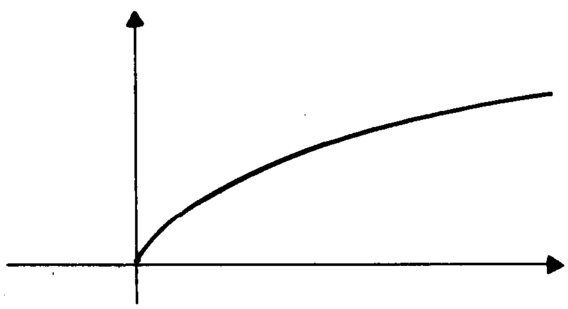
No es una función

Si restringimos el dominio de la función cuadrática pura a valores reales mayores o iguales que cero ($x \geqslant 0$), es fácil, a partir de las gráficas que ya tenemos, obtener la de esa función y la de su inversa:



Función cuadrática restringida

$$f_+ : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^2$$



Función inversa de f_+

$$f_+^{-1} : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto +\sqrt{x}$$

¿Por qué en este caso la inversa también es función?

¿Cómo son los grafos de f_+ y f_+^{-1}? ¿Qué transformación geométrica se realiza para pasar de una a otra gráfica?

Nótese que la restricción de la función cuadrática pura consistió en restringir el dominio (en el eje x) de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

La gráfica queda reducida a la "rama derecha" de la parábola original. La restricción en la relación no funcional "es raíz cuadrada de" consistió en cambio en restringir el recorrido (en el eje y) de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

La gráfica queda reducida a la "rama superior" o "rama positiva" de la parábola original, y ahora sí representa una función:

"la raíz cuadrada positiva (o no-negativa) de".

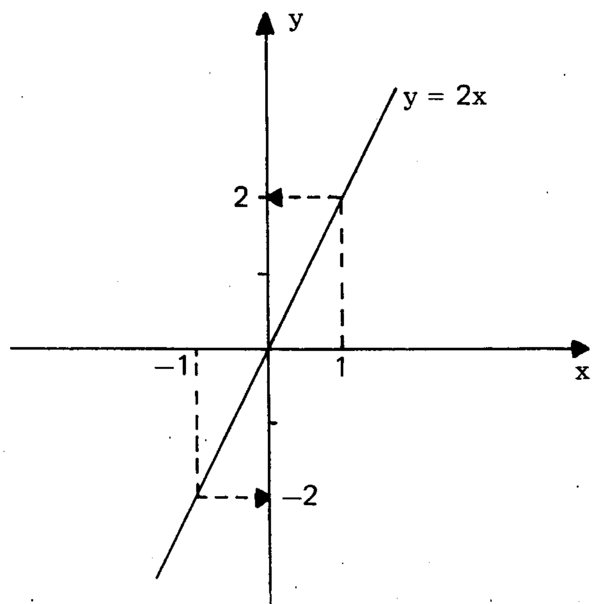
Para una función inyectiva que no está totalmente definida, su inversa no será sobreyectiva, es decir el recorrido será un subconjunto del conjunto de llegada.

Sugerimos que si en 8º grado no se estudiaron estos temas, aquí es el momento preciso para trabajarlos con la amplitud y profundidad que el profesor considere necesarias, teniendo en cuenta el interés de los alumnos.

El grafo de la función inversa de una función dada se obtiene cambiando en el grafo de ésta última, el orden de las componentes de cada pareja ordenada; por ésto los conjuntos de salida y de llegada de la función inversa son respectivamente el conjunto de llegada y de salida de la función original.

Retomemos un ejemplo ya mencionado: Consideremos la función duplicadora que podemos simbolizar así $f : x \longmapsto 2x$ y que también podemos expresar mediante la ecuación $y = 2x$.

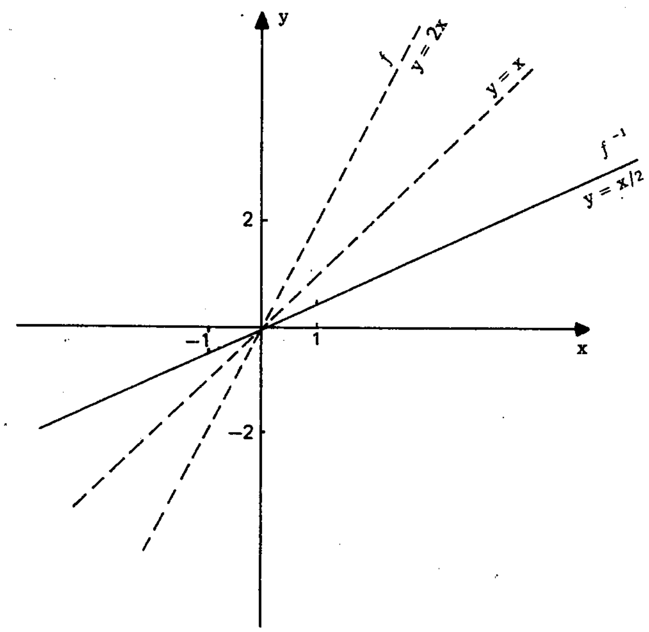
a) Representemos esta función en el plano cartesiano:



El grafo de esta función está formado por el conjunto de las parejas de la forma (x, y) donde la segunda componente es el doble de la primera. Esto se puede expresar mediante los símbolos propios de la matemática así: $\{(x, y) \mid y = 2x\}$.

b) La expresión para la función inversa que podemos simbolizar f^{-1} se obtiene reemplazando en la igualdad $y = 2x$ a y por x y a x por y: $x = 2y$ de donde $y = \frac{x}{2}$, entonces
$f^{-1}: x \longmapsto \frac{x}{2}$

La representación en el plano cartesiano de f^{-1} es:



Es fácil ver que la recta que contiene todos los puntos del grafo de f^{-1}, si la miramos con respecto a la recta $y = x$, (llamada diagonal principal), resulta ser simétrica a la recta que contiene los puntos del grafo de f. La transformación geométrica que consiste en reflejar la gráfica de una relación R sobre la diagonal principal produce la gráfica de la relación inversa R^{-1}. El estudio de reflexiones de distintas gráficas puede aclarar mucho las condiciones que debe cumplir una relación para que su inversa cumpla otras condiciones (llamadas "duales" de las primeras): ser sobreyectiva es la dual de estar totalmente definida, y ser funcional es la dual de ser inyectiva.

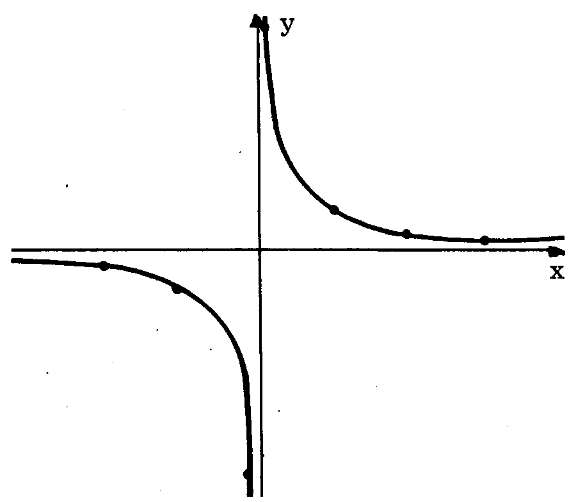
Conviene aquí precisar la diferencia entre la inversa de una función, su recíproca, y el inverso multiplicativo o recíproco de un número.

En este caso la recíproca de la función duplicadora f que se calcula en x por $f(x) = 2x$ es la función $\frac{1}{f}$ que se calcula en x por

$$\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$$

Veamos una tabla de valores y la representación gráfica de $\frac{1}{f}$ en donde $\frac{1}{f}: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{2x}$

x	1	−1	2	−2	3	−3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2x}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1	−1	3



La gráfica es una curva plana llamada hipérbola.

Obsérvese la diferencia entre la gráfica de la función inversa de la función duplicadora f, o sea $f^{\leftarrow}$, que en x se calcula: $f^{\leftarrow}(x) = \frac{1}{2}x$ que era una recta, y la de la recíproca $\frac{1}{f}$ que acabamos de realizar, que es una hipérbola.

La confusión resulta de la notación $(\quad)^{-1}$ que se usa para el recíproco de un número o de una función (o sea para sus inversos con respecto a la multiplicación), y para la función inversa con respecto a la composición. Si se reservara $(\quad)^{-1}$ sólo para el recíproco (o inverso con respecto a la multiplicación), f^{-1} sería $\frac{1}{f}$, y habría que utilizar $(\quad)^{\leftarrow}$ para el inverso con respecto a la composición.

Nótese que un número real x no tiene inverso con respecto a la composición, porque la composición es de funciones, no de números, sino sólo recíproco o inverso multiplicativo; éste se nota $\frac{1}{x}$ o x^{-1}
De ahí la confusión con f^{-1}: pueda significar $\frac{1}{f}$ o $f^{\leftarrow}$ según el contexto.

Inversas de las funciones exponenciales

A veces se habla en singular de **la** función exponencial.

Propiamente hablando, no hay una sola función exponencial, sino toda una familia de funciones exponenciales, una para cada base b, con $b > 1$.

Para notar la función exponencial con base b, utilicemos la abreviatura $\exp_b$ o $\exp_b(\quad)$.

La calculamos en un número real x por $\exp_b(\quad) = b^x$.

$$\begin{aligned} \exp_b : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto b^x \end{aligned}$$

(Cuando se habla de **la** función exponencial exp sin mencionar la base, se sobreentiende generalmente la base de los logaritmos naturales e, una constante cuyo valor aproximado es 2.71828 y cuyo nombre recuerda la inicial del matemático Leonardo Euler (1707-1783).
Así, $\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$).

Veamos ahora cuáles son las inversas de las funciones exponenciales y establezcamos algunas relaciones entre cada pareja de funciones: cada exponencial y su inversa.

La función exponencial con base b, cuya ecuación es $y = b^x$, $b > 1$ ya vimos que tiene como conjunto de salida los números reales y como conjunto de llegada los reales positivos.

También vimos que para $x_1 \neq x_2$, siempre que $b > 1$, $\exp_b(x_1) \neq \exp_b(x_2)$; es decir, la función es inyectiva, y por lo tanto su inversa $\exp_b^{\leftarrow}$ o $\exp_b^{-1}$ también es función. Esta función inversa, denominada función logarítmica en base b, transforma a cualquier número real positivo x que sea la potencia de una base dada b mayor que 1, en el exponente al que debe elevarse dicha base b para que la potencia resultante sea precisamente x.

Notemos esa función inversa de $\exp_b$ con la abreviatura $\log_b$.

$\log_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se calcula en x buscando el único y que cumpla la condición de que $x = b^y$; ese y será la imagen de la función $\log_b$ en x:

$y = \log_b(x)$; dicho de otra manera, si $f(x) = b^y$, entonces $f^{-1}(x) = \log_b(x)$.

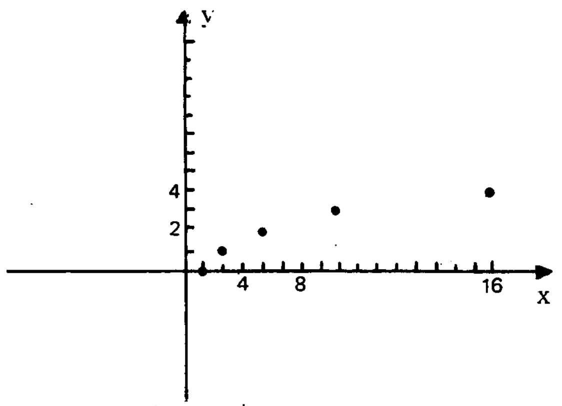
Cuando la base b es un entero positivo y los valores de x son enteros positivos, el número y, tal que $x = b^y$ casi nunca es entero; así se tendrá una función definida de $\mathbb{Z}^+$ en $\mathbb{R} \cup \{0\}$ que transforma a x en el logaritmo en base b de x, que también notamos $\log_b$ porque hace lo mismo, aunque tiene diferente dominio. ¿Cuándo será y también entero?

Si x toma valores en $\mathbb{R}^+$, las imágenes de la función $\log_b$ toman valores en el conjunto $\mathbb{R}$.

Veamos un ejemplo para cada caso. Consideremos la función exponencial con base 2, $\exp_2$, cuya ecuación es $y = 2^x$; la ecuación de la función inversa $\log_2$ es $y = \log_2(x)$.

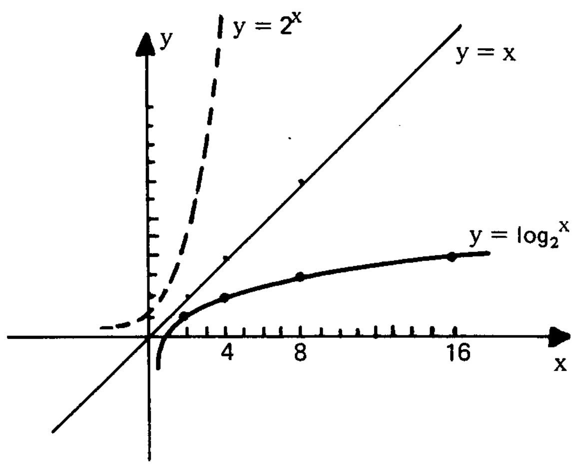
Hagamos las tablas y las gráficas correspondientes a los dominios $\mathbb{Z}^+$ y $\mathbb{R}^+$

x	1	2	4	8	16	...
$\log_2(x)$	0	1	2	3	4	...



$$\log_2 : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$
$$x \longmapsto \log_2 x$$

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{32}$	4	...
$\log_2(x)$	-3	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$	2	...



$$\log_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \log_2 x$$

En el último dibujo hicimos las gráficas correspondientes a las funciones exponencial $\exp_2$ ($y = 2^x$) y logarítmica $\log_2$ ($y = \log_2 (x)$) con el fin de apreciar cómo una gráfica es la simétrica de la otra con respecto a la recta cuya ecuación es $y = x$. Esto permite también observar que el dominio de la exponencial $\exp_2$ es el recorrido de la logarítmica $\log_2$, y que el recorrido de la primera es el dominio de la segunda. Algunas parejas del grafo de la exponencial $\exp_2$ son (0, 1), (1, 2), (2, 4), mientras que en el grafo de la logarítmica $\log_2$ encontraremos, entre otras, las parejas (1, 0), (2, 1), (4, 2).

Podrían proponerse algunos ejercicios como:

1. Escribir la expresión logarítmica en la base apropiada correspondiente a las expresiones exponenciales siguientes:

$25 = 5^2$ $\qquad 10^0 = 1$ $\qquad 4^{-2} = \frac{1}{16}$

$2^{-2} = \frac{1}{4}$ $\qquad \sqrt[3]{8} = 2$ $\qquad \frac{1}{5} = 5^{-1}$

Las expresiones logarítmicas, en cada caso, son:

$\log_5 (25) = 2$ $\qquad \log_{10}(1) = 0$ $\qquad \log_4 (\frac{1}{16}) = -2$

$\log_2 (\frac{1}{4}) = -2$ $\qquad \log_8 (2) = \frac{1}{3}$ $\qquad \log_5 (\frac{1}{5}) = -1$

2. Dar la expresión exponencial correspondiente a algunas expresiones logarítmicas.

3. Encontrar el valor de x, y o b según el caso:

$y = \log_{10} (0.001)$ $\qquad \log_{10}(x) = -4$

$\log_b (100) = 2$ $\qquad y = \log_{36}(216)$

$\log_3 (x) = -2$ $\qquad \log_b (9) = -2$

4. Construir en el mismo sistema de coordenadas las gráficas de las funciones f y g cuyas ecuaciones son: $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \log_3 (x)$. Explicar la relación entre estas dos funciones f y g.

5. Construir en el mismo sistema de coordenadas las gráficas de $f(x) = \log_b (x)$ para $b = 2$; $b = 3$ y $b = 10$. Comparar las gráficas (es conveniente usar papel milimetrado y calculadora).

6. Si se tiene calculadora con tecla LOG y con tecla LN, comparar las gráficas que se obtienen para $b = 10$, $b = 3$, $b = 2$ con LOG y LN. Así se observará que LOG calcula $\log_{10}$ y que LN, calcula el logaritmo en una base intermedia entre $b = 2$ y $b = 3$.