MATEMATICA

PROGRAMADORES-AUTORES

Ministerio de Educación Nacional

Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva
Virginia Cifuentes de Buriticá
Gabriel Gutiérrez Palacios
Teresa León Pereira
Orlando Múnera Patiño
Carmen Lucila Osorno Reyes

PROGRAMADORES-REVISORES

Ministerio de Educación Nacional

Cecilia Casasbuenas Santamaría
Ana Celia Castiblanco Paiva

ASESOR
Universidad Nacional de Colombia

Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

Para la revisión y reajuste de este programa se tuvieron en cuenta las observaciones de los maestros encargados de validar la versión anterior, las sugerencias de los técnicos de los centros experimentales piloto y las críticas del Primer Simposio Nacional sobre la Enseñanza de las Ciencias, celebrado en Bogotá en 1980.

Recomendaciones generales

La recomendación fundamental es la de no empezar por los sistemas simbólicos para tratar de que el alumno construya los sistemas conceptuales, sino comenzar por los sistemas concretos que él maneja, así el profesor los considere elementales, empíricos y pre-matemáticos, para que a través de la familiaridad con las regularidades de esos sistemas concretos el alumno vaya construyendo el sistema conceptual respectivo; una vez iniciada la construcción de éste, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales, y aun traducir de unos sistemas simbólicos a otros, puesto que ya comprende lo que quieren decir. Se fuerza al alumno a manejar un sistema simbólico sin haber construido el sistema conceptual a partir de los sistemas concretos; este sistema simbólico puede bloquear la construcción del sistema conceptual.

La concepción de los sistemas matemáticos que motiva la recomendación anterior es la siguiente: cualquier sistema matemático que el profesor vaya a presentar a sus alumnos puede analizarse como un rayo de luz que pasa por un prisma: si se observa cuidadosamente, se encontrará que tiene un núcleo central, en verdad importante, que es el respectivo sistema conceptual. Sobre él, a un nivel superficial, aparecen uno o varios sistemas simbólicos para representar ese único sistema conceptual. Y bajo el sistema conceptual, a un nivel profundo, casi diríamos arcaico, aparecen uno o varios sistemas concretos, de cuyas regularidades es posible construir el mismo sistema conceptual.

Desafortunadamente, los libros sólo pueden ofrecernos los sistemas simbólicos: no se puede imprimir otra cosa que palabras, símbolos y gráficas. Por eso es fácil creer que el verdadero sistema matemático es el sistema simbólico, y así trató de hacerlo creer la filosofía formalista de las matemáticas. Un buen matemático puede reconstruir el sistema conceptual a partir del sistema simbólico, pero los niños y jóvenes más bien pueden experimentarlo como un obstáculo para llegar al sistema conceptual. Ellos tienen una manera mucho más natural de construir el sistema conceptual: jugando con sistemas concretos que lleven a esa construcción. Tarea importante del profesor es la de identificar esos sistemas concretos, ojalá de entre los sistemas que sean familiares para el alumno en su cultura y en su edad específicas, para organizar actividades de juego, de ejercicio, de comparación, que hagan resaltar las regularidades que van a permitir la construcción conceptual respectiva.

Con las colecciones figurales y no figurales de dos o más objetos pueden organizarse una serie de juegos que lleven al sistema conceptual de los números naturales, resaltando las ordenaciones o seriaciones internas de cada colección y las clasificaciones en colecciones iguales de numerosas; la simbolización con palabras, palitos, cifras indoarábigas o romanas vendrá después. Pero los mismos juegos de colecciones pueden servir para resaltar otras operaciones manuales como reunir y separar, y otras relaciones como las de inclusión y disyunción, para permitir la construcción de un primer sistema conceptual de tipo conjuntista, así no se simbolicen formalmente esas operaciones y relaciones

En la misma forma se aprovechan sistemas concretos conocidos por el alumno, como el de las vueltas y fracciones de vuelta, el de los metros o pulgadas y fracciones de las mismas unidades, el de los litros o galones y fracciones de los mismos, para construir el sistema conceptual de los fraccionarios como operadores reductores o ampliadores sobre magnitudes. Los simbolismos vienen después: la mitad, 1/2, 0.5 ó el 50% nos muestran cuatro sistemas simbólicos posibles para el mismo concepto. Nótese que no hace falta "dividir un todo en partes" ni dibujar rectángulos o ponqués para dividirlos en partes de áreas iguales, entre otras cosas, porque este sistema concreto es el más difícil para los niños de 6 a 9 años por suponer las transformaciones y conservaciones de áreas. También podría utilizarse este sistema de áreas, pero sólo si se está seguro de que los alumnos tienen suficiente familiaridad y dominio del mismo.

Una valiosa pauta de trabajo para la geometría está constituida por la manipulación de objetos, la identificación de sus diferencias y sus semejanzas, la representación gráfica de cuanto se observa, el libre juego de la imaginación sobre características como regularidad e irregularidad de una figura y el estudio de condiciones adecuadas para una representación. Antes del esfuerzo mental de memorizar conceptos abstractos y definiciones, es conveniente que los alumnos realicen experiencias directas con los objetos y vayan descubriendo sin complicaciones los conocimientos que luego manejarán en forma abstracta. Así, antes de aprender que la longitud de la circunferencia se halla aplicando la fórmula $2 \pi r$, el alumno puede emplear hilos para medir tanto la circunferencia como el diámetro de muchos objetos de forma circular, hasta caer en la cuenta de que la circunferencia es un poco más larga que el triple del diámetro.

Con las actividades que se explican en el programa se desea ayudar al docente en su labor. De ninguna manera se quiere restringir su participación ni desconocer su iniciativa y creatividad.

El maestro podría enriquecer el tema de la medición consultando algunos libros sobre la historia de este proceso, ya que la medición es tan antigua como el hombre. La actividad de medir ha sido practicada tanto en sus formas más primitivas y rudimentarias como en sus formas más precisas y refinadas. Se sugiere que las mediciones se hagan inicialmente con unidades arbitrarias, y una vez sentida la necesidad, se trabaje con unidades estandarizadas.

En cuanto a los objetivos, la primera prioridad la tiene la actitud positiva y la motivación por las matemáticas; la segunda prioridad la tienen los objetivos generales del grado, y en especial los relacionados con los sistemas numéricos, los sistemas geométricos y los sistemas métricos.

Los objetivos específicos son una ayuda para detectar las causas de los errores de los alumnos, para desarrollar distintas estrategias para corregirlos y para ver cómo va el proceso de aprendizaje.

Los indicadores de evaluación son una ayuda que puede ser útil para formular preguntas, problemas e items para las evaluaciones. Si el objetivo es muy específico, el indicador prácticamente se reduce a una nueva redacción del mismo objetivo en una forma más próxima a su utilización para la evaluación. Si es menos específico, el indicador pretende concretarlo a situaciones más fácilmente evaluables. Esto no significa que haya que "enseñar para la evaluación", sino que una evaluación formativa frecuente es una buena estrategia para hacer más ágiles e interesantes las actividades de los alumnos.

Es importante que el maestro tenga en cuenta que para la evaluación formativa, la ausencia de respuesta, o la respuesta diferente a la esperada, sirve de síntoma para diagnosticar el estado del proceso cognitivo. En este sentido es más ilustrativa una respuesta no esperada que la respuesta determinada por el indicador de evaluación: si el alumno responde "bien", no se sabe si entendió o no; si responde "mal", el "error" indica cómo y por dónde va el proceso de aprendizaje. Por ésto, se debe observar que los alumnos estén razonando al dar una respuesta y que no la están repitiendo mecánicamente. Es importante pedirles la razón de su respuesta, hacerlos dudar de ella aunque sea correcta y ejercitarlos para que ellos mismos corrijan sus errores.

Para efectos de la evaluación se han señalado con un asterisco los objetivos que nos parecen más significativos, ya que su consecución garantiza la consecución de los demás.

La evaluación global del curso debe hacerse con respecto a los objetivos generales.

Objetivos generales

1. Reconocer el conjunto de los números naturales y recopilar las operaciones y relaciones conocidas entre ellos.
2. Generalizar algoritmos para efectuar adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones entre números naturales.
3. Resolver y formular problemas que requieran de una o varias de las siguientes operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división.
4. Reconocer relaciones numéricas, representarlas gráficamente e identificar algunas de sus propiedades.
5. Identificar el Mínimo Común Múltiplo y el Máximo Común Divisor de varios números.
6. Explorar las regularidades del lenguaje usual, distinguir las frases que son proposiciones y realizar transformaciones de las mismas.
7. Identificar los elementos de un conjunto referencial que cumplen con una condición y viceversa.
8. Efectuar algunas operaciones entre conjuntos de un referencial.
9. Efectuar permutaciones y combinaciones y hallar la frecuencia y la moda de un sistema de datos.
10. Adquirir habilidad para emplear algunas unidades de área y para realizar las conversiones correspondientes.
11. Adquirir habilidad para emplear algunas unidades de volumen y de capacidad y para realizar las conversiones correspondientes.
12. Reconocer el peso y la masa de los objetos e identificar y utilizar aparatos que se emplean para medirlos.

13. Adquirir habilidad para emplear algunas unidades de peso y de masa y para realizar las conversiones correspondientes.

14. Resolver y formular problemas que requieran del manejo de unidades de área, volumen, capacidad, peso y masa.

15. Analizar los efectos que produce la aplicación de operadores de la forma $n \times$, $\frac{1}{n} \times$ y $\frac{m}{n} \times$ a magnitudes.

16. Efectuar multiplicaciones, adiciones y sustracciones entre números fraccionarios.

17. Resolver y formular problemas que requieran de una o varias de las operaciones con números fraccionarios de adición y sustracción.

18. Identificar los números decimales y efectuar entre ellos las operaciones de adición y sustracción.

19. Resolver y formular problemas que requieran de la adición o de la sustracción de números decimales.

20. Realizar algunas construcciones geométricas.

21. Hallar perímetros de polígonos y círculos, y áreas de triángulos y cuadriláteros.

22. Generalizar procedimientos para hallar algunos perímetros y algunas áreas.

23. Adquirir habilidad para emplear e interpretar cuadrículas.

24. Ejercitarse en la realización de dibujos según una escala determinada.

Contenidos

Los contenidos de este grado afianzan y amplían aquellos conocimientos adquiridos por los alumnos en los grados primero, segundo y tercero. Por ésto es conveniente tener presente cuáles contenidos y con qué profundidad se trataron éstos en los grados anteriores.

En este grado se hace una síntesis del sistema de los números naturales, recopilando las operaciones y las relaciones estudiadas en los grados anteriores y se recuerdan y aplican las propiedades tanto de las operaciones como de las relaciones. De esta manera se hace más explícito para el alumno, el sistema numérico con el cual ha venido trabajando desde el primer grado, que es el sistema de los números naturales.

Se desarrollan algunos temas de sistemas conjuntistas y de sistemas lógicos trabajando con conjuntos numéricos y con proposiciones sobre estos números.

Para medir magnitudes tales como área, volumen y capacidad se introducen nuevas unidades. Se inicia el estudio del peso y de la masa de los cuerpos y se introducen las unidades para medir estas dos magnitudes y los aparatos más empleados en la medición del peso y la masa de los objetos.

Se continúa con los números fraccionarios como operadores aplicados a magnitudes, no sólo para disminuirlas sino para aumentarlas o dejarlas como están. De esta manera, se estudian fraccionarios como $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{3}$, etc., efectuando entre ellos las operaciones de multiplicación, adición y sustracción, y reconociendo algunas relaciones de orden.

La expresión "número fraccionario" se puede usar para referirse al operador mismo, o sea al concepto construido por abstracción de los aumentadores y disminuidores, agrandadores y achicadores, etc., y también para referirse a la fracción que lo representa.

Generalmente no produce confusión decir que el operador que saca la cuarta parte es un número fraccionario, o que $\frac{1}{4}$ es un número fraccionario. Pero el maestro tendrá presente que la expresión es ambigua cuando haya que responder preguntas como "¿Es lo mismo $\frac{1}{4}$ que $\frac{25}{100}$?", "¿El numerador de la cuarta parte es impar?", "¿Es más grande $\frac{25}{100}$ que $\frac{1}{4}$?"

Se empieza el estudio de los números decimales, efectuando entre ellos las operaciones de adición y sustracción.

En geometría se continúa con el estudio de las figuras planas: triángulo, rectángulo, cuadrado, trapecio, círculo, buscando procedimientos para calcular tanto el perímetro como el área de algunos de ellos.

El empleo de ciertos instrumentos que faciliten el dibujo de figuras, la construcción de sólidos geométricos y la realización e interpretación de dibujos a escala son actividades que introducen al alumno de este grado al dibujo técnico.

Se siguen haciendo arreglos (permutaciones y combinaciones), pero aumentando el número de objetos (o de elementos) que intervienen en el arreglo. Lo importante en esto es que los alumnos entiendan las reglas dadas, que manipulen los objetos y que por medio del juego vayan sacando arreglos aunque no los saquen todos. Se continúa con la recolección de datos organizándolos en tablas y en

CONTENIDOS BASICOS PARA LA EDUCACION PRIMARIA

TEMA / GRADO	1 Sistemas numéricos	2 Sistemas geométricos	3 Sistemas métricos	4 Sistemas de datos	5 Sistemas lógicos	6 Conjuntos	7 Relaciones y operaciones
PRIMER GRADO	• Naturales de 0 a 100 con adición y sustracción. Simbolización. • Algoritmos con aplicaciones. • Orden aditivo: ... es mayor que.... ... es menor que... • Ordinales. • Operadores como -1, +1, -2, etc.	• Relaciones espaciales. • Algunos sólidos geométricos regulares. • Figuras planas. Bordes rectangulares y bordes curvos. • Introducción a la simetría • Lineas (abiertas y cerradas)	• Introducción a la medición de longitudes patrones arbitrarios, el dm y el m • Medición de lapsos	• Iniciación a gráficas de barras		• Conjuntos y elementos. • Conjuntos lo mismo de numerosos Cardinal de un conjunto • Noción de unión de conjuntos disyuntos. • Representación gráfica. • Arreglos sencillos.	• Iniciación a la representación de relaciones • Diversas maneras de efectuar operaciones
SEGUNDO GRADO	• Naturales de 0 a 100 con adición, sustracción y multiplicación División (iniciación). • Números pares y números impares • Algoritmos con aplicaciones • Orden multiplicativo es múltiplo de . es divisor de	• Rectas paralelas y perpendiculares • Rotaciones y giros Angulos • Formas geométricas regulares cuadradas, triangulares, rectangulares y circulares • Noción de perímetro	• Longitud m, dm, cm • Area unidades arbitrarias, dm^2 • Unidades de duración horas, minutos	• Gráficas de barras	• Significado de la "y" y de la "o" en una instrucción • Expresiones "Todos", "Algunos", "Ninguno"	• Pertenencia • Noción de subconjunto • Unión de conjuntos disyuntos y no disyuntos • Cardinal de la unión • Parejas con y sin orden	• Propiedades conmutativa, asociativa, modulativa de algunas operaciones. • Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición (introducción)
TERCER GRADO	• Nuestro sistema de numeración • Numeración romana • Naturales mayores que 1000 con adición, sustracción, multiplicación y división • Algoritmos generalizados para adición, sustracción y multiplicación con aplicaciones • Números primos • Operadores multiplicativos • Introducción a los operadores fraccionarios	• Superficies (fronteras de sólidos) Superficies planas • Lineas (fronteras de superficies) • Puntos (fronteras de lineas) • Caracterización de triángulo, cuadrado, rectángulo, circulo	• Longitud m, múltiplos y submúltiplos Yarda y vara • Area Patrones estandarizados m^2 cm^2 y mm^2 • Volumen Patrones arbitrarios • Capacidad Patrones arbitrarios Litro	• Recolección de datos • Tabulación y representación de datos	• Diversos significados de la "y" y de la "o" en el lenguaje ordinario • Diversas maneras de cuantificar expresiones en el lenguaje ordinario	• Simbolización de las relaciones de pertenencia y contenencia • Unión e intersección • Algunos arreglos con o sin orden	• Relaciones de orden Representación con flechas • Propiedades Simétrica, antisimétrica y transitiva de algunas relaciones • Propiedades Conmutativa, asociativa y modulativa de algunas operaciones • Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición
CUARTO GRADO	• Naturales con adición, sustracción, multiplicación y división • M C D y M C M • Fraccionarios con adición, sustracción y multiplicación • Decimales con adición y sustracción • Algoritmos con aplicaciones • Orden multiplicativo	• Módelos de sólidos • Cuadriláteros trapecios • Perímetro (generalizado) • Radio, diámetros • Areas trapecio, cuadrado, rectángulo triángulo • Cuadricula	• Area Algunos múltiplos y submúltiplos del m^2. Medidas agrarias • Volumen m^3, dm^3, cm^3 • Peso gramo, kilogramo	• Recolección de datos • Tabulación y representación de datos • Iniciación al análisis de datos • Frecuencia y moda	• Proposiciones Significado, verdad y falsedad • Negación de proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario • Proposiciones compuestas	• Relaciones de contenencia • Igualdad de conjuntos • Conjunto referencial • Complemento de un conjunto Simbolización y representación • Algunos tipos de arreglos	• Relación inversa. • Diagramas de flechas • Propiedades Simétrica, antisimétrica y transitiva de algunas relaciones
QUINTO GRADO	• Naturales con adición, sustracción multiplicación, división, potenciación, radicación logaritmacion • Fraccionarios con adición, sustracción, multiplicación y división. • Decimales con adición, sustracción, multiplicación y división • Algoritmos con aplicaciones • Razones y proporciones • Proporcionalidad directa e inversa	• Construcciones con regla y compás • Poligonos regulares • Construcción de algunos sólidos. • Area del circulo • Area y volumen de algunos sólidos	• Conversiones con unidades de longitud, área capacidad y peso • Otras unidades de peso • Unidades de duración • Conversiones	• Noción de promedio en un conjunto pequeño de datos	• Proposiciones conjuntivas disyuntivas y condicionales en el lenguaje ordinario • Proposiciones cuantificadas en el lenguaje ordinario	• Extensión y comprensión • Conjuntos Infinito (N), unitario y vacio • Unión e intersección. • Otros tipos de arreglos.	• Recopilación de las operaciones conmutativas, asociativas, modulativas estudiadas • Igualdades

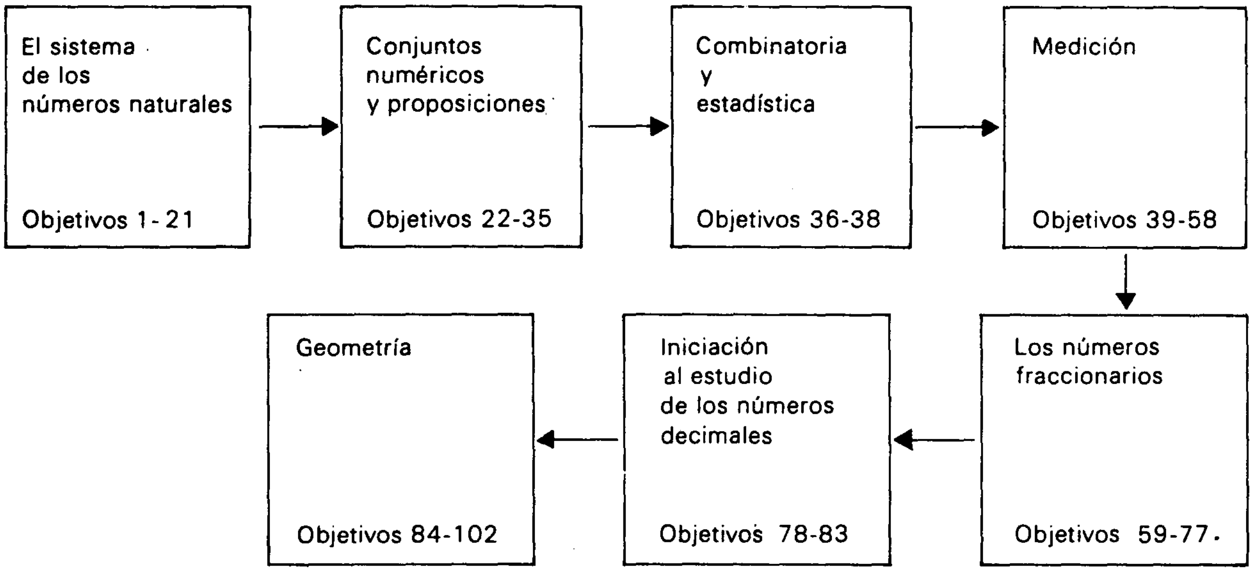
diagramas que facilitan hacer algún análisis de ellos y obtener las frecuencias y la moda.

La solución y formulación de problemas son actividades básicas que se sugieren como motivación, familiarización o aplicación, y que pueden proponerse antes, durante o después del desarrollo de cada tema. Estos problemas deben permitirle a los alumnos encontrarle sentido a las matemáticas y adquirir habilidades de razonamiento lógico, tanto en la solución de problemas como en la formulación de los mismos. Pedir a los alumnos que formulen problemas es una buena manera de captar su comprensión de los contenidos y de detectar los sistemas concretos de su experiencia que se prestan para un tratamiento matemático.

El esquema muestra una propuesta de la secuencia que se puede seguir en el desarrollo del programa de este grado.

Los conjuntos y proposiciones, la combinación y la estadística, así como la geometría pueden verse en distintas épocas del año para variar el contenido y hacer juegos activos. Es mejor evitar dejar toda la geometría para el final y después tener que omitirla en caso de que se dificulte el aprendizaje de los fraccionarios y sus expresiones decimales. Puede hacerse también integrando algunos aspectos con la medición.

Con el fin de que el docente tenga una visión global de los contenidos propuestos para la Educación Básica Primaria, se presenta a continuación el cuadro de contenidos, no sólo de cuarto grado sino de todos los grados de la básica primaria (ver cuadro pág. 225).



OBJETIVOS ESPECIFICOS, INDICADORES DE EVALUACION, SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES Y METODOLOGIA

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
1. Reconocer como conjunto de los números naturales el formado por los números 0, 1, 2, 3...	Dada una lista de números naturales y fraccionarios, el alumno reconocerá cuáles son naturales y cuáles no.
2. Recopilar algunas operaciones y relaciones conocidas entre números naturales. *(*)*	Dadas algunas parejas de números naturales, el alumno dará una lista de operaciones que puedan realizarse entre ellos y una lista de relaciones que puedan establecerse entre ellos.
3. Repasar los algoritmos de la adición y de la sustracción entre números naturales.	Dadas varias adiciones y sustracciones, el alumno aplicará consistentemente los algoritmos de estas operaciones para hallar la suma y la diferencia.

Sugerencias de actividades y metodología

Una manera de iniciar el curso es escribir en el tablero una lista con los siguientes números: 0, 1, 2, 3, 4, ... y preguntar a los alumnos qué número iría en el lugar del primer punto suspensivo.

Muy probablemente los alumnos van a responder que es el cinco; si se les pregunta qué número iría en el siguiente punto, los alumnos van a continuar con "seis", después "siete", "ocho", etc.

Tal vez por juego o por curiosidad, algún alumno puede decir que después de cuatro sigue cuatro y medio. El maestro puede escribir 0, 1, 2, 3, 4, $4\frac{1}{2}$,... Algunos alumnos pueden tratar de "meter más números" entre 4 y 5, como $4\frac{3}{4}$, y otros pueden decir que entre el cero y el uno caben más números: 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1, 2, 3, 4, $4\frac{1}{2}$ ... El maestro puede escribir otras listas y preguntar: ¿Cuáles de esos números sirven para decir exactamente cuántos objetos hay en una colección? Esos son los números naturales: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

El maestro puede explicar que esta lista de números se obtiene a partir de 0, sumando 1 cada vez que se quiere obtener el número siguiente de la lista. Si tomamos el conjunto cuyos elementos son los números que están en dicha lista, éste se llama el conjunto de los números naturales; así, cada número que pertenezca a esta lista se llama "número natural" y pertenece al conjunto de los números naturales. Hablando medio en broma y medio en serio, el maestro puede pedirles que, en un plazo de cinco minutos, hagan la lista completa de los números naturales; pasados los cinco minutos les dice que dejen los lápices sobre el pupitre para que no escriban más números. Es una manera de repasar la escritura de los números.

El maestro puede formular preguntas como las siguientes: ¿Alguno terminó de escribir toda la lista? Si les doy cinco minutos más, ¿la pueden terminar? ¿Si les doy una hora más?

Si alguno de los alumnos responde afirmativamente a la primera pregunta, el maestro le pide que muestre la lista que él elaboró durante los cinco minutos, toma el último número escrito por el alumno y pregunta si no se puede obtener el siguiente; los alumnos van a darse cuenta inmediatamente de que basta agregar uno al último número para conseguirlo.

Respecto a la segunda pregunta, les queda fácil comprender que al terminar los otros cinco minutos de plazo la situación va a ser la misma, puesto que siempre que escriban un número y crean que es el último, basta sumarle 1 a ese número y se obtiene el siguiente.

El maestro puede también pedir a los alumnos que digan el número más grande que se les ocurra para ver si otro puede dar el siguiente, que será mayor que aquel. Así se van repasando los números que se escriben con cuatro o más cifras.

Ejemplo: 158.327: ciento cincuenta y ocho mil trescientos ventisiete.

158.328: ciento cincuenta y ocho mil trescientos ventiocho.

Después de varios ejemplos con números cada vez más grandes, los alumnos se van dando cuenta de que la lista de los números naturales es interminable.

Sabemos que la lista comienza en 0 y también que no se puede terminar; por eso, cuando se va a representar el conjunto de los números naturales haciendo una lista de sus elementos, se utilizan puntos suspensivos.

Otra manera de representarlo es con la letra "ene" mayúscula: N, que muchas veces aparece con un doble palito a la izquierda: $\mathbb{N}$.

La representación más común es: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$

Los corchetes se pueden leer "el conjunto formado por" y se da la lista de elementos: "el cero, el uno, el dos, el tres" y los puntos se leen "etcétera" o "y así sucesivamente".

Hay que adivinar cómo se forman los que siguen, y suponer que se continúan formando indefinidamente. Si siempre se pueden seguir formando más y más elementos, decimos que el conjunto es infinito porque no tiene fin: no hay un último número que no tenga ningún otro mayor que él.

Ejemplo 1: Adivinar cómo se forman los elementos de estos conjuntos infinitos de números naturales.

$P = \{0,2,4,6,...\}$
$T = \{1,4,7,10,...\}$
$D = \{1,10,100,1000,...\}$
$E = \{2,3,5,7,11,...\}$

NOTA: Puede haber varias reglas de formación que den los mismos elementos iniciales, pero la mayoría de las personas encuentran la misma regla sencilla en estos casos. En el caso E, la regla de formación es la "Criba de Eratóstenes", que se vio en tercer grado cuando se estudiaron los números primos, o la "regla de Pitágoras", que selecciona los números lineales que no se dejan volver rectangulares.

Ejemplo 2: Escribir los conjuntos infinitos de números naturales que comienzan por el uno y se forman con estas instrucciones:

I: ¡Súmele 2 al anterior!
D: ¡Duplique el anterior!
S: Súmele uno al primero, súmele dos al que resultó, súmele tres al que resultó, súmele cuatro al que resultó, etc.
S: {1,2,4,7,11,...}

Ejemplo 3: Encuentre diferencias entre los conjuntos siguientes:

D = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} (Los dígitos)
N = {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,...} (Los naturales)
E = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,0}
C = {1,2,3,4,5,6,7,89,...}

NOTA: *Los alumnos pueden preguntar por qué los números naturales empiezan con el cero y no con el uno, como en el conjunto C de arriba, que podemos llamar "los números de contar". Cuando una persona quiere contar siempre señala los objetos y cuenta "uno, dos, tres,...". Nunca empieza "cero, uno, dos, tres, ...".*

Los alumnos tienen razón en pensar que los números de contar que comienzan con el uno son "más naturales" que los que comienzan con el cero. La humanidad se pasó miles de años contando sin necesidad del cero.

Se les puede decir que para contar objetos en fila se comienza por el primero, el segundo, etc. (que son los "números ordinales" usuales), y en esa actividad de contar parece mejor comenzar con el uno. Pero que otra cosa es utilizar los números naturales para decir cuántos elementos hay en un conjunto; algunas veces no hay sino uno, y otras ninguno; por ejemplo, escribimos 10 para decir que hay una decena y no hay ninguna unidad suelta. Es, pues, también "muy natural" decir "tiene un elemento" o "tiene cero elementos", y por eso se completa el conjunto de los números naturales (como cardinales de los conjuntos finitos) tomando también el cero.

Si los alumnos no aceptan que haya colecciones o conjuntos vacíos, se les puede aceptar su punto de vista y comenzar los números de contar con el uno, mientras construyen el concepto de conjunto vacío.

Hasta el siglo XVI se dudaba de si los números naturales empezaban por el uno o por el dos, pues para tener una colección parecía necesario tener por lo menos dos elementos; así, se pensaba que el uno no era número, y hasta se llegó a decir que no era ni par ni impar (así como nosotros todavía decimos que no es primo ni compuesto). Pero si se acepta que hay conjuntos unitarios y vacíos, hay que poner el uno y el cero entre los números naturales. Es asunto de coherencia y no de autoridad o mero convencionalismo.

Ahora el maestro puede preguntar a los alumnos qué operaciones han realizado con los números naturales y qué le hacen éstas a los números. En el tablero se pueden escribir sus nombres y a través de ejemplos se les va haciendo caer en la cuenta de que las operaciones se efectúan entre dos números; cuando la operación se puede realizar, esos dos números se transforman en el resultado de la operación, que es otro número. Para encontrar el resultado hay que hacer algo: efectuar una operación.

Para lograr una mayor participación de los alumnos, se pueden organizar tres bandos: uno que da la pareja de números (el bando de las parejas P), otro que dice el resultado (el bando de los resultados R) y otro que da el nombre de una de las operaciones o de la operación que transformó la pareja en el resultado (el bando de las operaciones O).

Ejemplo 1.	*Bando P*	*Bando R*	*Bando O*
	5 y 3	8	Adición
	4 y 2	2	Sustracción (o División)
Ejemplo 2.	*Bando P*	*Bando O*	*Bando R*
	5 y 3	Multiplicación	15
	4 y 3	División	No se puede
Ejemplo 3.	*Bando R*	*Bando O*	*Bando P*
	5	Adición	(3,2) *ó* (2,3) *ó* (4,1), etc.
	7	División	(14,2) *ó* (21,3) *ó* (28,4), etc.

Para simbolizar las operaciones es posible que propongan escribir el nombre de la operación (adición, sustracción, multiplicación, división) o el símbolo de la misma (+, -, x, ÷).

Otras actividades que pueden realizarse en forma de concurso, son las siguientes:

- El concurso "Llene la tabla". El maestro elabora en el tablero una tabla como la siguiente:

Número	Adición	Sustracción	Multiplicación	División
30	21+9	35-5	6x5	60÷2
55				
38				
29				
45				
56				
9				
21				
35				

El concurso consiste en expresar un número dado como una operación indicada de dos números; la operación que ha de emplearse está señalada en la tabla (puede verse un ejemplo con el número 30).

El concurso se realiza distribuyendo a los alumnos en cuatro filas. A cada una se le asigna un número, para que en una primera ronda pase un alumno de cada fila y llene una de las casillas, por ejemplo la de la adición; luego otro alumno de otra fila llena la casilla de la sustracción y así se continúa para llenar la casilla de la multiplicación y de la división. En esta forma han pasado cuatro alumnos, uno de cada fila. Para que pasen todos el maestro asigna otro número a cada fila para que lo expresen utilizando las cuatro operaciones.

- Enseguida se puede realizar otro concurso que consiste en llenar una tabla donde está indicada una operación entre dos números. Cada alumno efectúa la operación en la casilla correspondiente. Este concurso se hace por filas; si para hallar un resultado el alumno necesita hacer cálculos escritos, puede utilizar otra región del tablero. Los números que deben colocarse son aquellos que el maestro crea que presentan dificultades a los alumnos para efectuar alguna operación.

Ejemplo:

35 + 28	400 - 199	20 x 35	216÷4
3125÷25	305 - 24	1200 + 45	1000 - 98
215 x 1	4231 + 0	481÷481	329 - 329
3000÷75	429 x 20	4395÷5	879 x 4

Ganará el concurso la fila que tenga el mayor número de ejercicios correctos.

- Para otro ejercicio el maestro elabora 10 ó 12 tarjetas para darle dos a cada fila. El ejercicio consiste en buscar dos o más números que cumplan la condición que se menciona en la parte superior de la tarjeta, y escribir la igualdad correspondiente en la parte inferior de la tarjeta. Los números escogidos se pueden rodear con un círculo o se pueden subrayar o tachar.

  Ejemplos de estas tarjetas con el ejercicio ya resuelto, son las siguientes:

La suma es 220		
120	35	47
100	28	57
90	43	93
120 + 43 + 57 = 220		

El producto es 84		
4	31	80
20	43	15
32	21	25
4 x 21 = 84		

Cuando cada fila haya resuelto los dos ejercicios, se hará intercambio de estas tarjetas entre las filas para revisar que los resultados dados sean correctos; en el caso de que no lo sean, los alumnos de la fila correspondiente los corregirán. Si el maestro lo cree conveniente, puede sugerir que se intercambien las tarjetas de tal manera que todos los alumnos conozcan los ejercicios propuestos y revisen la solución dada.

En cuanto a las relaciones, puede organizarse un juego parecido al propuesto para las operaciones, pero ahora uno de los bandos da la pareja de números indicando cuál señala a cuál (el bando de las parejas P), y el otra da la frase relacional correspondiente (el bando de las frases F).

Ejemplo: El bando P dice: "¡El 2 señala al 4! ¿Por qué? El bando F responde: "¡Porque 4 es mayor que 2!", o "¡Porque 4 es el doble de 2!", o "¡Porque 4 es múltiplo de 2!".

Para hacerlo por escrito, el bando P dibuja:

$$2 \longrightarrow 4$$

y el bando F escribe: "4 es mayor que 2", o "4 es el doble de 2", o "4 es múltiplo de 2".

Recuérdese que se nombra primero la imagen señalada por la flecha.

Para simbolizar las relaciones conviene no utilizar la "taquigrafía" propia de las matemáticas sino las expresiones del lenguaje usual que se han venido utilizando, ya sean las del tipo "... es mayor que ..." o simplemente "mayor". Los alumnos han trabajado con los símbolos $>$ y $<$ pero no con los símbolos correspondientes a las relaciones "múltiplo" y "divisor". También pueden aparecer otras relaciones que los alumnos inventen, como "... es el doble de ...", "... es el siguiente de ...", "... es el anterior a ...", "... se escribe con el mismo número de cifras que ...", y otras más o menos ingeniosas o inesperadas.

Por esto conviene en este momento conservar el mismo nivel verbal de simbolización para todas las relaciones que propongan los alumnos, sin usar simbolismo formal.

Finalmente, para resumir, se puede escribir en el tablero el siguiente esquema:

Números naturales	Operaciones entre los números naturales	Relaciones entre los números naturales
N = {0,1,2,3,...}	[adición, sustracción, multiplicación, división]	[mayor, menor, múltiplo, divisor]

El maestro puede ahora motivar a los alumnos para que apliquen los algoritmos de la adición y de la sustracción en la solución de problemas, y para que propongan problemas que se resuelvan utilizando esas operaciones.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
4 Generalizar un algoritmo para efectuar multiplicaciones.	El alumno efectuará multiplicaciones en las cuales los factores son de tres o más dígitos.

Sugerencias de actividades y metodología

Una vez hecha la síntesis del sistema numérico que se ha venido estudiando y después de repasar los algoritmos de la adición y de la sustracción, el trabajo se puede centrar en la *multiplicación*.

Es recomendable hacer ejercicios que sigan la misma secuencia propuesta en el programa de tercer grado:

a) Juegos y ejercicios para recordar las tablas de multiplicar.

b) Ejercicios de cálculo mental que impliquen la aplicación de los procedimientos de multiplicar abreviadamente, vistos en los grados anteriores, y también la descomposición de un factor en una suma o en una diferencia (aplicación de la propiedad distributiva).

c) Multiplicaciones como:

342	423	635	938	807
x 221	x 201	x 67	x 700	x 609

en las cuales pueden aplicarse algunos procedimientos abreviados, como es el caso de cero en un factor.

Para generalizar el algoritmo se pueden proponer ejercicios o problemas en los cuales intervengan números con más de tres dígitos. Es conveniente que mientras se realizan estas multiplicaciones se haga una reflexión sobre el orden (unidades, decenas, centenas, etc.) de cada producto parcial, y así se explica por qué dichos productos (a partir del segundo) se corren un lugar hacia la izquierda.

NOTA: Algunas dificultades pueden tener su origen en la falta de claridad en aspectos como:

7253 x 684

unidades
decenas
centenas

684 = 600 + 80 + 4

7253 x (4 + 80 + 600) = (7253 x 4) + (7253 x 80) + (7253 x 600)

Así se desenmascara la aplicación de la propiedad distributiva y se ve que:

7253 x 4 son unidades
7253 x 8 son decenas
7253 x 6 son centenas

```
     7253
    x 684
    29012
   58024
  43518
  4'961052
```

primer producto parcial
segundo producto parcial
tercer producto parcial
producto final

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
5. Encontrar un procedimiento para multiplicar abreviadamente por 9,99,999; 11,101,1001 y por 5,25,50.	Dados algunos números, el alumno los multiplicará abreviadamente por 9,99,999; por 11,101, 1001 y por 5,25,50.
6. Aplicar en el cálculo mental los procedimientos para multiplicar abreviadamente. (*).	El alumno efectuará mentalmente algunas multiplicaciones aplicando los procedimientos para multiplicar en forma abreviada.

Sugerencias de actividades y metodología

Para iniciar la actividad, el maestro puede pedir a los alumnos que expresen el número nueve de distintas maneras:

Ejemplos: 4 + 5, 8 + 1, 10 - 1, ... etc. Una de estas expresiones sirve para hallar un procedimiento para multiplicar abreviadamente por 9.

Se pueden proponer multiplicaciones como:

$8 \times 9 = 8 \times (10 - 1) = 80 - 8 = 72$
$15 \times 9 = 15 \times (10 - 1) = 150 - 15 = 135$
$38 \times 9 = 38 \times (10 - 1) = 380 - 38 = 342$
$123 \times 9 = 123 \times (10 - 1) = 1230 - 123 = 1107$

Es conveniente aclarar los pasos que se han seguido para obtener los resultados de multiplicar un número por 9. Observar cada uno de los ejemplos, puede ser de gran utilidad.

En el ejemplo: 8 x 9, lo primero que se hace es expresar el 9 como 10 - 1; por lo tanto, se puede apreciar cómo la multiplicación se transforma en: 8 x (10 - 1), después se aplica la propiedad distributiva: 80 - 8, luego se hace la resta y se obtiene el resultado 72.

Después de analizar todos los ejemplos es posible que los alumnos lleguen a una conclusión que permita obtener más rápidamente los resultados, es decir, sin hacer todos los pasos.

Así, al comparar por ejemplo 8 x 9, con el resultado obtenido después de aplicar la propiedad distributiva: 80 - 8, se espera que los alumnos concluyan que para multiplicar abreviadamente por 9, se multiplica el número por 10 y se resta el número.

Para continuar, el maestro puede preguntar: ¿Cómo se multiplica abreviadamente por 99? ¿Y por 999? Después de discutir las opiniones y de realizar varios ejercicios en los cuales estas opiniones se sometan a prueba, es posible que los alumnos consignen en sus cuadernos: para multiplicar abreviadamente por 99, se multiplica por 100 y se resta el número; para multiplicar abreviadamente por 999, se multiplica el número por 1000 y se resta el número.

Ejemplos:

$53 \times 99 = 5300 - 53 = 5427$
$126 \times 99 = 12600 - 126 = 12474$
$36 \times 999 = 36000 - 36 = 35964$
$132 \times 999 = 132000 - 132 = 131868$

El maestro puede proponer más ejercicios para reafirmar el procedimiento. Varios de ellos los resuelven mentalmente, sin la ayuda de lápiz y papel.

De la misma manera pueden buscar un procedimiento abreviado para multiplicar por 11, 101, 1001, hasta encontrar que 11 = 10 + 1, 101 = 100 + 1 y 1001 = 1000 + 1. Así, para multiplicar abreviadamente por 11, se multiplica el número por 10 y se suma el número; para multiplicar abreviadamente por 101, se multiplica el número por 100 y se suma el número; para multiplicar abreviadamente por 1001, se multiplica el número por 1000 y se suma el número.

Ejemplos:

$38 \times 11 = 38 \times (10 + 1) = 380 + 38 = 418$
$25 \times 101 = 25 \times (100 + 1) = 2500 + 25 = 2525$
$123 \times 1001 = 123 \times (1000 + 1) = 123000 + 123 = 123123$

Tratemos ahora de encontrar un procedimiento para multiplicar abreviadamente por 5, 25 y 50.

Para que los alumnos se interesen por estos procedimientos es conveniente que ellos disfruten de sus ventajas y experimenten la necesidad de encontrar caminos más fáciles y cortos que aquellos ya conocidos. Una actividad que puede permitirles llegar a estos procedimientos abreviados, consiste esencialmente en hacer ejercicios de cálculo mental sin la ayuda de lápiz y papel. Estos ejercicios pueden iniciarse con multiplicaciones de dos factores, uno de los cuales sea 10 ó 100. Luego se proponen otros ejercicios, como sacarle la mitad y la cuarta parte a un número. Dichos números se escogerán de tal manera que al dividirlos por 2 ó por 4, el residuo sea cero. Generalmente los alumnos ya han desarrollado sus propias maneras de hacer operaciones mentales cuando se trata de casos concretos como de dinero, gaseosas o dulces. El maestro puede explorar estas habilidades de los alumnos, y pedirles que se las expliquen a los que no las saben y que luego las practiquen escribiendo lo que hacen mentalmente.

Después de hacer un número suficiente de ejercicios, los alumnos pueden dividirse en dos bandos, bando A y bando B. El bando A multiplica por 5 el número que diga el profesor. El bando B multiplica el mismo número por 10 y luego le saca la mitad. A continuación se comparan los resultados y la duración de los lapsos que empleó cada bando para hallar su resultado.

Cuando el número propuesto por el maestro es de una sola cifra, posiblemente el bando A diga de inmediato el resultado, pero cuando los números propuestos son de dos o más dígitos el bando B es el que sale adelante y además el que menos errores comete. Después de varios ejercicios el maestro puede preguntar si algunos quieren cambiar de bando. Es de esperar que sean los del bando A quienes deseen hacer el cambio.

Antes de cambiarle el "oficio" a los dos bandos, se elabora conjuntamente una conclusión. Esta puede acercarse a una de las dos siguientes:

- Multiplicar por 5 es lo mismo que multiplicar por 10 y sacar la mitad.
- Cinco veces es lo mismo que la mitad de diez veces:

$$5 \times \quad = \frac{1}{2} \times 10 \times$$

Algunos de los ejercicios pueden escribirse en el tablero:

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 5 \\ \hline 85 \end{array} \qquad \frac{1}{2} \times (10 \times 17) = \frac{1}{2} \times 170 = 85$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 5 \\ \hline 290 \end{array} \qquad \frac{1}{2} \times (10 \times 58) = \frac{1}{2} \times 580 = 290$$

Para obtener las conclusiones correspondientes a los casos de multiplicar abreviadamente por 50 y por 25, se puede seguir el mismo procedimiento para el caso del 5.

Las conclusiones que se esperan pueden ser:

- Multiplicar por 50 es lo mismo que multiplicar por 100 y sacar la mitad.
- Cincuenta veces es lo mismo que la mitad de cien veces:

$$50 \times \quad = \frac{1}{2} \times 100 \times$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 50 \\ \hline 850 \end{array} \qquad \frac{1}{2} \times (100 \times 17) = \frac{1}{2} \times 1700 = 850$$

Para el caso de 25 las conclusiones pueden ser:

- Multiplicar por 25 es lo mismo que multiplicar por 100 y sacar la cuarta parte (o sacar la mitad de la mitad, o sacar la mitad dos veces).
- Veinticinco veces es lo mismo que la cuarta parte de cien veces:

$25 \times \quad = \frac{1}{4} \times 100 \times$ o que la mitad de la mitad de cien veces: $25 \times \quad = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100 \times$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 25 \\ \hline 290 \\ 116 \\ \hline 1450 \end{array} \qquad \frac{1}{4} \times (100 \times 58) = \frac{1}{4} \times 5800 = 1450$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times (100 \times 58)\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 5800\right) = \frac{1}{2} \times 2900 = 1450$$

En este último caso presenta más dificultades la simbolización que el ejercicio mental para hallar los resultados. Por esto no conviene empezar por la simbolización escrita sino por los ejercicios de cálculo mental.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
7. Generalizar un algoritmo para efectuar divisiones. (*)	Ante una serie de divisiones, el alumno utilizará consistentemente el algoritmo que se ha generalizado.

Sugerencias de actividades y metodología

Para generalizar el algoritmo de la división, es aconsejable que el maestro conozca el trabajo que con respecto a este algoritmo se hizo en el grado anterior.

En este grado se puede avanzar en dos aspectos importantes:

1. Cociente de una sola cifra.

a. Divisor de una, dos, tres o más cifras

b. Residuo igual o diferente a cero.

2. Cociente de varias cifras.

a. Divisor de una, dos, tres o más cifras.
b. Residuo igual o diferente a cero.

1. El primero de estos aspectos se estudió en segundo y en tercer grados, por esto es posible que para hacer el repaso correspondiente, resulte más interesante que los alumnos formulen y resuelvan

problemas relacionados con sus experiencias y cuya solución requiera del empleo de la división. Mediante la formulación de problemas se puede captar la comprensión de los contenidos y puede motivarse la discusión sobre la correcta o incorrecta formulación del problema.

Algunos ejemplos de las divisiones que pueden plantearse son:

```
  72 |8         65 |9       78 |26       81 |24
- 72  9       - 63  7     - 78  3     - 72   3
   0            02           0          09

  162 |43          222 |37          2843 |345
- 129  3         - 222  6         - 2760  8
   33                0                83
```

Conviene en algunos casos expresar cada dividendo en términos de la multiplicación correspondiente, pues esto permite relacionar las dos operaciones y verificar si se trabajó correctamente:

$(43 \times 3) + 33 = 162$, $37 \times 6 = 222$, etc.

En casos parecidos a los de las dos primeras divisiones es fácil hallar el cociente cuando el divisor es de una sola cifra, pues es suficiente saber las tablas. Cuando el divisor es de dos o de tres cifras, el proceso de construir la tabla de multiplicar de ese divisor, recomendable en un principio, puede suprimirse desde el momento en que los alumnos propongan otra alternativa. Así, en las cinco últimas divisiones el cociente se puede hallar construyendo las tablas de la multiplicación correspondientes a los números 26, 24, 43, 37 y 345, pero también se puede obtener formulando preguntas como:

¿Cuál es el cociente entre las decenas del dividendo y las decenas del divisor?

¿Cuál es el cociente entre las centenas del dividendo y las centenas del divisor?

En ocasiones este cociente puede resultar muy grande y la resta no se puede realizar, otras veces es muy pequeño y el residuo es mayor que el divisor; en cada caso, el maestro puede orientar a los alumnos para que ellos mismos decidan cuál debe ser el cociente.

2. El otro aspecto sobre el mismo tema lleva a la generalización del algoritmo y conviene no abordarlo mientras el alumno tenga dificultades para efectuar divisiones en las cuales el cociente sea de una sola cifra.

Cuando se efectúan divisiones en las que el cociente tiene más de una cifra es importante parar de vez en cuando el proceso de la división para reflexionar sobre el orden (unidades, decenas, centenas, etc.) tanto de un residuo, como de la cifra que se "baja" y de la cifra que se escribe en el cociente. Este tipo de análisis permite rectificar errores y habitúa al alumno a corregirse a sí mismo y no aplicar ciegamente una regla sin antes haberla construido y comprendido. Si la división está mal, es preferible no decir "¡eso está mal!", sino poner en duda el resultado, pedir que se verifique si ese divisor por ese cociente da el dividendo, o hacer alguna otra insinuación que haga pensar al alumno, para que no se confíe únicamente en la aprobación o rechazo del maestro. A veces también es conveniente poner en duda el resultado cuando la división está bien, para que el alumno aprenda a verificar y defender su resultado.

Ejemplos:

```
   546 |6            578 |7
 - 54   91         - 56   82
    06                18
  - 06              - 14
     0                 4

  3484 |4           7563 |8
- 32    871       - 36    945
   28               - 43
 - 28                 03
    04
   - 4
     0
```

Algunas observaciones que pueden hacerse teniendo en cuenta el tercer ejemplo son: la primera cifra del cociente estará en el lugar de las centenas pues ella es el resultado de dividir 34 centenas entre 4; el primer residuo 2 son dos centenas, el 8 que se baja son decenas y se obtienen así 28 decenas, el cociente 28 - 4 ocupará, pues, el lugar de las decenas.

Finalmente, pueden proponerse divisiones como:

```
6496 |32          3175 |25

7696 |318        85416 |908
```

En estos casos, es necesario separar en el dividendo, a partir de la izquierda, un número igual o mayor que el divisor para luego obtener la primera cifra del cociente. Es como si en cada paso se tuviera una división de las estudiadas inicialmente (cociente de una sola cifra).

Objetivo específico	Indicador de evaluación
8. Resolver problemas y formular problemas que requieran de una o varias de las siguientes operaciones: adición, sustracción, multiplicación y división. (*).	El alumno formulará algunos problemas cuya solución requiera el uso de por lo menos dos de las operaciones citadas en el objetivo y los resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Los problemas que el maestro considere convenientes para que los alumnos resuelvan, resultan interesantes si ellos corresponden a situaciones relacionadas con la vida de ellos y de la comunidad. Es posible que si se empieza pidiendo a los alumnos que formulen problemas, sea fácil detectar cuáles son, en ese momento, sus intereses, y a partir de estos problemas el maestro obtenga los temas que le permitan proponer problemas a los estudiantes.

Para esta actividad los alumnos pueden distribuirse en grupos, tanto para la formulación de problemas como para la solución de los mismos.

A manera de ejemplo se plantean los siguientes:
"Un comerciante compró 11 sombreros por $3300. Vendió 5 a $340 cada uno. ¿A cómo tiene que vender los restantes para ganar $800?"

Los alumnos pueden hacer, entre otras, las siguientes observaciones:

La pregunta que se hace es el precio de venta de cada uno de los sombreros restantes si se quiere ganar $800. Pero como no se sabe el número de sombreros restantes, tenemos que hallarlo, efectuando una sustracción, así:

Número de sombreros que compró:	11
Número de sombreros que vendió:	- 5
	6

Para saber el precio de cada uno de estos 6 sombreros, se tiene que hallar la suma de dinero en que se les quiera vender. Para esto hallamos el precio de los 5 sombreros, que vendió a $340 cada uno, efectuando la multiplicación: 340 × 5 = 1700.

O sea que el comerciante vendió los 5 sombreros en $1700. Como el comerciante gastó $3300 al comprar los 11 sombreros y después recibió $1700 por los 5 que vendió, se puede saber el dinero que le falta por recuperar efectuando una sustracción:

$$\begin{array}{r} 3300 \\ -\,1700 \\ \hline 1600 \end{array}$$

Pero como quiere ganar $800 en la venta, se efectúa una adición para saber el total que se desea obtener en las ventas restantes, así:

$$\begin{array}{r} 1600 \\ +\;\;800 \\ \hline 2400 \end{array}$$

Ahora sí podemos hallar la respuesta al problema efectuando la división de 2400 (que es el dinero que desea obtener el comerciante) entre 6 (que es el número de sombreros que le quedan por vender).

$$\begin{array}{l|l} 2400 & 6 \\ \cline{2-2} 00 & 400 \\ \;\;00 & \end{array}$$

Quiere decir que el comerciante debe vender a $400 cada uno de los sombreros restantes para ganar $800 en el negocio.

Si algún grupo obtiene la misma respuesta mediante otro procedimiento, el maestro y los alumnos lo estudian y comparan con este para determinar si es correcto o no. El maestro puede analizar con los alumnos la manera como los comerciantes fijan los precios, el afán de lucro en los negocios y otros aspectos del comercio, que permiten elaborar unidades integradas con otras áreas.

Otro problema que el maestro puede formular es el siguiente:

"Un hombre tenía $2535. Compró 2 libros a $85 cada uno, 3 camisas a $350 cada una y 4 pares de medias a $90 cada par. El dinero que le sobre de estas compras lo va a repartir entre sus 5 hijos. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?

Los alumnos también pueden formular problemas e intercambiarlos entre los grupos para analizar en primer lugar si el problema está bien formulado; es decir, si los datos que se dan son suficientes para hallar la respuesta; si todos los datos son necesarios, y si la pregunta es coherente con el resto del problema. Una vez hecho este análisis se halla la solución.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
9. Identificar el conjunto de todos los múltiplos de un número menores que un número dado. (*).	Dados varios números, el alumno hará una lista de los múltiplos de cada uno de ellos que sean menores que un número dado.
10. Identificar el conjunto de todos los divisores de un número y el de todos sus divisores primos. (*)	Dados varios números, el alumno hará una lista de todos sus divisores y otra lista de sus divisores primos.

Sugerencias de actividades y metodología

En segundo grado los alumnos hallaron múltiplos y divisores de un número, realizaron el diagrama de flechas de ambas relaciones de un conjunto de pocos números, y compararon el sentido de las flechas en los diagramas correspondientes.

El conjunto de números con el cual se trabajó estaba constituido por los números desde el 1 hasta el 100. Es conveniente, pues, en este grado, que el maestro averigüe cuáles son los conocimientos que al respecto traen los alumnos, y sobre todo cuál fue el criterio que ellos adoptaron al hacer y al denominar la lista de los múltiplos y de los divisores de un número dado.

Con relación a esto es posible que se presenten dos posiciones y sea necesario llegar a un convenio. Dichas posiciones pueden ser:

- Considerar como múltiplos de un número a los estrictamente mayores que él, o sea al conjunto de los múltiplos estrictos o propios.
- Considerar como múltiplos de un número al conjunto formado por el mismo número y por todos los múltiplos en sentido estricto, es decir, al conjunto de los múltiplos en sentido amplio. (Si en el referencial aparece el cero, también habría que considerar al cero como múltiplo de cualquier número).
- Considerar como divisores de un número a los divisores estrictamente menores que el número, es decir, al conjunto de los divisores estrictos o propios.
- Considerar como divisores de un número al conjunto formado por el mismo número y por todos los divisores en sentido estricto, esto es, al conjunto de los divisores en sentido amplio. (Si el referencial comienza con el cero, también habría que considerar al cero como divisor de cero).

Para los propósitos de esta actividad vamos a considerar ambas relaciones en sentido amplio: hablaremos de múltiplos o de divisores para referirnos al conjunto de los mismos en sentido amplio, o sea incluyendo el número original. Para evitar dificultades, vamos a considerar referenciales en los que no aparezca el cero.

Sin embargo, es conveniente que el maestro tenga en cuenta las aclaraciones anteriores para llegar a un acuerdo con los alumnos.

Para continuar el trabajo se puede disponer de un material sencillo, que consista en fichas de papel, en las cuales se escriban los números de uno a veinte, uno en cada ficha y unas cuantas fichas con una "M" mayúscula.

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{7}\boxed{8}\boxed{9}\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}$

$\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}\boxed{20}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{M}$

El conjunto de los números de 1 a 20 forma el conjunto referencial o universal. Para la primera parte de esta actividad se selecciona un número, por ejemplo 4, y se coloca la ficha correspondiente en un sitio visible al lado de la "M", así: $\boxed{M}\boxed{4}$

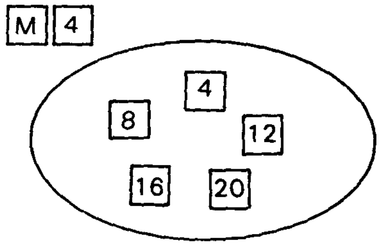
Ahora el maestro puede pedir a los alumnos que pinten con otro color los números obtenidos de la siguiente manera:

$$4 \times 1 = 4$$
$$4 \times 2 = 8$$
$$4 \times 3 = 12$$
$$4 \times 4 = 12$$
$$4 \times 5 = 20$$

Las fichas $\boxed{4}\boxed{8}\boxed{12}\boxed{16}\boxed{20}$ forman el conjunto de los números obtenidos al multiplicar 4 por cada uno de los números 1, 2, 3, 4 y 5.

A ese conjunto se le llama conjunto de los múltiplos de 4 en el conjunto de los números de 1 a 20.

Se obtiene un diagrama como el siguiente:



Conjunto de múltiplos de 4: M4 = {4, 8, 12, 16, 20}.

Este ejercicio se puede repetir para encontrar el conjunto de los múltiplos de 2, de 3, de 5; de 6. Además, puede ampliarse el conjunto numérico inicial, por ejemplo, tomando los números de 1 a 100; esto permite encontrar conjuntos de múltiplos de números como 10, 12, 15, etc.

Si el conjunto referencial o universal es el de los números de 1 a 100, el conjunto de múltiplos de 4, M4, es ahora:

M4 = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, 100}

Nótese que al ampliar el referencial también se aumentó el conjunto de los múltiplos de 4.

Es posible que los alumnos reconozcan que los primeros elementos de un conjunto de múltiplos de un número dado se encuentran en la tabla de multiplicar de dicho número, ya que a partir de las tablas se estudió este tema en segundo grado. Por ejemplo:

Conjunto de los múltiplos de 6:

M6 = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96}

Conjunto de los resultados de la tabla del 6:

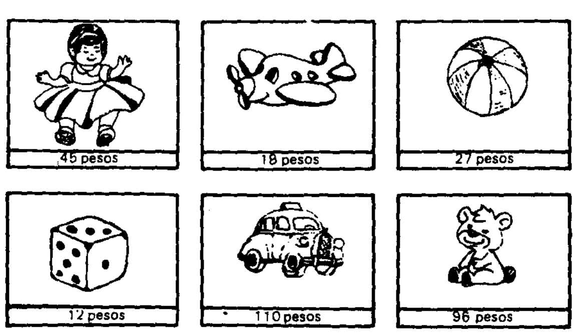
{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60}

Este hecho se justifica porque los múltiplos de un número dado se obtienen al multiplicar el número por los números 1, 2, 3, 4, 5,... etc., y en forma similar se obtiene la tabla de un número dado al multiplicarlo por los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Para que los alumnos reafirmen estos conceptos se sugieren ejercicios como el siguiente:

Los alumnos juegan a la tienda y hacen carteleras sencillas que muestren los objetos y sus precios, y además fabrican billetes para "comprar".

Por ejemplo, con carteleras como las de la gráfica y



billetes de 2 pesos, ¿qué pueden comprar sin que tengan que darles vueltas? ¿Utilizando sólo billetes de 3 pesos? ¿De 5 pesos?

Con este ejercicio, los alumnos trabajan con los múltiplos de 2, de 3 y de 5. El ejercicio se puede repetir para otros números.

Para identificar el conjunto de todos los divisores de un número se pueden emplear las tarjetas con los números de 1 a 20, que los alumnos utilizaron para identificar múltiplos de un número dado.

Los alumnos se reparten por parejas, cada una de las cuales toma al azar una de las tarjetas. Con base en el número que obtuvieron, se elabora la tabla de multiplicar correspondiente a ese número, hasta cuando el resultado sea de tres cifras.

Por ejemplo, si el número que correspondió a una pareja es 6, entonces la tabla es:

$6 \times 1 = 6$
$6 \times 2 = 12$
$6 \times 3 = 18$
$6 \times 4 = 24$
$6 \times 5 = 30$
$6 \times 6 = 36$
$6 \times 7 = 42$
$6 \times 8 = 48$
$6 \times 9 = 54$

$6 \times 10 = 60$
$6 \times 11 = 66$
$6 \times 12 = 72$
$6 \times 13 = 78$
$6 \times 14 = 84$
$6 \times 15 = 90$
$6 \times 16 = 96$
$6 \times 17 = 102$ ya tiene tres cifras

Cuando todas las parejas terminen de elaborar la tabla que les correspondió, el maestro puede pedir a uno de los alumnos que diga en voz alta un número y que lo escriba en el tablero, poniéndole una "D" mayúscula a la izquierda.

Los demás alumnos miran si el número escrito en el tablero es el resultado de alguna multiplicación en la tabla que elaboraron. En caso afirmativo, se escriben en el tablero los factores que al ser multiplicados dan ese número.

Por ejemplo, el alumno que dijo "treinta", escribe en el tablero "D30", y los alumnos que elaboraron la tabla del 2 escriben los números 2 y 15, porque: 2 X 15 = 30. Otra pareja que debe pasar al tablero es la que elaboró la tabla del 3, porque: 3 X 10 = 30. De la misma forma la pareja que elaboró la tabla del 1 debe escribir en el tablero los números 1 y 30 porque: 1 X 30 = 30. Las parejas que elaboraron las tablas de los números 5, 6, 10, 15 también pasan al tablero. El alumno que dijo el número inicial forma un conjunto con los números que se escribieron en el tablero, sin repetir ninguno, y lo representa así:

[2, 15, 3, 10, 30, 1, 5, 6]

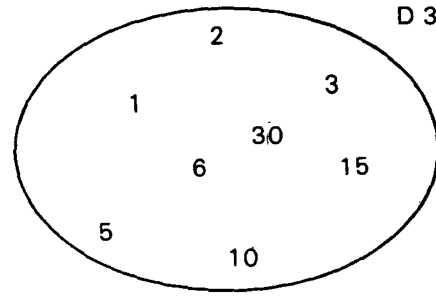
Los alumnos, por medio de preguntas, pueden concluir que si dividen 30 por cada uno de los elementos de este conjunto, el residuo de la división es siempre cero:

30 |2 — 0 15	30 |15 — 0 2	30 |3 — 0 10	30 |10 — 0 3
30 |5 — 0 6	30 |6 — 0 5	30 |30 — 0 1	30 |1 — 0 30

En definitiva, el conjunto de divisores de 30 es: [1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30]. Para este conjunto se puede convenir una notación como: Conjunto de divisores de 30: D30 = [1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30].

El mismo procedimiento se puede seguir con otros números que los alumnos digan.

D 30



Del conjunto de los divisores del número con el cual se trabaje, se obtiene el conjunto de los divisores primos. Para el caso del 30, este conjunto es [2, 3, 5]. Esto se hace con los demás números. También puede aprovecharse esta actividad para encontrar la intersección del conjunto de los números primos menores que 100 y el conjunto de los divisores de un número dado. Los elementos comunes forman la intersección, o sea el conjunto de los divisores primos de ese número dado.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
11. Ordenar conjuntos numéricos según las relaciones "... es múltiplo de ..." y "... es divisor de..." y representar gráficamente esas relaciones.	Dado un conjunto numérico y las relaciones "... es múltiplo de..." y "... es divisor de...", el alumno ordenará el conjunto teniendo en cuenta esas dos relaciones y hará las representaciones gráficas respectivas.
12. Reconocer algunas propiedades de las relaciones: "... es múltiplo de..." y "... es divisor de ..." (*)	Dada la representación gráfica de una de las dos relaciones mencionadas en el objetivo, el alumno explicará algunas de las propiedades de dicha relación.
13. Reconocer que la relación "... es divisor de..." es la inversa de la relación "... es múltiplo de..." (*)	El alumno explicará por qué la relación "... es divisor de...", es la inversa de la relación "... es múltiplo de...".

Sugerencias de actividades y metodología

Una situación que se puede presentar a los alumnos es la de varios almacenes en donde para ahorrar tiempo, debido a que algunos artículos son demandados por la gente con mayor frecuencia que otros, el dueño del negocio hace una tabla donde aparece el valor del producto, según el número de unidades. Por ejemplo, si un pan vale 2 pesos, el dueño de la tienda puede tener una tabla como la siguiente:

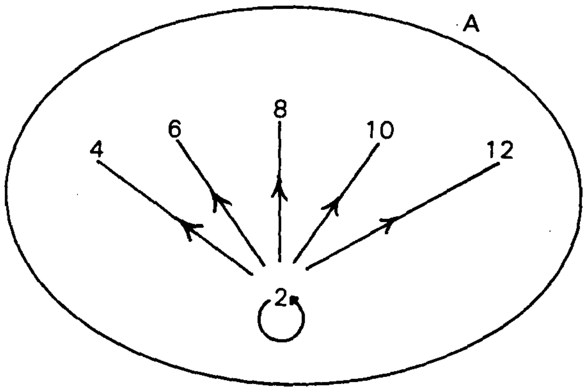
PAN

Unidades	Valor
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12

En forma similar se puede dar a los alumnos el precio de otros productos para que, en grupos, hagan la tabla correspondiente.

Cuando cada grupo haya completado su tabla, forma con estos valores un conjunto y le da un nombre; por ejemplo, en el caso del pan se tiene: A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}. Posteriormente, se toma el menor número del conjunto y se buscan sus múltiplos en él. Para el ejemplo se tiene que el menor número del conjunto A es 2 y sus múltiplos son 2, 4, 6, 8, 10, 12.

También se puede pedir a los alumnos que elaboren un diagrama para indicar cuáles son los múltiplos de dos, trazando flechas que salgan del número dos y vayan a sus múltiplos, así:

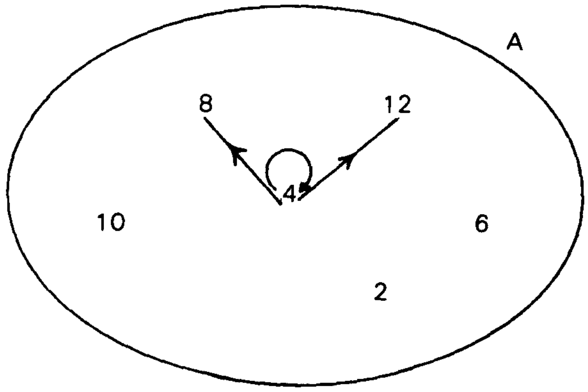


Como 2 es múltiplo de 2, él se señala a sí mismo, por eso se traza una flecha que se devuelve sobre ella misma formando un "bucle":

Los alumnos pueden observar que las flechas van del número a su múltiplo y que la lectura se hace enunciando primero el número señalado por la flecha; por ejemplo:

$2 \longrightarrow 4$ Eso se lee: 4 es múltiplo de 2.

A continuación, los alumnos pueden tomar el siguiente número del conjunto en orden de menor a mayor, formar el conjunto de sus múltiplos y construir el diagrama. Para el ejemplo, el siguiente número de menor a mayor es 4 y el conjunto de sus múltiplos es {4, 8, 12}. El diagrama correspondiente es:

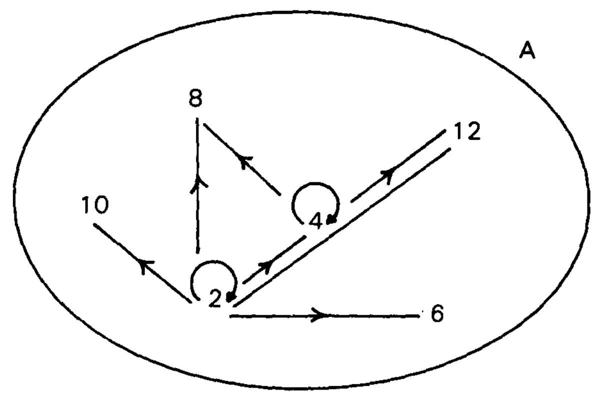


En este diagrama sólo se han colocado flechas en el 4 y entre el 4 y sus múltiplos.

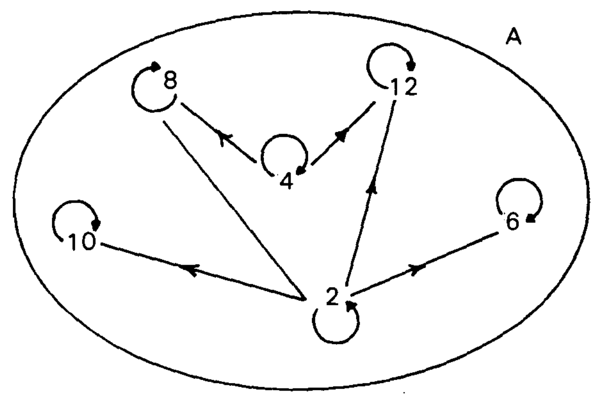
Los alumnos observan nuevamente que la flecha la trazaron del número a su múltiplo así:

$4 \longrightarrow 8$ Se lee: 8 es múltiplo de 4.

El maestro puede proponer ahora a los alumnos la construcción de un diagrama que resuma los dos anteriores, es decir, trazar las flechas que salgan de 2 y vayan a sus múltiplos y trazar flechas que salgan de 4 y vayan a sus múltiplos, así:



La actividad puede continuarse tomando el siguiente número del conjunto en orden de menor a mayor y trazando flechas de él a sus múltiplos. El proceso se puede repetir hasta hacerlo con todos los números del conjunto. Para este caso, el diagrama queda finalmente así:



Cuando los grupos hayan completado los diagramas, el maestro por medio de preguntas orienta el análisis de los mismos con el propósito de que ellos descubran algunas propiedades, como son:

1. Siembre que de un número sale flecha a un segundo número y de ese sale una flecha a un tercero, se tiene que del primer número sale una flecha al tercero. Es decir, siempre que se pueda

"transitar" por dos flechas seguidas, hay una flecha directa.

Ejemplo:

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & 4 \arrow[r] & 8 \end{tikzcd}$$

De 2 sale una flecha a 4 y de 4 una flecha a 8, entonces de 2 sale una flecha a 8.

Como la relación que se ha presentado en el gráfico es la de "ser múltiplo de", se puede decir: 8 es múltiplo de 4 y 4 es múltiplo de 2, entonces 8 es múltiplo de 2.

En forma similar se puede decir: 12 es múltiplo de 6 y 6 es múltiplo de 2, entonces 12 es múltiplo de 2.

Si los alumnos ya manejan bien la idea de transitar por las flechas, el maestro puede explicarles que esta propiedad de la relación "... ser múltiplo de..." se llama transitiva.

Los alumnos pueden comprobar que esta propiedad se cumple, estudiando las gráficas de los otros grupos.

2. Otra propiedad que los alumnos pueden deducir del estudio de las gráficas es que si de un número sale una flecha a otro diferente, de este segundo número no sale flecha hacia el primero; es decir, no hay ningún par de flechas de ida y regreso entre números diferentes.

Por ejemplo: $2 \longrightarrow 4$

Se puede decir que 4 es múltiplo de 2, pero no que 2 es múltiplo de 4.

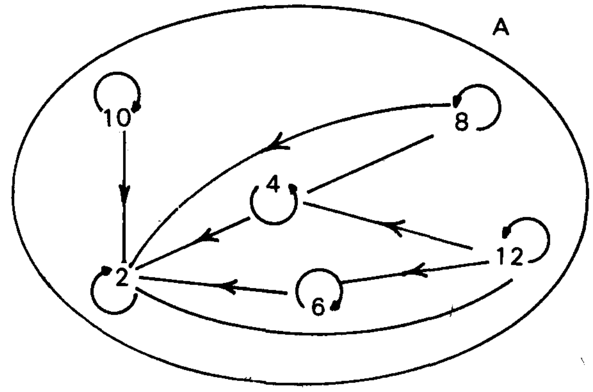
Si los alumnos ya manejan bien la idea de ausencia de flecha de ida y regreso, el maestro puede decirles que esta propiedad se llama antisimétrica. Los grupos pueden intercambiar las gráficas que construyeron con el objeto de que comprueben la propiedad antisimétrica de la relación "... es múltiplo de...".

A continuación se pueden proponer otros conjuntos numéricos para que los alumnos los trabajen manejando la relación "... es múltiplo de...".

En este grado lo más importante es comprender en qué consisten las propiedades antes que memorizar una definición o repetir un nombre. Decirles el nombre de las propiedades (antisimétrica y transitiva) es secundario y queda a opción del maestro. Darles definiciones simbólicas como las que aparecen en muchos libros de matemáticas, parece contraproducente a esta edad.

La actividad puede continuarse trabajando con los mismos conjuntos numéricos, pero considerando en ellos la relación "... es divisor de..." o procediendo como se sugirió para identificar los divisores de un número, mediante la elaboración de las tablas de multiplicar.

Si se trabaja con el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ el diagrama de flechas de la relación "... es divisor de..." queda así:



En este diagrama también se puede apreciar que:

- Siempre que se puede transitar por dos flechas seguidas hay una flecha directa.
- Entre dos elementos distintos no hay un par de flechas de ida y regreso.

Finalmente, se puede hacer la comparación entre los diagramas de flechas de las dos relaciones.

El maestro, basado en las observaciones de los alumnos, les puede ayudar a que concluyan que la relación "... es divisor de..." es inversa de la relación "... es múltiplo de...".

Una de las diferencias que los alumnos seguramente encuentran entre los dos diagramas es el sentido de las flechas; para indicar esto posiblemente empleen expresiones como "las flechas del primer diagrama van en sentido opuesto a las del segundo diagrama" o "señalan al revés de las del segundo diagrama".

La escritura de algunas expresiones referentes a cada una de las relaciones puede ayudar a los alumnos a concluir que la relación "... es divisor de...", es inversa de la relación "... es múltiplo de...".

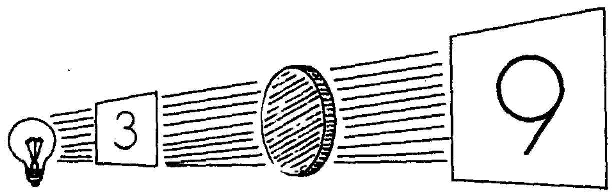
Ejemplo:

9 es múltiplo de 3	3 es divisor de 9
24 es múltiplo de 12	12 es divisor de 24
18 es múltiplo de 6	6 es divisor de 18

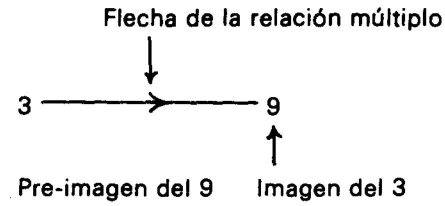
De nuevo se puede recalcar que se lee primero el número señalado por la flecha. La flecha también puede considerarse como un rayo de luz que proyecta el número sobre una pared, y por eso el número señalado por la flecha se llama imagen del primero por esa relación.

$3 \longrightarrow 9$ Se lee: nueve es múltiplo de tres.

También puede decirse: nueve es la imagen de tres por la relación "múltiplo".



Por esto a veces al tres se le llama "pre-imagen" del nueve por la relación "múltiplo".



Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
14. Reconocer otras relaciones numéricas y representarlas gráficamente.	Dada una relación numérica y un conjunto de números, el alumno hará la representación gráfica de esa relación.
15. Reconocer algunas propiedades de otras relaciones numéricas.	Dado el diagrama de flechas de una relación numérica, el alumno explicará algunas de sus propiedades.
16. Reconocer las inversas de otras relaciones numéricas.	Dadas algunas relaciones numéricas, el alumno dirá cuáles son las relaciones inversas correspondientes y explicará el porqué.

Sugerencias de actividades y metodología

La actividad se puede iniciar con el juego de los bandos de parejas y relaciones sugerido en la unidad inicial, o sencillamente preguntándole a los alumnos cuáles relaciones entre los números, además de las que ya se estudiaron, conocen ellos. Es posible que mencionen las relaciones "... es mayor que..." y "... es menor que...", puesto que con ellas trabajaron en los grados anteriores. Los mismos alumnos pueden decir cuál es el conjunto numérico en el que van a establecer esas relaciones. Una vez se fije el conjunto, dos alumnos pueden pasar al tablero, uno de ellos hace el diagrama de la relación "... es mayor que..." y el otro el de la relación "... es menor que...". La representación de las dos relaciones permite observar las propiedades transitiva y antisimétrica, ya que:

- siempre que hay dos flechas seguidas, hay una flecha directa;

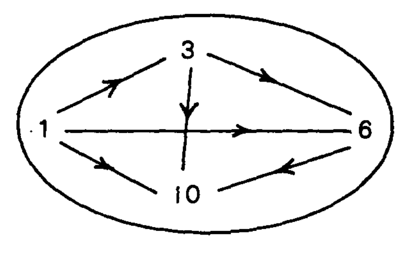
- no hay caminos de doble vía, o no hay ningún par de flechas de ida y regreso.

Además, al comparar el sentido de las flechas en los dos diagramas se ve que un sentido es el inverso del otro.

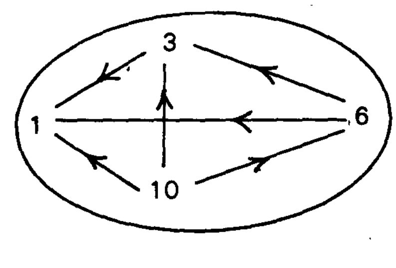
Las frases relacionales también se pueden comparar, y esto ayuda a los alumnos a concluir que una relación es la inversa de la otra.

Ejemplo: supongamos que el conjunto en el cual se van a establecer las relaciones es: B = {1, 3, 6, 10}.

Los diagramas correspondientes son:



"... es mayor que..."

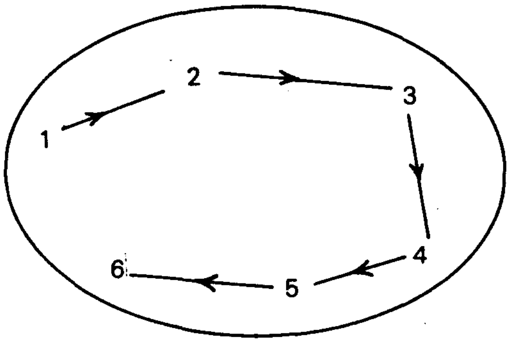


"... es menor que..."

Las frases relacionales que se pueden comparar son del tipo:

3 es mayor que 1	10 es mayor que 6
1 es menor que 3	6 es menor que 10

En ellos se ve que al cambiar el orden de los números es necesario cambiar la relación para que la frase sea cierta.



Sería conveniente que los alumnos dieran ejemplos de relaciones que no cumplan una de las propiedades anteriormente anotadas, por ejemplo, "... es el siguiente de..." en el conjunto de los números desde el 1 hasta el 6. Ejercicios de este tipo afianzan la comprensión de las propiedades.

Es de esperar que los alumnos lleguen a concluir que en esta relación no se cumple la condición de que siempre que hay dos flechas seguidas hay una flecha directa, mientras que sí se cumple la condición de que no hay caminos de doble vía.

También pueden analizar y representar las demás relaciones que se utilizaron en el juego de los bandos de parejas y relaciones, como "... es el anterior a...", "... es el doble de...", "... se escribe con el mismo número de cifras que...", y otras que los alumnos propongan. Es conveniente asesorarlos para que escojan un conjunto referencial no muy grande, para que el ejercicio no se vuelva tedioso, y no muy pequeño, para que no se vuelva trivial.

Objetivo específico	**Indicadores de evaluación**
17. Encontrar criterios para determinar cuando un número es divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10. (*).	Dados varios números, el alumno dirá cuáles de ellos son divisibles por los números 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11. El alumno dará algunos números que sean divisibles por varios de los números 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 11.

Sugerencias de actividades y metodología

Este objetivo se puede lograr en forma integrada con aquellos que se refieren a múltiplos, divisores y factores. Esto permite llegar a los criterios de divisibilidad mediante la observación de las particularidades de los múltiplos de un número.

Así los alumnos observan que la última cifra de los múltiplos de 2 es par. También es claro para ellos el significado de frases como: 24 es múltiplo de 2; es factor de 24; 2 es divisor de 24. Otra forma de expresar la última frase es la siguiente: 24 es divisible por 2.

Se espera que mediante preguntas como: ¿Cuáles son los números divisibles por 2?, ¿qué condición debe cumplir un número para que sea divisible por 2?, se llegue a la conclusión de que todos los múltiplos de 2 son divisibles por 2 y que una forma fácil de identificar estos números es chequeando la última cifra: ésta siempre es par. Si los alumnos dudan de si el cero es par o no, se puede decir que la última cifra es cero o par.

En forma similar se llega a las conclusiones sobre la divisibilidad por 5 y por 10.

Es conveniente dejar que los alumnos expresen con sus propias palabras los criterios que permiten determinar si un número es o no divisible por otro. Conviene que al lado de números que son divisibles por otro también se propongan números que no lo sean.

Para el caso de la divisibilidad por 3, 9 y 11 es necesario que el maestro oriente un poco la búsqueda de una característica especial de los múltiplos de estos números. El maestro puede hallar, previamente, algunos múltiplos de 3 y de 9, que tengan más de dos cifras y que no sean fácilmente identificables como múltiplos de estos números. En un principio los alumnos dividen el número por 3 ó por 9 y si el residuo es cero concluyen que el número es múltiplo de 3 ó múltiplo de 9 y, dentro de este contexto, es posible que lleguen a afirmar que el número es divisible por 3 o que es divisible por 9. El maestro les puede decir que como se trata de contestar rápidamente si el número es o no divisible por 3 ó por 9 sin necesidad de realizar la división, es necesario hallar la característica que permita esto. Algunos de los números dados por el maestro o por los alumnos, pueden ser múltiplos de 3 y también de 9, como sería el caso de 288. Otros como 1524, 2013 y 735 son múltiplos de 3 pero no lo son de 9. Todos los múltiplos de 9 sí son múltiplos de 3.

Cuando los alumnos crean haber encontrado la característica de estos números se somete a discusión y si ésta no es la precisa, se dan ejemplos que la invaliden. Si por ejemplo, un alumno dice que un número es divisible por 3 si termina en cifra impar, se verá que 25 y 107 cumplen con esa condición y sin embargo no son múltiplos de 3.

Finalmente, el maestro orienta a los alumnos para que constaten que la suma de las cifras de los múltiplos de 3 y de los múltiplos de 9 es un múltiplo de 3 o un múltiplo de 9, respectivamente.

Ejemplos de tales números son:

1524 :	1 + 5 + 2 + 4 = 12,	12 es múltiplo de 3
2013 :	2 + 0 + 1 + 3 = 6,	6 es múltiplo de 3
735 :	7 + 3 + 5 = 15,	15 es múltiplo de 3
288 :	2 + 8 + 8 = 18,	18 es múltiplo de 3 y de 9
432 :	4 + 3 + 2 = 9,	9 es múltiplo de 3 y también de 9
1593 :	1 + 5 + 9 + 3 = 18,	18 es múltiplo de 3 y también de 9.

Así pueden llegar a redactar el conocido criterio de divisibilidad por 3 y por 9.

Hallar el criterio de divisibilidad por 11 presenta más dificultad y es conveniente que el maestro prepare con anterioridad múltiplos de 11 que tengan tres cifras para que la búsqueda de la característica de los múltiplos de este número, resulte interesante.

En los múltiplos de 11 si a la suma de las cifras que ocupan lugar impar, de derecha a izquierda, se le resta la suma de las cifras que ocupan lugar par, la diferencia es cero o un múltiplo de 11. Cuando la segunda suma sea mayor que la primera, entonces se le adiciona a esta última el múltiplo de 11 estrictamente necesario para poder realizar la sustracción.

Ejemplos:

$$396\begin{cases} 6+3=9 \\ 9-9=0 \end{cases} \quad 396 \text{ es múltiplo de } 11$$

$$528\begin{cases} 8+5=13 \\ 13-2=11 \end{cases} \quad 528 \text{ es múltiplo de } 11$$

$$749\begin{cases} 9+7=16 \\ 16-4=12 \end{cases} \quad 749 \text{ no es múltiplo de } 11$$

Con base en estos ejercicios y en otros que el maestro considere necesarios los alumnos pueden redactar este criterio de divisibilidad.

Como ejercicio, los alumnos pueden averiguar cuál es el criterio de divisibilidad por 6.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
18. Identificar números que son múltiplos de varios números a la vez.	Dado un conjunto numérico, el alumno formará un nuevo conjunto con algunos de los números que sean múltiplos a la vez de todos los números del conjunto dado.
19. Identificar el menor de los múltiplos comunes de varios números y designarlo con el nombre de Mínimo Común Múltiplo (M.C.M.). (*)	Dado un conjunto de múltiplos comunes de un conjunto numérico, el alumno identificará el menor de los múltiplos.

Sugerencias de actividades y metodología

Para el logro de estos objetivos se puede proponer a los alumnos un juego para que lo realicen en grupos, máximo de tres miembros.

El maestro con anterioridad puede elaborar tarjetas, cada una con tres números. Los números de cada tarjeta se seleccionan de tal forma que los alumnos no tengan que hacer una lista de múltiplos demasiado larga para que puedan encontrar múltiplos comunes. Los siguientes son ejemplos de tarjetas:

2, 6, 9	3, 2, 5	6, 5, 3
5, 4, 3	2, 7, 5	2, 4, 6

8, 3, 4	7, 2, 3
4, 2, 8	3, 6, 9

Cada grupo saca una tarjeta al azar, en la cual hay tres números. Cada integrante toma un número y forma un conjunto de múltiplos de ese número; conviene que cada conjunto tenga por lo menos 20 elementos. Aunque el cero puede considerarse múltiplo de cualquier número porque $1 \times 0 = 0$, $3 \times 0 = 0$, etc., se le excluirá de los conjuntos de múltiplos.

Ejemplo: si la tarjeta que le correspondió a un grupo es $\boxed{3,\ 2,\ 5}$ los conjuntos son:

M3 = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66}

M2 = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60}

M5 = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100}

Es importante aclarar a los alumnos que en estos conjuntos sólo se ha hecho la lista de algunos de los múltiplos de cada número.

A continuación se comparan los conjuntos que obtuvieron y se halla la intersección de los tres conjuntos, así:

$(M3 \cap M2) \cap M5 = \{30, 60\}$

Nuevamente es importante aclarar a los alumnos que en el conjunto que se obtuvo al hacer la intersección no están todos los múltiplos comunes a los tres números, sino tan sólo algunos de ellos; para el caso del ejemplo, dentro del conjunto de múltiplos comunes a los tres números también estarían 90, 120, 150, 180,... y así sucesivamente. Se podría seguir aumentando el número de múltiplos de cada uno de los tres números iniciales buscando un número más grande que sea múltiplo de los tres, sin que se llegue nunca a encontrar el menor de los múltiplos comunes. A continuación cada grupo identifica el menor de los múltiplos comunes que encontró. Para el ejemplo, el menor de los múltiplos comunes para el caso de la tarjeta $\boxed{3,\ 2,\ 5}$ es 30.

La razón para excluir el cero de las listas de múltiplos, es que éste aparecería en todas, y sería el menor de los múltiplos comunes en todos los casos.

Como actividad complementaria, los grupos pueden intercambiar tarjetas para desarrollar el mismo procedimiento y comparar si obtuvieron igual número como menor múltiplo común de un conjunto dado de números.

El maestro puede explicarles que este múltiplo se llama mínimo común múltiplo; mínimo, porque es el menor de los múltiplos comunes distintos de cero, y común múltiplo por ser múltiplo de todos los números que aparecen en la tarjeta.

Es posible que en algunos casos este procedimiento para obtener el mínimo común múltiplo de un conjunto de números resulte bastante largo; posteriormente se verá un procedimiento más corto.

El maestro puede indicar que para abreviar la expresión "mínimo común múltiplo" se suelen escribir sólo las iniciales en mayúscula: MCM.

Ejemplo, el mínimo común múltiplo correspondiente a la tarjeta $\boxed{3,\ 2,\ 5}$ es 30, lo que se acostumbra indicar escribiendo: "El MCM de 3, 2 y 5 es 30", o más abreviadamente: MCM (3, 2, 5) = 30.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
20. Identificar números que son divisores de varios números a la vez.	Dado un conjunto numérico, el alumno formará un nuevo conjunto con algunos de los números que sean divisores a la vez de todos los números del conjunto dado.

21. Identificar el mayor de los divisores comunes de varios números y designarlo con el nombre de Máximo Común Divisor (MCD). (*).	Dados varios conjuntos, cada uno formado por los divisores de un número, el alumno identificará el mayor de los divisores comunes a ellos.

Sugerencias de actividades y metodología

La elaboración previa de algunas tarjetas por parte del maestro puede ser el punto de partida para el logro de estos objetivos. En cada tarjeta pueden ir escritos tres números con el objeto de que sea posible hallarles dos o más divisores comunes. Algunas situaciones donde el único divisor común es el uno, se pueden dejar para más adelante, cuando el alumno haya comprendido el concepto de máximo común divisor. Los siguientes son ejemplos de tarjetas:

16, 24, 40	30, 18, 12
50, 40, 60	30, 6, 18
42, 21, 28	12, 36, 48
81, 63, 72	27, 45, 18

Si el maestro considera conveniente, puede organizar un repaso para que los alumnos recuerden el concepto de divisor.

Para iniciar la actividad los alumnos pueden organizarse en grupos de tres. Cada grupo toma una tarjeta al azar, y a cada integrante del grupo se le asigna uno de los números escritos en ella. Cada alumno hace un conjunto con los divisores de ese número.

Ejemplo: si la tarjeta que le correspondió a un grupo es $\boxed{30, 18, 12}$ los tres conjuntos de ese grupo son:

D30 = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}
D18 = {1, 2, 3, 6, 9, 18}
D12 = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Una vez que los alumnos han formado los tres conjuntos, se les puede pedir que los comparen y hagan uno nuevo con los elementos comunes a los tres conjuntos, o sea que hallen la intersección de éstos.

Para el caso del ejemplo, el conjunto que se obtiene al efectuar la intersección de los tres conjuntos, es: [1, 2, 3, 6].

Es importante que los alumnos le den significado a este conjunto, entendiendo que está formado por los divisores comunes a los tres números escritos en la tarjeta: **conjunto de divisores comunes a los números** 30, 18, 12: {1, 2, 3, 6}

Seguidamente se les solicitará que elijan el mayor de estos números y comprueben que es divisor de todos los números que aparecen en la tarjeta. También se les puede pedir que intenten encontrar un número más grande que sea divisor de los tres que aparecen en la tarjeta. Es posible que los alumnos concluyan que no es factible hallar un número mayor que sea divisor de todos los números dados.

El maestro les puede explicar que por esta razón al mayor de los divisores comunes de un conjunto de números se le denomina **máximo común divisor**, y que para abreviar sólo se acostumbra escribir la letra mayúscula inicial de cada palabra, así: MCD. Para el ejemplo se tiene que el máximo común divisor es 6, lo que se acostumbra indicar escribiendo: "EL MCD de 30, 18 y 12 es 6", o más abreviadamente: MCD (30, 18, 12) = 6.

A continuación los grupos pueden intercambiar las tarjetas para realizar otros ejercicios.

Es conveniente que el maestro proponga un ejercicio para que los alumnos hallen el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor y para que los comparen, con el propósito de ayudar a diferenciar estos dos conceptos:

Nota: posteriormente se indicará un método más corto para obtener el MCD.

Después puede pedirse a los alumnos que expresen cada uno de los números de la tarjeta como el resultado de multiplicar dos o más de los divisores que encontraron.

Para el ejemplo que se viene tratando se tiene:

$30 = 1 \times 30$	$18 = 1 \times 18$	$12 = 1 \times 12$
$30 = 2 \times 15$	$18 = 2 \times 9$	$12 = 2 \times 6$
$30 = 3 \times 10$	$18 = 3 \times 6$	$12 = 3 \times 4$

También es posible obtener estos números como el producto de más de dos factores, así:

$30 = 2 \times 3 \times 5$ $18 = 3 \times 2 \times 3$ $12 = 2 \times 3 \times 2$

Obsérvese que en este caso todos los números se han expresado como productos de números primos.

Esta puede ser una variante que se puede presentar a los alumnos para que expresen cada número.

Se espera que los alumnos, orientados por el maestro, lleguen a concluir que si un número es divisor de otro, éste se puede expresar como el resultado de multiplicar el divisor por otro número, y que todo divisor de un número es a su vez un factor de dicho número.

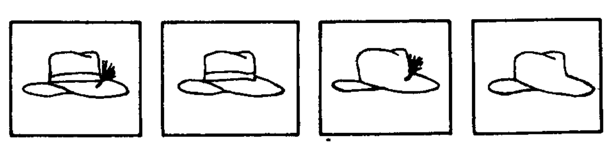
Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
22. Hallar subconjuntos de un conjunto dado.	Dado un conjunto el alumno hallará varios subconjuntos.
23. Hallar uniones e intersecciones de subconjuntos de un conjunto dado (*).	Dados dos subconjuntos el alumno hallará la unión e intersección entre ellos.
24. Reconocer que un conjunto dado puede considerarse en algunas actividades como un conjunto referencial, y en otras como subconjunto de otro conjunto referencial más amplio.	En una situación específica dada, el alumno dirá cuál es el conjunto referencial apropiado y planteará otra situación en la cual el referencial anterior pase a ser subconjunto de otro conjunto referencial más amplio.
25. Reconocer el complemento de un subconjunto con respecto al conjunto referencial dado. (*)	Seleccionado un conjunto en un referencial, el alumno dirá cuál es su complemento respecto al conjunto referencial dado.
26. Relacionar el complemento de un subconjunto con la negación de una condición.	Dado un conjunto y una condición que cumplan sus elementos, el alumno dirá cuál es la condición que cumplen los elementos del complemento del conjunto dado.
27. Reconocer que un subconjunto y su complemento no tienen elementos comunes.	Dado un conjunto referencial y un subconjunto de él, el alumno reconocerá que este subconjunto y su complemento respecto al referencial dado no tienen elementos comunes.
28. Reconocer que la unión de un subconjunto con su complemento es todo el conjunto referencial.	Dado un conjunto referencial y un subconjunto de él, el alumno hallará el conjunto reunión de los dos anteriores y reconocerá que el nuevo conjunto es el mismo referencial dado.

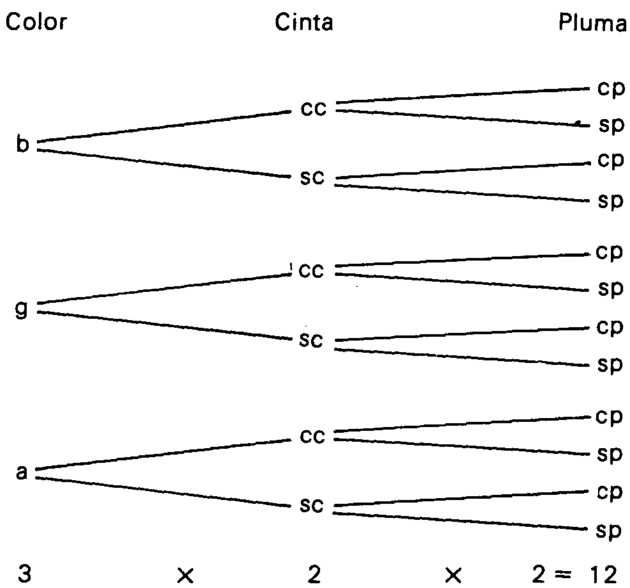
Sugerencias de actividades y metodología

Para esta actividad el maestro puede distribuir a los alumnos en grupos de a 6. Cada grupo recibe 12 tarjetas en blanco para que en ellas dibujen sombreros con las siguientes características: de 3 colores (Blanco, Gris, Amarillo), Con Cinta y Sin Cinta (cc y sc), Con Pluma y Sin Pluma (cp y sp). Conviene, además, que cada grupo disponga de unos trozos de pita, cabuya o lana.

Para ayudarlos a hallar los diferentes sombreros, se puede hacer un diagrama de árbol (Ver gráfico)

Salen en total 12 sombreros distintos: blanco, con cinta y con pluma; blanco, con cinta y sin pluma; blanco sin cinta y con pluma, blanco, sin cinta y sin pluma; etc.





El conjunto referencial con el cual se va a trabajar está constituido por 12 sombreros dibujados en las 12 tarjetas.

Cada uno de los 6 alumnos de cada grupo, dibuja dos tarjetas y, posteriormente, el grupo puede practicar los juegos que aquí se proponen:

Primer juego: Cada uno de los 6 alumnos de un grupo describe los sombreros dibujados en sus 2 tarjetas. Los demás de los otros grupos, levantan la tarjeta donde figura el sombrero con las mismas características que el descrito. Gana el grupo donde siempre se levantan las tarjetas correctas.

Segundo juego: Un alumno del grupo da una característica y sus compañeros colocan en el centro las tarjetas correspondientes.

Del conjunto formado por éstas se dice que es un subconjunto del conjunto referencial. A continuación cada grupo dice cuál es el subconjunto que obtuvo.

Si la característica que un alumno dio fue: "los que tienen pluma", en el centro de la mesa de trabajo, deben aparecer 6 cartas; si la característica es "los que tienen pluma y cinta", en el centro de la mesa sólo habrá 3 cartas.

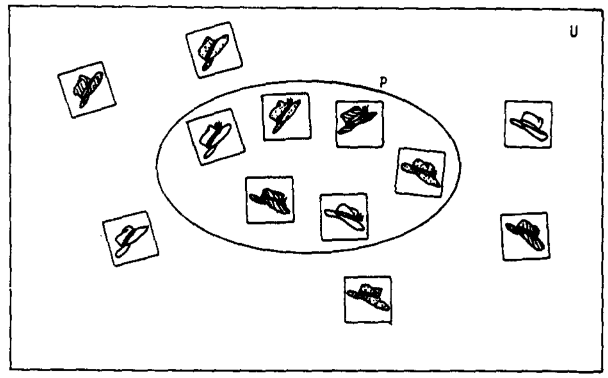
Los alumnos caen en la cuenta de que a medida que aumentan las características el conjunto tiene menos elementos.

Si se tiene el subconjunto de "los que tienen pluma", el maestro puede preguntar cuál es la característica de los elementos del conjunto formado por las otras tarjetas.

Se espera que los alumnos lleguen a concluir que estas son las tarjetas de los sombreros *que no* tienen pluma.

Cada grupo puede representar con las 12 cartas la situación, de tal manera que se vea claramente cuál es el conjunto referencial, cuál es el de los sombreros que tienen pluma y cuál el de los sombreros que no la tienen.

El maestro puede darles algunas indicaciones relacionadas con la forma convenida para representar lo anterior, teniendo en cuenta que el referencial se acostumbra representar mediante un rectángulo y denominarlo con la letra U, y que los subconjuntos se suelen agrupar en una curva cerrada. Así puede llegarse a una representación como:



donde U es el conjunto de las 12 tarjetas y P es el de los sombreros que tienen pluma. Los otros sombreros forman el conjunto de los que no tienen pluma. Este último se denomina complemento de P con respecto al referencial U.

Conviene analizar los resultados de todos los grupos para progresar en la construcción de estos conceptos.

Cuando cada grupo haya expuesto su trabajo y tenga lista la representación correspondiente, el maestro puede formular preguntas que lleven a los alumnos a reconocer que un conjunto y su complemento no tienen elementos comunes. Por ejemplo, el conjunto P y su complemento, no tienen elementos comunes.

Los alumnos orientados por el maestro, también pueden llegar a concluir que al reunir los elementos de un conjunto con los del conjunto complemento, obtienen todo el conjunto referencial. Así, al reunir el conjunto P y el conjunto complemento de P, se obtiene el referencial de las 12 tarjetas.

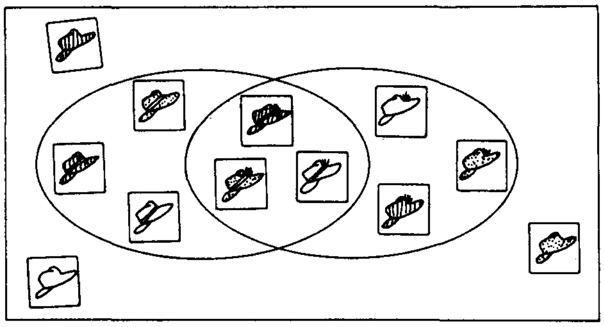
Tercer juego: Los grupos escriben dos condiciones que permitan formar dos conjuntos del referencial. Sobre la mesa de trabajo se traza una figura rectangular. Los dos subconjuntos los representan utilizando las tarjetas y los trozos de pita; cabuya o lana. Aquellos alumnos cuya tarjeta no cumple ninguna de las 2 condiciones, también juegan colocándola en el sitio adecuado, dentro del rectángulo.

Cuando las dos condiciones determinen conjuntos con elementos comunes, es posible que los alumnos tengan dificultades para ubicar las tarjetas correspondientes. En estos casos los lazos se hacen pasar el uno sobre el otro para delimitar tres regiones, y los elementos comunes se colocan en la región común.

Si las condiciones que un grupo formula son:

- los sombreros que tienen pluma
- los sombreros que tienen cinta

la dificultad está en ubicar aquellos sombreros con pluma que también tienen cinta. En este caso se espera una situación como:



Cuando el maestro considere que los alumnos ya han elaborado los conceptos mencionados en los objetivos, es conveniente que les formule algunas preguntas al respecto o les plantee otras situaciones con otro conjunto referencial, cuyos elementos sean alumnos de la escuela, por ejemplo, los alumnos de cuarto año. De este referencial se pueden considerar varios conjuntos y de cada uno de éstos, decir cuál es su complemento. También se pueden hacer uniones e intersecciones y si el nivel de los alumnos lo permite, puede decirse cuál es el complemento del conjunto unión y del conjunto intersección.

Si se toma como referencial el conjunto de todos los alumnos de la escuela, se hace notar que ahora el conjunto de los alumnos de cuarto grado es un subconjunto de este nuevo referencial más amplio.

Los ejercicios de divisores y múltiplos se prestan a actividades de mucho interés para la formación de uniones e intersecciones, para la identificación de complementos, para el cambio de referenciales, etc. En caso de que los alumnos tengan dificultad en hacer estas actividades con fichas u objetos varios, basta hacerlas sólo con conjuntos numéricos.

	Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
29.	Identificar expresiones del lenguaje que son proposiciones. (*)	Dadas varias expresiones, el alumno señalará aquellas que son proposiciones.
30.	Hallar la negación de una proposición. (*)	Dadas varias proposiciones, el alumno hallará la negación de cada una de ellas.
31.	Identificar la condición que cumplan todos los elementos de un conjunto dado.	Dado un referencial y en él un conjunto apropiado, el alumno dirá cuál es la condición que cumplen todos los elementos de dicho conjunto.
32.	Identificar los elementos de un conjunto referencial que cumplan con una condición dada.	Dados un referencial y una condición, el alumno señalará cuáles son los elementos del referencial que la cumplen.
33.	Reconocer que dos condiciones diferentes pueden identificar el mismo conjunto.	El alumno dará dos condiciones diferentes que identifiquen un mismo conjunto.

Sugerencias de actividades y metodología

Para el logro de estos objetivos se puede trabajar inicialmente con los sombreros de la actividad anterior, y después reemplazar este referencial por otro o por un conjunto numérico. Los alumnos pueden continuar en los mismos grupos de trabajo. El maestro escribe en el tablero expresiones como:

- Los dibujos de las tarjetas representan sombreros (1)
- Algunos sombreros tienen cinta (2)
- ¿A Ud. le gusta llevar sombrero? (3)
- Ninguno de los sombreros tiene botones (4)
- ¡Permítame su sombrero blanco! (5)
- Hay un sombrero que tiene dos colores (6)
- ¡Oh, qué lindo es su sombrero! (7)
- Todos los sombreros tienen barbuquejo (8)

Los alumnos escriben en sus cuadernos estas expresiones y luego señalan con una V aquellas que son verdaderas. Se les recuerda que el conjunto referencial es el de los doce sombreros representados en las tarjetas.

Son verdaderas las expresiones: (1), (2) y (4).

Los alumnos señalan con una F aquellas expresiones que son falsas. Estas son: (6) y (8).

De las otras expresiones no puede decirse si son verdaderas o falsas. La (3) es una pregunta, y ante una pregunta no tiene sentido plantearse el problema de si es verdadera o falsa; lo mismo puede decirse de la (5) que es una instrucción, y de la (7) que es una exclamación.

Las expresiones de las cuales se puede asegurar que son verdaderas o que son falsas se llaman proposiciones.

Los alumnos escriben algunas proposiciones, acerca del conjunto de los doce sombreros, que sean verdaderas y otras que sean falsas.

Otro conjunto referencial puede ser el formado por los alumnos del curso.

También es conveniente que trabajen con un referencial cuyos elementos sean números. Ejemplo: $\{4, 10, 12, 18, 20, 24, 30\}$.

Teniendo en cuenta el referencial anterior, se señalan las proposiciones verdaderas y las falsas entre las varias que den los alumnos:

- Todos los números del referencial dado se representan con dos cifras (F).
- Algunos números del referencial son impares. (F)
- Cada uno de los números es par. (V)
- ¿Cuántos números primos hay?
- ¡Lea la lista de los elementos de ese conjunto!

A continuación los alumnos pueden dar otras proposiciones relacionadas con su medio ambiente o que hagan referencia a hechos conocidos por todos. Ejemplos:

- El día está lluvioso.
- Nuestra maestra se llama Angela Santamaría.
- La semana tiene siete días.
- Bogotá es la capital de Colombia.
- Cerca de la escuela hay un parque.
- Gabriel García Márquez es cantante.

Los alumnos dicen cuáles de estas proposiciones son falsas y cuáles son verdaderas y a continuación se les pide que nieguen cada una de las proposiciones anteriores. Esto se puede hacer oralmente hasta cuando todos caigan en la cuenta de que para negar una proposición basta agregar convenientemente la palabra *no* a la proposición dada. Después los alumnos pueden escribir en sus cuadernos las proposiciones y sus negaciones. Para las que se han tomado como ejemplos las negaciones correspondientes son:

- El día no está lluvioso.
- Nuestra maestra no se llama Angela Santamaría.
- La semana no tiene siete días.
- Bogotá no es la capital de Colombia.
- Cerca de la escuela no hay un parque.
- Gabriel García Márquez no es cantante.

Es conveniente que los alumnos observen que si una proposición es verdadera, su negación es falsa y que cuando una proposición es falsa su negación es verdadera. No se trata de "enseñar lógica matemática", sino de explorar regularidades del lenguaje ordinario y ejercitar transformaciones de frases usuales.

Otro tipo de ejercicios consiste en hallar el conjunto de las soluciones de una igualdad o de una desigualdad. Esto equivale a encontrar los elementos que cumplen con una condición dada. Siempre será necesario fijar el referencial. En el ejemplo siguiente se toma como referencial el conjunto numérico dado anteriormente: $\{4, 10, 12, 20, 24, 30\}$.

¿Cuáles son los números que pueden escribirse en el cuadrito de la siguiente expresión $\square > 18$, para obtener una proposición verdadera?

El conjunto de las soluciones es [20,24, 30]. Así resultan las proposiciones $20 > 18$, $24 > 18$, $30 > 18$, todas ellas verdaderas.

¿Cuáles son los números para los cuales es cierto que: $\square + 20 = 24$?

Hay un solo número, el 4. $4+20 = 24$ es una proposición verdadera. El conjunto de las soluciones es $\{4\}$, que tiene un solo elemento, 4.

No es de extrañar que muchos alumnos rechacen la distinción entre el 4 y el conjunto formado sólo por el 4. El concepto de conjunto unitario, lo mismo que el de conjunto vacío, es difícil de construir, y no debe imponerse al alumno; él mismo lo va formando con el juego de intersecciones y diferencias entre conjuntos. No es conveniente dar definiciones tomadas de los libros antes que los alumnos indiquen con sus propias palabras que ya han formado el concepto. Una vez que hablen con propiedad de colecciones con un solo objeto o sin objetos, pueden utilizarse los símbolos usuales $\{4\}$ y $\emptyset$, o $\{\ \}$.

Finalmente se dan otras condiciones que permitan identificar conjuntos, y entre ellas, dos condiciones diferentes que ayuden a identificar el mismo conjunto.

- Los números que terminan en cero: $\{10,20,30\}$
- Los múltiplos de cinco: $\{10,20,30\}$
- Los múltiplos de 4: $\{4,12,20,24\}$
- Los números primos: ¡No hay! No es de extrañar que no digan: "El conjunto vacío", pues lo más probable es que aún no hayan construido ese concepto.

Se observa que las dos primeras condiciones identifican el mismo conjunto. Es en este sentido que se habla de igualdad entre conjuntos. Así, si al primer conjunto se le llama A y al segundo B, entonces se dice que $A = B$, o más explícitamente, que A y B son dos nombres o símbolos del mismo conjunto.

Obsérvese que la igualdad se establece entre dos símbolos que denotan *al mismo* conjunto (o sea, el conjunto en que uno está pensando), y no propiamente entre *dos* conjuntos.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
34. Reconocer que las expresiones "todos", "cada uno", "ninguno", "algunos" hacen referencia a la cantidad de elementos que cumplen una condición sin recurrir al conteo.	Dadas algunas frases apropiadas, el alumno señalará en ellas las expresiones que hacen referencia a la cantidad de elementos que cumplen una condición.
35. Formular frases que contradigan otras en las cuales se utilizan las expresiones "todos", "cada uno", "ninguno", "algunos".	Dada una frase en la que se utilizan expresiones como "todos", "cada uno", "ninguno", "algunos", el alumno describirá una situación incompatible con la frase dada.

Sugerencias de actividades y metodología

Las expresiones "todos", "cada uno", "ninguno", "algunos" se utilizan frecuentemente en el lenguaje ordinario para designar la cantidad de elementos que cumplen una condición sin recurrir al conteo. Dentro de esta programación se viene insistiendo en el uso y significado de dichas expresiones desde el segundo grado, no como "ejercicio de lógica matemática", sino como exploración del lenguaje usual.

El avance en este grado consiste esencialmente en construir frases que contradigan otras en las cuales intervengan tales expresiones. El juego puede llamarse "¡No me contradiga!". Es importante que los alumnos tengan claro cuál es el conjunto referencial. Así, si se trabaja con los 12 sombreros, el maestro puede pedir a los alumnos que escriban proposiciones, verdaderas o falsas, relacionadas con este referencial y en las cuales utilicen las expresiones en estudio. A la derecha de cada frase escriben: "¡No me contradiga!". Cuando, por grupos o individualmente, hayan hecho las frases, se les pide que escriban otras que contradigan las primeras. Pueden utilizar los sombreros para representar las situaciones que permitan explicar lo dicho en las frases. Es posible que los alumnos entiendan más fácilmente lo que significa contradecir al que dijo la frase, que contradecir la frase misma, o que hablen de hacer quedar mal al que la dijo. El maestro puede aprovechar estas frases para facilitar el juego de "¡No me contradiga!".

A continuación se dan tres proposiciones y para cada una de ellas se dan también proposiciones que las contradicen:

(1) Algunos sombreros tienen pluma. ¡No me contradiga!
Sí lo contradigo: - Uno solo tiene pluma
o también: - Ninguno tiene pluma

El maestro puede observar que para contradecir la proposición (1) es suficiente con que haya *máximo un* sombrero con pluma.

(2) Ningún sombrero tiene barbuquejo. ¡No me contradiga!
Sí lo contradigo: - Un sombrero tiene barbuquejo.
- Algunos (o varios) tienen barbuquejo.
- Todos tienen barbuquejo.

En este ejemplo, el maestro puede observar que para contradecir la proposición (2) basta con que haya *máximo un* sombrero que tenga barbuquejo.

(3) Todos los sombreros son de ala ancha. ¡No me contradiga!
Sí lo contradigo: - Hay uno que no es de ala ancha.
- Algunos tienen ala ancha y otros no.
- Ninguno tiene ala ancha.

Aquí se puede observar que para contradecir la proposición (3) basta con que haya mínimo uno que no cumpla con la condición dada, es decir que exista por lo menos un sombrero que no sea de ala ancha.

Es poco probable que los alumnos lleguen a conclusiones en las cuales utilicen las expresiones: "máximo un(o)", "mínimo un(o)", "mínimo uno que no". Lo interesante es la discusión que se dé a propósito de las frases, y la descripción de la situación que sea incompatible con una frase dada.

Los alumnos tienden a irse al otro extremo o a decir todo lo contrario, cuando quieren contradecir frases que empiezan con "todos" o "ninguno". Según el nivel de comprensión que muestre el grupo, puede hacérseles notar que una cosa es decir todo lo contrario, y otra cosa es decir lo mínimo que se necesita para contradecir. Lo importante es utilizar frases contrarias y contradictorias, y no dar definiciones y distinciones verbales. Puede hacerse un juego parecido con conjuntos numéricos, y repasar así conceptos como pares, primos, múltiplos y divisores, etc.

Objetivo específico	**Indicadores de evaluación**
36. Efectuar permutaciones y combinaciones de objetos. (*)	Dados cuatro objetos, el alumno hallará por lo menos cinco permutaciones de dichos objetos. Dados cinco objetos, el alumno hallará por lo menos cinco combinaciones de a tres objetos.

Sugerencias de actividades y metodología

Este objetivo se puede lograr mediante la realización dè juegos. Para el primer juego, los alumnos forman grupos de a cuatro y cada alumno utiliza una silla. Este juego puede llamarse: "¿De cuántas maneras podemos organizarnos?". Consiste en buscar todas las formas posibles de organizarse cuatro alumnos en cuatro sillas. Cada grupo marca las cuatro sillas colocándoles un letrero como:

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4

Los alumnos de cada grupo van rotando para sentarse en las sillas y cada vez que encuentren una forma distinta de organizarse la anotan en una tabla. Es posible que no las encuentren todas; pero el maestro los puede orientar diciéndoles que permanezcan dos fijos y se roten los otros dos, así quedan fijos dos alumnos, uno en la silla 1 y otro en la silla 2, mientras rotan los alumnos de las otras dos sillas, luego quedan fijos los dos que se rotaron antes y rotan los dos que estaban fijos. Si en el grupo formado por Teresa, María, José y Fanny, comienza sentándose Teresa en la silla 1, María en la silla 2, José en la silla 3 y Fanny en la silla 4, se tiene el siguiente arreglo.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Teresa	María	José	Fanny

Para buscar otro arreglo pueden permanecer fijas Teresa y María y rotar José y Fanny. José pasa a la silla 4 y Fanny a la silla 3; el arreglo obtenido se coloca en la tabla así:

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Teresa	María	José	Fanny
Teresa	María	Fanny	José

Ahora pueden permanecer fijos José y Fanny y rotar Teresa y María.

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Teresa	María	José	Fanny
Teresa	María	Fanny	José
María	Teresa	José	Fanny
María	Teresa	Fanny	José

Enseguida pasa Fanny a la silla 1 y José a la silla 2 y vuelven a rotar los otros dos.

De esta forma se obtienen 24 formas diferentes de organizarse; algunas de éstas son las siguientes:

Silla 1	Silla 2	Silla 3	Silla 4
Teresa	María	José	Fanny
Teresa	María	Fanny	José
María	Teresa	José	Fanny
María	Teresa	Fanny	José
Fanny	José	María	Teresa
Fanny	José	Teresa	María
José	Fanny	María	Teresa
José	Fanny	Teresa	María

No importa que los alumnos no encuentren todos los arreglos ni se trata de que digan cuántos son o de que sepan fórmulas de combinatoria; es más importante que entiendan las reglas del juego, que empiecen a proceder sistemáticamente, y que caigan en la cuenta de que en estos arreglos el orden es importante. El mismo juego lo pueden realizar agrupados de a cinco y buscando las formas diferentes de sentarse los cinco alumnos en las cinco sillas.

Posteriormente pueden jugar a formar comités: en el barrio se quiere hacer un comité para deportes, que consta de cuatro personas: un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. Se ha elegido a cuatro personas para dicho comité. Los alumnos buscan diferentes maneras de formarlo, agrupándose de a cuatro. Los arreglos que se pueden obtener en este caso son 24, pero lo importante no es sacarlos todos, sino entender las condiciones dadas y proceder sistemáticamente. De nuevo los alumnos se dan cuenta de que estos arreglos requieren orden.

También pueden jugar a formar comités de cuatro personas escogidas entre seis; dicho comité podría representar al barrio en cualquier reunión de carácter deportivo. Los alumnos se organizan en grupos de a seis y buscan las diferentes maneras como puede integrarse dicho comité. Supongamos que un grupo está formado por Miguel, Alba, Gustavo, Doris y Hernando. Algunos de los arreglos que pueden hacerse son:

Miguel	José	Alba	Gustavo
Miguel	José	Alba	Doris
Miguel	José	Alba	Hernando
Miguel	José	Doris	Hernando
Miguel	José	Gustavo	Hernando
José	Alba	Gustavo	Doris
José	Alba	Gustavo	Hernando
José	Gustavo	Doris	Hernando
Gustavo	Doris	Hernando	Alba

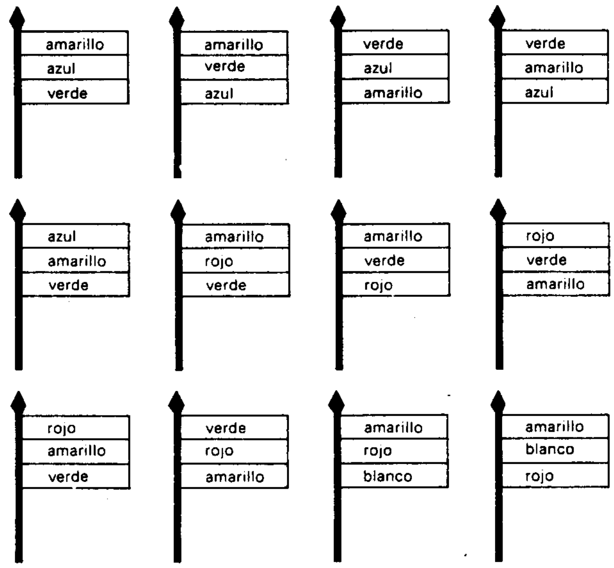
De esta manera salen 20 arreglos. El maestro puede pedir a los alumnos que establezcan una comparación entre los comités formados en este ejercicio y los del ejercicio anterior; se espera que concluyan que en el primer ejercicio se requería el orden para formarlos y en los del segundo caso no. Así por ejemplo, el comité del primer caso que tiene como presidente a Miguel, como vicepresidente a José, como secretaria a Alba y como tesorero a Gustavo, es diferente del que tiene como presidente a José, como vicepresidente a Miguel, como secretaria a Alba y como tesorero a Gustavo; o sea que es indispensable el orden en cada arreglo. En cambio en el segundo caso, el comité formado por Miguel, José, Alba y Gustavo es el mismo integrado por José, Miguel, Alba y Gustavo, porque no hay puestos fijos.

Pueden seguir jugando a formar comités que requieran orden y comités que no lo requieran; pueden ser de cinco personas tomadas de un grupo de seis, o de cuatro tomadas de un grupo de cinco personas.

También pueden jugar a buscar una bandera para el colegio, teniendo en cuenta, por ejemplo, que el rector pidió que tuviera tres franjas de colores diferentes, dispuestos en forma horizontal, y que les dio 5 colores para elegir, a saber: amarillo, rojo, verde, azul y blanco.

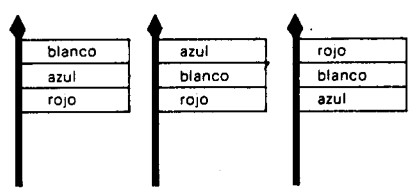
Cada vez que encuentren una manera diferente de formar una bandera, la pueden dibujar con esos colores.

Las siguientes son algunas formas diferentes de hacerlo:



Nota: No es necesario que los alumnos saquen todos los arreglos, sino que puedan utilizar en forma correcta las reglas dadas y que aprendan a proceder sistemáticamente en la búsqueda.

Los alumnos orientados por el maestro observan de nuevo que en estos arreglos se requiere orden, ya que las siguientes banderas son diferentes, aun teniendo los mismos colores.



Finalmente, pueden simular la elaboración de un arreglo floral. Hay seis flores, para escoger las cuatro que debe tener el arreglo. Supongamos que las seis flores son: una rosa, una margarita, un clavel, un anturio, una orquídea y un geranio. Los alumnos buscan los diferentes arreglos de cuatro flores que se podrían hacer. Este ejercicio pueden hacerlo individualmente para que luego entre todos comparen los resultados y saquen el mayor número posible de estos arreglos. Algunos de estos arreglos son:

rosa	clavel	margarita	anturio
rosa	clavel	margarita	geranio
rosa	margarita	anturio	geranio
rosa	margarita	anturio	orquídea
margarita	anturio	orquídea	geranio
margarita	orquídea	clavel	geranio
orquídea	clavel	geranio	anturio

En total, el arreglo floral se puede hacer de 15 maneras diferentes. Los alumnos observan que estos arreglos no requieren orden; por ejemplo, el arreglo rosa, margarita, clavel, anturio, es el mismo que el formado por: anturio, clavel, rosa, margarita.

Para terminar esta actividad, los alumnos comparan todos los juegos clasificándolos en arreglos en donde importa el orden en que se tomen los objetos y arreglos en donde no importa el orden, y el maestro les puede decir que a los primeros se les llama "permutaciones" y a los segundos "combinaciones". Las palabras mismas no son tan importantes; los alumnos pueden decir simplemente "arreglos con orden" y "arreglos sin orden" u otras expresiones equivalentes.

Los alumnos podrán dar otros ejemplos de permutaciones y combinaciones.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
37. Hallar las frecuencias en un sistema de datos y representarlas en tablas y gráficas. (*)	Dado un sistema de datos, el alumno hallará la frecuencia de cada uno de los datos y tabulará y graficará las frecuencias obtenidas.
38. Identificar la moda en un sistema de datos. (*).	Dado un sistema de datos el alumno identificará la moda.

Sugerencias de actividades y metodología

Se puede comenzar por repasar las actividades realizadas en el grado anterior, como fueron utilizar diferentes tipos de gráficas para representar datos, y analizar los datos representados en una gráfica.

El maestro pide a sus alumnos que le ayuden a elaborar una tabla de sus edades y un diagrama, con el fin de obtener alguna información útil sobre la edad de los alumnos de cuarto año. La tarea se inicia recopilando los datos, o sea preguntando a cada alumno su edad.

Supongamos que en un curso hay 20 alumnos cuyas edades son:

Antonio Alvarez	10 años
Carmenza Alvarado	12 años
José Ballesteros	11 años
Ana Bautista	13 años
Jorge Blanco	13 años
Carmen Casasbuenas	11 años
Carlos Celis	10 años
Juan Cruz	9 años
Jairo Casallas	11 años
Marlén Díaz	10 años
Elvia Domínguez	12 años
Martha Durán	11 años
Consuelo Díaz	10 años
Rosita Espitia	11 años
Amparo Garzón	11 años
Rosalba Grisales	12 años
Roberto Flórez	13 años
Julio Jiménez	11 años
Teresa León	10 años
Alfredo Pérez	11 años

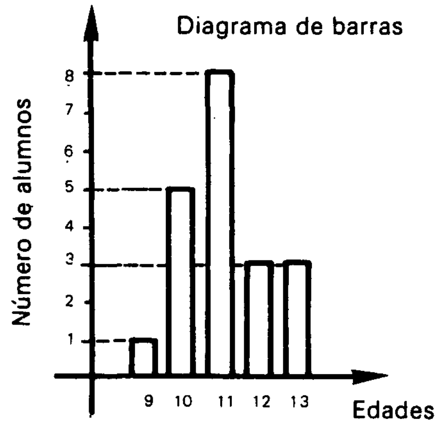
Entre todos se discute cómo resumir esos datos y cómo elaborar una tabla y un diagrama, de tal manera que el maestro o cualquier persona pueda obtener información acerca de cuántos alumnos tienen una determinada edad, de qué edad hay más, de qué edad menos, etc.

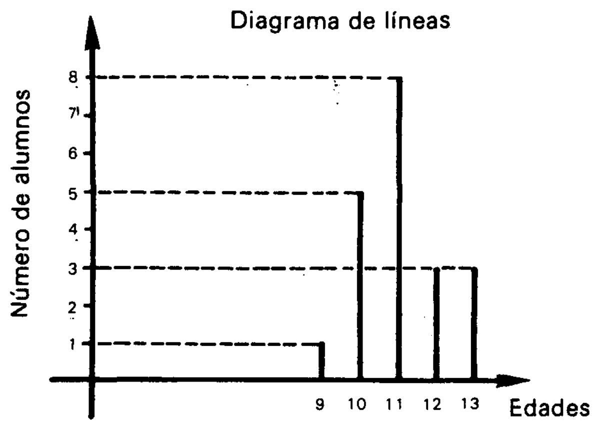
Se espera que elaboren una tabla como la siguiente:

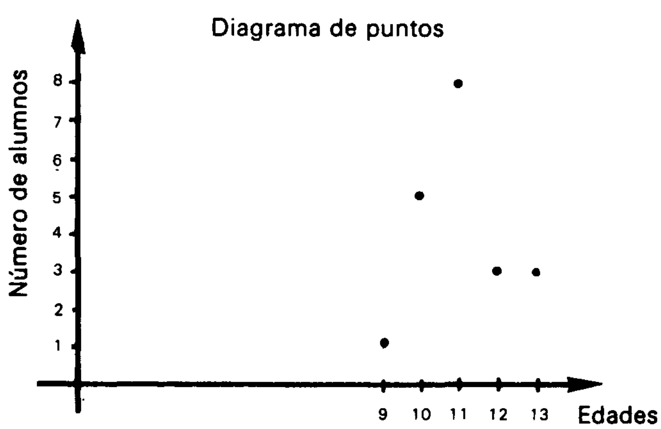
TABLA DE EDADES	
Edad	Número de alumnos
9 años	1
10 años	5
11 años	8
12 años	3
13 años	3

Luego hacen una gráfica; se espera que algunos usen barras, que otros utilicen líneas, y que otros marquen solamente el punto donde termina la línea.

Las gráficas pueden ser:







Los alumnos observan que con cualquiera de estas gráficas se puede obtener la misma información. Ahora el maestro formula algunas preguntas sobre la edad de los alumnos, para que ellos las contesten tomando la información de la tabla o del diagrama. Por ejemplo:

¿Cuántos alumnos tienen 9 años?

¿Cuántos alumnos tienen 13 años?

¿Cuál es la edad que más se repite entre los alumnos? o ¿en qué edad está el mayor número de alumnos?

¿En qué edad está el menor número de alumnos?

¿Cuántos alumnos hay en el curso cuarto?

¿Cuántos alumnos tienen más de 11 años?

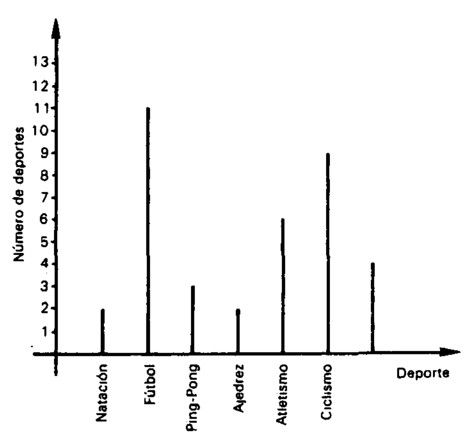
¿Cuántos alumnos tienen 11 años o menos?

Cuando hayan contestado a estas preguntas, el maestro les puede decir que al número de veces que se da cada dato, en este caso edad, se le llama "frecuencia". Por ejemplo, la frecuencia con que se dio la edad de 9 años es 1; la frecuencia con que se dio la edad de 10 años es 5, o sea que en el curso cuarto, se repite 5 veces la edad 10 años; la frecuencia con que se dio la edad de 11 años es 8; etc.

Ahora el maestro les pide que busquen la edad que se repite con mayor frecuencia, o la edad que se repite más veces; encuentran que es 11 años, porque entre los 20 alumnos hay 8 que tienen esta edad; se les dice que a este valor: "11 años" se le da el nombre de "moda" por ser el dato que más se repite, o el dato que "está de moda". Por eso tiene sentido decir que un determinado vestido "está de moda", ya que es el vestido o el peinado que más se está usando en el momento.

Enseguida el maestro puede darles una gráfica para que los alumnos saquen alguna información, hallen la moda y determinen la frecuencia de cada dato. Ejemplo:

Al ser consultados los alumnos de un curso sobre el deporte que más practican, se obtuvieron algunos datos con los cuales se hizo la siguiente gráfica.



Después de observar la gráfica, los alumnos pueden responder:

¿Cuántos alumnos practican el atletismo? ¿Cuántos el ciclismo?

¿Cuántos el voleibol?

¿Cuál es el deporte que menos se practica?

¿Cuál es el deporte que más se practica?

¿Cuántos alumnos practican el ajedrez?

¿Cuántos alumnos practican el ping-pong?

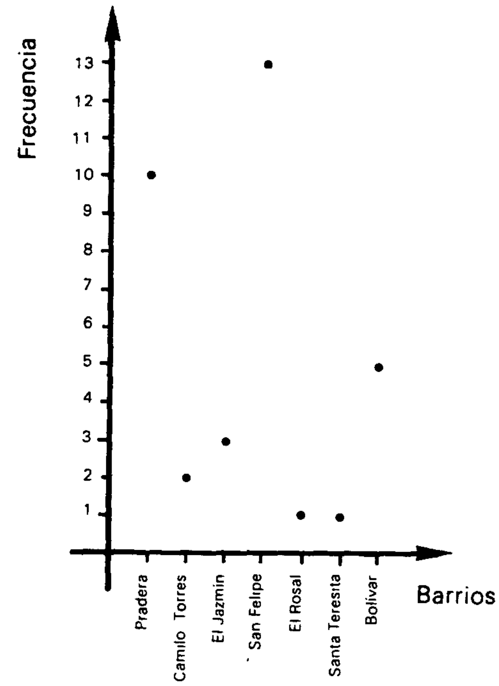
¿Cuántos alumnos practican deportes?

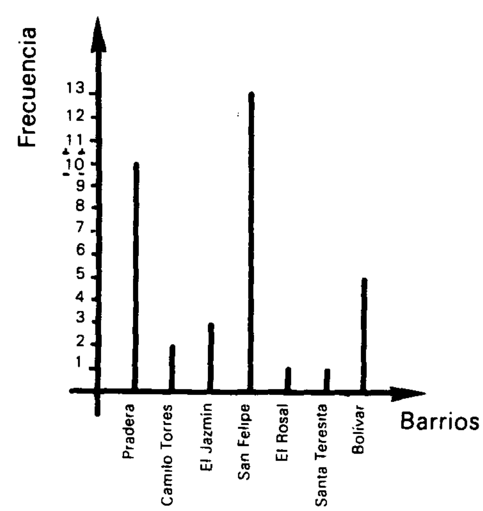
De estas preguntas se puede concluir que el deporte que más se practica es el fútbol, o sea que "la moda" de ese conjunto de datos es el "fútbol".

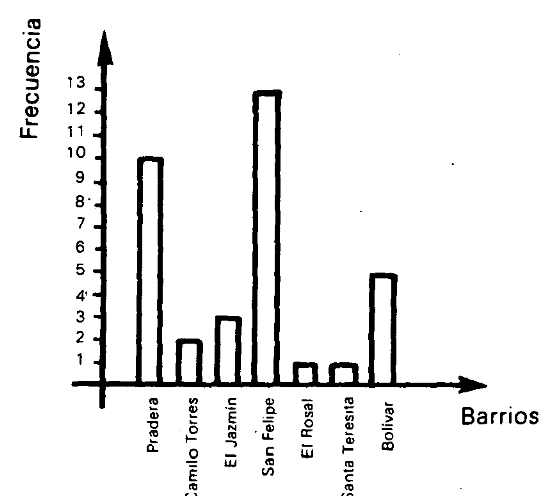
A continuación el maestro puede pedir a los alumnos algunos datos sobre el barrio (o vereda) en donde vive cada uno, para que elaboren una tabla y un diagrama de donde se pueda fácilmente obtener información cuando se necesite. El siguiente puede ser un ejemplo: en el barrio Pradera viven 10 alumnos, en el barrio Camilo Torres 2 alumnos, en el barrio El Jazmín viven 3 alumnos, en el barrio San Felipe 13 alumnos, en el barrio El Rosal vive 1 alumno, en el barrio Santa Teresita 1 alumno y en el barrio Bolívar viven 5 alumnos.

Se espera que los alumnos hagan una tabla como la siguiente y un diagrama como uno de los que a continuación aparecen:

Nombre del barrio	Número de alumnos
Pradera	10
Camilo Torres	2
El Jazmín	3
San Felipe	13
El Rosal	1
Santa Teresita	1
Bolívar	5







También pueden contestar algunas preguntas como:

¿Cuál es la moda de estos datos?

¿Cuántos alumnos hay en la clase?

¿En qué barrio hay menos alumnos del curso?, etc.

Se pueden hacer otros ejercicios hasta verificar que los alumnos puedan interpretar un diagrama sencillo de datos, hallar la frecuencia de cada dato e identificar la moda de un sistema de datos.

Esta actividad se presta para elaborar unidades integradas con las áreas de ciencias naturales y ciencias sociales, en las cuales se suelen utilizar muchas tablas de frecuencias. En una unidad con ciencias sociales se puede también discutir el problema de las modas en el vestido y el peinado, y el problema de la democracia y la popularidad de un candidato.

	Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
39.	Reconocer el decámetro cuadrado, el hectómetro cuadrado y el kilómetro cuadrado como unidades estandarizadas de área.	El alumno explicará qué entiende por decámetro cuadrado, por hectómetro cuadrado y por kilómetro cuadrado y por qué se emplean estas unidades para medir áreas de superficies.
40.	Relacionar el decámetro cuadrado, el hectómetro cuadrado y el kilómetro cuadrado con el metro cuadrado. (*).	El alumno comparará el decámetro cuadrado, el hectómetro cuadrado y el kilómetro cuadrado con el metro cuadrado y dirá cuántos metros cuadrados hay en cada una de las unidades mencionadas.

Sugerencias de actividades y metodología

Los alumnos, organizados en varios grupos, pueden preparar para esta actividad el siguiente material: representaciones materiales del metro cuadrado (pueden hacerlas en papel periódico, cartón, cartulina u otro material similar), hilos, pitas, cintas metálicas para medir, decámetros (si es posible).

La actividad puede iniciarse mediante el planteo de un problema para que los alumnos propongan diferentes formas de solucionarlo. El problema puede consistir en hallar el área de la superficie del patio o de una sección de éste.

Esto lleva a los alumnos a recordar cuáles son las unidades de medida que se emplean y que ellos han estudiado, como son el metro cuadrado, el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado.

Es conveniente, como repaso, que los alumnos demarquen áreas de un metro cuadrado, de un decímetro cuadrado y de un centímetro cuadrado. A continuación se les pregunta cuál de esas unidades elegirían para medir el patio por recubrimiento. La extensión demarcada debe ser suficientemente grande para que los alumnos caigan en la cuenta de que no es práctico usar el decímetro cuadrado ni el centímetro cuadrado para medir por recubrimiento el área de la superficie demarcada, porque son unidades muy pequeñas con respecto al área que se va a medir, y el proceso de medición resultaría bastante largo y difícil, y por tal razón es mejor elegir el metro cuadrado como unidad de medida.

Para reafirmar lo dicho, es conveniente que los mismos alumnos, recubriendo superficies apropiadas, elaboren un cuadro como el siguiente con el que puedan recordar la relación que hay entre el metro cuadrado y entre el decímetro cuadrado, entre el metro cuadrado y el centímetro cuadrado y entre el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado. Resulta en general contraproducente que el maestro escriba el cuadro. Los alumnos deben primero convencerse de las relaciones entre las unidades recortando cuadritos y tapando con ellos los cuadrados más grandes.

metro cuadrado		decímetro cuadrado		centímetro cuadrado	
	1 1 1	 0 0	 0 0	 0	 0
			1 1	 0	 0
					1

El cuadro permite recordar que:

1 metro cuadrado = 100 decímetros cuadrados.

1 metro cuadrado = 10000 centímetros cuadrados.

1 decímetro cuadrado = 100 centímetros cuadrados.

NOTA. Algunas líneas de las que hay en el cuadro podrían omitirse; se han trazado para afirmar el hecho de que para convertir metros cuadrados en centímetros cuadrados, o decímetros cuadrados en centímetros cuadrados, hay que multiplicar por 100, o añadir dos ceros. Pero este truco simbólico debería ser redescubierto por ellos y no enseñado para ser aprendido de memoria.

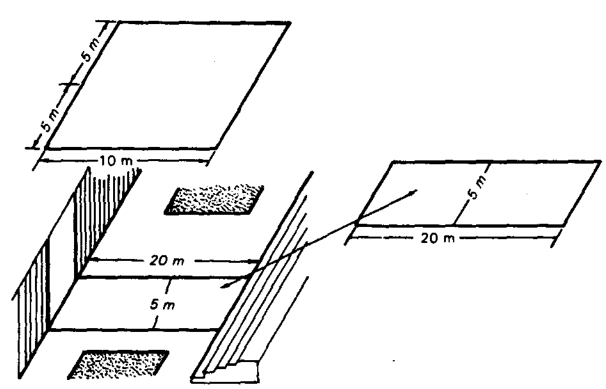
Los alumnos posiblemente llegan a conclusiones como las siguientes:

Si empleamos el centímetro cuadrado como unidad para medir por recubrimiento el área de la superficie demarcada, resulta que por cada metro cuadrado necesitaríamos 10000 centímetros cuadrados; esta tarea es demasiado dispendiosa y debe haber unidades más grandes que faciliten esa medición.

El maestro estimulará los comentarios sobre las unidades mayores que el centímetro cuadrado, que se emplean para medir el área de las superficies. Seguramente se referirán al decímetro cuadrado y al metro cuadrado. Si alguno de los alumnos nombra el decámetro o el hectómetro cuadrados, el maestro puede aprovechar esa circunstancia para iniciar su estudio. Si ninguno de los alumnos los nombra, entonces el maestro les explica que los hombres se han visto en la necesidad de idear unidades muy grandes para medir superficies como la de los pueblos, la de los departamentos, la de los países; que entre esas unidades están el decámetro cuadrado, el hectómetro cuadrado y el kilómetro cuadrado. Como al estudiar las unidades empleadas para medir longitudes ya habían estudiado el decámetro, el hectómetro y el kilómetro, los invita a buscar una definición para el decámetro cuadrado, para el hectómetro cuadrado y para el kilómetro cuadrado. Tal vez una buena ayuda para llegar a una definición sea la representación gráfica. En un curso anterior estudiaron el metro cuadrado y lo representaron mediante un cuadrado que medía un metro de longitud por cada lado. Cuando hay que distinguir el metro cuadrado del metro usual de longitud, se llama "metro lineal" a este último.

En el momento del desarrollo de la actividad pueden observar nuevamente una superficie cuya área sea de un metro cuadrado y emplearla como base para estudiar el decámetro cuadrado.

Organizados en tres o cuatro grupos los alumnos trazan, si el tamaño del patio lo permite, un cuadrado cuyos lados midan cada uno un decámetro, o sea 10 metros; si no hay espacio suficiente se hacen los cálculos necesarios para determinar qué dependencias de la escuela ocupan un área de un decámetro cuadrado. Es posible que el área del patio (por sí sola o sumada con la de algunos salones de clase) dé en total un decámetro cuadrado.



El área de un salón de clase sumada con el área del patio representado acá, da un decámetro cuadrado.

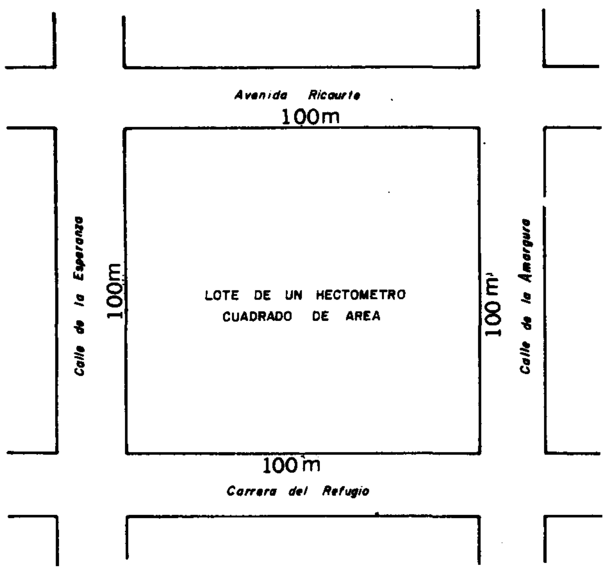
El área pavimentada es de un decámetro cuadrado.

Después de estos ejercicios se trata de resumir algunas ideas sobre el decámetro cuadrado como una unidad que facilita la medición de áreas de superficie. Se esperan ideas como las siguientes:

- El decámetro cuadrado sirve para medir el área de superficies grandes.
- El decámetro cuadrado puede representarse por medio de un cuadrado que mide 10 metros por cada lado.
- Una superficie que tenga un decámetro cuadrado de área no tiene que ser siempre cuadrada.

Para avanzar en el desarrollo del tema pueden discutir sobre el tamaño de un hectómetro cuadrado; si el decámetro cuadrado se representa mediante un cuadrado de 10 metros de lado, entonces el hectómetro cuadrado se representará mediante un cuadrado que tenga 100 metros por cada lado.

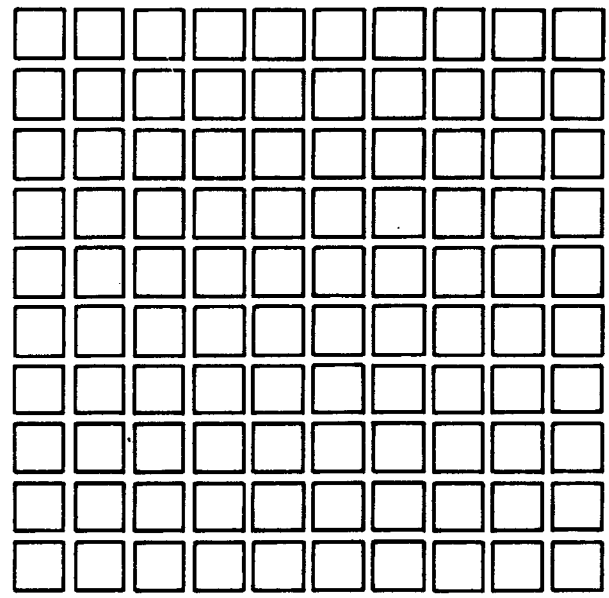
Posiblemente ni el patio de la escuela ni el lote en donde está ubicada la escuela tengan un hectómetro cuadrado de área; entonces es necesario identificar en otro sitio un terreno que tenga esa área: quizás una manzana de la ciudad o del pueblo, o una finca cercana a la escuela.



Así, los alumnos llegan a apreciar que un hectómetro cuadrado es una unidad muy grande que se emplea para medir áreas de superficies. El maestro les puede explicar que estas unidades son conocidas y empleadas por los gobiernos y los ciudadanos de muchos países y por esta razón no hay problemas de comunicación cuando se dan informaciones dentro de un mismo país o de un país a otro.

Para que los alumnos lleguen a tener una apreciación de lo que es un kilómetro cuadrado puede recurrirse a la idea que ya tienen del hectómetro cuadrado y así el maestro puede pedirles que se imaginen una sección de la ciudad (o un pueblo) que tiene 100 manzanas, cada una de un hectómetro cuadrado de área aproximadamente, incluyendo una de las calles y una de las carreras, o suponiendo que las calles y carreras son peatonales muy estrechas.

Puede preguntárseles de cuántas maneras distintas podrían estar dispuestas estas 100 manzanas y así llegar a diferentes conformaciones rectangulares, una de las cuales podría ser cuadrada. En el tablero pueden hacerse dibujos simplificados de las diferentes formas que puede tener la sección de la ciudad (o el pueblo) de que se habla. Las calles y carreras se representan por medio de líneas.



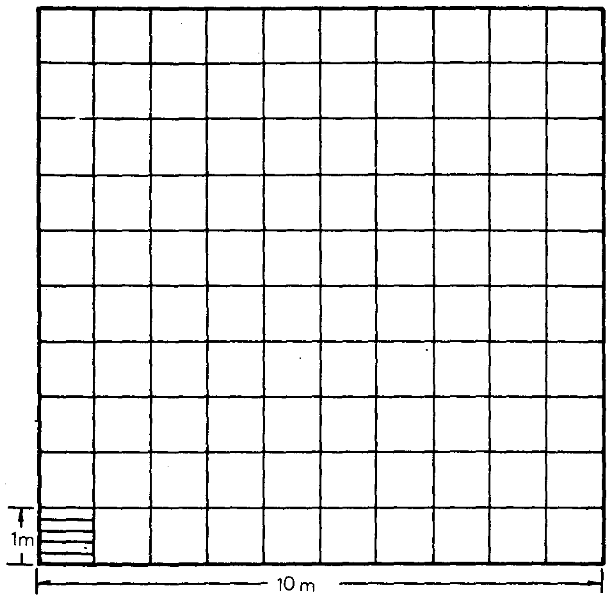
El área de todas las superficies aquí representadas es de un kilómetro cuadrado.

Pueden elaborarse conclusiones como las siguientes:

- El kilómetro cuadrado es útil para expresar el área de grandes superficies.
- Una superficie de un kilómetro cuadrado de área no es necesariamente de forma cuadrada.
- El kilómetro cuadrado puede representarse por medio de un cuadrado que mida 10 hectómetros de lado, o sea 10 x 100 metros, que es lo mismo que 1000 metros de lado.

Entre los alumnos puede surgir la inquietud por saber cuántos metros cuadrados hay en un decámetro cuadrado, cuántos en un hectómetro cuadrado y cuántos en un kilómetro cuadrado; si es así, el maestro puede aprovechar esa circunstancia para trabajar esos conceptos; de lo contrario, los puede invitar a encontrar esas respuestas.

Para que los alumnos determinen el número de metros cuadrados que hay en un decámetro cuadrado, se dibuja un cuadrado que tenga 10 unidades por cada lado, cada una de las cuales representa un metro. Al hacer la cuadrícula, cada cuadrado representa un metro cuadrado. Esto ayuda a los alumnos a concluir que un decámetro cuadrado tiene 100 metros cuadrados.



De la misma manera se puede llegar a establecer que:

1 hectómetro cuadrado = 10000 metros cuadrados

1 kilómetro cuadrado = 1'000000 metros cuadrados

Con base en lo anterior, los mismos alumnos pueden completar el cuadro que inicialmente elaboraron, colocando a la izquierda las nuevas unidades de medida y escribiendo ceros en los espacios vacíos hasta llegar a la columna de los metros cuadrados, así:

Kilómetro cuadrado		Hectómetro cuadrado		Decámetro cuadrado		metro cuadrado		decímetro cuadrado		centímetro cuadrado	
			1								
			1	0	0						
			1	0	0	0	0				
	1	0	0	0	0	0	0				
					1						
					1	0	0				

Del anterior cuadro se concluye que:

1 decámetro cuadrado = 100 metros cuadrados

1 hectómetro cuadrado = 100 decámetros cuadrados

1 hectómetro cuadrado = 10000 metros cuadrados

1 kilómetro cuadrado = 100 hectómetros cuadrados

1 kilómetro cuadrado = 10000 decámetros cuadrados

1 kilómetro cuadrado = 1'000000 metros cuadrados.

Como ejercicio, los alumnos pueden hallar la equivalencia de un decámetro cuadrado en decímetros cuadrados y centímetros cuadrados.

El maestro explica que debido a que en el decámetro cuadrado, en el hectómetro cuadrado y en el kilómetro cuadrado está el metro cuadrado un número exacto de veces, se dice que éstos son múltiplos del metro cuadrado. Para recordarlo, en el cuadro se escribe sobre estas unidades y a la izquierda del metro cuadrado el título "Múltiplos", y a la derecha del metro cuadrado, o sea sobre el decímetro cuadrado y el centímetro cuadrado se escribe el título "Submúltiplos", por ser estas unidades obtenidas del metro cuadrado pero más pequeñas que él y en tal relación con él, que el metro cuadrado es un múltiplo del decímetro cuadrado y del centímetro cuadrado.

MULTIPLOS								SUB-MULTIPLOS			
Kilómetro cuadrado		Hectómetro cuadrado		Decámetro cuadrado		metro cuadrado		decímetro cuadrado		centímetro cuadrado	
			1								
			1	0	0						
			1	0	0	0	0				
	1	0	0	0	0	0	0				
					1						
					1	0	0				

Entre números naturales ya conocemos la relación "... es múltiplo de ..." y su inversa "... es divisor de ..." o "... es factor de ...". Entre unidades de longitud, de área, etc., hay a veces la relación "... es múltiplo de ...", o su inversa "... es submúltiplo de ...".

Con la orientación del maestro, los alumnos pueden formular algunos ejercicios en los cuales se apliquen las nociones estudiadas sobre los múltiplos del metro cuadrado.

También les puede informar que para ahorrar tiempo y espacio en los libros, las personas se han puesto de acuerdo para escribir abreviadamente el nombre de muchas cosas, entre esas el nombre de las unidades empleadas para medir el área de las superficies, así:

metro cuadrado se escribe m^2

decámetro cuadrado se escribe Dm^2

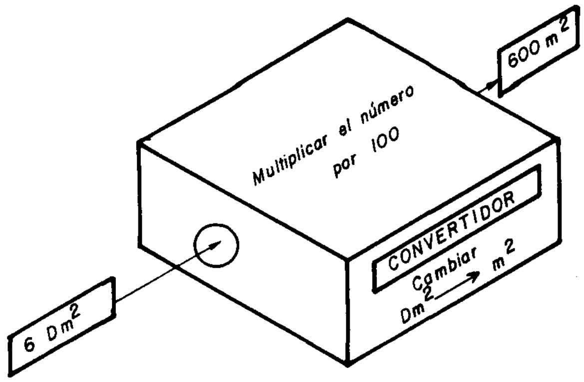
hectómetro cuadrado se escribe Hm^2

kilómetro cuadrado se escribe Km^2

El maestro puede advertir a los alumnos que no se usan puntos, ni eses para los plurales. Los alumnos pueden proponer una manera de escribir en forma abreviada los nombres de las unidades que son submúltiplos del m^2, y comparar sus opiniones con las abreviaturas aceptadas internacionalmente: dm^2, cm^2, etc.

Para las conversiones de unidades de área es conveniente recalcar que el área se queda igual, y que sólo cambia el letrero que la expresa en unidades distintas. Para esto pueden utilizarse unas cajas de cartón con un agujero en cada una de las dos paredes más pequeñas, que llamaremos convertidores, y que son distintos de los operadores fraccionarios.

Un alumno pasa por un agujero un papelito con el área expresada en la unidad apropiada; otro, que hace de convertidor, lo traduce a la nueva unidad y lo escribe por el otro lado del papelito; un tercero lo recibe y verifica si está correcto. El convertidor hace dos cambios en el letrero: uno en el número y otro en el nombre de la unidad. Por ejemplo, para averiguar cuántos metros cuadrados tiene un patio de 6 Dm^2, se usa el convertidor de Dm^2 a m^2:



El área del patio es la misma, pero el letrero es diferente. Si hubiéramos utilizado un operador 100 x y lo hubiéramos aplicado al área del patio, nos habría resultado 600 Dm^2, que son 60000 m^2, o sea el área de una finca bastante grande.

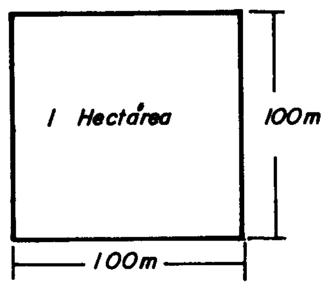
Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
41. Reconocer que la hectárea se emplea como unidad estandarizada y relacionarla con el hectómetro cuadrado. (*)	El alumno explicará algunos casos en que se emplea la hectárea como unidad de medida y dirá a cuántas hectáreas equivale un hectómetro cuadrado y lo contrario.
42. Reconocer unidades agrarias utilizadas en la localidad y relacionarlas con el metro cuadrado y con la hectárea.	El alumno hará una lista de las unidades agrarias utilizadas en la localidad y establecerá la equivalencia entre ellas, el metro cuadrado y la hectárea.

Sugerencias de actividades y metodología

En actividades anteriores se estudiaron varias unidades utilizadas para medir el área de algunas superficies. Además, existen otras unidades que son empleadas para medir el área cuando se trabaja con terrenos. Por eso para iniciar esta actividad conviene organizar entre los alumnos una charla o proponer para antes de la clase que averigüen qué unidades son usadas para medir terrenos como fincas, haciendas, potreros, etc. De este trabajo los alumnos pueden concluir que existen unidades de medida como la hectárea, la fanegada, la plaza o la cuadra. El maestro les explica que teniendo en cuenta que estas unidades de medida son empleadas para medir terrenos, se conocen con el nombre de medidas agrarias. Les puede recordar que los términos "agrario" "agraria" se emplean para referirse al agro, a la tierra, a la agricultura, y analizar con ellos expresiones como "Reforma Agraria", "Caja Agraria", "Crédito Agrario", etc.

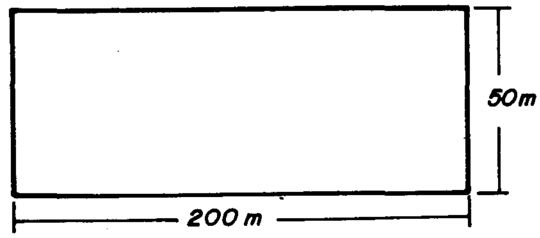
A continuación se pregunta a los alumnos si alguno de ellos sabe cuál es la extensión de una hectárea o a qué equivale. En caso de que ninguno sepa, el maestro les puede explicar que el área de una hectárea es igual a la de un hectómetro cuadrado y se recuerda que éste es equivalente al área que ocupa un cuadrado que mide por lado 100 metros.

Como ejercicio, los alumnos pueden tratar de visualizar un cuadrado que mida por lado 100 metros, o sea un hectómetro de lado. El área de la superficie de ese cuadrado es igual a un hectómetro cuadrado o sea una hectárea.



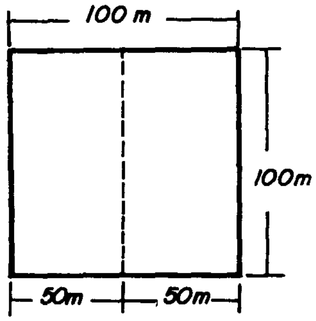
1 hectómetro cuadrado = 1 hectárea

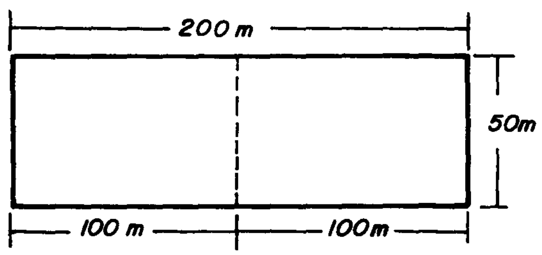
A continuación se delimitan otras superficies que no sean cuadradas pero que tengan por área una hectárea; el siguiente es un ejemplo: un terreno de forma rectangular cuyas dimensiones sean 50 m y 200 m, tiene un área de una hectárea.



Es conveniente que los alumnos observen terrenos que tengan esa extensión.

Un rectángulo de 50 metros de ancho (medio hectómetro) y 200 metros de largo (2 hectómetrós) tiene un área de una hectárea, porque es equivalente a dividir el cuadrado en dos rectángulos y colocar el uno a continuación del otro, así:





Se puede introducir el símbolo "Ha" para abreviar "hectárea" o "hectáreas", una vez que los alumnos tengan claro el uso de las palabras sin abreviar.

Como ejercicio, los alumnos hallan a cuántos decámetros cuadrados y a cuántos metros cuadrados equivale una hectárea. La siguiente es una forma de razonamiento para obtener esas respuestas:

1 hectárea = 1 hectómetro cuadrado, y

1 hectómetro cuadrado = 10000 metros cuadrados, luego

1 hectárea = 10000 metros cuadrados.

En resumen, se puede esperar que los estudiantes tengan claras las siguientes nociones:

Para medir superficies de terrenos dedicados a las labores agrarias se emplean unidades llamadas agrarias. Una de esas unidades es la hectárea.

La hectárea es una unidad cuya área es equivalente a la de un cuadrado que mide un hectómetro por cada lado. Es decir, que un terreno que tiene una hectárea y uno que tiene un hectómetro cuadrado poseen la misma área.

Seguramente los alumnos han oído hablar de la vara cuadrada y de la cuadra, plaza o fanegada como unidades agrarias, y es conveniente darles alguna explicación al respecto. El maestro les puede averiguar el uso del lugar, y decirles por ejemplo que:

- Un terreno mide una vara cuadrada cuando su área es equivalente a la de un cuadrado que mide una vara por cada lado. (Una vara mide 80 cm).

Un terreno mide una fanegada cuando su área es equivalente a la de un cuadrado que mide 100 varas por cada lado, o sea 80 m de lado.

Después de esto podría preguntársele a los alumnos cuántos metros cuadrados hay en una fanegada; si es más grande o más pequeña que una hectárea, y si se puede encontrar una manera aproximada de decir cuántas fanegadas hay por tantas hectáreas (por ejemplo, tres fanegadas por cada dos hectáreas).

Es importante insistir en que un terreno de una hectárea o una fanegada no tiene que ser cuadrado, pues los alumnos podrían fijar más la atención en la forma del terreno que en su área, y pensar que todo cambio de forma trae un cambio de área.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
43. Resolver y formular problemas que requieran del manejo de unidades de área. (*)	El alumno formulará algunos problemas que incluyan el manejo de unidades de área y los resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Para manejar unidades de área pueden formularse problemas interesantes y muy relacionados con la vida real de los alumnos. Si la escuela está ubicada en un ambiente rural, la compra y venta de terrenos es frecuente, y esto exige hallar el área de tales superficies. En los problemas que se formulen conviene tener en cuenta, en primer lugar, aquellas unidades de área más utilizadas en la región, sin descuidar las otras. Si la escuela es urbana, también pueden formularse problemas relacionados con la compra y venta de lotes pequeños, y con la pintura, enchapado o embaldosinado de pisos y paredes, la compra de vidrios y láminas, de cartones y cartulinas, tapetes y linóleos, etc.

El maestro puede plantear problemas como estímulo para que los alumnos mismos empiecen a formular algunos de su experiencia y de la dé sus padres. El maestro puede poner en discusión los problemas propuestos para ver si los demás alumnos caen en la cuenta de si sobran o faltan datos, si todos entienden claramente el enunciado, y si consideran que las cifras son realistas o exageradas.

Puede aprovecharse la oportunidad para fomentar habilidades de estimación visual de áreas, de cálculo mental exacto y aproximado, y para estimular la generación de procedimientos alternos de solución del mismo problema, así como de verificación de las soluciones por parte de los mismos alumnos.

Como en el grado anterior los alumnos hallaron el área de superficies en forma rectangular, conviene que en los problemas se apliquen estos conocimientos sin limitarse a estos casos.

Ejemplos:

- Una finca mide 125 hectáreas; en ella hay una casa, un establo, un galpón para la cría de pollos y una huerta. La casa ocupa una extensión de 75 m^2; el establo 2500 m^2; el galpón 160 m^2 y la huerta 17265 m^2. ¿Cuántas Ha quedan disponibles para el levante de ganado?

- Si la finca de que habla el problema anterior se vende a razón de $920000 la Ha, ¿a cuánto asciende el precio de venta de la finca?

- Un terreno que mide 138 fanegadas es heredado por 3 hermanos. ¿Cuántas varas cuadradas le corresponden a cada heredero? (A todos les corresponde un lote de la misma área).

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
44. Definir el metro cúbico, el decímetro y el centímetro cúbicos, como unidades estandarizadas de volumen.	El alumno explicará verbalmente por qué el metro, el decímetro y el centímetro cúbicos pueden considerarse como unidades estandarizadas de volumen.
45. Relacionar entre sí el metro cúbico, el decímetro cúbico y el centímetro cúbico. (*)	El alumno resolverá ejercicios que requieran hacer conversiones de una unidad de volumen a otra, excluyendo los casos en que el resultado sea un número decimal.

Sugerencias de actividades y metodología

La actividad se puede iniciar haciendo un resumen de las unidades de longitud y de área ya conocidas, escribiendo la unidad básica de medida, algunos de los múltiplos y submúltiplos más empleados, y realizando algunas transformaciones, así:

Unidades de longitud

MULTIPLOS			UNIDAD BASICA	SUBMULTIPLOS	
Km	Hm	Dm	m	dm	cm
1	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0
		1	0	0	0
			1	0	0
				1	0
					1

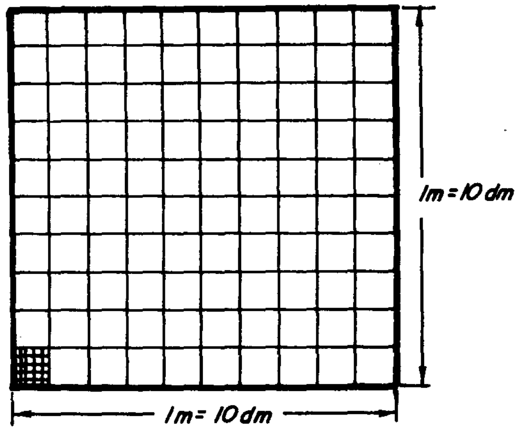
Con ayuda de este cuadro, los alumnos pueden convertir metros en centímetros, kilómetros en metros, etc.

Ejemplo:

1 metro	=	100	centímetros
1 kilómetro	=	1000	metros

Basta buscar en la columna m el sitio en donde está el 1 y correr el dedo hacia la derecha hasta llegar a la columna de los cm: se ve el 100. Luego se busca en la columna Km el 1 y se corre el dedo hasta la columna de los m: se ve el 1000.

Para repasar las unidades de área, el maestro puede recordar a los alumnos que un metro cuadrado es el área de un cuadrado que tiene un metro por cada lado, y que por tal razón un metro cuadrado es igual a 10 × 10 decímetros cuadrados, o sea 100 decímetros cuadrados.



Así se llenan las casillas del cuadro siguiente:

Unidades de área

MULTIPLOS						UNIDAD BASICA		SUBMULTIPLOS			
Km²		Hm²		Dm²		m²		dm²		cm²	
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			1	0	0	0	0	0	0	0	0
					1	0	0	0	0	0	0
							1	0	0	0	0
									1	0	0
											1

Como ayuda para que el alumno pueda hacer las conversiones que sean necesarias, cada casilla del cuadro se ha dividido en dos. Algunas equivalencias que el alumno puede manejar son:

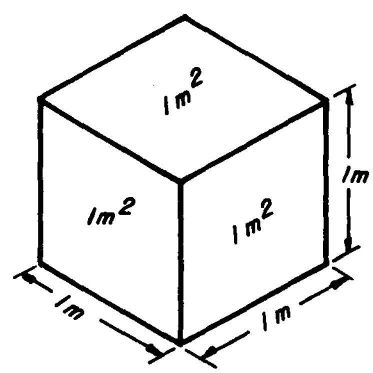
1 metro cuadrado	=	100	decímetros cuadrados
1 metro cuadrado	=	10000	centímetros cuadrados
1 hectómetro cuadrado	=	10000	metros cuadrados = 1 hectárea
1 kilómetro cuadrado	=	100	hectómetros cuadrados = 100 Ha.

Pueden realizarse algunos ejercicios para recordar que una superficie de un metro cuadrado de área no tiene necesariamente que ser cuadrada, y que para medir áreas de superficies rectangulares hay un método fácil para no tener que contar todos los cuadritos: multiplicar la longitud de un lado por la del lado adyacente, lo que da el número de cuadritos que caben en ese rectángulo.

A continuación el maestro explica a los alumnos que en muchas ocasiones es necesario conocer el volumen o la capacidad de los cuerpos. Por ejemplo, si alguien desea guardar un cierto número de cajas en un cuarto, probablemente debe conocer la capacidad del cuarto y el volumen de las cajas para saber cuántas puede guardar. Como la palabra "tamaño" se puede referir a la altura o al volumen, es preferible utilizar la palabra "volumen" más bien que "tamaño" para las cajas.

Situaciones como la anterior han hecho necesario buscar unidades de volumen. Los alumnos pueden contar otras experiencias que hayan tenido en las cuales sea importante el volumen y trabajar en la búsqueda de unidades de volumen. Es posible que algún alumno conozca el metro cúbico; en caso contrario, se puede razonar con los alumnos de la siguiente manera: para medir longitudes, se eligió una longitud y se designó con el nombre de metro; para medir áreas de superficies, se eligió el área de una superficie cuadrada; cada lado del cuadrado mide un metro; para medir volúmenes vamos a seleccionar el volumen de un cuerpo, pero este cuerpo debe ser elegido de tal forma que tenga cierta regularidad como se hizo para el área; por esto se elige el volumen de un cubo. El cubo se caracteriza porque sus seis caras son cuadradas y sus doce aristas son iguales de largas. El cubo que se escoge debe tener cada cara de un metro cuadrado de área y cada arista de un metro de longitud. El volumen de ese cubo es la unidad de volumen. Esta unidad de volumen se designa con el nombre de metro cúbico.

En el grado tercero se inició el estudio de la medición de volúmenes y de capacidades. El metro cúbico es una unidad empleada en muchos países para medir volúmenes grandes, para los cuales resulta muy pequeño el decímetro cúbico como unidad.



La interpretación del dibujo permite concluir que:

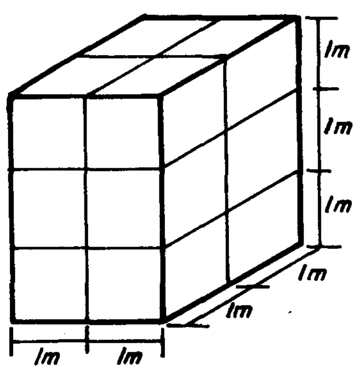
- Todas las aristas son iguales en longitud.
- Cada arista del cubo mide un metro.
- Todas las caras son iguales en área.
- Cada cara del cubo mide un m²
- El cubo tiene un metro cúbico de volumen.

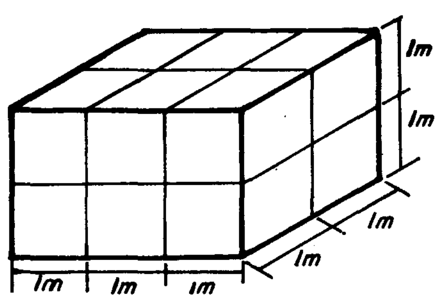
Es conveniente que los alumnos tengan la oportunidad de construir un cubo hueco cuyo volumen sea de un metro cúbico. Este lo pueden hacer utilizando palos para la armazón y papel o tela para las caras.

A continuación se puede medir el volumen de algunos espacios como el salón de clase, etc. Como esta labor resulta difícil empleando el cubo de un metro cúbico, se estudia otra forma de medir el volumen sin recurrir al manejo directo del metro cúbico; el maestro puede ayudar a los alumnos a deducir que para hallar el volumen de algunos espacios como cuartos, cajas, etc., hay un método fácil para no tener que contar todos los cubos que cabrían por un lado, cuántos p_. el otro y cuántos hacia arriba y luego multiplicar esos tres números. En la práctica se mide el largo, el ancho y el alto en metros, y luego se multiplican estos tres números. Por ejemplo, para hallar el volumen del salón, si mide 8 metros de largo, 6 metros de ancho y 2 metros de alto, estas tres longitudes nos indican cuántos cubos cabrían a lo largo, a lo ancho y hacia arriba, y basta multiplicar: 8 X 6 X 2 = 96, para obtener el volumen, que es de 96 metros cúbicos.

No se debe dar este procedimiento abreviado (ni mucho menos una fórmula) hasta que los alumnos se convenzan de que sólo es una manera fácil de contar cuántos cubos de un m³ cabrían en el salón.

Otro ejercicio que los alumnos pueden hacer es delimitar ciertos volúmenes que se les den; por ejemplo: delimitar el espacio que ocupan 12 metros cúbicos, los cuales podrán representarse así:



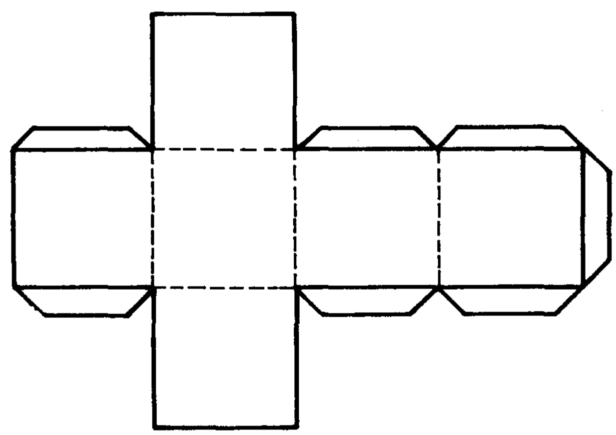


Cada cubito de los que se observan en estos dibujos representa un metro cúbico.

A continuación el maestro invita a los alumnos a dar ejemplos de actividades en las cuales sea necesario hallar algún volumen y para el que resulte apropiado utilizar el metro cúbico como unidad. En los sitios en donde hay acueducto y se paga por el consumo de agua, los recibos indican, en metros cúbicos, el volumen de agua consumido. Cuando se estudia el aire de un salón de clase, se puede calcular cuántos metros cúbicos corresponden a cada alumno dentro del salón. Los camiones y los barcos, lo mismo que los vagones de tren y algunas bodegas, tienen indicaciones del número de m³ de carga que pueden aceptar, y algunas veces se cobra el transporte por m³ y no por peso.

Finalmente, el maestro les explica que cada vez que el hombre inventa una unidad nueva, crea también la forma de escribirla abreviadamente. La expresión "metro cúbico" se enuncia con la "m" y un 3 pequeño escrito a la derecha de la "m", en la parte superior así: 1 m³ = 1 metro cúbico.

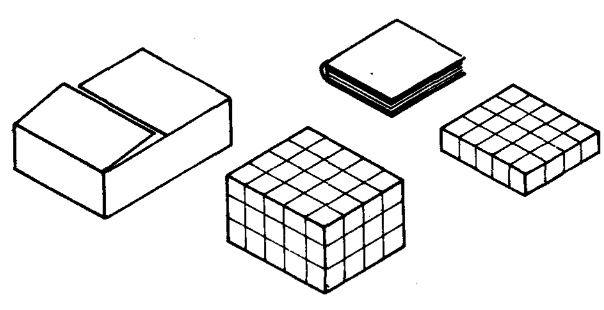
Para el estudio de las otras unidades estandarizadas de volumen, el maestro puede pedir a los alumnos que utilicen el siguiente modelo para cons-



truir cubos de diferentes tamaños, como por ejemplo de un decímetro de arista, de más de un decímetro de arista, de menos de un decímetro de arista. Ojalá algunos alumnos traten de construir cubos de un centímetro de arista, ya sea con cartulina según el modelo, o cortados de madera o greda.

Posteriormente, los alumnos pueden formar grupos teniendo en cuenta los cubos que hayan elaborado; es decir, los que hicieron cubos de un decímetro de arista pueden reunirse en un grupo, los que elaboraron cubos de menos de un decímetro de arista en otro grupo y así sucesivamente.

Como un repaso de las actividades desarrolladas en el grado tercero pueden realizar algunos ejercicios



de medición de volúmenes. Cada grupo puede, agrupando los cubos que hizo, tratar de reconstruir el volumen de una caja, de un libro o de algún otro objeto que haya en el salón.

Si todos los grupos imitan la misma caja con cubos de diverso tamaño, van a encontrar que necesitan diferente número de cubos en cada caso. Así observan detalles sobre la conveniencia o inconveniencia de emplear cubos pequeños para reconstruir la caja, y aún más pequeños para reconstruir el libro.

El análisis de esos detalles permite reconocer la necesidad de emplear varias unidades para medir volúmenes, unas grandes y otras pequeñas, para que las mediciones se faciliten. Una unidad considerablemente grande es el metro cúbico; pero además se emplean unidades más pequeñas como el decímetro cúbico y el centímetro cúbico para medir volúmenes pequeños.

Es posible tener en el salón algunos recipientes graduados en centímetros cúbicos, como jeringas o ampolletas para inyecciones, frascos de biberón, etc., en ellos se puede apreciar lo que es un centímetro cúbico, dos centímetros cúbicos, etc.

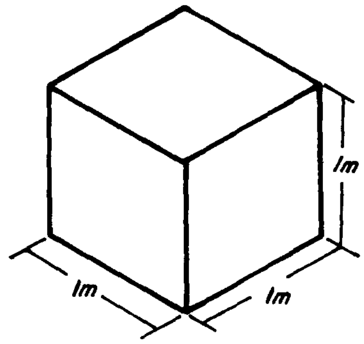
A continuación el maestro emplea los materiales para explicar que el volumen de un decímetro cúbico se puede apreciar observando un cubo cuyas aristas midan un decímetro cada una, y el volumen de un centímetro cúbico observando un cubo cuyas aristas midan un centímetro cada una. Además, como el decímetro y el centímetro son los mismos en todas partes, el volumen del decímetro cúbico y del centímetro cúbico resulta ser igual en todos los países que los emplean. Es usual utilizar abreviaturas para los nombres de estas unidades. La que se emplea para la expresión "metros cúbicos", es "m^3", la de "decímetros cúbicos" es "dm^3", y la de centímetros cúbicos" es "cm^3".

Cuando los alumnos hayan reconocido el decímetro cúbico y el centímetro cúbico como unidades de volumen, el maestro los motiva para que traten de encontrar las relaciones entre las tres unidades de volumen que conocen: metro cúbico, decímetro cúbico y centímetro cúbico.

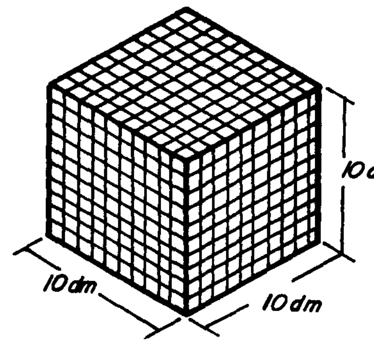
Para relacionar el decímetro cúbico con el metro cúbico pueden emplear, si lo tiene la escuela, el material que para tal fin incluyen los conjuntos didácticos. Si se carece de este material, se trabaja con base en el cubo de un metro cúbico construido en la actividad anterior, o en último caso, con base en unos dibujos como los de la parte superior.

En esa forma es posible observar que el mismo volumen se ha representado de dos maneras diferentes, pero que los resultados deben ser equivalentes: mil cubitos de un decímetro cúbico tienen el mismo volumen que un cubo de un metro cúbico.

El maestro también les puede explicar que una forma de medir volúmenes de sólidos, consiste en medir el largo, el ancho y la altura, empleando la misma unidad de longitud para averiguar cuántos cubitos cabrían en cada dimensión y luego multiplicar los tres números que se encuentren para obtener el volumen en unidades cúbicas.



Este dibujo representa un cubo que mide un metro por cada lado.



Este dibujo representa un cubo que mide 10 decímetros por cada lado.

Tiene 10 pisos. Cada piso tiene $10 \times 10 = 100$ y en total hay $10 \times 100 = 1000$ cubitos.

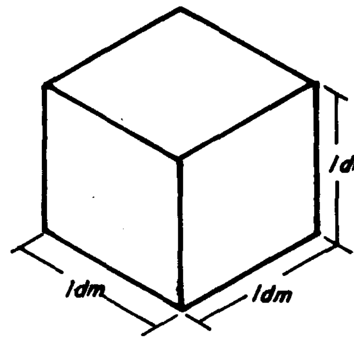
Como la primera figura tiene 1 metro de largo, 1 metro de ancho y 1 metro de alto, su volumen es de $1 \times 1 \times 1 = 1$ m^3.

En forma análoga, la segunda figura tiene 10 decímetros de largo, 10 de ancho y 10 de alto, y por lo tanto le caben 10 cubitos por un borde, 10 por el otro y 10 por el otro, o sea $10 \times 10 \times 10 = 1000$ cubitos de un dm^3. Por esto, su volumen será de 1000 dm^3.

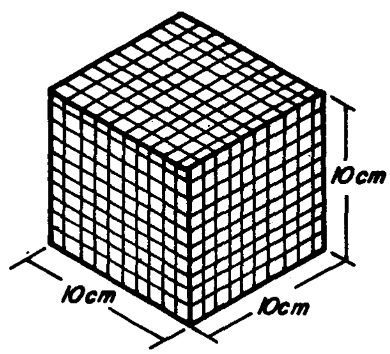
El maestro analiza con los alumnos los cubos representados por las dos figuras y posiblemente lleguen a concluir que sus volúmenes son iguales, aunque estén expresados en unidades diferentes; por lo tanto, se puede decir que: 1 m^3 = 1000 dm^3.

Lo anterior puede interpretarse como que un metro cúbico se forma con 1000 dm^3 o que en un m^3 hay 1000 dm^3. Es decir, que el dm^3 es una unidad que cabe 1000 veces en el m^3. Por eso el dm^3 es un submúltiplo del m^3.

Para relacionar el decímetro cúbico con el centímetro cúbico pueden observar material real, si la escuela lo tiene, y si no, sustituirlo con cubos de madera, greda u otro material; en último caso pueden hacer un análisis sobre dos dibujos como estos.



Este dibujo representa un cubo que mide un decímetro por cada lado.



Este dibujo representa un cubo que mide 10 cm. por cada lado. Tiene 10 pisos. Cada piso tiene $10 \times 10 = 100$ cubitos. En total hay $100 \times 10 = 1000$ cubitos.

Como los cubos tienen aristas de igual longitud: 1 dm = 10 cm, sus volúmenes son iguales. Para el primer cubo el volumen es: $1 \times 1 \times 1 = 1$ dm^3; para el segundo, el volumen es: $10 \times 10 \times 10 = 1000$ cubitos de un cm^3, o sea de 1000 cm^3. Por lo tanto, se concluye que: 1 dm^3 = 1000 cm^3.

Esto puede interpretarse como que un decímetro cúbico se forma con 1000 centímetros cúbicos; que en un dm^3 hay 1000 cm^3, o también que 1 cm^3 es una unidad de volumen que cabe 1000 veces en el dm^3. Por eso el cm^3 es un submúltiplo del dm^3.

Los estudiantes pueden ingeniarse la forma de encontrar la relación que existe entre el m^3 y el cm^3. Para ello pueden trabajar con dibujos y tener presente las conclusiones ya obtenidas en esta actividad como las de que 1 m^3 tiene 1000 dm^3 y 1 dm^3 1000 cm^3. Seguramente llegan a un razonamiento como el siguiente: si 1 m^3 tiene 1000 dm^3, y cada dm^3 tiene 1000 cm^3, el número de cm^3 que hay en 1 m^3 se debe encontrar multiplicando los 1000 cm^3 de un dm^3 por los 1000 dm^3 del m^3:

1 m^3 = 1000 dm^3
1 dm^3 = 1000 cm^3

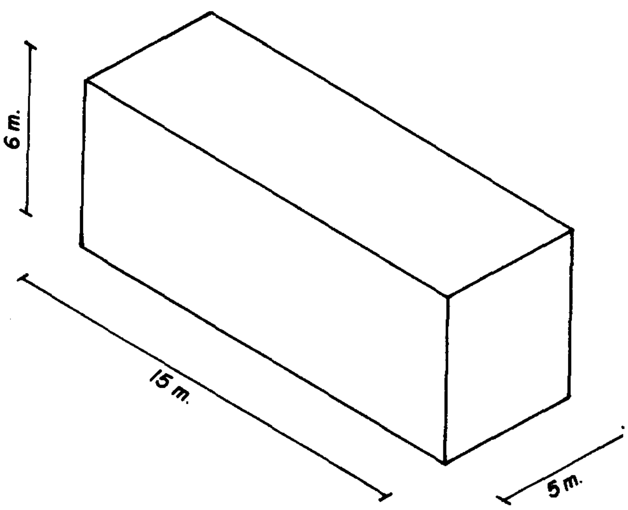
entonces:

1 m^3 = 1000×1000 cm^3
1 m^3 = 1'000000 cm^3

Es decir, que 1 m^3 se forma con 1'000000 cm^3, que en 1 m^3 hay 1'000000 cm^3, y también que el cm^3 es una unidad de volumen que cabe 1'000000 de veces en el m^3. Por eso el cm^3 se llama submúltiplo del m^3.

Ahora cada grupo puede medir, en centímetros, el largo, el ancho y la altura de cajas o cubos (las medidas no se tomarán con fracción de centímetros; es decir, se dará el número de centímetros sin milímetros) y calcular su volumen; el resultado queda expresado en centímetros cúbicos.

Por ejemplo, una caja puede tener las siguientes medidas:

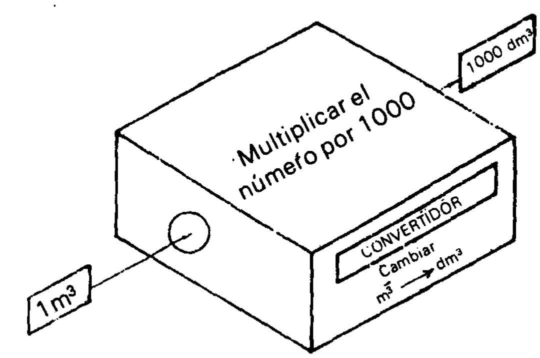


largo = 15 centímetros
ancho = 5 centímetros
alto = 6 centímetros

Se puede pensar que su volumen en cm^3 es el número de cubitos de 1 cm^3 cada uno que cabrían dentro de la caja si las paredes fueran muy delgadas, o el número de cubitos que ocuparían el mismo espacio que la caja cerrada. Su volumen se calcula, pues, multiplicando el largo, el ancho y su altura, siempre y cuando se hayan medido con la misma unidad, pues por un borde a lo largo cabrían 15 cubitos de 1 cm^3, a lo ancho 5 y hacia arriba 6. Por lo tanto, el volumen de la caja es de $15 \times 5 \times 6 = 450$ cm^3. De nuevo debe insistirse en que estas multiplicaciones no son sino maneras abreviadas de contar los cubitos de 1 cm^3.

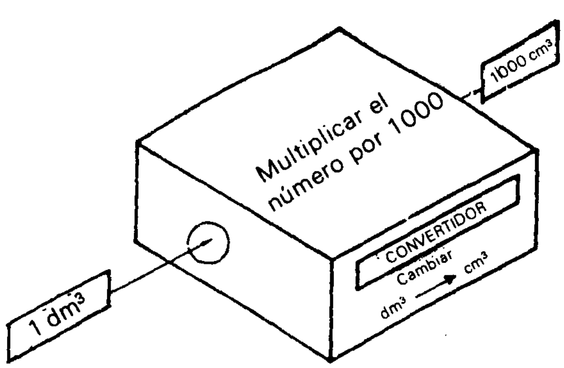
El maestro pregunta a los alumnos si pueden pensar en otros casos en los cuales sea importante saber el volumen. Les ayuda a recopilar ejemplos como el volumen de la caja de un camión de trasteos; el de un refrigerador, el volumen que ocupa el aire en el salón, etc.

Los alumnos pueden elaborar un cuadro de los submúltiplos del metro cúbico con sus equivalencias y emplearlo en las conversiones que proponga el maestro. Es conveniente hacerles notar a los alumnos que la transformación de 1 m³ en dm³ produce el mismo efecto que un convertidor que lee un letrero de un volumen, multiplica el número por mil, cambia el nombre de la unidad por el de una unidad mil veces menor, y produce otro letrero para el mismo volumen, así:



1 m³ se puede transformar en 1000 dm³.

El convertidor no cambia los volúmenes de los cuerpos, sino sólo los letreros. De la misma manera la transformación de 1 dm³ en cm³ produce el mismo efecto que un convertidor que lee el letrero que le entra, multiplica el número por 1000, cambia el nombre de la unidad por el de una mil veces menor, y produce otro letrero así:



1 dm³ se puede transformar en 1000 cm³.

Cada convertidor hace dos cambios en el letrero que le entra: uno en el número y otro en la unidad. Un alumno pasa por el agujero un papelito con el volunen en la unidad apropiada; otro lo convierte a la nueva unidad y lo escribe por el otro lado, y un tercero lo recibe y verifica si está correcto.

Esto es lo que usualmente se expresa diciendo que "las unidades de volumen van de 1000 en 1000".

El mismo convertidor puede usarse en reversa: si se le introduce por la salida un letrero con un número de cm³ o de dm³ terminado en tres o más ceros, divide el número por mil, cambia el nombre de la unidad por uno mil veces más grande, y produce un nuevo letrero para el mismo volumen.

El maestro puede recalcar que el convertidor no cambia el volumen, sino su expresión en unas unidades u otras; o sea, que produce letreros diferentes para expresar el mismo volumen: 3 dm³ = 3000 cm³. En cambio, el operador 1000 × habría transformado el volumen de un paquete de 3 dm³ en un enorme volumen de 3000 dm³, más grande que una nevera. El convertidor sólo cambió el letrero para el mismo paquete de 3 dm³ a 3000 cm³, que son dos maneras de expresar el mismo volumen del paquete.

Con base en esas ideas, elaborar un cuadro como el siguiente:

Unidades de volumen

UNIDAD BASICA			SUB-MULTIPLOS					
m³			dm³			cm³		
		1	0	0	0	0	0	0
					1	0	0	0
								1

1 m³ = 1000 dm³
1 dm³ = 1000 cm³
1 m³ = 1'000000 cm³

Los alumnos pueden averiguar cuántos m³ de agua consumen en su casa durante un mes o un año y con estos u otros datos pueden empezar a formular y resolver problemas de medición de volumen.

Si los alumnos preguntan por qué no hay hectómetro cúbico y kilómetro cúbico, se les puede decir que sí los hay, pero que son tan grandes que no tienen muchas aplicaciones prácticas. Pero se podrían usar para medir el volumen de agua de una represa o lago, el volumen de la Tierra o la Luna, etc. A los que estén interesados se les puede pedir que calculen cuántos m³, dm³ y cm³ hay en un km³ (o en un Hm³) y que presenten a sus compañeros el cuadro de las unidades métricas de volumen, así:

Unidades de volumen

MULTIPLOS									UNIDAD BASICA			SUB-MULTIPLOS					
Km³			Hm³			Dm³			m³			dm³			cm³		
		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
					1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
								1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
											1	0	0	a	0	0	0
														1	0	0	0
																	1

Estos cuadros y otros parecidos no son para que el maestro los copie en el tablero o los distribuya a los estudiantes, sino deben ser el resultado de las investigaciones y discusiones de los alumnos mismos. Más que para aprenderlos de memoria, sirven al alumno y al maestro como indicadores de cuánto se está comprendiendo la relación entre las distintas unidades de volumen del sistema métrico decimal.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
46. Definir el hectolitro, el decalitro, el decilitro y el centilitro como unidades estandarizadas de volumen y capacidad.	El alumno explicará oralmente por qué el hectolitro, el decalitro, el decilitro y el centilitro se consideran como unidades estandarizadas de volumen y capacidad.
47. Relacionar el hectolitro, el decalitro, el decilitro y el centilitro con el litro y el centímetro cúbico. (*)	El alumno resolverá ejercicios que requieran hacer conversiones de una unidad de capacidad en otra, excluyendo todos los casos en que el resultado sea un número decimal.
48. Reconocer unidades de volumen y capacidad utilizadas en la localidad (galón, barril, etc.) y relacionarlas con el litro.	El alumno explicará algunos casos en que se utilizan unidades de volumen y capacidad propias de la localidad y dirá a cuántos litros equivale cada una de ellas.
49. Resolver y formular problemas que requieran del manejo de unidades de volumen y de capacidad.	El alumno formulará problemas relacionados con el manejo de unidades de volumen y de capacidad.

Sugerencias de actividades y metodología

En el grado anterior se utilizó el litro como unidad estandarizada de capacidad y se relacionó con el decímetro cúbico. Se llegó a establecer que un cubo hueco de un decímetro de arista se llena con un litro de agua.

1 litro = 1 decímetro cúbico $1\ l = 1\ dm^3$

Así, la capacidad y el volumen resultan íntimamente relacionados puesto que la capacidad se considera como "el volumen interior" de los recipientes, o sea el volumen del líquido que les cabe en su interior.

La actividad se puede empezar preguntándole a los alumnos cuáles son las unidades que ellos conocen para medir el volumen de los líquidos; cuál es el dato que a ellos les interesa saber cuando pretenden comprar, vender o guardar un líquido en un recipiente; o qué debe tener en cuenta un conductor al momento de solicitar gasolina en una bomba.

De estas y otras preguntas que el maestro considere pertinentes se obtiene la información básica para entrar de lleno al tema propuesto. Si las unidades de capacidad que salen a relucir en primera instancia son las locales, entonces se trabaja con ellas y se las compara con el litro que es la unidad básica métrica de capacidad.

La botella, el galón y posiblemente el barril son unidades que pueden conocer los alumnos. Ojalá en el salón de clase se tengan tres recipientes cuyas capacidades sean, en su orden, de 1 botella, de 1 litro y de 1 galón. Los alumnos pueden llenarlos con agua y así comparar un volumen de agua con otro. Fácilmente caen en la cuenta de que al trasvasar el agua del "litro" a "la botella" les sobra agua o que al hacerlo de "la botella" al "litro" éste no alcanza a llenarse. Lo anterior permite establecer que el litro es una unidad de capacidad mayor que la botella. También pueden constatar que para llenar "el galón" necesitan 5 botellas de líquido, o menos de 4 litros del mismo líquido.

En las regiones petrolíferas seguramente se conoce el barril; 1 barril de petróleo contiene 159 litros de petróleo. También puede aparecer la onza (fluida) que se usa en los biberones y algunas drogas, aceites, etc., y que tiene unos 30 cm^3.

Los alumnos suelen tener dificultad en distinguir una botella de vidrio de la unidad de volumen o capacidad llamada "una botella", y en caer en la cuenta de que distintas botellas pueden tener distintas capacidades, mayores o menores que una botella; por ejemplo, que hay botellas-litro, o sea botellas de un litro de capacidad. El énfasis de la actividad está precisamente en la construcción del concepto de capacidad a partir del trasvase de líquidos de un recipiente a otro, en la necesidad de utilizar unidades de capacidad y en descubrir las relaciones entre ellas.

El maestro puede pedir a los alumnos ejemplos de líquidos (alimenticios o de uso doméstico) que se compren por litro. Esto se aprovecha para enfatizar la utilización de esta unidad como una unidad estandarizada de capacidad y de una vez el maestro presenta situaciones en las cuales sea necesario utilizar múltiplos decimales de esa unidad y unidades más pequeñas que el litro, pero que son submúltiplos decimales del mismo.

Al finalizar esta última parte, rica en ejemplos, se puede llegar a un cuadro resumen como el siguiente:

MULTIPLOS			UNIDAD BASICA	SUBMULTIPLOS	
Kilolitro	Hectolitro	Decalitro	litro	decilitro	centilitro
		1	0		
	1	0	0		
1	0	0	0		
			1	0	
			1	0	0

1 Dl = 10 l   1 l = 10 dl
1 Hl = 100 l   1 l = 100 cl
1 Kl = 1000 l

Como los alumnos conocen la equivalencia entre el litro y el decímetro cúbico, puede pedírseles que por grupos hallen la equivalencia entre las unidades de capacidad que acaban de conocer y el centímetro cúbico. Para esto conviene recordar que: 1 dm^3 = 1.000 cm^3. Al finalizar este ejercicio se espera tener en el tablero una lista como:

1 l = 1000 cm^3
1 dl = 100 cm^3 1 Dl = 10000 cm^3
1 cl = 10 cm^3 1 Hl = 100000 cm^3
1 ml = 1 cm^3

Para completar estas equivalencias se vuelve a recordar que la botella es una unidad de capacidad menor que el litro y se les trasvasa agua de un recipiente de un litro graduado en cm^3 o ml para que se convenzan de que: 1 botella = 720 cm^3 = 720 ml.

A continuación, los grupos pueden formular y resolver problemas cuya solución exija hacer conversiones de una unidad en otra.

Ejemplos:

- El tanque de un carrotanque tiene una capacidad de 5.000 litros. ¿Cuántos metros cúbicos de agua se pueden depositar en él?
- ¿Cuántos frascos de una botella de capacidad se necesitan para envasar 24 galones de combustible? ¿Aproximadamente cuántos litros de combustible son los 24 galones?
- ¿Cuántas ampolletas de 10 cm^3 se pueden obtener de 2 dl de agua bidestilada?
- ¿Cuántos teteros de 5 onzas de leche se pueden preparar con tres litros de leche?

Sólo deben emplearse las unidades que los alumnos hayan mencionado como conocidas en la localidad. Ellos mismos pueden idear problemas de utilidad para su vida diaria e inventar diversos procedimientos para resolverlos y para verificar las soluciones propuestas.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
50. Reconocer el peso de algunos cuerpos.	El alumno explicará oralmente algunas actividades a través de las cuales él percibe el peso de los cuerpos.
51. Ordenar algunos objetos según el peso. (*)	El alumno señalará entre varios objetos diferentes en peso, cuál es el más pesado, cuál el menos pesado y cuáles tienen pesos intermedios.
52. Reconocer que el peso de los objetos no siempre depende de su volumen.	El alumno dará algunos ejemplos en los cuales se aprecie que hay objetos pequeños y pesados, y objetos grandes y livianos.
53. Reconocer la masa de algunos objetos y relacionarla con su peso.	El alumno explicará oralmente algunas actividades a través de las cuales él percibe la masa de los cuerpos y también, oralmente, la relación entre la masa y el peso de un cuerpo.

Sugerencias de actividades y metodología

Antes de empezar el trabajo con los alumnos, conviene que el maestro tenga en cuenta lo siguiente:

El peso de un cuerpo es la fuerza con que la Tierra parece atraerlo, o de manera más precisa, la fuerza con que la Tierra y el cuerpo parecen atraerse mutuamente. Para los cuerpos que están cerca de la superficie de la Tierra la fuerza de atracción depende, además de la masa del cuerpo y de la de la Tierra, de la distancia que hay entre dicho cuerpo y el centro de la Tierra.

A nivel del mar, por ejemplo en Cartagena, donde la distancia de la superficie al centro de la Tierra es menor, la fuerza de atracción sobre un mismo cuerpo es mayor que en la cima de una montaña, por ejemplo en el Cerro de Monserrate, donde la distancia al centro de la Tierra es mayor. Es decir, que entre más cerca esté la superficie al centro de la Tierra, mayor es el peso de un mismo cuerpo. Sin embargo, la diferencia entre lo que pesa un cuerpo de un kilogramo de masa al nivel del mar o a 3.000 m de altura es muy poca, y por eso se suele confundir el peso con la masa y utilizar el kilogramo para medir pesos y masas indistintamente.

El peso de un cuerpo lo experimentamos por la fuerza que hacemos con los músculos cuando sostenemos dicho cuerpo. Es de notar que esta fuerza es mayor en el momento mismo de levantar el cuerpo de la Tierra, porque además de neutralizar el peso, tenemos que hacer alguna fuerza para que el cuerpo se empiece a mover hacia arriba. Una vez vencido ese "pegante" aparente entre la Tierra y el cuerpo, nuestra tensión muscular disminuye y la fuerza que continuamos haciendo es sólo la necesaria para que el cuerpo no caiga. Esa pequeña diferencia entre la fuerza para comenzar a levantar un cuerpo y para sostenerlo, es una de las pocas experiencias que permiten a la larga distinguir la masa del peso.

En las actividades que el maestro desarrolle con los alumnos es importante que ellos tengan la ocasión de experimentar realmente esta fuerza levantando y sosteniendo algunos cuerpos, como ladrillos, baldes con agua, paquetes de libros, etc. Conviene que los alumnos suelten en el aire algunos de estos objetos y reflexionen sobre el hecho de que casi todos los cuerpos caen. Esto se debe a que la Tierra parece ejercer una fuerza de atracción sobre ellos, o más precisamente, a que la Tierra y los otros cuerpos parecen atraerse.

Es posible que los alumnos pregunten por qué no caen los globos, las bombas infladas con "gas" (hidrógeno), los aviones, los dirigibles, los pájaros, etc. Se les puede decir que entre la Tierra y esos objetos también hay fuerzas de atracción, pero para cada uno de dichos objetos hay fuerzas que los sostienen para que no caigan.

Los alumnos también pueden caer en la cuenta de que al sostener un cuerpo entre las manos, evitando que éste caiga, experimentan una fuerza hacia abajo, sobre la mano, como si el cuerpo "quisiera" ir hacia abajo, o como si la Tierra lo "tirara" hacia ella.

Las experiencias anteriores permiten concluir que la fuerza experimentada para sostener los cuerpos, impidiéndoles que caigan, contrarresta la fuerza de atracción entre la Tierra y ellos, que es lo que llamamos *peso*. Estos ejercicios se pueden aprovechar para que los alumnos comparen el peso de los cuerpos que levanten o sostienen y los clasifiquen en pesados, livianos y del mismo peso (aproximadamente). Para hacer esta estimación los alumnos levantan los objetos, de a dos, tomando uno en cada mano.

También pueden organizarse por parejas para hacer un ejercicio de "pesaje" entre ellos, que consiste en colocarse espalda con espalda, tomarse por los brazos y a una señal convenida uno levanta al otro y dice si pesa mucho o poco. Un mismo alumno puede "pesar" a varios. Después de este ejercicio y teniendo en cuenta las características personales, se construyen frases como: "Gustavo pesa tanto como Roberto"; "Pepe es más pesado que Enrique"; "Hugo es menos pesado que Hermes".

Conviene además que el maestro escoja adecuadamente un material de tal manera que resulten cuerpos grandes y pesados; cuerpos pequeños y pesados (algunos de ellos, más pesados que los grandes); cuerpos grandes y livianos; cuerpos pequeños y livianos; cuerpos del mismo tamaño y de diferente peso. Para este último caso se pueden utilizar bolsas, tarros o cajas de igual tamaño llenos de diferentes productos: arena, papel, recortes de tela, etc. Esto permite que los alumnos caigan en la cuenta de que el peso de un cuerpo no siempre depende de su volumen.

Para que los alumnos lleguen a apreciar lo que es la masa de los cuerpos y a relacionarla con el peso de los mismos, el maestro puede organizar una actividad en la cual se practique el lanzamiento de balones y bolas. Se busca que los alumnos comparen el esfuerzo que hay que realizar para lanzar al frente, por ejemplo, el balón de básquet, con el que se necesita para lanzar una bola de béisbol o de ping-pong, suponiendo que se lanzan a un compañero a corta distancia. Se espera que los alumnos traten de explicar la razón de esas diferencias.

También se les pide que comparen el esfuerzo hecho para lanzar de frente el balón con el esfuerzo hecho para sostenerlo. Es posible que digan que son dos esfuerzos distintos: el primero busca que el balón se mueva hacia las manos de un compañero y el segundo es para evitar que el balón se caiga al piso.

Pueden hacer otros ejercicios que consisten en empujar cajas puestas sobre un patín y también sostenerlas en las manos. Luego comparan los dos esfuerzos realizados: el primero vence la resistencia que opone el cuerpo para dejarse empujar; el segundo vence la atracción entre la Tierra, y los demás objetos. Esa resistencia que parece oponer el cuerpo a que lo lancen o lo muevan o a que lo detengan si se está moviendo, es debida a la *masa*, mientras que como ya se dijo, la fuerza que el cuerpo hace hacia abajo sobre la mano u otro soporte, es debida al *peso*.

A continuación, el maestro puede iniciar una charla sobre los "alunizajes" u otros viajes espaciales. Los alumnos pueden intervenir y contar aquello que vieron en la televisión y qué oyeron al respecto. Si es posible, se tendrán afiches o revistas con fotos que ilustren las diferentes etapas de un viaje espacial y sobre todo los movimientos de los astronautas. En las descripciones que se hagan conviene resaltar la forma como se mueven los astronautas y cómo parece que flotaran o que estuvieran suspendidos en el aire. Además, sus movimientos son muy lentos, como si temieran que al ejecutar un movimiento brusco se fueran a ir muy lejos.

A propósito de estos comentarios, se pueden formular preguntas similares a: ¿Por qué este mismo astronauta que en la Tierra se para firme y camina seguro, lo vemos casi flotando dentro de la nave espacial o en la superficie de la Luna, como si de repente se hubiese convertido en un hombre de algodón?

Con base en las reflexiones hechas sobre el peso de los cuerpos y orientados por el maestro, es posible que los alumnos caigan en la cuenta de que lo que varió fue la fuerza de atracción entre la Tierra y el astronauta. Es decir, que en la Luna el peso del astronauta es menor que en la Tierra; allá su peso es más liviano que acá. Si en la Tierra el astronauta pesa 78 Kg. en la Luna pesará aproximadamente la sexta parte o sea 13 Kg. Por eso lo vemos casi flotando como si pudiera dar enormes saltos sin dificultad, y en realidad puede darlos, pues allá pesa menos.

¿El cuerpo del astronauta o su vestido ha experimentado alguna disminución de masa?

¿Los comestibles que llevó el astronauta sufrieron alguna disminución de masa?

De los comentarios que hagan los alumnos y orientados por el maestro, posiblemente lleguen a concluir que eso que no varió es la masa.

Otro ejemplo para diferenciar los conceptos: peso y masa, podría ser el de un alpinista o andinista que va a escalar una montaña y el cuidado que él dedica a la preparación de su morral. Es aconsejable disponer de un afiche que ilustre el tema. Este ejemplo se presta para correlacionar o para articular con otras áreas, además de ciencias naturales, como geografía, salud y español.

El maestro puede pedir a los alumnos que opinen sobre lo que el alpinista o andinista deberá llevar en el morral, y que cuenten lo que sepan sobre este deporte de escalar montañas.

Les puede formular preguntas similares a estas: ¿A medida que el alpinista va subiendo la montaña, qué pasa con el peso del morral? ¿Qué es lo que hace que el morral se vuelva más liviano? ¿Alcanzará a notar la diferencia de peso en el morral? ¿Si no la nota, eso quiere decir que no la hay? ¿Qué es lo que se conserva? ¿Qué es lo que varía? ¿Por qué?

Después de la discusión que provoque el tema y de que los alumnos hayan establecido una vez más la diferencia entre peso y masa, se pueden consignar conclusiones como:

La masa de un cuerpo es lo que hace que el cuerpo pese más o menos en este sitio, lo que lo hace más o menos difícil de moverlo, si está quieto, o de detenerlo si se está moviendo.	El peso de un cuerpo en este sitio es la fuerza que "hace" (o parece hacer) hacia abajo cuando se lo tiene sostenido.
La masa no depende del sitio en donde está el cuerpo: se conserva.	El peso depende del sitio en donde está el cuerpo: no se conserva.
En un mismo sitio, mientras más masa tenga un cuerpo, más pesa.	Un mismo cuerpo, mientras más lejos esté del centro de la Tierra, menos pesa (por lo menos entre el nivel del mar y una altura en donde la atracción con la Luna sea mayor que con la Tierra).
En un sitio no muy alto, el peso y la masa se pueden confundir para asuntos prácticos, aunque son magnitudes muy diferentes.	

Objetivo específico	Indicador de evaluación
54. Identificar y utilizar aparatos que se emplean para medir el peso y la masa de los objetos.	El alumno reconocerá visualmente o dibujará varios aparatos con los cuales se puede medir el peso y la masa de los objetos.

Sugerencias de actividades y metodología

En la consecución del material adecuado para esta actividad pueden colaborar los padres de familia y los alumnos. Es aconsejable conseguir los recipientes que emplean algunos tenderos para medir la cantidad de maíz, arroz, harina, etc., que venden. También es conveniente disponer de algunas balanzas, básculas, romanas u otro aparato conocido en la región y empleado para pesar los productos que se venden o se compran.

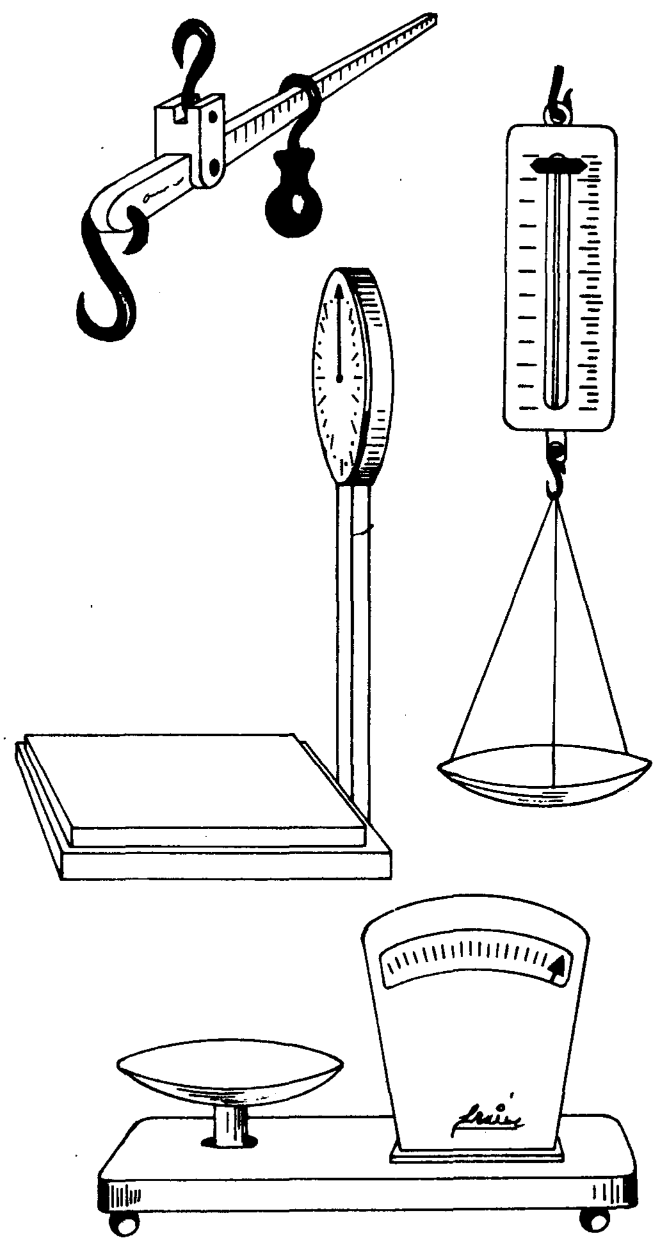
Los alumnos pueden conseguir: tapas de latas de galleta, pequeñas varitas de madera, pitas, hilos, o cabuyas, unas puntillas, un martillo, algunos productos como sal, arroz, arena, tierra y bolsas para empacar productos.

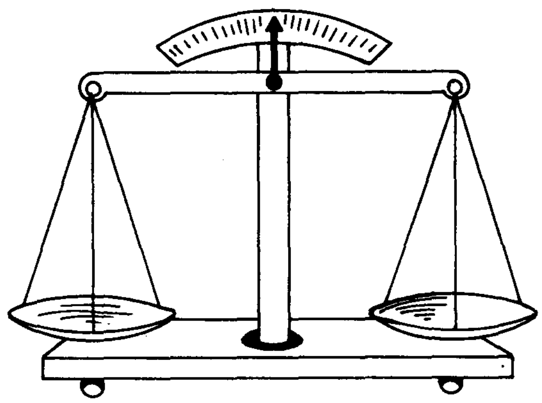
La actividad se puede desarrollar mediante la dramatización de un día de mercado. Los alumnos forman varios grupos y en cada grupo se designan vendedores y compradores. A los primeros se les entregan los productos que van a vender y se les pide que empiecen a hacerlo. Si algunos alumnos solicitan los recipientes empleados para medir los productos que van a vender, se les entregan. Si en algún grupo se disponen a iniciar la actividad sin aparatos para medir, se observa la forma como van a trabajar y a partir de los acuerdos a que ellos lleguen se les orienta para que utilicen alguna unidad de medida.

Es posible que empleen procedimientos arbitrarios para medir los productos que venden: medir la harina en vasos, el arroz en cajas, el maíz en puchas, medir la tierra en bolsas, etc.

El maestro orienta a los alumnos para que comenten la posibilidad de medir en diferentes recipientes la cantidad de maíz, harina, etc., que van a vender, así como las dificultades que se presentan cuando cada uno puede establecer caprichosamente las medidas que emplea. Les comenta que desde el principio de la historia de la civilización el hombre ha tenido que inventar la forma de medir la cantidad de sal, maíz, fríjol, etc., que ha intercambiado con sus semejantes, y que después de diferentes trabajos realizados durante muchos años se han logrado fabricar aparatos que miden la masa y el peso de los cuerpos. Si al maestro le fue posible conseguir algunos de tales aparatos, es el momento de que los niños los observen, manipulen y utilicen bajo su orientación.

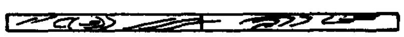
Los dibujos siguientes muestran algunos de los aparatos que se emplean para medir la masa y el peso de los cuerpos.



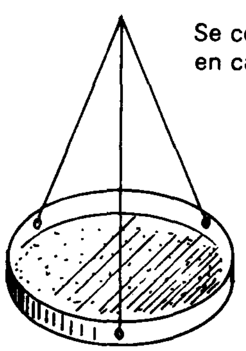


Si por motivos de distancia física y de ubicación de la escuela es imposible conseguir esos aparatos, cada grupo puede construir una balanza sencilla con algunos materiales que habían preparado para esta actividad. Con una varilla de madera, dos tapas de tarro, unos pedazos de pita, una puntilla, una piedra o un martillo pueden construirla. Los dibujos muestran cómo se hace.

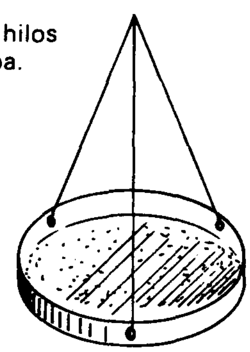
Se señala la mitad de la longitud de la varilla.

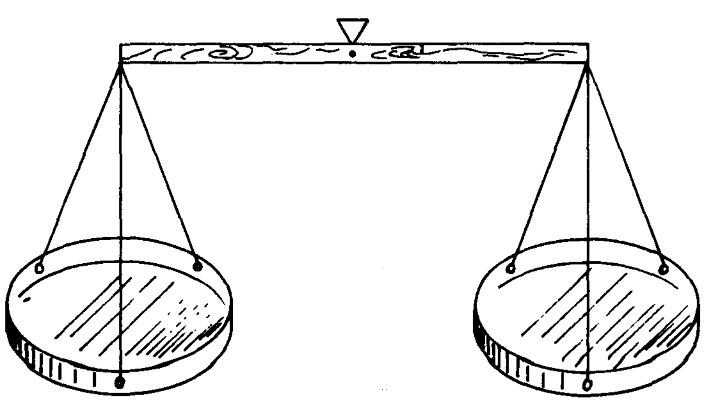


Se abren tres orificios en cada tapa.



Se colocan hilos en cada tapa.

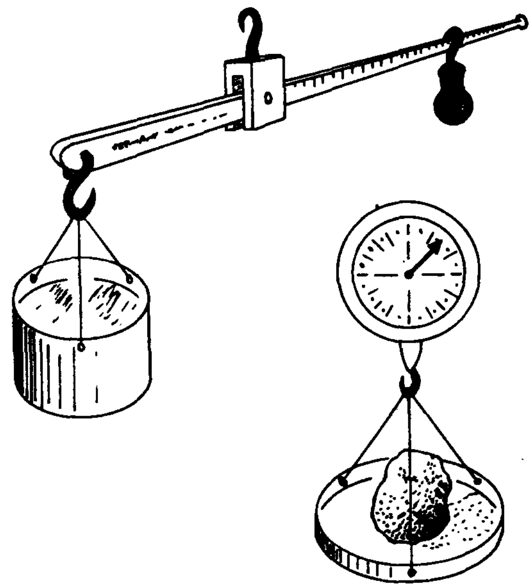




Se aseguran los platillos en los extremos de la varilla, y se coloca una pita en el centro de la varilla para sostenerla o para colgarla si es posible.

Para emplearla deben tener el cuidado de que la varilla no se incline a ningún lado sino que permanezca en dirección horizontal. El aparato así construido se denomina balanza, las tapas se llaman platillos de la balanza, la parte de la varilla que va del extremo, en donde se cuelga un platillo, al centro de la varilla se llama brazo, y como la pita para colgarla se colocó en el punto medio de la varilla, se dice que es una balanza de brazos iguales.

Los alumnos pueden comparar dos bolsas que contengan sal, por ejemplo, colocando una en cada platillo y según sea la posición de los platillos y de la varilla de la balanza discuten por qué un platillo puede quedar más abajo o más arriba que el otro.



A continuación el maestro puede hacer algunas preguntas para que los alumnos se refieran a otros aparatos que tengan en el salón, o que ellos sepan que son empleados para pesar objetos. Posiblemente tengan una balanza de resorte como las que usan en las tiendas y en los supermercados; si es así, el resultado de las mediciones se obtiene en kilogramos o en libras. Si disponen de una balanza romana pueden obtener el resultado en libras o en arrobas.

A esta edad, los alumnos ya están en capacidad de emplear esas unidades, y la mayoría de ellos las han conocido en su casa o al cumplir encargos que les hacen sus padres cuando los envían a la tienda o al mercado. En este grado se les permite que se refieran a esas unidades sin exigirles una definición rigurosa, ni una distinción muy detallada de la masa y el peso.

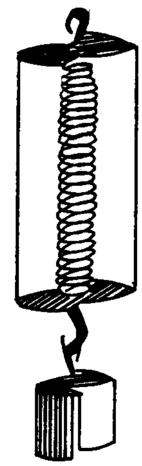
Pero como en la actividad anterior se hicieron algunos ejercicios para distinguir en un cuerpo la masa y el peso, se puede repasar someramente la diferencia que hay entre estos dos conceptos. Cuando procuramos determinar cuánta tierra hay, por ejemplo, en una bolsa, nos estamos refiriendo a la masa contenida en la bolsa. Cuando medimos la fuerza que "hace" hacia abajo esa bolsa al tenerla sostenida en la mano, estamos midiendo el peso de la bolsa y de su contenido.

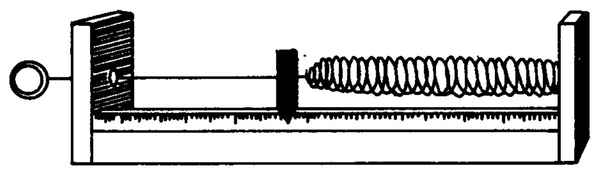
Los distintos tipos de balanza se emplean para medir la masa de los cuerpos y también el peso de los mismos. En un mismo sitio de la Tierra basta conocer el peso para saber la masa, o viceversa. Por eso no se insiste mucho en la diferencia.

Finalmente, los alumnos orientados por el maestro pueden hacer un resumen de las principales ideas que han analizado. Se espera que el resumen incluya lo siguiente:

- Los vendedores necesitan medir la masa de productos como harina, sal, azúcar, maíz. Ellos pueden establecer diversas unidades. Pero cuando cada uno emplea diferentes medidas se producen muchas dificultades, tanto para los compradores como para los vendedores.
- Los hombres han fabricado aparatos para medir la masa y el peso de los objetos. Algunos de esos aparatos son: la balanza de brazos iguales, las balanzas de resortes o dinamómetros, las balanzas romanas y las básculas.
- Los dinamómetros son aparatos que se emplean para medir fuerzas. Una de esas fuerzas es el peso de los cuerpos.

Si entre los aparatos conseguidos hay un dinamómetro, los alumnos lo observarán y tratarán de explicar su funcionamiento. Si no lo hay, el maestro puede explicarles que es un aparato con un resorte y una escala, construido especialmente para medir fuerzas y que por consiguiente sirve también para medir la fuerza con que la Tierra parece "tirar" a los cuerpos para que caigan sobre su superficie o sobre la de otro objeto interpuesto. Con un resorte y unos tubos o reglas, el maestro puede construir un dinamómetro sencillo.





Se puede graduar de tal manera que al ponerlo vertical se puedan comparar objetos que tengan pesos diferentes, pero tan parecidos, que no se alcance a detectar la diferencia con sólo sostenerlos en las manos. El aparato puede utilizarse para las siguientes actividades:

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
55. Reconocer el Kilogramo, el gramo y la libra como unidades estandarizadas de peso y de masa.	El alumno explicará alguna razón por la cual se emplean el Kilogramo, el gramo y la libra como unidades estandarizadas en diferentes países.
56. Relacionar entre sí el Kilogramo, el gramo y la libra. (*)	El alumno explicará a cuántos gramos equivale un Kilogramo y una libra y a cúantas libras equivale un Kilogramo.
57. Reconocer unidades de peso y de masa utilizadas en la localidad (arroba, quintal, onza, etc) y relacionarlas con el Kilogramo, el gramo y la libra.	El alumno mencionará otras unidades de peso y de masa utilizadas en la localidad y dirá cuál es la equivalencia entre éstas y el Kilogramo, el gramo y la libra.

Sugerencias de actividades y metodología

Un material adecuado para esta actividad lo constituyen algunos productos del mercado: un "kilo" de sal o de azúcar, o de pastas; algunas frutas, garbanzos, piedrecitas, unos frascos de a litro. Es conveniente disponer también de una balanza o de otro aparato para medir.

Si en el material de la escuela hay una balanza con las pesas correspondientes, serán de gran utilidad. De lo contrario conviene que el maestro consiga con anticipación algunos objetos cuyo peso sea aproximadamente de un gramo, de 10 gramos, de 100 gramos, de media libra, de una libra y de un Kilogramo.

El maestro inicia la actividad motivando a los alumnos para que comenten la utilidad del empleo de unidades conocidas para medir el peso de los cuerpos. Les pide que nombren las unidades que utilizan para pesar los productos en el mercado y en las tiendas. Seguramente entre ellas están el "kilo" o el "Kilogramo", la "libra" y otras propias de la localidad. Algún alumno identifica entre los materiales uno que pesa un Kilogramo; si hay varios materiales con ese peso, todos los alumnos lo tomarán en sus manos para experimentar el peso de un Kilogramo.

El maestro les puede contar que los gobiernos, los comerciantes y toda la gente de más de cien países se han puesto de acuerdo en emplear el Kilogramo como unidad para medir el peso de los cuerpos, y que eso permite a todos esos países comprar y vender sin tener los problemas que se presentan cuando se emplean diferentes unidades. Algunos de esos países son: Colombia, Venezuela, Brasil, Perú, Argentina, Cuba, España, Francia. Por ser el Kilogramo una unidad de peso empleada por todos ellos, se llama unidad estandarizada de peso.

En el caso de que no logren conseguir "kilos" de algún material, podrán emplear un frasco de un litro, llenarlo de agua y así el agua contenida en ese frasco pesa aproximadamente un Kilogramo.

La masa del agua contenida en una botella litro es de un Kilogramo-masa. Pesa más o menos un Kilogramo-peso, según el sitio en donde se pese. Como esta diferencia entre lo que pesa ese mismo Kilogramo-masa de agua en Cartagena y en Bogotá es pequeña, se usa indistintamente el Kilogramo para medir la masa y el peso de los objetos.

El Kilogramo es una unidad de peso y de masa empleada en muchos países.

Por eso se dice que el Kilogramo es una unidad estandarizada de peso y masa.

Lo que nos interesa comprar, comer, tomar, es la masa, pero ordinariamente se mide es el peso. Cuando hay que distinguir si se trata de masa o peso, se usa decir Kilogramo-masa o Kilogramo-peso. Generalmente se piensa en la masa, pero se habla de peso. Por eso no vale la pena exigir a los alumnos que distingan entre los dos usos del Kilogramo, y se puede hablar sólo del peso.

A continuación el maestro puede preguntar si conocen otra unidad que se emplee también para medir el peso de los objetos. Es posible que respondan diciendo que sí, y nombren la libra, la arroba, el gramo, etc. El maestro orienta la actividad hacia el gramo como una unidad de peso; los alumnos buscan entre los materiales aquellos cuyo peso es de un gramo. En forma ordenada, cada alumno toma en sus manos un objeto de un gramo de peso para apreciar dicho peso. El maestro les dice que el gramo se usa como medida de peso en los mismos países en los cuales se usa el Kilogramo. Los alumnos nombran objetos cuyo peso sea bastante parecido al de un gramo; ayudados por el maestro pueden concluir que el gramo es otra unidad de peso común en muchos países y por ese motivo se dice que el gramo es una unidad estandarizada de peso.

Cuando los alumnos hayan comprendido que tanto el Kilogramo como el gramo son unidades que se emplean para medir peso en muchos países y que por tal motivo se les llama unidades estandarizadas, el maestro los invita a compararlas; los estudiantes toman en una mano un objeto que pese 1 Kilogramo y en la otra uno que pese 1 gramo, ó 10 ó 100 gramos para que digan cuál pesa más y para que calculen (estimen, aprecien) cuántas veces más pesado es el uno que el otro. Después analizar las respuestas de los alumnos y de que les quede claro que el Kilogramo es un peso mucho mayor que el gramo, pueden utilizar las balanzas y constatar que se necesitan mil gramos para obtener un Kilogramo; por esa razón se dice que el Kilogramo es un múltiplo del gramo:

El Kilogramo es mucho más. pesado que el gramo.

Un Kilogramo de peso equivale a mil gramos.

Los alumnos pueden resolver ejercicios como los siguientes:

- Para cada cantidad de las que se dan a continuación, indicar si pesa más o menos que un kilogramo: 2500 gramos, 250 gramos, 980 gramos, 10000 gramos, 1000 gramos.

- Decir a cuántos Kilogramos equivale cada una de las siguientes cantidades: 3000 gramos, 300000 gramos, 490000 gramos, 1000 gramos.

Si entre las unidades de peso que los alumnos nombraron al comienzo de la actividad no figura la libra u otras unidades propias de la localidad, el maestro puede organizar con sus alumnos una visita a sitios como: graneros, tiendas, mercados, supermercados, etc. Con base en los comentarios que hagan los alumnos, después de la visita, se verá que la libra es una unidad conocida y empleada en casi todas las tiendas.

Si los productos están bien pesados, entonces una libra de sal comprada en una tienda debe ser lo mismo de pesada que otra libra de sal comprada en otra tienda; por eso se dice que la libra es una unidad estandarizada de peso. Una libra es menos pesada que un Kilogramo y mucho más pesada que un gramo.

Dos libras forman un Kilogramo y de un Kilogramo se sacan dos libras.

La libra es una unidad que se emplea para medir el peso y la masa de los objetos.

Con dos libras se forma un Kilogramo.

Una libra pesa la mitad de un Kilogramo.

Puede ocurrir que algunos hayan incluido en los apuntes que tomaron en el granero, la tienda o el supermercado, hechos como los siguientes: las naranjas las venden por docenas, los bananos los venden por manos, los limones los venden por bolsas, etc. Si se presenta esta circunstancia, el maestro la aprovechará para insistir una vez más en ideas como las siguientes: existen diversas formas caprichosas pero usuales que emplean los vendedores (y que tenemos que aceptar los compradores) para determinar la cantidad de producto que entregan por cierta cantidad de dinero. Cuando uno compra una docena de naranjas, por ejemplo, sabe que deben darle exactamente doce naranjas, pero no sabe si esas doce naranjas pesan uno, dos o más Kilogramos; algo similar sucede cuando compramos una "mano" de bananos, podemos verificar que esté completa, pero eso no nos dice cuánto pesa; lo que sabemos es que mientras más bananos tenga "la mano" quedamos más contentos. Sin embargo, tanto a la docena de naranjas como a "la mano" de bananos se les puede medir la masa y el peso; lo que interesa es la masa, pero decimos que les medimos el peso. La masa y el peso se pueden medir con las balanzas. Y puede resultar que dos "manos" de bananos que nos costaron lo mismo tengan pesos y masas muy diferentes. El que se llevó la "mano" más pesada compró más barato cada gramo de masa de banano.

Finalmente, el maestro orientará a los alumnos para que empleen las balanzas, si las hay, y para que a partir de los experimentos, analicen cómo se hace para convertir Kilogramos en libras y en gramos, y libras en Kilogramos y en gramos.

Como punto de partida para el análisis, pueden emplear expresiones que han surgido en las actividades anteriores:

Un Kilogramo equivale a dos libras.

Una libra pesa la mitad de un Kilogramo.

Un Kilogramo tiene mil gramos.

A continuación se proponen algunos ejercicios en los cuales se hagan conversiones de unas unidades a otras.

- Si el Kilogramo de queso cuesta $520, ¿cuál es el precio de una libra del mismo queso?
- Un Kilogramo de mantequilla vale $480. ¿cuánto valen 250 gramos?
- Por 100 gramos de condimentos se pagan $64. ¿cuánto hay que pagar por media libra?

Se espera que después de los ejercicios los alumnos lleguen a conclusiones relacionadas con las operaciones que se hacen para convertir el peso de un objeto de una unidad a otra.

- Para convertir Kilogramos a libras se duplica el número de Kilogramos y se cambia la unidad a libras.
- Para convertir Kilogramos a gramos se multiplica por 1000 el número de Kilogramos y se cambia la unidad a gramos.
- Para convertir libras a Kilogramos se le saca la mitad al número de libras y se cambia la unidad a Kilogramos.
- Para convertir libras a gramos se multiplica por 500 el número de libras y se cambia la unidad a gramos.

Para esta actividad se pueden usar convertidores como los usados para longitudes, áreas y volúmenes. El maestro puede sugerir a los alumnos que inventen algunos ejercicios en los cuales haya dos convertidores "conectados" o en cadena para que practiquen lo que han analizado en clase. El siguiente ejemplo puede ayudar a comprender mejor los ejercicios. Las cajas representan los convertidores. El maestro puede recordarles que los convertidores sólo cambian los letreros para expresar el mismo peso en unidades diferentes, mientras que los operadores sí cambian el peso: si le aplico el operador 1000 X a un peso de un gramo de sal, obtengo un Kilogramo, que pesa mil veces más que lo que tenía. Pero si tengo un Kilogramo de sal y le quiero cambiar el letrero 1 Kilogramo a la misma bolsa, debo convertirlo en un letrero que diga 1000 gramos; pero la bolsa de sal sigue pesando lo mismo: un Kilogramo o mil gramos.

Cada convertidor hace dos cambios en el letrero que le entra: uno en el número y otro en la unidad. Un alumno pasa por el agujero un papelito con el peso en la unidad apropiada; otro lo convierte a la nueva unidad y lo escribe por el otro lado, y un tercero lo recibe y lo verifica.

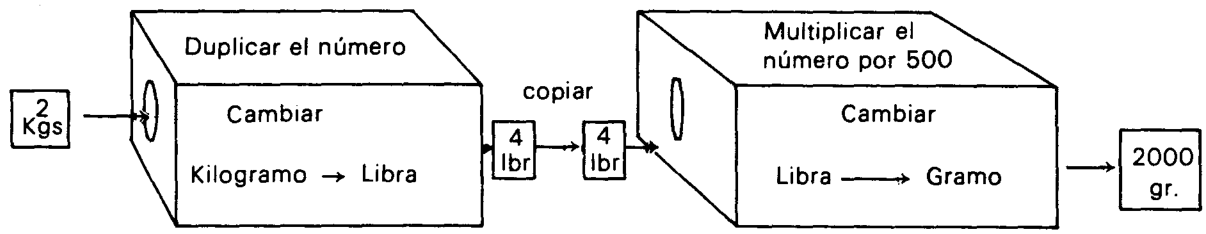
Conviene que dichas unidades se manejen a través de problemas formulados por los mismos alumnos.

Para las conversiones se tienen en cuenta las equivalencias siguientes que son suficientemente aproximadas para el uso corriente:

La tonelada (t) equivale a 20 quintales ó 1000 Kilogramos.

El quintal (qq) equivale a 4 arrobas ó 50 Kilogramos

La arroba @ equivale a 25 libras ó 12 Kilogramos y medio



Dos Kilogramos son equivalentes a 4 libras ó a 2000 gramos.

En cuanto a las unidades de peso utilizadas en la localidad es posible que los alumnos mencionen la arroba @, el quintal (qq), la tonelada (t) y la onza (oz).

La libra (lb) equivale a 16 onzas ó a medio Kilogramo

La onza (oz) equivale aproximadamente a 30 gramos

Objetivo específico	Indicador de evaluación
58. Resolver y formular problemas que requieran hacer conversiones de unidades de peso y de masa. (*)	El alumno resolverá y formulará problemas que requieran del manejo de unidades de peso y de masa.

Sugerencias de actividades y metodología

Es conveniente que los problemas propuestos por el profesor y por los alumnos tengan relación con situaciones concretas, es deccir, que los datos mencionados en ellos correspondan a la realidad tanto en el tipo de productos que se citen como en los precios respectivos.

Resulta interesante que los alumnos visiten tiendas, graneros, supermercados, etc. y elaboren listas con los nombres de los productos, su peso indicado en los empaques y el precio de los mismos.

El maestro puede comentarle a los alumnos que al comprador le interesa la masa del producto; ésta se mide usualmente por el peso, ya que en el mismo sitio a nivel del mar un Kilogramo de masa pesa un kilo y a mayor masa corresponde mayor peso.

A manera de ejemplo se propone el siguiente problema:

Para el gasto de un mes, Pedro Rosales compró medio quintal de arroz; una arroba de papa; 10 libras de queso; 30 libras de azúcar; 15 libras de café; 1 kilo de sal; 6 kilos de fríjoles; 16 onzas de aceite de oliva y 2 kilos y medio de garbanzos. ¿Cuál es el peso expresado en kilos de toda la compra de Pedro Rosales?

Solución: Se expresa el peso de los artículos en libras, ya que así se facilitará la conversión a kilos:

arroz	: medio quintal	50 lb	
papas	: una arroba	25 lb	
queso	:	10 lb	
azúcar	:	30 lb	
café	:	15 lb	
sal	: un kilo	2 lb	
fríjoles	: seis kilos	12 lb	
aceite de oliva:	: diez y seis onzas	1 lb	
garbanzos	: dos kilos y medio	5 lb	Como un kilo = 2 lb, entonces 150 lb = 75 kilos
	Peso total	150 lb	El peso total de la compra es de 75 kilos.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
59. Reconocer los efectos de aplicar sucesivamente a una magnitud, un operador de la forma mx y uno de la forma $\frac{1}{n}x$.	Dados un operador de la forma mx, otro de la forma $\frac{1}{n}x$ y una magnitud, el alumno hallará el resultado de aplicar sucesivamente estos dos operadores a la magnitud dada.
60. Reconocer que el efecto de aplicar sucesivamente operadores de la forma mx y $\frac{1}{n}x$ no depende del orden de aplicación.	Dados un operador de la forma mx y otro de la forma $\frac{1}{n}x$ el alumno los aplicará en distinto orden a una magnitud y observará que en cualquier caso producen el mismo efecto.
61. Calcular el operador resultante de la aplicación sucesiva de un operador de la forma mx y uno de la forma $\frac{1}{n}x$. (*)	Dados un operador de la forma mx y otro de la forma $\frac{1}{n}x$ el alumno hallará el operador resultante de la aplicación sucesiva de los dos anteriores.
62. Reconocer los operadores multiplicativos de la forma $\frac{m}{n}x$ como operadores fraccionarios que aumentan, disminuyen o dejan como está la magnitud a la cual se aplican. (*)	Dados varios operadores fraccionarios de la forma $\frac{m}{n}x$ el alumno identificará aquellos que aumentan, aquellos que disminuyen y aquellos que dejan como está la magnitud a la cual se aplican.
63. Identificar las características de las fracciones que intervienen en la representación de operadores de la forma $\frac{m}{n}x$	Dada una fracción con numerador y denominador diferentes de 1, el alumno asociará el numerador y el denominador con un operador que aumenta y uno que disminuye y dirá si la fracción original representa un operador que aumenta, disminuye o deja como está la magnitud a la cual se aplica.

Sugerencias de actividades y metodología

Para continuar con el estudio de los operadores fraccionarios en cuarto grado, es conveniente que el maestro revise cómo se empezó a trabajar este tema en el grado anterior.

Se sugiere preparar actividades en las cuales sea necésario aplicar operadores de la forma $\frac{1}{n}x$ y mx a magnitudes. Después de observar cómo estos operadores transforman una magnitud en otra más pequeña o más grande, los alumnos pueden aplicar sucesivamente varios de ellos a longitudes, o a volúmenes, o a números, calcular el operador resultante de la aplicación sucesiva de dichos operadores y analizar los efectos de cada uno de ellos sobre la magnitud.

En cuanto a la simbolización, se puede adoptar una de las siguientes:

$\frac{1}{n}x(\quad)$ $\quad \frac{1}{n}x \quad$ o sencillamente $\frac{1}{n}(\quad)$

Así, para el operador que reduce a la mitad, se tiene $\frac{1}{2}\times(\quad)$ o $\frac{1}{2}\times$ que se leen "un medio por...", o también, $\frac{1}{2}(\quad)$ que se lee "un medio de..."

Al símbolo $\frac{1}{2}$ que interviene en la representación del operador se le llama fracción. La fracción sirve para decir cuál es el operador fraccionario en el que se está pensando. Lo importante es ese operador, y no la fracción, porque puede haber muchas otras maneras de simbolizar el mismo operador. Las fracciones son las que tienen numerador, que es el número escrito encima de la raya, y denominador, que es el que se escribe debajo de ella.

Una vez hecho el repaso que contemple lo anteriormente visto, el maestro puede decirle a tres alumnos que pasen adelante y le entrega a uno de ellos una cuerda para que la reparta "en partes iguales" entre los tres. Se recalcará que "partes iguales" significa aquí "iguales de largas". Es indispensable que los alumnos caigan en la cuenta de que aunque se dice que a cada uno le tocó la tercera parte de la cuerda, es más correcto decir que a cada uno le tocó una cuerdita más pequeña que la original, pero que las tres se parecen en algo: son lo mismo de largas, o sea tienen la misma longitud, y ese largo de cada una de ellas es la tercera parte de la longitud de la cuerda original. El operador que se le aplicó al largo de esta cuerda es el que saca la tercera parte, que simboliza así:

$\frac{1}{3}x(\quad)$ o $\frac{1}{3}x$ o simplemente $\frac{1}{3}(\quad)$.

Si la longitud de la cuerda original es de 45 cm, la longitud de cada cuerdita es:

$\frac{1}{3}\times(45 \text{ cm}) = 15 \text{ cm}$; $\frac{1}{3}(45 \text{ cm}) = 15 \text{ cm}$.

Después el maestro le entrega a cada uno de los tres alumnos una cuerda de 45 cm de largo y les pide que señalen en ella una longitud igual al doble de la longitud de la cuerdita pequeña, es decir, que dupliquen la longitud de esta última.

Nótese que, de nuevo, es más correcto decir que se duplicó la longitud de la cuerda, y no que se duplicó la cuerda.

Se recuerda que duplicar una magnitud equivale a aplicarle el operador $2x(\quad)$, o $2\times$, o simplemente $(\quad)$, así: $2\times(15 \text{ cm}) = 30 \text{ cm}$.

Resumiendo el procedimiento que se siguió y teniendo en cuenta que a la magnitud original se le aplicó el operador que duplica después del operador que reduce a la tercera parte, la simbolización es:

$2\times(\frac{1}{3}\times(45 \text{ cm})) = 2\times(15 \text{ cm}) = 30 \text{ cm}$

Obsérvese que el operador que se aplicó es el simbolizado por:

$2\times(\frac{1}{3}x(\quad))$ que se puede leer: "el doble *de* la tercera parte" o "dos veces un tercio".

Así, el doble de la tercera parte de 45 cm son 30 cm, o dos veces un tercio de 45 cm son 30 cm.

Este operador también se puede simbolizar utilizando la forma más simple:

$2(\frac{1}{3}(\quad))$

En general, en cuanto a la simbolización de los operadores, es conveniente que el maestro llegue a un acuerdo con sus alumnos sobre aquella que vayan a adoptar para expresar el operador con el cual se trabaje. Es posible que en este grado prefieran aquella que tenga el paréntesis desocupado porque permite visualizar el lugar donde se escribe la magnitud o el número al cual se aplica dicho operador: el paréntesis es como la boca del operador. Tal vez los alumnos prefieran decir "la boca del monstruo", que agranda o achica las magnitudes.

Ahora los alumnos aplican la magnitud original, primero el operador que duplica y después el operador que reduce a la tercera parte. Para esto pasan adelante otros tres alumnos; el maestro les da una cuerda que tenga la misma longitud de la cuerda que se entregó a los tres estudiantes del grupo anterior, y les pide que dupliquen la longitud de dicha cuerda (pueden pegar o amarrar otra cuerda de la misma longitud para que ésta quede duplicada) y luego la reparten entre los tres, en partes iguales de largas.

Cuerda que entrega el maestro.

Cuerda del doble de longitud.

Cuerda que le correspondió a un alumno después de hecha la repartición en tres partes de la misma longitud.

La simbolización en este caso se hace teniendo en cuenta que a la magnitud primero se le aplicó el operador que duplica, o sea el operador $2x(\quad)$ y al resultado de éste se le aplicó el operador que reduce a la tercera parte, así:

$\frac{1}{3}x(2x(\quad))$ o $\frac{1}{3}(2(\quad))$ que se leerá:

"la tercera parte del doble".

$\frac{1}{3}\times(2\times(45 \text{ cm})) = \frac{1}{3}\times 90 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.

La tercera parte del doble de 45 cm son 30 cm.

Ahora un alumno del primer grupo compara la longitud de la cuerda que le tocó al final, con la longitud de la cuerda que le correspondió a un alumno del segundo grupo, para que lleguen a la conclusión de que las dos cuerdas tienen la misma longitud; es decir, que estas dos aplicaciones sucesivas de operadores produjeron el mismo efecto.

Se puede hacer un resumen de la actividad que hasta este momento han realizado los alumnos diciendo que en ambos casos se trabajó con la misma magnitud que es la longitud o el largo de la cuerda, y que se le aplicaron sucesivamente dos operadores en distinto orden: en un caso se le aplicó primero el operador que duplica y luego el que reduce a la tercera parte, y en el otro caso se le aplicó primero el operador que reduce a la tercera parte y luego el operador que duplica.

En este momento el maestro puede decir a los alumnos que como estas dos aplicaciones sucesivas de operadores producen el mismo efecto, ambas se pueden simbolizar así:

$$\frac{2}{3}\times(\quad) = 2\times(\frac{1}{3}\times(\quad)) = \frac{1}{3}\times(2\times(\quad)) = \frac{2}{3}\times = \frac{2}{3}(\quad)$$

Esta es la representación de un nuevo operador, el que saca las dos terceras partes o los "dos tercios de". En el paréntesis se coloca la magnitud a la cual se le aplicaron los operadores. El maestro les explica que en la fracción $\frac{2}{3}$ (dos tercios), el número sobre la línea indica las veces que la magnitud se aumenta, y se designa con el nombre de "numerador" y que el número que está debajo de la línea indica las veces que la magnitud se disminuye, y se designa con el nombre de "denominador", pero que puede haber otras fracciones con distinto numerador y denominador que representen el mismo operador.

$$\text{Fracción}\left\{\begin{array}{l} 2 \longleftarrow \text{numerador} \\ 3 \longleftarrow \text{denominador} \end{array}\right.$$

Luego los alumnos de los dos grupos comparan la longitud del pedazo de cuerda que le correspondió a cada uno, con la longitud de la cuerda con que trabajaron inicialmente, para llegar a la conclusión de que la longitud se disminuyó por la acción del operador; es decir, que al aplicar el operador $\frac{2}{3}\times(\quad)$ se produce una disminución de la magnitud a la cual se aplica.

El maestro puede ahora solicitar que pasen adelante cuatro alumnos, les da una cuerda de una determinada longitud y les pide que tripliquen la longitud que obtengan después de repartir la original en cuatro partes iguales de largas.

Los alumnos observan que se le aplicó el operador que triplica *después* del operador que reduce a la cuarta parte, y simbolizan esto de la siguiente manera:

$$3\,(\frac{1}{4}\times(\quad))\quad \text{o} \quad 3\,(\frac{1}{4}(\quad))$$

Otro grupo de cuatro alumnos toma otra cuerda de la misma longitud para triplicarla y luego repartirla entre los cuatro en partes iguales de largas, y simbolizan esto así:

$$\frac{1}{4}\times(3\times(\quad))\quad \text{o} \quad \frac{1}{4}(3\,(\quad))$$

Comparan los resultados y se espera que concluyan que en ambos casos se produjo el mismo efecto. El operador que al aplicarlo a la magnitud produce los mismos resultados que se obtienen al aplicar sucesivamente los dos operadores dados, se simboliza así: $\frac{3}{4}\times(\quad)$, en la simbolización de este operador interviene la fracción que se lee: "tres cuartos".

También pueden concluir que el operador $\frac{3}{4}\times(\quad)$ que saca las tres cuartas partes, produjo una disminución de la magnitud a la cual se aplicó.

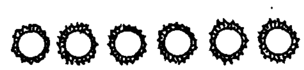
Así mismo, trabajarán con otros operadores que resulten de la aplicación sucesiva de un operador de la forma m$\times$ y un operador de la forma $\frac{1}{n}\times$ y tales que al aplicarlos a una magnitud produzcan una disminución. Algunos de éstos pueden ser:

$$\frac{3}{7}\times(\quad) \qquad \frac{4}{4}\times(\quad) \qquad \frac{5}{6}\times(\quad)$$

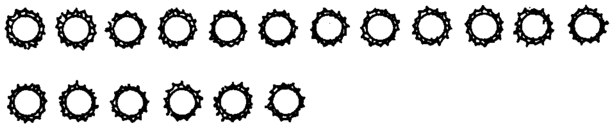
Para la segunda parte de la actividad pueden pasar adelante dos alumnos y el maestro les entrega una docena de tapas (u otro material que sea de fácil adquisición), y les pide que la repartan entre los dos en partes iguales. Se recalcará que ahora "partes iguales" significa "iguales de numerosas", o "que tengan el mismo número de tapas". Es decir, que se les pide que al número de tapas le apliquen el operador $\frac{1}{2}\times(\quad)$ y que luego cada uno triplique el número de tapas que le correspondió después de hecha la repartición.

Cada alumno obtiene una situación como la siguiente:

Docena de tapas para aplicarle el operador que disminuye el número de tapas a la mitad.



Número de tapas que le correspondió a un alumno después de aplicarle el operador $\frac{1}{2}\times$



Número de tapas que le correspondió a un alumno después de triplicar el número anterior.

Ahora se hace una simbolización de lo que se ha efectuado, teniendo en cuenta que la magnitud original se le aplicó primero el operaddor que reduce a la mitad y luego el operador que triplica, así:

$3 \times (\frac{1}{2} \times (\text{docena}))$ ó $3 (\frac{1}{2} (\text{docena}))$, que se lee: "el triple de la mitad de una docena", o "el triple de media docena".

Pasan adelante otros dos alumnos y toman nuevamente una docena de tapas; primero triplican el número de tapas y luego las reparten entre los dos en partes iguales. Simbolizan esto de la siguiente manera:

$\frac{1}{2} \times (3 \times (\text{docena}))$ ó $\frac{1}{2} (3 (\text{docena}))$, que se lee: "la mitad del triple de una docena", o "la mitad de tres docenas".

Un alumno de este grupo compara el número de tapas que le tocó al final con el que le correspondió a un alumno del otro grupo, para llegar a la conclusión de que a ambos les tocó el mismo número de tapas; es decir, que estas dos aplicaciones sucesivas de operadores produjeron el mismo efecto. Ahora construyen el operador que al aplicarlo a la magnitud produzca los mismos resultados que se obtienen al aplicar sucesivamente los dos operadores datos. Así forman el operador.

$\frac{3}{2} \times (\quad)$ ó $\frac{3}{2} \times$ o $\frac{3}{2} (\quad)$

En la simbolización de este operador interviene la fracción que se lee "tres medios": el numerador 3 indica las veces que la magnitud se aumenta, y el denominador 2 indica las veces que la magnitud se disminuye.

Luego los alumnos de los dos grupos comparan el número de tapas que le correspondió a cada uno, después de aplicar el operador $\frac{3}{2} \times$ con la docena de tapas que se tenía inicialmente, para llegar a la conclusión de que el número de tapas se incrementó mediante la acción del operador; es decir, que al aplicar el operador $\frac{3}{2} \times$ a una magnitud se produce un aumento.

El operador $\frac{3}{2} \times$ también lo pueden aplicar a la longitud de una cuerda como se hizo en la primera parte de la actividad.

Así mismo pueden trabajar con otros operadores que resulten de la aplicación sucesiva de un operador de la forma m x y un operador de la forma $\frac{1}{n} \times$ y que al aplicarlos a una magnitud produzcan un aumento. Algunos de estos operadores pueden ser:

$\frac{4}{2} \times \quad \frac{4}{3} \times \quad \frac{7}{4} \times \quad \frac{8}{5} \times \quad \frac{6}{5} \times$

Posteriormente se pueden hacer otros ejercicios para aplicar operadores como $\frac{2}{2} \times$; $\frac{3}{3} \times$, etc., a una magnitud.

Puede pasar un grupo de cuatro alumnos que recibe del maestro una cuerda de una determinada longitud, para que la repartan entre los cuatro en partes iguales de largas y luego cuadrupliquen la longitud que le correspondió. Observarán que la magnitud se ha aumentado cuatro veces y luego se ha reducido a la cuarta parte, es decir, se ha aplicado el operador.

$\frac{4}{4} \times$ ó $\frac{4}{4} \times (\quad)$ ó $\frac{4}{4} (\quad)$.

Otro grupo de cuatro alumnos puede aplicar sucesivamente a la misma magnitud los dos operadores en el otro orden para llegar a la conclusión de que en ambos casos se produjo el mismo efecto. El maestro les pide comparar el resultado de aplicar el operador $\frac{4}{4} \times$ con la magnitud original para que concluyan que produjo el mismo efecto que el operador $1 \times (\quad)$, que es el que deja las cosas como están.

Finalmente, se hace un resumen de la actividad para clasificar los operadores que resultan de la aplicación sucesiva de un operador de la forma m x y un operador de la forma $\frac{1}{n} \times$ y que producen efectos diferentes, así se identifican los operadores que al ser aplicados a una magnitud la aumentan, los operadores que al ser aplicados dejan las cosas como están y los operadores que la disminuyen.

El maestro puede dar a cada alumno un operador para que él escriba la fracción que interviene en su representación en una de las columnas del cuadro que aparece a continuación. Cuando ya se tenga un número suficiente de ejemplos se pasa a analizar estas fracciones.

Se puede obtener un cuadro como el siguiente:

Fracciones que se usan para representar operadores que		
Aumentan	Dejan las cosas como están	Disminuyen
$\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}$	$\frac{3}{3}, \frac{2}{2}, \frac{4}{4}, \frac{7}{7}, \frac{9}{9}, \ldots$	$\frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{2}{9}$
$\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{10}{9}$		$\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{8}{9}$
$\frac{8}{7}, \ldots$		$\frac{7}{8}, \ldots$

El maestro puede pedir a los alumnos que analicen las fracciones que intervienen en la representación de dichos operadores para que ellos mismos lleguen a las siguientes conclusiones:

- Los operadores en cuya representación interviene una fracción de numerador mayor que el denominador, *aumentan* la magnitud a la cual se aplican.
- Los operadores en cuya representación interviene una fracción de numerador igual al denominador, *dejan como está* la magnitud a la cual se aplican.
- Los operadores en cuya representación interviene una fracción de numerador menor que el denominador, *disminuyen* la magnitud a la cual se aplican.

El maestro puede proponer otros ejercicios para que los alumnos identifiquen las características de las fracciones que intervienen en la representación de los diferentes operadores fraccionarios.

NOTA: Al hacer la parcelación se debe tener cuidado de programar dos o tres sesiones para esta actividad, con el fin de evitar que los alumnos se fatiguen. Lo importante es dejarlos explorar los sistemas concretos de longitudes de pitas y de números de tapas sin adelantarse a dar definiciones o escribir conclusiones que ellos todavía no han sacado por sí mismos. Al comienzo parece que el aprendizaje es más demorado que de la manera antigua, pero en pocas sesiones de trabajo se observará el progreso más rápido, el aumento del interés y la mayor retención y aplicación de lo aprendido.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
64. Reconocer fracciones equivalentes.	Dadas dos fracciones, el alumno determinará si son equivalentes o no.

Sugerencias de actividades y metodología

Para esta actividad se puede emplear material como el que se utilizó en la actividad anterior.

Para iniciar se pueden formar tres grupos: uno de dos participantes, otro de cuatro y otro de seis; los demás alumnos pueden observar e intervenir cuando el maestro se los pida. Se entrega a cada grupo una cuerda de la misma longitud y se dan las siguientes instrucciones:

Al grupo de dos alumnos, que se repartan esa longitud en partes iguales de largas y simbolicen el operador que le han aplicado a dicha magnitud.

En el primer caso posiblemente recordarán que a la longitud se le ha aplicado el operador "un medio" y que en la simbolización de este operador interviene la fracción $\frac{1}{2}$.

En el segundo caso posiblemente recordarán que a la longitud se le ha aplicado el operador "dos cuartos" y que en la simbolización de este operador interviene la fracción $\frac{2}{4}$.

Luego los alumnos comparan la longitud del pedazo de cuerda que le correspondió a cada uno de los alumnos del grupo de cuatro con la longitud del pedazo de cuerda que le tocó a cada uno de los alumnos del grupo de dos en el primer caso, y comprobarán que en ambos casos se tiene la misma longitud.

Es decir, que cuando se aplicó el operador "un medio" se obtuvo el mismo resultado que cuando se aplicó el operador "dos cuartos" a la misma magnitud.

En este momento el maestro puede decir a los alumnos que como los operadores $\frac{1}{2}x$ y $\frac{2}{4}x$ produjeron el mismo efecto al aplicarlos a una misma magnitud, se dice que las dos fracciones que intervienen en sus representaciones son equivalentes, lo cual se simboliza así: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ porque son dos símbolos o nombres para el mismo operador que saca la mitad.

El grupo de seis alumnos toma ahora una cuerda que tenga la longitud de la usada inicialmente y le aplica el operador $\frac{3}{6}x$ ó "tres sextos". (Recuérdese que este operador es el resultado de haber aplicado sucesivamente los operadores 3x y $\frac{1}{6}x$).

Nuevamente se compara el resultado de aplicar los operadores $\frac{1}{2}x$ y $\frac{3}{6}x$ a una misma longitud y se comprueba que es el mismo, pues los dos pedazos de cuerda tienen la misma longitud. Así los alumnos, orientados por el maestro, pueden concluir que el efecto de aplicar estos dos operadores a una misma magnitud, es el mismo; por lo tanto las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes, lo cual pueden expresar así:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}.$$

De la misma manera pueden reconocer otras fracciones equivalentes como: $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$. Recuérdese que el operador $\frac{2}{3}$ x es el que aumenta al doble y luego disminuye a la tercera parte (o viceversa) la magnitud a la cual se aplica y que el operador $\frac{4}{6}$ x cuadruplica y luego disminuye a la sexta parte o viceversa.

Pueden aplicar también algunos operadores de la forma $\frac{m}{n}$ x que producen el mismo efecto de operadores de la forma *m* x.

Ejemplo. Buscar qué operador de los que ya conocen produce el mismo efecto que el operador $\frac{4}{2}$ x.

Pueden trabajar con la magnitud, número de objetos, para aplicar estos operadores. Así, si se tienen 6 tapas o piedras y se aplica el operador $\frac{4}{2}$ x se obtienen 12 tapas.

$$\frac{4}{2} \times (6 \text{ tapas}) = 12 \text{ tapas}$$

Es posible que los alumnos fácilmente caigan en la cuenta de que el operador $\frac{4}{2}$ x produce el mismo efecto que el operador duplicador. Así se puede decir que 2 es equivalente a $\frac{4}{2}$: $2 = \frac{4}{2}$

Aplicando operadores a magnitudes pueden buscar otras fracciones equivalentes a 2 y llegar a resultados como:

2 es equivalente a $\frac{6}{3}$; $\quad 2 = \frac{6}{3}$

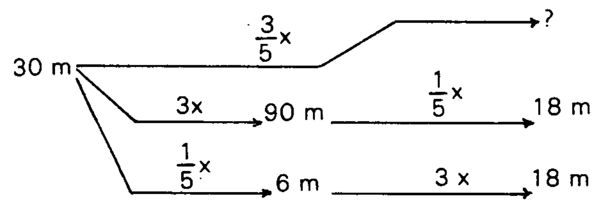
2 es equivalente a $\frac{8}{4}$; $\quad 2 = \frac{8}{4}$ etc.

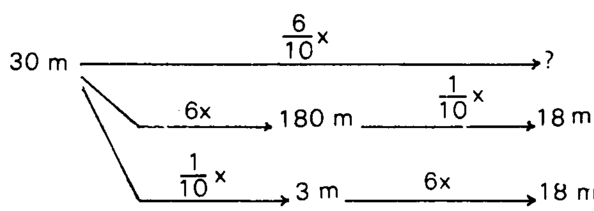
Como ejercicio pueden verificar si $\frac{2}{2}$ y $\frac{3}{3}$ son dos fracciones equivalentes. Para esto pueden aplicar los operadores $\frac{2}{2}$ x y $\frac{3}{3}$ x a una misma magnitud y ver los resultados. Se espera que concluyan que estos operadores producen el mismo efecto que el operador 1x que es el que deja la magnitud como estaba inicialmente. Así se puede afirmar que:

$$\frac{2}{2} = \frac{3}{3} \qquad 1 = \frac{2}{2} \qquad 1 = \frac{3}{3}$$

Al buscar otras fracciones equivalentes a $\frac{2}{2}$ pueden llegar a la conclusión de que todas las fracciones en las cuales el numerador es igual al denominador, son equivalentes entre sí, pues sólo son nombres o símbolos diferentes para el mismo operador que deja las cosas como están.

Otro tipo de actividad es la de representar con flechas las acciones de los operadores sobre una magnitud, descomponiendo los operadores de la forma $\frac{m}{n}$ x en dos, uno que aumenta *m* veces y otro que disminuye *n* veces.





Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
65. Complificar y simplificar (si es posible) una fracción dada. (*)	El alumno complificará y simplificará algunas fracciones.

Sugerencias de actividades y metodología

En actividades anteriores los alumnos iniciaron la comparación de los efectos que producen varios operadores al ser aplicados a una misma magnitud, y comprobaron que es posible obtener el mismo resultado a pesar de aplicar dos operadores aparentemente distintos (por estar representados por fracciones distintas).

Ejemplo. Si se aplica a una magnitud el operador que reduce a la mitad, se obtiene el mismo resultado que si se aplica el operador que duplica y reduce a la cuarta parte.

$\frac{1}{2}$x (6 metros) = 3 metros ó $\frac{1}{2}$(6 metros) = 3 metros

$\frac{2}{4}$x (6 metros) = 3 metros

Como estos operadores producen el mismo resultado, se dice que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son equivalentes, por eso podemos escribir: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ porque son dos nombres o símbolos del mismo operador.

Al comparar los numeradores y denominadores de estas dos fracciones, los alumnos pueden llegar a concluir que el numerador de la fracción $\frac{2}{4}$, es el doble del numerador de la fracción $\frac{1}{2}$, y que el denominador de la fracción $\frac{2}{4}$, es el doble del de la fracción $\frac{1}{2}$.

Luego si tenemos la fracción $\frac{1}{2}$ y queremos encontrar la fracción $\frac{2}{4}$, basta multiplicar por dos el numerador y el denominador de la fracción $\frac{1}{2}$, así:

$$\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$$

Ahora los alumnos pueden multiplicar el numerador y el denominador de la fracción $\frac{1}{2}$ por otro número diferente de 2, por ejemplo por 3: $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$, y aplicar el operador $\frac{3}{6}$x a la magnitud a la cual se le aplicó el operador $\frac{1}{2}$x. Pueden observar que el resultado es el mismo que se obtuvo al aplicar el operador $\frac{1}{2}$x así:

$\frac{3}{6}$x (6 metros) = $\frac{18}{6}$ metros = 3 metros

De lo anterior se puede concluir que: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ son fracciones equivalentes. Por eso escribimos:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ y $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$

Hasta el momento, se ha partido de la fracción $\frac{1}{2}$ y se han obtenido las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$.

Ahora se va a realizar el proceso inverso, o sea, partir de $\frac{2}{4}$ o de $\frac{3}{6}$ para obtener $\frac{1}{2}$. Entre todos los alumnos pueden buscar la forma de hacerlo hasta concluir que se divide el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número, así:

$\frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$ $\frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$

Después de realizar varios ejercicios se pueden distinguir dos procedimientos distintos para llegar a expresar de formas diferentes un mismo operador fraccionario, o en otras palabras, dos procedimientos que nos sirven para obtener fracciones equivalentes a una fracción dada. El primer procedimiento es el de multiplicar el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número y el segundo, que es el inverso del primero, consiste en dividir el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número.

$\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$ Luego $\frac{2}{5}$ es equivalente a $\frac{6}{15}$

$\frac{12 \div 4}{16 \div 4} = \frac{3}{4}$ Luego $\frac{12}{16}$ es equivalente a $\frac{3}{4}$

El primer procedimiento se llama "complificar" o "complicar" la fracción, porque resultan valores más complicados en el numerador y en el denominador para expresar el mismo operador fraccionario; el segundo procedimiento se llama "simplificar" la fracción porque se encuentra una fracción más sencilla o más simple para representar el mismo operador.

Se puede comprobar que en algunos casos no es posible simplificar una fracción dada porque ya se encuentra en su forma más simple; algunos ejemplos son: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}$, etc.

Mediante la complificación y la simplificación de fracciones los alumnos pueden determinar si dos fracciones dadas son equivalentes o no, y también hallar muchas fracciones equivalentes a una fracción dada.

Ejemplos:

- Determinar si $\frac{24}{32}$ es equivalente a $\frac{6}{8}$.

Pueden simplificar $\frac{24}{32}$ para ver si se puede obtener $\frac{6}{8}$, o complificar $\frac{6}{8}$ para ver si se puede obtener $\frac{24}{32}$.

$\frac{24 \div 4}{32 \div 4} = \frac{6}{8}$ ó $\frac{6 \times 4}{8 \times 4} = \frac{24}{32}$

Estas dos fracciones sí son equivalentes.

- $\frac{2}{7}$ no es equivalente con $\frac{8}{21}$ porque $\frac{2 \times 4}{7 \times 4} = \frac{8}{28}$

$\frac{8}{28}$ es diferente de $\frac{8}{21}$ ó también $\frac{8}{21}$ no se puede simplificar.

- Hallar 5 fracciones equivalentes a $\frac{6}{10}$.

Complificando tenemos: $\frac{12}{20}, \frac{18}{30}, \frac{24}{40}, \frac{30}{50}$

Simplificando tenemos:

$$\frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5}$$

NOTA: Si los alumnos consultan otros libros de aritmética o preguntan a otras personas sobre estos procedimientos, encontrarán que algunas veces se dice "amplificar" una fracción en vez de "complificar" y también "reducir" en vez de "simplificar".

Se les explicará que es mejor no usar "amplificar" ni "reducir", para que no se crea que el operador simbolizado por la fracción que se "amplifica" es más grande que el representado por la fracción original, ni que al "reducir" una fracción se obtiene una representación de un operador más pequeño.

Los operadores siguen siendo los mismos aunque se simplifique o se complifique la fracción que los representa. Lo que se reduce (o se amplifica, o se queda igual) es la magnitud a la cual se aplica el operador, según el tipo de que se trate. Por eso a los operadores que aumentan se les puede llamar "amplificadores", y a los que disminuyen "reductores", y las palabras "amplificar" y "reducir" se reservan para el efecto que hacen los operadores a las magnitudes y no para los cambios de representación del mismo operador.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
66. Convertir fracciones de diferente denominador en fracciones de igual denominador.	Dadas tres fracciones de diferente denominador, el alumno las expresará con igual denominador.

Sugerencias de actividades y metodología

Para esta actividad es necesario que los alumnos complifiquen y simplifiquen fracciones con rapidez. También conviene asegurarse de que los alumnos identifiquen correctamente el numerador y el denominador de una fracción y lo que indica cada uno de ellos. Así en la fracción $\frac{2}{3}$, el denominador es el 2 e indica que una determinada magnitud se debe ampliar al doble y el 3, que es el denominador, indica que la magnitud se debe disminuir a la tercera parte. Es mejor no decir "la unidad" sino "la magnitud que a uno le den", pues ésta no necesariamente se utiliza como unidad de medida, y la expresión "la unidad" puede confundir al alumno haciéndolo pensar en la unidad de medida, o en el número uno, oscureciendo el efecto del operador en un sistema concreto.

El denominador 3, es el que le da nombre o denominación a la fracción, pues se llama "dos *tercios*".

Para comenzar se pueden dar dos fracciones con diferente denominador para que los alumnos las expresen con el mismo denominador. Por ejemplo: $\frac{2}{5}$ y $\frac{1}{3}$. Entre todos pueden discutir la manera de hacerlo.
Se espera que lleguen a la conclusión de que se complifica cada una de las fracciones obteniendo varias equivalentes. Luego se busca entre las fracciones equivalentes de cada fracción una que tenga el mismo denominador en los dos casos. Para el ejemplo se tiene:

Complificando la fracción $\frac{2}{5}$ se obtienen algunas fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$:

$\frac{2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{4}{10}$ $\frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$ $\frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{8}{20}$

Complificando se obtienen algunas fracciones equivalentes a $\frac{1}{3}$:

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6} \qquad \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9} \qquad \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15}$$

Cuando se tenga un número suficiente de fracciones equivalentes a cada una de las fracciones dadas, se buscan dos fracciones que tengan el mismo denominador y que cada una de ellas sea equivalente a una de las fracciones dadas.

En este caso se tiene que la fracción $\frac{1}{3}$ es equivalente a la fracción $\frac{5}{15}$; la fracción $\frac{2}{5}$ es equivalente a la fracción $\frac{6}{15}$; por lo tanto $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{5}$ se han transformado en dos fracciones de igual denominador: en

$\frac{5}{15}$ y $\frac{6}{15}$

Posteriormente, pueden hacer el ejercicio con 3 fracciones como las siguientes:

$\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}.$

Algunas fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$ son:

$$\frac{4}{6} \quad \frac{6}{9} \quad \frac{8}{12} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{12}{18} \quad \frac{14}{21} \quad \frac{16}{24} \quad \frac{18}{27} \quad \frac{20}{30}$$

Algunas fracciones equivalentes a $\frac{1}{6}$ son:

$$\frac{2}{12} \quad \frac{6}{18} \quad \frac{4}{24} \quad \frac{5}{30} \quad \frac{6}{36}$$

Algunas fracciones equivalentes a $\frac{1}{5}$ son:

$$\frac{2}{10} \quad \frac{3}{15} \quad \frac{4}{20} \quad \frac{5}{25} \quad \frac{6}{30} \quad \frac{7}{35}$$

Así se obtiene:

$\frac{2}{3}$ es equivalente a $\frac{20}{30}$

$\frac{1}{6}$ es equivalente a $\frac{5}{30}$

$\frac{1}{5}$ es equivalente a $\frac{6}{30}$

Por tanto, las fracciones $\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$ se pueden convertir en: $\frac{20}{30}, \frac{5}{30}, \frac{6}{30}$ respectivamente, que son tres fracciones de igual denominador.

El maestro puede proponer otros ejercicios para que los alumnos transformen fracciones de diferente denominador en fracciones de igual denominador.

Inicialmente lo más importante es que los alumnos comprendan lo que están haciendo. Para conseguirlo es conveniente dar tiempo suficiente para pensar, ensayar y analizar. Pero a medida que vayan entendiendo conviene que empleen algunas técnicas que les permitan resolver los ejercicios con precisión y rapidez. Existen varias técnicas que facilitan la conversión de fracciones de diferente denominador en fracciones de igual denominador. Con la ayuda del maestro, los alumnos pueden resolver ejercicios como los siguientes:

- Expresar con igual denominador las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{7}$.

Se complifica cada fracción por el denominador de la otra.

$$\frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{21}{28} \qquad \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}$$

Se observa que en esa forma se ha resuelto el ejercicio con más rapidez.

- Expresar con igual denominador las fracciones $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$ y $\frac{1}{7}$.

Se complifica la primera fracción por el denominador de la segunda y la segunda por el denominador de la primera:

$$\frac{4 \times 4}{5 \times 4} = \frac{16}{20}$$

$$\frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{15}{20}$$

Así se han obtenido las fracciones $\frac{16}{20}$ y $\frac{15}{20}$ que tienen común denominador.

Pero recordarán que el ejercicio incluía también la fracción $\frac{1}{7}$. Se ensaya un paso más en la solución del ejercicio, complificando las fracciones $\frac{16}{20}$ y $\frac{15}{20}$ por 7 que es el denominador de la tercera fracción y complificando la fracción $\frac{1}{7}$ por 20 que es el denominador obtenido en el paso anterior.

Se espera que los estudiantes lleguen a:

$$\frac{16 \times 7}{20 \times 7} = \frac{112}{140} \qquad \frac{15 \times 7}{20 \times 7} = \frac{105}{140}$$

$$\frac{1 \times 20}{7 \times 20} = \frac{20}{140}$$

En esta forma se obtienen las fracciones $\frac{112}{140}, \frac{105}{140}, \frac{20}{140}$, es decir, tres fracciones con denominador común.

Los alumnos pueden analizar el procedimiento que siguieron y nombrar las complificaciones que hicieron para cada fracción, así:

La primera fracción $\frac{4}{5}$ se complificó por 4 y por 7, que son denominadores de la segunda y de la tercera fracción, respectivamente. Se puede expresar así:

$$\frac{4 \times 4 \times 7}{5 \times 4 \times 7} = \frac{16 \times 7}{20 \times 7} = \frac{112}{140}$$

La segunda fracción $\frac{3}{4}$ se complificó por 5 y por 7 que son denominadores de la primera y de la tercera fracción, respectivamente. Se puede expresar así:

$$\frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7} = \frac{15 \times 7}{20 \times 7} = \frac{105}{140}$$

La tercera fracción $\frac{1}{7}$ se complificó por 20 que es el producto de 5 y 4 que son denominadores de la primera y de la segunda fracción, respectivamente. Se puede expresar así:

$$\frac{1 \times 5 \times 4}{7 \times 5 \times 4} = \frac{5 \times 4}{35 \times 4} = \frac{20}{140}$$

De esta manera se puede concluir que cada fracción se complificó por los denominadores de las otras dos. Para reforzar la adquisición de esta técnica pueden resolver ejercicios como el siguiente:

- Buscar un común denominador para las fracciones:

$\frac{7}{8}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{9}$

A medida que los estudiantes adquieran habilidad para el manejo de esta técnica, pueden complementarla con otras como la de simplificar algunas fracciones antes o después de realizar el ejercicio.

Ejemplo: Hallar común denominador para las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{20}$ y $\frac{7}{9}$.

El ejercicio puede resolverse empleando el procedimiento explicado anteriormente:

$$\frac{2 \times 20 \times 9}{3 \times 20 \times 9} = \frac{40 \times 9}{60 \times 9} = \frac{360}{540}$$

$$\frac{10 \times 3 \times 9}{20 \times 3 \times 9} = \frac{30 \times 9}{60 \times 9} = \frac{270}{540}$$

$$\frac{7 \times 3 \times 20}{9 \times 3 \times 20} = \frac{21 \times 20}{27 \times 20} = \frac{420}{540}$$

La respuesta en este caso es que las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{20}$, $\frac{7}{9}$ son equivalentes respectivamente a las fracciones:

$\frac{360}{540}$, $\frac{270}{540}$, $\frac{420}{540}$ que tienen el mismo denominador.

Como se estudió con anterioridad la simplificación de fracciones, se puede efectuar $\frac{360}{540}$, $\frac{270}{540}$, $\frac{420}{540}$ para obtener $\frac{36}{54}$, $\frac{27}{54}$, $\frac{42}{54}$.

Se puede buscar una forma más sencilla para desarrollar el ejercicio partiendo de las fracciones $\frac{2}{3}$, $\frac{10}{20}$ y $\frac{7}{9}$.

Simplificando la fracción $\frac{10}{20}$ para obtener la fracción $\frac{1}{2}$ y luego aplicando la técnica estudiada así:

$$\frac{2 \times 2 \times 9}{3 \times 2 \times 9} = \frac{4 \times 9}{6 \times 9} = \frac{36}{54}$$

$$\frac{1 \times 3 \times 9}{2 \times 3 \times 9} = \frac{3 \times 9}{6 \times 9} = \frac{27}{54}$$

$$\frac{7 \times 3 \times 2}{9 \times 3 \times 2} = \frac{21 \times 2}{27 \times 2} = \frac{42}{54}$$

Se observa que por este procedimiento se llega al mismo resultado. Más adelante, al realizar las operaciones de adición y sustracción de números fraccionarios, será necesario aplicar algunas de estas técnicas para convertir fracciones a igual denominador.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
67. Ordenar varios operadores fraccionarios atendiendo a los efectos que producen al aplicarlos a una magnitud. (*)	Dada una magnitud, el alumno le aplicará diferentes operadores fraccionarios y los ordenará en forma ascendente o descendente, de acuerdo con los efectos que producen sobre la magnitud.

Sugerencias de actividades y metodología

Esta actividad se puede trabajar por parejas. Cada una dispone de un material de trabajo y algunas instrucciones imprecisas tomadas del lenguaje ordinario; por ejemplo: una pareja puede utilizar una cuerda de una determinada longitud, o una tira de papel, cinta, cabuya, etc., para repartirla "por partes iguales" entre los dos integrantes; otra puede disponer de una hoja de papel para repartirla por "partes iguales" entre los dos; una tercera pareja puede trabajar con un balde con agua para repartirla "por partes iguales". Es posible que varias parejas tengan que trabajar con cuerdas, otras con hojas de papel y algunas con agua.

Cuando cada pareja cumpla con la tarea asignada, se puede hacer un resumen de la actividad escribiendo en el tablero expresiones como:

- A cada integrante de la pareja le correspondió media cuerda.

- A cada integrante de la pareja le correspondió media hoja de papel.

- A cada integrante de la pareja le correspondió medio balde de agua.

Por medio de preguntas se puede ayudar a los alumnos a caer en la cuenta de que aunque se dice que a cada uno le tocó media cuerda, es más correcto decir que a cada uno le tocó una cuerdita más pequeña que la original, pero que las dos se parecen en algo: son igual de largas, o sea, tienen la misma longitud, y ese largo o longitud de cada una de ellas es la mitad de la longitud de la cuerda original. A los alumnos que se repartieron la hoja de papel se les hará caer en la cuenta de que en realidad no les tocó media hoja, sino dos hojitas más pequeñas que la original, que se parecen en algo: en ellas se pueden pintar las mismas figuras, pues tienen la misma forma rectangular y la misma área, y esa área es la mitad del área de la hoja original. Los que se repartieron el agua pueden ver con más facilidad que no les tocó medio balde, sino dos porciones de líquido que se parecen en algo: ambas tienen el mismo volumen, el cual es la mitad del volumen del agua que había en el balde. El balde no se divide en dos; lo que se parte es el volumen del agua en dos porciones de igual volumen.

Es conveniente recalcar que cuando se dice "por partes iguales" se quiere decir algo diferente en cada caso: para las cuerdas, "iguales de largas"; para las hojas, "de igual forma y área"; para el agua, "de igual volumen".

Después de hechas estas aclaraciones se puede concluir que en todos los casos se ha aplicado un operador fraccionario a una magnitud, en esta oportunidad el operador "la mitad de" ó $\frac{1}{2}\times$. Así, a cada integrante de una pareja le correspondió:

Una cuerda que tiene la mitad de la longitud de la cuerda original.

Una hoja que tiene la mitad del área de la hoja original.

Una porción de agua que tiene la mitad del volumen del agua que había en el balde.

Ahora se pueden formar grupos de a cuatro: para esto basta con que se reúnan dos parejas. Como es posible que varias parejas hayan trabajado con cuerda, es conveniente que sean ellas las que se reúnan.

En forma similar lo pueden hacer las parejas que trabajaron con hojas de papel, etc., formando en cada caso grupos de a cuatro. Cada grupo dispondrá del material utilizado inicialmente: una cuerda de la misma longitud que la inicial, o una hoja de papel de la misma área que la inicial o un balde con agua del mismo volumen que el inicial. Ahora la repartición se hace "por partes iguales" entre los cuatro. Es conveniente verificar que los alumnos pueden precisar lo que significa "por partes iguales" en cada caso.

Ahora entre todos buscan el operador que se aplicó a la magnitud en cada caso, llegando a la conclusión de que es el operador que reduce a la cuarta parte ó $\frac{1}{4} \times (\quad)$ ("un cuarto por...") o simplemente $\frac{1}{4} (\quad)$ ("un cuarto de...").

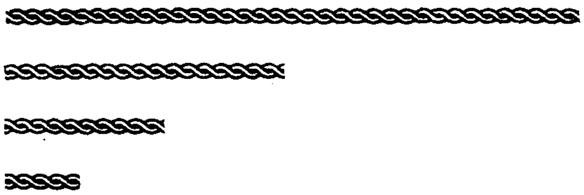
La pareja de numerales separados por la rayita se llama "fracción un cuarto" $\frac{1}{4}$ donde la magnitud que se va a reducir a la cuarta parte se coloca en el paréntesis.

A continuación los alumnos se reúnen en grupos de a ocho para desarrollar una actividad similar a las anteriores, pero ahora el material de trabajo lo reparten entre los ocho. Es importante que la magnitud con que cada grupo va a trabajar sea la misma con que lo hicieron en los casos anteriores; así por ejemplo, la longitud de la cuerda debe ser igual a la que emplearon cuando formaron grupos de dos y de cuatro.

En este caso aplicaron el operador: $\frac{1}{8} \times (\quad)$ ó $\frac{1}{8} (\quad)$, que se llama "la octava parte" o "un octavo". La pareja de numerales separados por la rayita se llama "fracción un octavo" $\frac{1}{8}$.

Enseguida se puede pedir a cada alumno que ordene de mayor a menor las magnitudes que en cada caso obtuvieron, escribiendo al frente la representación del operador que emplearon. El siguiente dibujo ilustra la situación para quienes trabajaron con las cuerdas.

Ordenar de mayor a menor, o sea, en forma descendente.



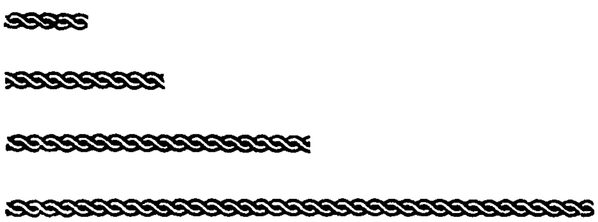
De lo anterior se puede concluir que $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{4}$ porque el operador $\frac{1}{2}$x produjo una longitud mayor que la del operador $\frac{1}{4}$ x aplicándolos a la misma longitud original. (Es mejor no decir "a la unidad").

$\frac{1}{4}$ es mayor que $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$ es mayor que $\frac{1}{8}$

Empleando el símbolo " $>$ " para expresar la relación "... es mayor que..." se tiene:

$\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ $\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

También es importante ordenar los resultados pero ahora de menor a mayor, o sea, en forma ascendente. El dibujo ilustra la situación para el caso de las cuerdas.



De lo anterior se puede deducir que: $\frac{1}{8}$ es menor que $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}$ es menor que $\frac{1}{2}$.

Empleando el símbolo " $<$ " para expresar la relación "... es menor que..." se tiene:

$\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{8} < \frac{1}{2}$

Para expresar que $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ de manera abreviada, se escribe simplemente: $\frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ sin repetir la fracción $\frac{1}{4}$.

En la misma forma se pueden ordenar otros operadores de acuerdo con los efectos que producen al aplicarlos sobre una misma magnitud, por ejemplo: $\frac{2}{3}$x, $\frac{1}{5}$x y $\frac{3}{7}$x. Es conveniente hacer un buen número de estos ejercicios, sólo imaginándose los resultados. Posteriormente los alumnos pueden buscar una técnica para ordenar los operadores, trabajando con las fracciones, pero por ahora es más importante que los ordenen viendo qué tanto aumentan o disminuyen la magnitud a la cual se aplican, y asociando "un operador es más grande que otro" con "el uno produce una magnitud más grande que el otro", cuando ambos se aplican a la misma magnitud inicial. De nuevo, es mejor no decir "a la unidad", pues la medida y la expresión "la unidad" puede confundir al alumno, haciéndolo pensar en la unidad de medida o en el número uno.

También es importante que los alumnos distingan que "más grande" (o "más pequeño") quiere decir algo distinto con cada magnitud: más largo (o menos largo o más corto), más voluminoso (o menos voluminoso), más pesado (o menos pesado o más liviano). (El área es la magnitud más difícil de manejar correctamente en este nivel).

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
68. Aplicar sucesivamente dos operadores de la forma $\frac{m}{n}$ x a una magnitud.	Dados dos operadores de la forma $\frac{m}{n}$ x, el alumno los aplicará sucesivamente a una magnitud.
69. Efectuar la multiplicación de dos números fraccionarios.	El alumno efectuará la multiplicación entre dos números fraccionarios dados.
70. Resolver y formular problemas que requieran de la multiplicación de números fraccionarios (*)	El alumno formulará problemas que requieran de la multiplicación de números fraccionarios y los resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Antes de iniciar esta actividad es conveniente que el maestro tenga en cuenta lo siguiente: hasta este momento se han manejado en este programa los términos operador fraccionario y fracción.

Operador fraccionario para hacer referencia a algo activo, a aquel concepto construido por abstracción, que achica o agranda magnitudes. Un operador fraccionario se representa así: $\frac{m}{n}\times$ ó $\frac{m}{n}(\ \ )$ ó $\frac{m}{n}\times(\ \ )$.

Fracción. Es el dibujito $\frac{m}{n}$ que entra en la representación del operador fraccionario. Hay muchas representaciones para el mismo operador.

$\frac{50}{100}(\ \ )$, $\frac{1}{2}(\ \ )$, $\frac{5}{10}(\ \ )$ son representaciones del operador que achica a la mitad; las fracciones son:

$$\frac{50}{100}, \frac{1}{2}, \frac{5}{10}.$$

Cuando ya conocemos tanto a los operadores y a sus símbolos, y nos olvidamos de que achican o agrandan magnitudes, hablamos de los "números fraccionarios" y confundimos el símbolo y lo que simboliza. (A menos que tengamos algún problema que no se pueda resolver sin volver a distinguir el operador y la fracción, como por ejemplo: ¿el numerador de la mitad es par o impar?);

Hablar, pues, de números fraccionarios en general, supone que los alumnos ya pueden prescindir de aplicarle operadores a una magnitud particular como la longitud, el volumen, etc. Ya pueden jugar con los nuevos objetos que han construido a partir de esos sistemas concretos, y tratarlos como números.

Se puede comenzar la actividad recordando actividades anteriores en las cuales se analizaron los efectos que producen algunos operadores cuando son aplicados a una magnitud. Se pueden estudiar los efectos que producen sobre una magnitud operadores como: $\frac{1}{3}\times$, $\frac{3}{5}\times$, $\frac{4}{3}\times$, $\frac{4}{4}\times$ etc.

Así se recuerda que:

- Operadores como $\frac{1}{3}\times$ disminuyen la magnitud a la cual se aplican; en este caso, se reduce la magnitud a la tercera parte.
- Operadores como $\frac{3}{5}\times$ resultan de la aplicación sucesiva de un operador de la forma $m\times$ y un operador de la forma $\frac{1}{n}\times$ o viceversa, es decir, que se puede aplicar primero el operador que aumenta al triple la magnitud, y luego el que la disminuye a la quinta parte; o aplicar primero el operador que la reduce a la quinta parte, y después el que la aumenta tres veces; se observa que de las dos maneras el operador $\frac{3}{5}\times$ disminuye la magnitud inicial.
- Operadores como $\frac{4}{3}\times$ también resultan de la aplicación sucesiva de un operador de la forma $m\times$ y un operador de la forma $\frac{1}{n}\times$ o viceversa y producen un aumento en la magnitud. En este caso se puede aplicar primero el operador que aumenta cuatro veces la magnitud, y luego el que la reduce a la tercera parte; o aplicar primero el operador que reduce a la tercera parte, y luego el que la cuadruplica.
- Operadores como $\frac{4}{4}\times$, producen el mismo efecto que el operador natural $1\times$, que es el que deja las cosas como están; y que las fracciones que representan a este operador tienen el numerador igual al denominador.

También pueden recordar los efectos de aplicar sucesivamente operadores de la forma $\frac{1}{n}\times$ a una magnitud y calcular el operador que resulta de la aplicación sucesiva de estos operadores. Si a una magnitud se le aplica el operador $\frac{1}{5}\times$ y luego el operador $\frac{1}{4}\times$, se tiene el mismo efecto que si se le aplica el operador $\frac{1}{20}\times$.

Ahora pueden aplicar sucesivamente a una magnitud operadores de la forma $\frac{m}{n}\times$ y analizar los resultados. Por ejemplo, si a una longitud de 30 metros se le aplican de esa forma los operadores $\frac{2}{3}\times$ y $\frac{2}{5}\times$ se tiene:

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{5}\times(30 \text{ metros})\right) = \frac{2}{3}\times\frac{(2\times 30 \text{ metros})}{5} = \frac{2}{5}\times\left(\frac{60}{5}\text{ metros}\right) = \frac{2}{3}\times(12 \text{ metros}) = \frac{2\times 12 \text{ metros}}{3} = \frac{24}{3} \text{ metros} = 8 \text{ metros}$$

Cuando hayan hecho varios ejercicios como estos, entre todos pueden construir un operador que al aplicarlo a la magnitud produzca el mismo resultado que se obtiene al aplicar sucesivamente dos operadores.

Se espera que los alumnos relacionen la aplicación continua de operadores fraccionarios con la multiplicación de números fraccionarios. Así, el operador buscado se halla de la siguiente manera:

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{4}{15}\times(30 \text{ metros})=\frac{4\times 30 \text{ metros}}{15}=\frac{120 \text{ metros}}{15}\cdot$$
$=8$ metros

Los alumnos mismos pronto descubren que para multiplicar números fraccionarios se multiplican entre sí los numeradores y entre sí los denominadores.

Pueden hacer varios ejercicios como los siguientes para practicar el algoritmo de la multiplicación de números fraccionarios.

$$\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{9}$$

$$4\times\frac{2}{3}\times\frac{9}{10}$$

$$\frac{8}{3}\times\frac{2}{5}$$

Cada vez que se realice un ejercicio es conveniente simplificar, si es posible, el resultado.

Ahora los alumnos van a resolver algunos problemas, con la multiplicación de números fraccionarios, como los siguientes:

- Juliana regaló la mitad de los \$ 1000 que tenía a su hermana Rosita, y ésta dio la cuarta parte de este dinero a su amiga Ana. ¿Qué parte de los \$ 1000 recibió Ana y a cuánto dinero correspondía?
- En un colegio hay 1800 alumnos. Los $\frac{3}{5}$ del número de alumnos son mujeres. Si los $\frac{2}{3}$ del número de mujeres están en primaria, ¿qué parte del número de alumnos del colegio son niñas de primaria?

¿Cuántas mujeres hay en el colegio y cuántas de estas alumnas están en primaria?

Al resolver un problema como el primero, es posible que los alumnos caigan en la cuenta de que a los \$ 1000 hay que aplicarles sucesivamente los operadores $\frac{1}{2}\times$ y $\frac{1}{4}\times$, lo cual pueden hacer de dos maneras, así:

1. Dinero que le correspondió a Rosita:

   $$\frac{1}{2}\times(1000)=500$$

   Dinero que le correspondió a Ana:

   $$\frac{1}{4}\times(500)=125$$

2. También hallando primero el operador que produce el mismo resultado que se obtiene al aplicar sucesivamente los operadores $\frac{1}{2}\times$ y $\frac{1}{4}\times$ Dicho operador es $\frac{1}{8}\times$

   $$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}\qquad \frac{1}{8}\times(1000)=\frac{1000}{25}=125$$

   La respuesta del problema sería: Ana recibió la octava parte de los \$1000 o sea \$125.

Para finalizar, los alumnos pueden formular otros problemas en los que haya que aplicar sucesivamente dos o más operadores a una misma magnitud y tener la oportunidad de aplicar la multiplicación entre números fraccionarios para resolverlos.

Pueden también utilizar la técnica de la flecha:

$$\underbrace{\underset{\text{Juliana}}{\$1000}\xrightarrow{\frac{1}{2}}\underset{\text{Rosita}}{\$500}\xrightarrow{\frac{1}{4}}\underset{\text{Ana}}{\$12!}}_{\frac{1}{8}}$$

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
71. Adicionar los resultados de la aplicación de operadores de la forma $\frac{m}{n}\times$ a una misma magnitud, y relacionar esta operación con la adición de números fraccionarios.	Dada la adición de dos números fraccionarios, el alumno asociará esta operación con la adición de los resultados de aplicar los dos operadores correspondientes a una misma magnitud.
72. Efectuar la adición de números fraccionarios.	Dados dos números fraccionarios, el alumno los adicionará.
73. Resolver y formular problemas que requieran de la adición de números fraccionarios. (*)	El alumno formulará un problema que requiera de la adición de números fraccionarios y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Para iniciar la actividad, el maestro puede plantear situaciones como las que se presentan a continuación, para que las resuelvan mediante la manipulación de material concreto. Pueden trabajar por grupos.

Ejemplo 1. Un grupo de alumnos puede disponer de una docena de palitos o piedritas para que resuelvan la siguiente pregunta: ¿Qué parte de la docena se formará si un niño del grupo coloca sobre la mesa una cuarta parte de la docena y otro coloca dos cuartas partes?

Después que los alumnos hayan manipulado el material para obtener la respuesta, el maestro los orienta para que representen la situación de la siguiente manera:.

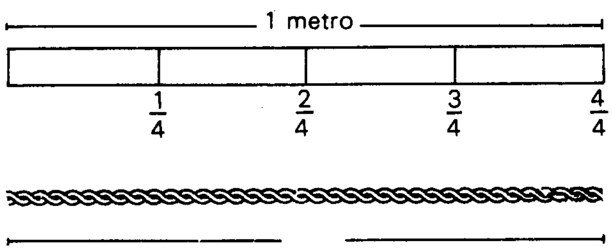
$\frac{1}{4}$ (docena) + $\frac{2}{4}$ (docena) = $\frac{3}{4}$ (docena)

Recordar que $\frac{1}{4}$ (   ) se lee "un cuarto de..."

Ejemplo 2. Otro grupo de alumnos puede trabajar con una cuerda de un metro de longitud. La pregunta para resolver es la siguiente:

Si de la cuerda que se entregó al grupo se sacan dos cuerditas para regalar a un compañero: una cuya longitud es la cuarta parte de la longitud de la cuerda original, y otra cuya longitud es las dos cuartas partes de la longitud de la cuerda original, ¿qué parte de la longitud de la cuerda original se podrá obtener sumando las longitudes de las dos cuerditas que se regalaron?

Para resolver esta situación los alumnos pueden construir una cinta de un metro y hacer marcas en ella de la siguiente manera:



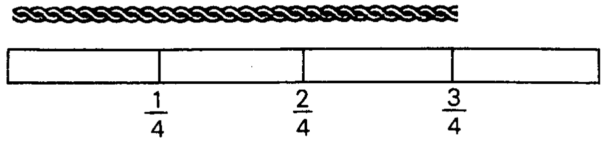
Al colocar la cuerda sobre la cinta de un metro, donde marque un cuarto se corta y se obtiene una cuerdita con una longitud igual a la cuarta parte de la longitud de la cuerda original, que se le dará a un alumno.

Cuerdita de $\frac{1}{4}$ (metro) de longitud

Al colocar de nuevo la cuerda sobre la cinta de un metro; donde marque dos cuartos, cortarán y se obtendrá una cuerdita de una longitud igual a las dos cuartas partes de la longitud de la cuerda original. Esta cuerdita se la darán al mismo alumno.

Cuerdita de $\frac{2}{4}$ (metro) de longitud.

El alumno que recibió las dos cuerditas las coloca sobre el metro unidas por un extremo, así



Se observa que al unir las dos cuerdas una detrás de la otra (lo que es una adición física de sus longitudes), el extremo de la segunda, marca sobre el metro $\frac{3}{4}$. La respuesta sería que la suma de las longitudes de las dos cuerditas que se regalaron dio las tres cuartas partes de la longitud de la cuerda original.

La representación de la situación puede hacerse de la siguiente manera:

$\frac{1}{4}$ (metro) + $\frac{2}{4}$ (metro) = $\frac{3}{4}$ (metro)

Se pueden seguir planteando situaciones similares hasta que los alumnos capten que siempre que se sume el efecto del operdor "un cuarto" con el efecto del operador "dos cuartos", el resultado es el mismo que el efecto que produce el operador "tres cuartos", cualquiera que sea la magnitud a la que se los apliquen.

Luego se pueden repetir los ejemplos anteriores, pero utilizando otros operadores (teniendo en cuenta que inicialmente sólo se utilizan operadores que se representen con fracciones del mismo denominador; por ejemplo, "dos séptimos" y " tres séptimos", "un quinto" y "dos quintos").

Cuando los alumnos hayan hecho suficientes ejercicios y puedan hallar la respuesta sin necesidad de obtenerla manipulando objetos, se puede pasar a la adición de números fraccionarios. Inicialmente se pueden plantear ejercicios que hayan resuelto con material concreto.

Ejemplos: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$ $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} =$ $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} =$

Si los alumnos no encuentran la respuesta, el maestro les puede plantear situaciones que puedan resolver por medio de manipulación de objetos. Con esta experiencia y con muy poca ayuda del maestro, ellos pueden observar muy pronto que cuando se suman números fraccionarios de igual denominador, la respuesta es otro fraccionario del mismo denominador y con numerador igual a la suma de los numeradores de los fraccionarios que se están sumando.

Para la adición de números fraccionarios de distinto denominador, recordarán que éstos se pueden convertir en fraccionarios de igual denominador.

Ejemplo 1. Si vamos a sumar $\frac{1}{2}$ con $\frac{2}{6}$; $\frac{1}{2}$ se puede expresar con denominador 6 así:

$$\frac{1}{2}=\frac{1 \times 3}{2 \times 3}=\frac{3}{6}$$

En la suma $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}$ reemplazamos $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{6}$ y se resuelve como adición de números fraccionarios del mismo denominador.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Ejemplo 2. Sumar $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$

$$\frac{1}{5}=\frac{1 \times 3}{5 \times 3}=\frac{3}{15} \qquad \frac{2}{3}=\frac{2 \times 5}{3 \times 5}=\frac{10}{15}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{3}=\frac{3}{15}+\frac{10}{15}=\frac{13}{15}$$

Si los alumnos dudan de su respuesta o se equivocan, se les puede pedir que vuelvan a la situación concreta de las longitudes.

Es importante que traten de estimar aproximadamente cuánto les va a dar la adición de números fraccionarios, imaginándose la longitud resultante comparada con la original. Por lo menos deberán saber si les va a dar más o menos de un metro, y si más o menos de la mitad.

Es conveniente hacer un número suficiente de adiciones entre números fraccionarios hasta que los alumnos resuelvan sin dificultad cualquier ejercicio.

Para finalizar, se pueden plantear algunos problemas como los siguientes para que los alumnos los resuelvan.

- Como no había sino un solo libro Pedro estudió $\frac{1}{3}$ de hora; apenas acabó Pedro, Enrique estudió $\frac{1}{4}$ de hora; y después de él, Juan estudió $\frac{1}{5}$ de hora. ¿Qué parte de una hora han estudiado entre los tres?
- Helena pintó $\frac{3}{5}$ del área de una pared durante la mañana. Durante la tarde pintó $\frac{1}{5}$ más del área de la misma pared. ¿Qué tanto del área de la pared pintó durante ese día?

Luego pueden formular sus propios problemas tomados de sus actividades diarias y resolverlos.

Como los alumnos tuvieron éxito en la actividad de multiplicar fraccionarios multiplicando numeradores y denominadores, es posible que ensayen también a sumar numeradores y denominadores:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}\,?$$

El maestro no tiene más que referirlos al sistema concreto de las longitudes (o las vueltas, etc.), para que ellos mismos verifiquen si este truco sirve en este caso o no.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
74. Efectuar la sustracción de dos números fraccionarios.	Dados dos números fraccionarios, el alumno efectuará la sustracción entre el mayor y el menor.
75. Resolver y formular problemas que requieran del empleo de la sustracción de números fraccionarios. (*)	El alumno formulará un problema que requiera de la sustracción entre números fraccionarios y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

El estudio de la sustracción de números fraccionarios se puede realizar a partir de situaciones reales o problemas que conduzcan al planteo de sustracciones. Veamos algunos ejemplos:

- Si Juan por la mañana va a estudiar a la casa de Pedro y llega tres cuartos de hora antes de entrar a la escuela, ¿cuánto tiempo podrán estudiar Juan y Pedro si de la casa de Pedro a la escuela gastan un cuarto de hora?

Para resolver este problema y conocer el tiempo que tienen disponible para estudiar, del tiempo disponible se resta el tiempo que requieren para llegar a la escuela. La siguiente es la operación que se efectúa:

$\frac{3}{4}$ (hora) $-$ $\frac{1}{4}$ (hora)

Los alumnos por sí mismos, con muy poca ayuda del maestro, pueden concluir que así como para efectuar la adición de dos números fraccionarios con el mismo denominador sumaban los numeradores y colocaban el mismo denominador, en este caso se efectúa la sustracción entre los dos numeradores y se coloca el mismo denominador así:

$\frac{3}{4}$ (hora) $-$ $\frac{1}{4}$ (hora) $=$ $\frac{3-1}{4}$ (hora) $=$ $\frac{2}{4}$ (hora) $=$ $\frac{1}{2}$ (hora)

La respuesta del problema es que Juan y Pedro pueden estudiar media hora, lo que es equivalente a dos cuartos de hora. Los alumnos pueden verificar el resultado obtenido recurriendo a un reloj, mostrando cuánto son tres cuartos de hora y luego restándole un cuarto de hora para comprobar que, en efecto, el resultado son dos cuartos de hora, o sea media hora.

Se pueden proponer otros problemas de este tipo para que los resuelvan, cuidando en todos los casos que sea posible efectuar la sustracción, o sea, que el número fraccionario inicial sea mayor que el que se va a restar.

- Tengo $\frac{3}{4}$ de litro de aceite. Tengo que guardar $\frac{1}{2}$ litro para hacer la comida. ¿Cuánto puedo gastar al almuerzo?

En este problema se plantea una sustracción de números fraccionarios con distinto denominador: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$.

Para resolverlo expresamos los fraccionarios con el mismo denominador, así: $\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$

Ahora efectuamos la sustracción: $\frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4}$

Otros problemas que pueden resolver son los siguientes:

- Gustavo y Miguel salieron a trotar juntos en la pista atlética. Si Gustavo recorrió $\frac{3}{4}$ de la longitud de la pista atlética y Miguel $\frac{2}{3}$ de la misma longitud, ¿quién cubrió más distancia? ¿Cuál es la diferencia entre el que recorrió más y el que recorrió menos distancia?
- Una modista gasta un rollo de encaje en un delantal y una blusa. Si puso $\frac{2}{5}$ de la longitud del rollo de encaje al delantal, ¿qué parte de la longitud del rollo le queda para la blusa?

Después los alumnos formulan sus propios problemas y los resuelven. Es posible que necesiten de la orientación del maestro para formularlos.

	Objetivo específico	Indicador de evaluación
76.	Resolver y formular problemas que requieran de una o varias de las operaciones con números fraccionarios. (*)	El alumno formulará un problema cuya solución requiera de una o varias de las operaciones con números fraccionarios y los resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Para el desarrollo de esta actividad se puede partir de situaciones reales en donde se necesite efectuar operacions con números fraccionarios para resolverlas. Veamos algunos ejemplos:

1. Un agricultor va a sembrar cereales en un terreno de 840 metros cuadrados de área. Si en $\frac{3}{4}$ de esta área siembra trigo, ¿en cuántos metros cuadrados de terreno habrá trigo?
2. De una pieza de paño de 40 metros de longitud, se vendieron $\frac{2}{5}$ de esa longitud a \$300 cada metro. ¿Cuánto dinero se recibió por esa venta?
3. Si se añade una cinta que tiene una longitud de $\frac{5}{2}$ de metro con otra que tiene $\frac{7}{4}$ de metro, ¿cuánto

falta para completar 10 metros de longitud de cinta?

En la escuela se va a realizar una prueba de velocidad, para la que se inscribieron 12 alumnos. Las reglas para clasificar son las siguientes:

a) De los doce niños, una tercera parte de los inscritos pasan a las semi-finales.

b) A la final llegan la mitad de los alumnos que pasaron a las semifinales. ¿Cuántos alumnos pueden ir a la final del campeonato?

Se aprovechará cada uno de estos problemas para hacer énfasis en cada operador, en la magnitud a la que se aplica, en el efecto que se producirá, y cada vez que se hagan operaciones con números fraccionarios, se debe buscar la relación con alguna aplicación combinada de los operadores correspondientes.

Por ejemplo, para el problema "Un agricultor va a sembrar cereales en un terreno de 840 metros cuadrados de área. Si en $\frac{3}{4}$ de esa área siembra trigo, ¿en cuántos metros cuadrados de terreno habrá trigo?

Para hallar respuesta a este problema se va a aplicar el operador $\frac{3}{4}\times$ a una magnitud que es el área, y este operador va a producir una disminución en la magnitud así:

$$\frac{3}{4}\times(840\text{m}^2) = \frac{3 \times 840}{4}\ \text{m}^2 = \frac{2520}{4}\ \text{m}^2 = 630\ \text{m}^2$$

Quiere decir que sólo en 630 m² del terreno se va a sembrar trigo.

Para el problema: "Si se añade una cinta que tiene una longitud de $\frac{5}{2}$ de metro con otra que tiene $\frac{7}{4}$ de metro, ¿cuánto falta para completar 10 metros de longitud de cinta?".

Como se desea saber cuántos metros faltan para completar 10 metros de cinta, hay que averiguar primero la longitud de los dos pedazos de cinta que se añadieron al principio. Para esto se suma $\frac{5}{2}$ con $\frac{7}{4}$.

$$\frac{5}{2}+\frac{7}{4} = \frac{10}{4}+\frac{7}{4} = \frac{10+7}{4} = \frac{17}{4}$$

Es decir que $\frac{17}{4}$ de metro es la longitud de los dos pedazos de cinta que se añadieron; se tiene una longitud mayor que un metro, por lo que el operador $\frac{17}{4}\times$ produce un aumento.

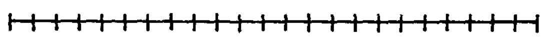
Ahora se halla cuántos metros faltan para completar 10 metros, efectuando una sustracción: 10 metros son $\frac{40}{4}$ de metro.

$$\frac{40}{4}-\frac{17}{4} = \frac{40-17}{4} = \frac{23}{4}$$

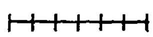
Quiere decir que faltan $\frac{23}{4}$ de metro para completar los 10 metros. Para caer en la cuenta de qué tanto son $\frac{23}{4}$ de metro en la realidad, se puede tomar una longitud de un metro (puede ser una piola, una cuerda, una cinta de papel, etc.) y aplicarle dicho operador. Se recuerda que aplicar el operador $\frac{23}{4}\times$ a una magnitud equivale a aumentarla 23 veces y luego reducir la magnitud resultante a la cuarta parte, o a reducir la magnitud a la cuarta parte y aumentar lo que resulte 23 veces, ya que en cualquiera de los casos se produce el mismo efecto.

Si se hace de la primera forma, se toma la longitud de un metro y se aumenta 23 veces, así se obtienen 23 metros; luego a esta longitud se le aplica el operador que reduce a la cuarta parte, o sea que se reparte la longitud de 23 metros en cuatro partes iguales en longitud. Se obtiene una situación como la siguiente:

Longitud inicial



Cuerda cuya longitud se aumentó 23 veces.



Longitud que resulta después de hecha la repartición en cuatro partes de la misma longitud.

Es posible que en la escala no se pueda conseguir una cuerda cuya longitud sea de 23 metros; si esto ocurre, para aplicarle el operador $\frac{23}{4}\times$ a la longitud de un metro se puede emplear la otra forma, o sea reducir la magnitud a la cuarta parte y a ese resultado aplicarle el operador que aumenta 23 veces.

Cuando los alumnos hayan analizado y resuelto un número suficiente de problemas, pueden formular otros nuevos tomados de sus juegos, sus actividades diarias, las compras que hacen, etc., que para solucionarlos requieran el uso de la adición, la sustracción, la multiplicación o la adición y sustracción de números fraccionarios.

Posiblemente los problemas que los alumnos formulen al principio sean oscuros o ambiguos; el maestro los puede orientar para que ellos mismos vean los datos que han omitido, etc., y formulen de nuevo los problemas.

La habilidad para formular problemas es tan importante como la habilidad para resolverlos. Frecuentemente se ha venido desarrollando más la segunda. Sin embargo, cada día se ve más la necesidad de estimular la habilidad requerida para la formulación de problemas de cada uno de los temas estudiados.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
77. Expresar un operador de la forma $\frac{m}{n}x$, que aumenta una magnitud, como la suma de un operador de la forma mx y uno de la forma $\frac{1}{n}x$.	El alumno expresará un operador como $\frac{7}{3}x$ como la suma de un operador que aumenta y uno que disminuye.

Sugerencias de actividades y metodología

Pueden comenzar aplicando distintos operadores de la forma $\frac{m}{n}x$ a alguna magnitud; por ejemplo, a la longitud. Para esto pueden emplear material como: cabuya, piola, cintas o tiras de papel.

Inicialmente pueden aplicar operadores como: $\frac{3}{4}x$, $\frac{2}{2}x$, $\frac{5}{3}x$, $\frac{12}{5}x$, y analizar los efectos que producen sobre las longitudes. Así se recuerda que algunos operadores disminuyen, otros aumentan y otros dejan como está la magnitud.

Luego van a trabajar sólo con los operadores que aumentan. Por ejemplo, si se ha aplicado el operador $\frac{12}{5}x$ a la longitud de un metro, se compara la longitud inicial (1 metro) con la longitud que resultó al aplicar el operador. Se puede hacer superponiendo la cuerda de longitud menor sobre la cuerda de longitud mayor. Se encuentra que la longitud menor, que en este caso es la longitud de 1 metro, cabe 2 veces en la longitud que resultó después de aplicar el operador $\frac{12}{5}x$ y sobra un pedacito que tiene una longitud menor que la del metro, es decir que aplicar el operador $\frac{12}{5}x$ a una longitud es equivalente a aplicarle el operador 2x y agregarle un pedacito. Se puede averiguar qué parte de la longitud del metro es el pedacito, o qué operador se le aplicó a la longitud de un metro para obtener el largo del pedacito.

Se espera que al hacer la comparación de las dos longitudes concluyan que es el operador $\frac{2}{5}x$.

Así se obtiene que el operador $\frac{12}{5}x$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{12}{5}\times(\ \ ) = 2\times(\ \ ) + \frac{2}{5}\times(\ \ )$$

Después que hayan trabajado con el material pueden comprobarlo descomponiendo el número fraccionario correspondiente de la siguiente manera: se descompone el numerador en la suma de dos números, procurando que uno de ellos sea múltiplo del denominador. De esta forma se tiene la suma de dos fraccionarios con el mismo denominador; uno de éstos es equivalente a un natural:

$$\frac{12}{5} = \frac{10+2}{5} = \frac{10}{5} + \frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5}$$

La expresión $2 + \frac{2}{5}$ se puede abreviar $2\frac{2}{5}$, que se lee "dos y dos quintos".

Así queda descompuesto el operador $\frac{12}{5}x$, en la suma del operador 2x y el operador $\frac{2}{5}x$

En este momento se puede decir a los alumnos que al operador de la forma *m*x que resulta de la descomposición, se acostumbra llamarlo "la parte entera" del operador que aumenta. En este caso 2 es la parte entera del operador $\frac{12}{5}x$.

Quiere decir que aplicarle el operador $\frac{12}{5}x$ a una longitud de un metro, equivale a aumentarla 2 veces y agregarle una longitud más pequeña que el metro (esta longitud resulta de aplicarle el operador $\frac{2}{5}x$ a la longitud de un metro).

Se propondrán otros operadores que aumentan para que los alumnos los descompongan.

$$\frac{18}{7} = \frac{14+4}{7} = \frac{14}{7} + \frac{4}{7} = 2 + \frac{4}{7} = 2\frac{4}{7}$$

Estos fraccionarios presentados en la forma $2\frac{2}{5}$, $2\frac{4}{7}$ se conocen con el nombre de números mixtos.

Cuando los alumnos hayan hecho ejercicios suficientes y hayan concluido que un operador que aumenta se puede descomponer como la suma de un operador de la forma *m*x y uno de la forma $\frac{1}{n}x$, se puede proponer que descompongan operadores que disminuyen, como $\frac{3}{5}x$. Se observa que no se puede descomponer.

Se orientará a los alumnos para que concluyan que un operador que disminuye no se puede descomponer en la suma de un operador de la forma *m*x y uno de la forma $\frac{1}{n}$x, y que en este caso se dice que la parte entera del operador es cero, o que el operador no tiene parte entera. Se puede expresar así: $\frac{3}{5} = 0 + \frac{3}{5}$. Esto es importante para preparar la escritura de expresiones decimales.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
78. Identificar fracciones cuyo denominador es 10 ó 100 como fracciones decimales.	El alumno dará algunos ejemplos de fracciones decimales.
79. Representar fracciones decimales mediante una expresión decimal.	El alumno expresará algunas fracciones decimales mediante una expresión decimal.
80. Reconocer expresiones decimales equivalentes.	Dada una expresión decimal, el alumno dará dos expresiones decimales equivalentes.

Sugerencias de actividades y metodología

Se puede iniciar la actividad escribiendo en el tablero algunas fracciones como las siguientes, para que los alumnos identifiquen una característica que sea común a todas esas fracciones:

$\frac{3}{10}, \frac{25}{10}, \frac{128}{100}, \frac{4}{100}, \frac{225}{10}, \frac{78}{100}$, etc.

Se observa que todas las fracciones dadas tienen denominador 10, ó 100, o sea, una potencia de diez. Las fracciones que cumplen dicha característica se conocen con el nombre de "fracciones decimales".

En este momento se puede pedir a los alumnos que den algunos ejemplos de fracciones decimales y que al mismo tiempo las vayan clasificando según el efecto que producen los operadores respectivos.

Así, para los ejemplos dados inicialmente, la clasificación es la siguiente:

Aumentan: $\frac{25}{10}, \frac{128}{100}, \frac{125}{10}$

Disminuyen: $\frac{3}{10}, \frac{4}{100}, \frac{78}{100}$

Luego se toman las fracciones que aumentan y se descomponen en un número natural y un fraccionario, así:

$$\frac{25}{10} = \frac{20+5}{10} = \frac{20}{10} + \frac{5}{10} = 2 + \frac{5}{10} = 2\frac{5}{10}$$

$$\frac{128}{100} = \frac{100+28}{100} = \frac{100}{100} + \frac{28}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1\frac{28}{100}$$

$$\frac{125}{10} = \frac{120+5}{10} = \frac{120}{10} + \frac{5}{19} = 12 + \frac{5}{10} = 12\frac{5}{10}$$

Recuérdese que al número natural que resulta de la descomposición se acostumbra llamarlo "parte entera" del fraccionario; que los fraccionarios que disminuyen no tienen parte entera y que se suele decir que la parte entera de estos fraccionarios es cero. Veamos los ejemplos:

$$\frac{3}{10} = 0 + \frac{3}{10} = 0\frac{3}{10}; \quad \frac{4}{100} = 0 + \frac{4}{100} = 0\frac{4}{100};$$

$$\frac{78}{100} = 0 + \frac{78}{100} = 0\frac{78}{100}$$

Enseguida el maestro puede explicar otra forma de representar fracciones decimales en la cual se siguen los mismos pasos de la numeración decimal.

Antes de iniciar la explicación les puede recordar que en el sistema de numeración decimal (base diez) se tiene:

10 unidades = 1 decena

10 decenas = 1 centena

10 centenas = 1 unidad de mil, etc.

Una unidad de mil se forma con *diez* centenas, una centena se forma con *diez* decenas, una decena se forma con *diez* unidades.

Se preguntará si una sola unidad suelta se podrá formar de la misma manera con algo que los alumnos conozcan.

Orientados por el maestro, pueden concluir que *diez* décimos o *diez* décimas forman una unidad, así:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 1$$

De la misma forma, *diez* centésimos o centésimas forman un décimo o una décima $(\frac{1}{10})$.

Se puede recordar que la representación visual de los números se llama representación en base diez, por el papel que desempeña el diez según la posición de cada dígito. Así por ejemplo, 825 en base diez se expresa de la siguiente manera:

$825 = (8 \times 100) + (2 \times 10) + (5 \times 1) = 800 + 20 + 5 = 825$

Se indicará que la posición ocupada por un dígito señala un valor diez veces menor que el señalado por la posición que está inmediatamente a la izquierda.

Si se tiene la fracción decimal $\frac{1257}{10}$, se puede expresar así:

$\frac{1250 + 7}{10} = 125 + \frac{7}{10} = 125\frac{7}{10}$

125 es la parte entera y $\frac{7}{10}$ es una fracción decimal.

Esta misma situación la podemos representar de la siguiente manera:

$(1 \times 100) + (2 \times 10) + (5 \times 1) + (7 \times \frac{1}{10})$

Siguiendo los pasos de la numeración decimal, debemos colocar primero el 1 de las centenas, enseguida el 2 de las decenas, luego el 5 de las unidades. En la misma forma se coloca la cifra de las décimas (en este caso 7).

Pero para separarla de la parte entera, colocamos un punto, quedando la expresión así: 125.7 y se lee "ciento veinticinco con siete" o "ciento veinticinco unidades, siete décimas" o "ciento veinticinco punto siete".

Se puede decir que 125 es la parte entera y 7 la parte decimal. La parte entera está separada de la parte decimal mediante un punto. Este se llama "punto decimal".

Se pueden tomar algunos de los ejemplos dados inicialmente y explicar en cada caso cómo puede pasarse a la expresión decimal.

(a) $\frac{3}{10}$ lo escribimos como $0 + \frac{3}{10}$; también $0\frac{3}{10}$ ó $0 + (3 \times \frac{1}{10})$. De esta forma podemos ver que esta fracción tiene parte entera cero y 3 décimas; en la expresión decimal escribimos primero 0 para la parte entera, enseguida el punto y luego el 3, que es el número de décimas o la parte decimal.

Entonces $\frac{3}{10} = 0.3$ se lee "tres décimas", o "tres décimos", o "cero punto tres".

b) $\frac{25}{10} = \frac{20}{10} + \frac{5}{10} = 2 + \frac{5}{10} = 2\frac{5}{10}$

El resultado es: 2 más 5 décimas; siguiendo los pasos de la numeración decimal resulta: $\frac{25}{10} = 2.5$, que se lee "dos punto cinco" o "dos unidades cinco décimas"; dos en la parte entera y cinco en la parte decimal.

c) $\frac{4}{100} = 0 + \frac{4}{100} = 0\frac{4}{100}$. Como no hay parte entera, colocamos 0 en la parte entera; como tampoco hay décimas, podemos colocar 0 décimas, así: $\frac{4}{100} = 0 + (0 \times \frac{1}{10}) + (4 \times \frac{1}{100})$; siguiendo los pasos de la numeración decimal nos queda:

$\frac{4}{100} = 0.04$, que se lee "cuatro centésimas" o "cuatro centésimos", o "cero punto cero cuatro", o "cero y cuatro centésimas". Cero es la parte entera y 04 es la parte decimal.

d) $\frac{128}{100} = \frac{100}{100} + \frac{28}{100} = 1 + \frac{28}{100} = 1\frac{28}{100}$. Para este ejemplo se seguirá descomponiendo la fracción de la siguiente manera:

$1 + \frac{20 + 8}{100} = 1 + \frac{20}{100} + \frac{8}{100} = 1 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} = 1 + (2 \times \frac{1}{10}) + (8 \times \frac{1}{100})$

Uno es la parte entera, 2 son décimas y 8 son centésimas; siguiendo los pasos de la representación decimal nos queda:

$\frac{128}{100} = 1.28$ que se puede leer "1 unidad, 2 décimas y 8 centésimas".

Teniendo en cuenta que: 2 décimas equivalen a 20 centésimas, se podría leer: "1 unidad 20 centésimas y 8 centésimas". Pero como 20 centésimas y 8 centésimas son 28 centésimas, esta lectura se puede simplificar diciendo: "1 unidad 28 centésimas" o "uno con veintiocho" o "uno punto veintiocho".

1 es la parte entera y 28 es la parte decimal.

e) $\frac{78}{100} = \frac{70}{100} + \frac{8}{100} = \frac{7}{10} + \frac{8}{100} = (7 \times \frac{1}{10}) + (8 \times \frac{1}{100})$

$\frac{78}{100} = 0.78$ que se lee "setenta y ocho centésimas".

f) $\frac{50}{10} = 5 = 5 + (0 \times \frac{1}{10}) = 5 + (0 \times \frac{1}{10}) + (0 \times \frac{1}{100})$

En esta fracción observarán que sólo tiene parte entera que es 5; no tiene parte decimal. Se dice que la parte decimal es 0, y se puede representar también como 5.0, ó, 5.00.

Se puede orientar a los alumnos para que concluyan que todo número natural se puede representar como una expresión decimal, cuya parte decimal es 0, ó 00, etc. Así, 23 se puede expresar como 23.0, ó, 23.00.

Luego se puede tomar nuevamente la fracción $\frac{3}{10}$ y pedir a los alumnos que la complifiquen por 10; así:

$$\frac{3}{10}=\frac{3 \times 10}{10 \times 10}=\frac{30}{100}$$

Recordarán que estas dos fracciones son equivalentes y escribirán: $\frac{3}{10}=\frac{30}{100}$. Enseguida escribirán la expresión decimal correspondiente a cada una de estas fracciones: $\frac{3}{10}=0.3$ $\frac{30}{100}=0.03$

Como las dos fracciones son equivalentes, también lo serán las expresiones decimales y se tendrá que: 0.3 = 0.30. Al comparar estos dos decimales que son equivalentes, los alumnos pueden concluir que lo que se ha hecho es agregar un cero a la derecha de 0.3 para obtener 0.30.

Se pueden dar otras expresiones decimales para que los alumnos le hallen a cada una de ellas una expresión decimal equivalente.

Ejemplos: 4.3 = 4.30; 5 = 5.00; 3.80 = 3.8; 4.00 = 4.0 = 4

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
81. Efectuar adiciones de números decimales.	El alumno efectuará tres adiciones con números decimales.

Sugerencias de actividades y metodología

Para formular el algoritmo de la adición de números decimales se pueden hacer diversos ejercicios, procurando aumentar el grado de complejidad, el número de sumandos, el número de cifras decimales de los sumandos, etc. Resulta más interesante para los alumnos si se parte de situaciones reales o problemas en los que ellos vean la necesidad de efectuar los diferentes tipos de adiciones.

Posiblemente el maestro conozca otros algoritmos y otras secuencias para el aprendizaje de esta operación. Aquí le sugerimos otra secuencia del algoritmo más conocido para que la compare y vea cuál le da mejores resultados con los alumnos.

Se puede comenzar con adiciones de dos sumandos, luego con tres y finalmente con cuatro o más.

Antes que los alumnos efectúen adiciones de números decimales empleando un algoritmo, es conveniente que hagan algunos ejercicios de cálculo mental. Estos ejercicios consisten en que ellos estimen de manera aproximada la magnitud del resultado de una adición de decimales. El maestro puede dar algunos sumandos para que los alumnos encuentren mentalmente una aproximación al resultado, diciendo entre qué números deberá estar; para esto tomarán como referencia la parte entera del decimal; podrán decir: "está entre 12 y 13", o "entre 65 y 67".

Puede proponerse una adición como la siguiente: 3.68 + 12.2 + 0.5

Los alumnos pueden realizar mentalmente un razonamiento como el siguiente: como lo que se pide es una aproximación de la parte entera, se suma la parte entera de los tres sumandos así: 3 + 12 + 0 = 15 unidades. Esta aproximación es suficiente en algunos casos. Si queremos una mejor por las décimas que hay, se puede aumentar una unidad, que sumada con las 15 anteriores da 16 unidades. Luego el resultado de la adición puede estar entre 16 y 17.

Ejercicios como este sirven para que cuando el alumno efectúe una adición empleando un algoritmo, compruebe que lo ha hecho correctamente, o encuentre por sí mismo que se ha equivocado, y entonces se ocupe de buscar dónde está el error.

1. Adiciones con dos sumandos.

   Se puede seguir una secuencia de ejercicios como esta:

   a) 3.5 + 1.2

   b) 8.7 + 25.9

   c) 0.27 + 3.21

   d) 4.72 + 0.98

   e) 9.85 + 12.7

   Obsérvese que los sumandos tienen ambos una cifra decimal, ambos dos cifras decimales, o uno una cifra decimal y el otro dos. Recuérdese que se colocan los sumandos uno debajo del otro, de modo que los puntos decimales queden en columna, y se efectúa la adición en cada una de las columnas, empezando por la primera de la derecha, ya sea la de las décimas o la de las centésimas.

Dicha adición se hace como si se tratara de números naturales, teniendo el cuidado de colocar en el resultado el punto decimal de modo que quede alineado en columna con los puntos de los sumandos. En adiciones como la última hay que tener cuidado al colocar los sumandos, ya que es posible que algunos alumnos coloquen el 7 debajo del 5, lo cual alteraría el resultado. Es conveniente no obligar a los estudiantes a corregir el alineamiento de las cifras hasta que ellos mismos noten la necesidad al ver que el resultado obtenido de esta forma está bastante alejado del logrado por cálculo mental.

Para este último caso se puede explicar a los alumnos que como 7 décimas son equivalentes a 70 centésimas, la expresión 12.7 también se puede escribir 12.70. De esta manera se tienen dos sumandos, cada uno con dos cifras decimales.

Adiciones con tres sumandos

Se pueden hacer adiciones como las siguientes:

a) 5 + 3.1 + 0.3 c) 3.42 + 0.94 + 13.22

b) 4.7 + 3.5 + 12.2 d) 123.9 + 0.08 + 1.2

Antes de efectuarlas en detalle, se puede pedir una estimación del posible resultado, adicionando mentalmente la parte entera de los sumandos. Para la adición 5 + 3.1 + 0.3 los alumnos pueden decir que da 8 y algo, u 8 y un poquito, etc.

Hay que tener mucho cuidado con las adiciones en donde uno de los sumandos es un número natural, ya que podrán cometer errores al colocarlo en columna para sumarlo. Si lo hacen equivocadamente, el maestro utilizará la estimación aproximada para mostrarles que ese no puede ser el resultado. En este momento se recuerda que un número natural tiene como parte decimal 0, así, 5 = 5.0 = 5.00.

En adiciones como la última hay que tener cuidado al colocar los sumandos uno debajo del otro, ya que el número de cifras decimales no es el mismo en todos los sumandos. Hay que recalcar que los puntos van en columna.

Si algún alumno tiene dificultad al efectuar esta adición, el maestro puede proponerle que la haga de la siguiente manera: Como 9 décimas = 90 centésimas, la expresión 123.9 se puede escribir también como 123.90; como 2 décimas = 20 centésimas, la expresión 1.2 = 1.20. De esta manera se obtendrá una adición de tres sumandos cada uno con dos cifras decimales.

3. Adición de cuatro o más sumandos

El maestro puede proponer algunas adiciones de cuatro o más sumandos, en donde éstos tengan una o dos cifras decimales, como las siguientes:

a) 149.08 + 0.03 + 1.3 + 3.5

b) 0.05 + 4 + 3.95 + 5.1 + 100.29

c) 113 + 0.07 + 5.1 + 2 + 13.98

Antes de colocar los sumandos en columna, los alumnos estimarán el resultado adicionando mentalmente las partes enteras. Esta estimación aproximada es la mejor herramienta para que los mismos alumnos puedan corregir sus propios errores de colocación de las cifras o de sumas equivocadas.

Una manera útil de verificar si la suma está correcta es volverla a hacer hacia arriba, cuando se han dispuesto los sumandos en columna. El maestro puede hacer que los alumnos comprueben todas sus adiciones , sobre todo si tienen más de dos sumandos, repitiéndolas sumando hacia arriba. No hace falta volver a escribir cada resultado arriba, sino verificar si coincide con la cifra escrita abajo.

Objetivo específico	Indicador de evaluación
82. Efectuar sustracciones de números decimales.	El alumno efectuará tres sustracciones de números decimales.

Sugerencias de actividades y metodología

Al formular un algoritmo para la solución de sustracciones de números decimales, se puede seguir un procedimiento muy parecido al que se utilizó en la adición. Se puede partir también de problemas en los que los alumnos vean la necesidad de efectuar esta operación.

Inicialmente, se pueden hacer algunas sustracciones cuyos términos tengan una sola cifra decimal como: 8.5 - 3.2; 9.2 - 7.8.

En cada caso se hace primero una estimación mental del resultado y se escribe el minuendo y debajo el sustraendo, de modo que los puntos decimales queden en columna. Se efectúa la resta comenzando por la columna de las décimas, y en el resultado se coloca el punto decimal de modo que quede en columna con los puntos del minuendo y del sustraendo.

$$\begin{array}{r} 8.5 \\ -\ 3.2 \\ \hline 5.3 \end{array}$$

El resultado de la sustracción es 5.3, los alumnos lo pueden comprobar sumando hacia arriba 5.3 más 3.2. Para la otra resta la explicación es similar. Se estima primero el resultado que debe dar cerca de 2.

Si algún alumno necesita escribir lo que ha "prestado" se le puede permitir que lo haga mientras adquiere la habilidad de registrarlo mentalmente.

En seguida se pueden hacer sustracciones en donde el minuendo y el sustraendo tengan dos cifras decimales, como las siguientes:

13.35 - 10.82 32.03 - 1.24

Es conveniente hacer suficientes ejercicios como estos, en los que hay que hacer "préstamos" y "prestados repetidos" ya que pueden presentar alguna dificultad para los alumnos.

Ahora se pueden efectuar sustracciones en donde uno de los términos tenga una cifra decimal y el otro dos, como:

10.9 - 8.53 3.21 - 0.8

Recordarán que como $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$ ó que 0.1 = 0.10, de la misma forma 10.9 = 10.90. Así al efectuar la sustracción 10.9 - 8.53 se tendrá el caso en que los términos poseen dos cifras decimales cada uno. Lo mismo al realizar la sustracción 3.21 - 0.8, los alumnos pueden expresar como 0.80.

Es importante recalcar a los estudiantes el cuidado que deben tener al efectuar sustracciones en las cuales el número de cifras decimales del minuendo es diferente al número de cifras decimales del sustraendo, haciendo énfasis en que si faltan cifras en alguno de los términos, se busque la expresión decimal equivalente para que al escribirlos tengan el mismo número de cifras decimales.

Para finalizar, se pueden hacer algunas sustracciones en donde uno de los términos es un número natural, como las siguientes:

5 - 1.29; 20.85 - 12; 14 - 0.9; 15.8 - 4

Recordarán que un número natural se puede expresar como un número decimal cuya parte decimal es 0. Así 5 = 5.0, ó 5 = 5.00. Utilizarán ésto para efectuar dichas sustracciones.

En la sustracción 5 - 1.29, como 1.29 tiene dos cifras decimales expresamos el 5 como 5.00. Luego se coloca el sustraendo debajo del minuendo, de modo que los puntos decimales queden en columna y se efectúa la sustracción.

El maestro puede proponer otras sustracciones, en las cuales el número de cifras decimales de los términos sea diferente; otras en las cuales haya que prestar, etc., hasta lograr que los alumnos realicen sin dificultad cualquier sustracción. No debe olvidar preguntar primero por la estimación aproximada del resultado, y después de efectuada la sustracción, pedir que se compruebe, sumando hacia arriba el resultado con el sustraendo para obtener el minuendo.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
83. Resolver y formular problemas que requieran adiciones y sustracciones de números decimales.	El alumno formulará un problema cuya solución requiera adiciones y sustracciones de números decimales, y lo resolverá.

Sugerencias de actividades y metodología

Para esta actividad el maestro puede formular algunos problemas, tomados de la vida diaria de los alumnos y cuyas soluciones requieran de la adición o de la sustracción o de ambas operaciones, como los siguientes:

- Martha gasta en el mercado $353.75 en frutas, $180.28 en carne, $70 en verduras y $16.50 en transporte. ¿Cuánto dinero gastó por todo?
- Antonio recorre en bicicleta 15.65 Km el lunes, 10.6 Km el martes y 9 Km el miércoles. ¿Cuántos

Km debe recorrer el jueves para completar 45 Km de recorrido?

- En un barril se echan dos tarros de aceite; en uno dice que hay 16.4 litros y en el otro 32.8 litros. ¿Cuántos litros faltan para completar 100 litros de aceite si los letreros estaban correctos?
- De una pieza de tela de 25 m de longitud se corta un pedazo que mide 4.35 m y otro 6.75 m de longitud. ¿Cuántos metros de longitud de la tela se han recortado y cuántos metros de longitud quedan?
- Hernán guardó en su alcancía $12.50 el lunes, el miércoles $8.25, el viernes $37.25 y el domingo sacó $36.95. ¿Cuánto dinero le quedó?

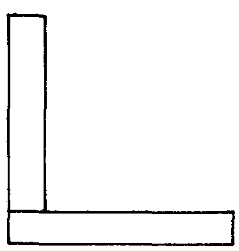
Los alumnos pueden organizarse en grupos pequeños (de a 2 ó de a 3) y el maestro le asigna a cada grupo un problema para que discutan la solución. Cuando hayan realizado un número suficiente, los estudiantes pueden formular problemas de este tipo y resolverlos. El maestro puede limitarse a señalar frases oscuras o ambiguas para que los alumnos las redacten bien, o a indicar que falta algún dato para tener la información necesaria para resolver el problema.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
84. Identificar las características de una escuadra, de una regla y de un compás.	El alumno dirá oralmente cuáles son las características de una escuadra, de una regla y de un compás.
85. Trazar figuras planas empleando regla, escuadra y compás. (*)	El alumno dibujará figuras empleando la regla, o la escuadra, o el compás.

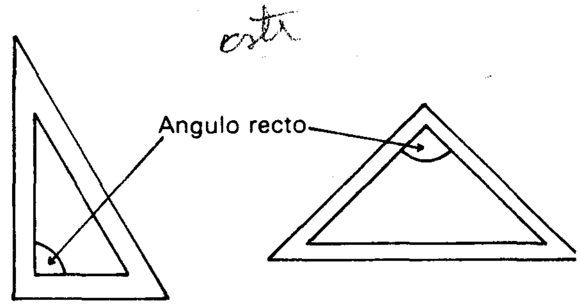
Sugerencias de actividades y metodología

Para el desarrollo de estos objetivos, conviene que el maestro con anterioridad a la clase pida a los alumnos que lleven un compás, una o dos escuadras y una regla, si les es posible.

Antes de iniciar el manejo propiamente dicho de las escuadras y el compás, es conveniente que los alumnos se familiaricen con ellos y conozcan algunas de sus características. En cuanto a las escuadras, es factible que los alumnos conozcan algunos tipos de ellas, como la escuadra de carpintero, que se caracteriza por tener forma de L, igual a la que se muestra en la figura.

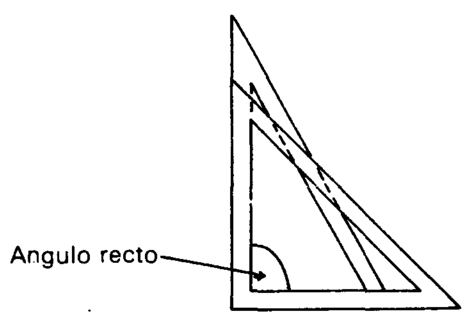


Para dibujos se emplean escuadras de forma triangular. Estas escuadras se construyen de diferentes tamaños, pero en términos generales tienen una de las dos formas que se muestran a continuación.

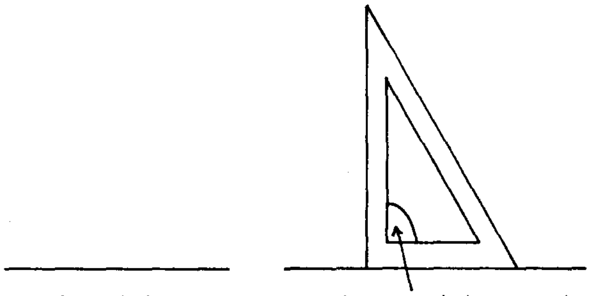


Con base en el manejo de las escuadras, y orientados por preguntas formuladas por el maestro, los alumnos encuentran algunas de las características de las escuadras, como son:

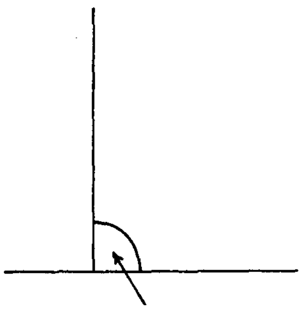
1. Cada una de las escuadras tiene un ángulo recto en la figura se indica en cada caso cuál es. Para comprobarlo, los alumnos podrán colocar una escuadra sobre la otra y comparar los ángulos así:



Como ejercicio, los alumnos pueden dibujar algunos ángulos rectos; una forma de hacerlo es: trazan una línea recta, empleando una regla o una escuadra. A continuación hacen coincidir uno de los lados que constituyen el ángulo recto de la escuadra con la línea trazada. Para formar dicho ángulo trazan una línea que coincida con el otro lado que forma el ángulo recto de la escuadra. La figura ilustra los pasos a seguir.

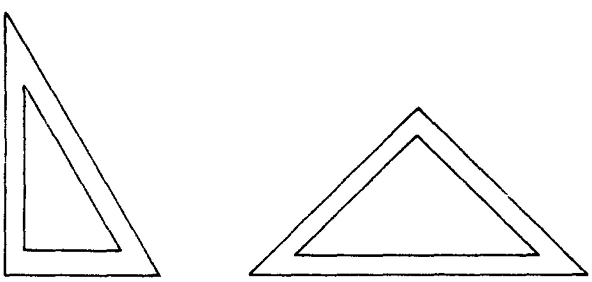


Línea de base   Angulo recto de la escuadra



Angulo recto

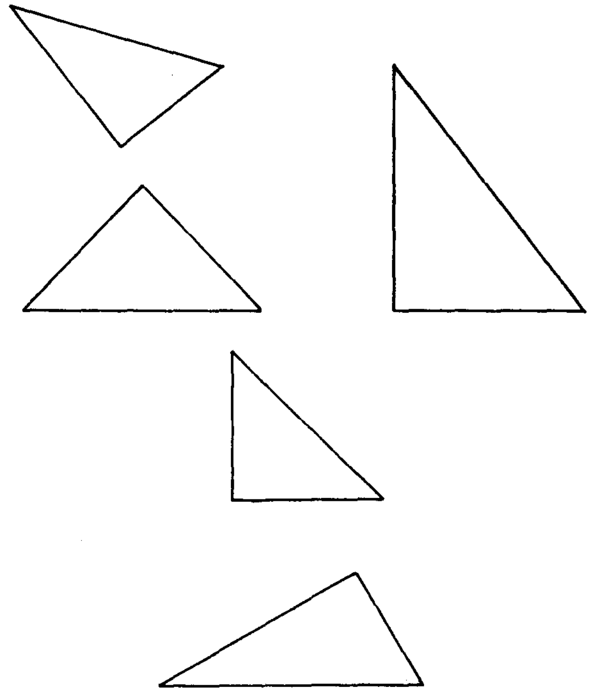
2. Si los alumnos miden los lados de las escuadras, encuentran que una de ellas se caracteriza porque las tres longitudes son diferentes, o sea que tiene la forma de triángulo escaleno. La característica de la otra escuadra es que dos de sus tres lados poseen la misma longitud, o sea tiene forma de triángulo isósceles.



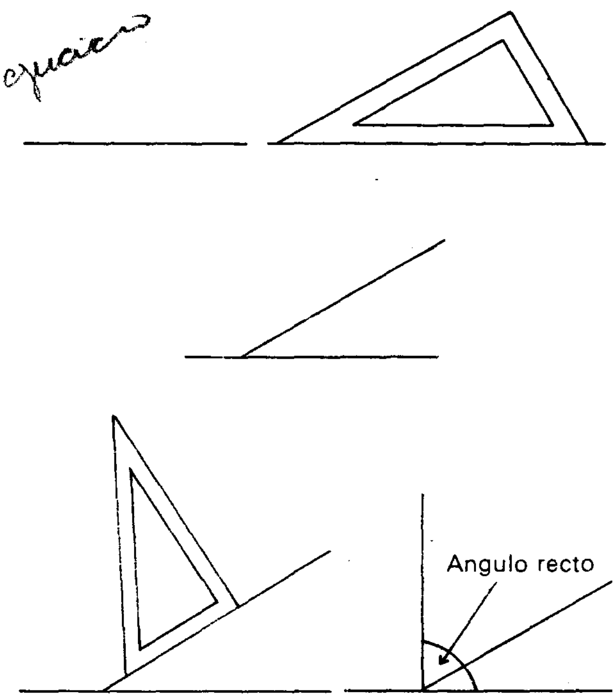
Escuadra con forma de triángulo escaleno con un ángulo recto.

Escuadra con forma de triángulo isósceles con un ángulo recto.

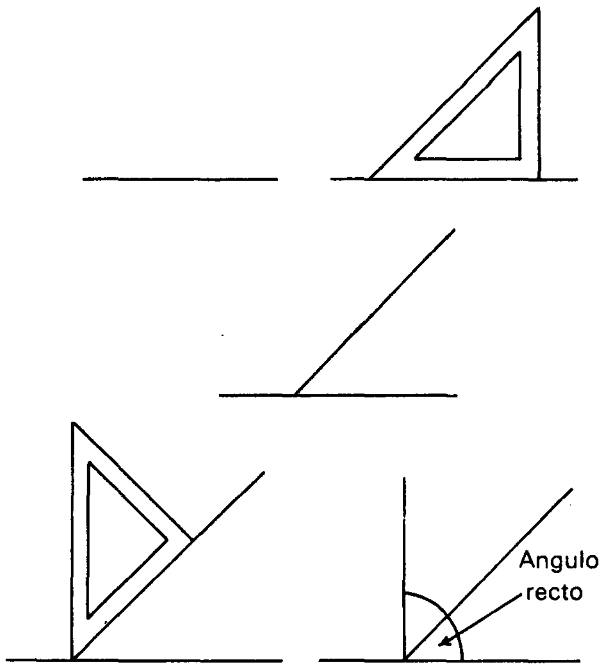
Como ejercicio, los alumnos pueden dibujar triángulos escalenos con un ángulo recto y triángulos isósceles con un ángulo recto, trazando líneas que coincidan con los lados de las escuadras.



3. Otra característica que los alumnos llegan a descubrir, al manejar las escuadras, es la siguiente: si toman una escuadra y trazan los dos ángulos que no son rectos, uno a continuación del otro haciendo coincidir el vértice, obtienen un ángulo recto. La figura muestra en cada caso el procedimiento a seguir.



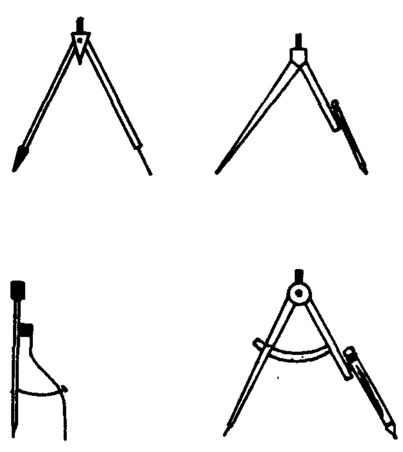
O si emplean la escuadra con forma de triángulo isósceles obtienen:



Los alumnos observan que en el caso de la escuadra con forma de triángulo isósceles, los dos ángulos que no son rectos son iguales entre sí. Luego pueden ensayar a formar todos los ángulos posibles combinando los diferentes ángulos de las dos escuadras.

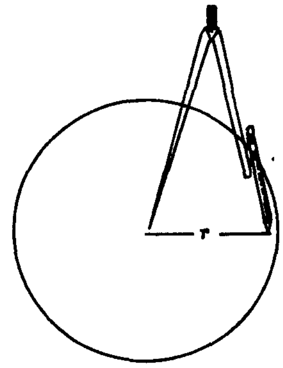
Una vez estudiadas las principales características de las escuadras, se puede iniciar el trabajo con el compás, para luego emplear las escuadras y el compás en forma combinada.

La figura muestra la forma de algunos compases.

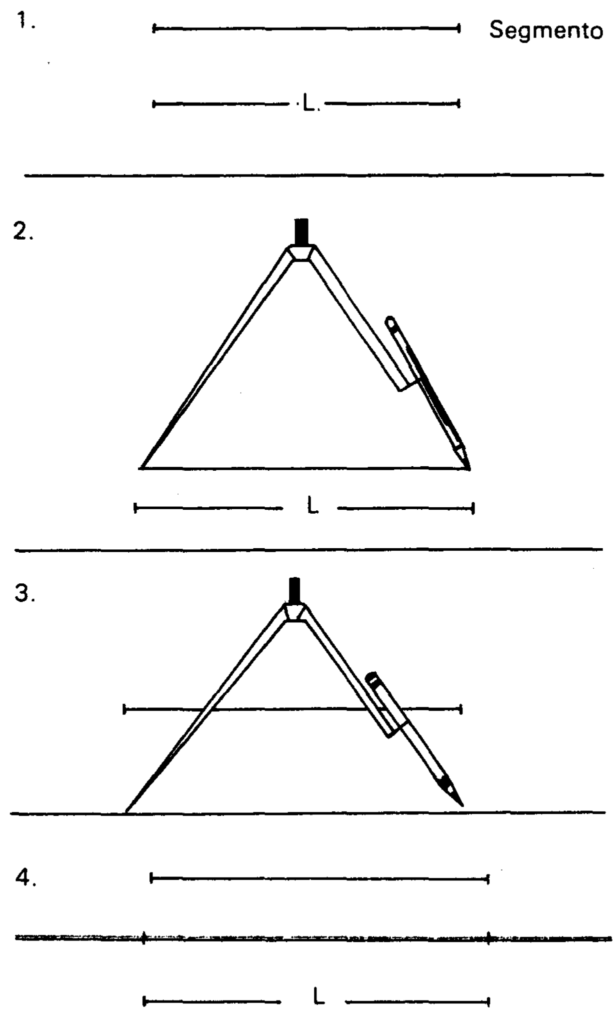


El maestro indica a los alumnos la forma de emplear el compás para trazar circunferencias.

También les explica que la distancia entre las dos puntas del compás determina la longitud del radio del círculo que se va a trazar.

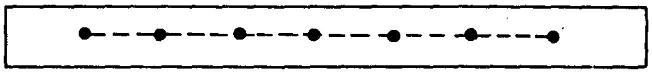


El maestro también les puede explicar a los alumnos que el compás es utilizado, además, para "transportar medidas". Por ejemplo, si se tiene una recta y sobre ella se quiere determinar un segmento de igual longitud a otro, ya dado, se coloca una de las puntas sobre un extremo del segmento y la otra sobre el otro; a continuación esta medida se lleva a la recta, haciendo centro en un punto de la recta y trazando un arco que corte la recta; la longitud de la recta entre el punto en donde se hizo el centro y el punto en donde cortó el arco trazado, es la misma que la longitud que se deseaba transportar.



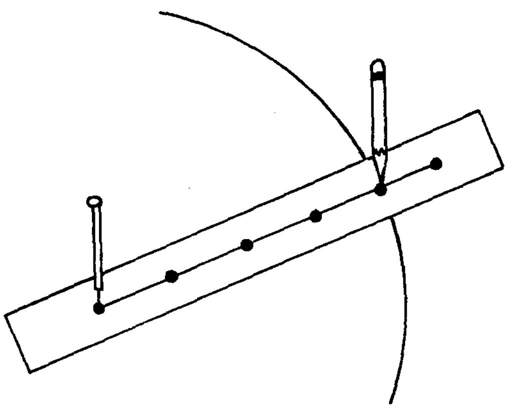
Los alumnos deben ejercitarse en el manejo del compás, dibujando circunferencias en diferentes radios.

Como es posible que algunos alumnos no posean compás, el maestro puede proponerles la siguiente alternativa: recortar una tira de cartulina de 12 centímetros de longitud, trazar en ella una línea y marcar un punto cada centímetro, como se muestra en la figura.



Luego con un alfiler o una aguja deben perforar la tira en los puntos que marcaron. Para trazar una circunferencia, colocan el lápiz en un orificio, y en el otro un alfiler u otro lápiz, y hacen girar la tira de cartulina en torno al orificio donde está el alfiler o lápiz que marca el centro del círculo.

De acuerdo con el número de orificios se pueden dibujar círculos en diferentes radios.

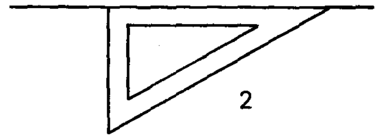


A continuación se proponen algunos ejercicios que los alumnos pueden desarrollar empleando las escuadras y el compás:

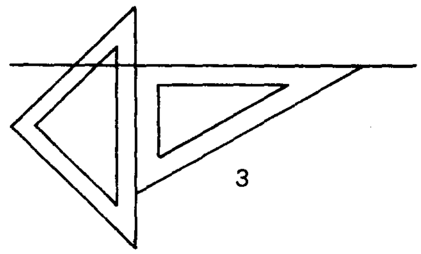
1. Trazar una paralela a una recta dada.

   Para hacerlo, si el segmento al cual se van a trazar paralelas es AB, (1), se hace coincidir un borde de la escuadra con esa línea (2). A continuación se coloca otra escuadra o una regla contra otro de los bordes de la escuadra (3), se sostiene fija la segunda escuadra y se hace deslizar la primera escuadra contra la segunda, determinando el espaciamiento entre las líneas (4). A continuación se traza la línea paralela (5). La figura ilustra el proceso.

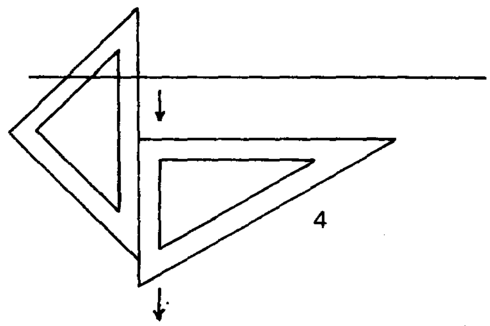
1



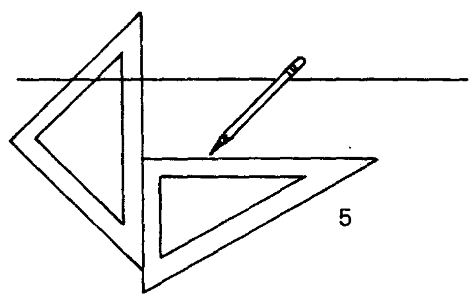
2



3



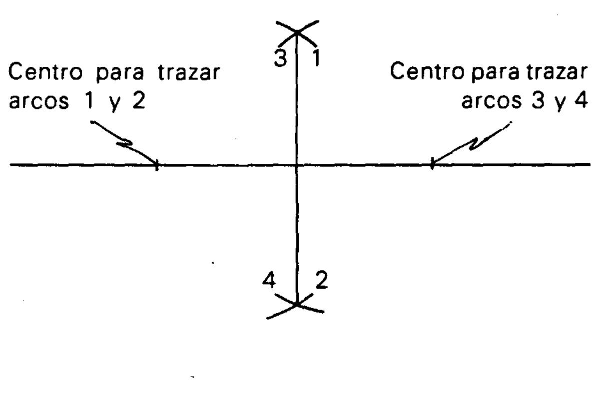
4



5

2. Trazar una perpendicular a una recta dada.

   Se traza la recta y se elige una longitud arbitraria como radio y un punto sobre la recta. Se trazan arcos a lado y lado de la recta, haciendo centro en el punto elegido. A continuación se elige otro punto sobre la recta, a una distancia del primer punto menor que la longitud del radio. En ese nuevo punto se hace centro y con el mismo radio se trazan arcos a lado y lado de la recta, de tal forma que corten los que primero se trazaron. Los

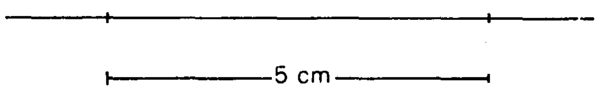


puntos de intersección de los arcos a lado y lado de la recta determinan los dos puntos por los que debe pasar la perpendicular a la recta dada. Esta perpendicular pasa por el punto medio entre los dos centros. Puede ensayarse a trazar los arcos 1 y 2 con un radio y los arcos 3 y 4 con otro radio diferente.

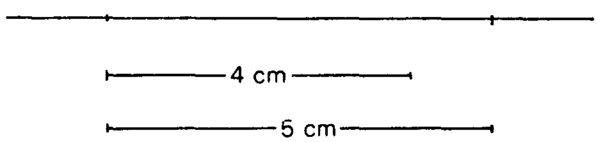
3. Diseñar un triángulo cuando se conoce la longitud de sus lados.

   Supóngase que las longitudes de los lados de un triángulo son: 3 cm, 4cm, 5 cm.

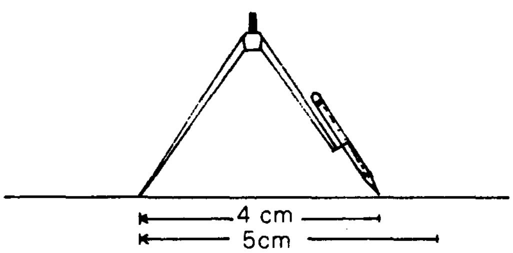
   Para diseñarlo se traza una recta, y sobre ella se mide con una regla la longitud de uno de los lados; supóngase para el ejemplo que se miden 5 cm sobre una recta horizontal:



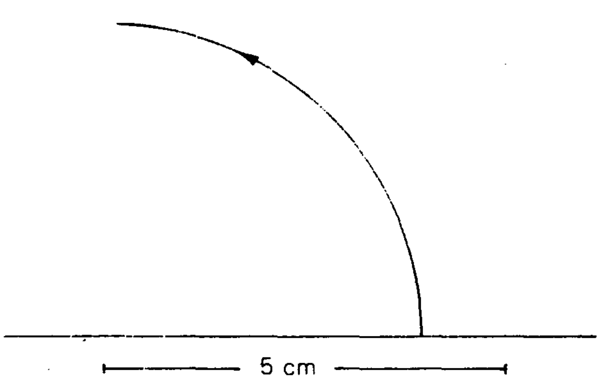
   Luego se mide con la regla la longitud de otro lado sobre la misma recta a partir del mismo punto. En el ejemplo, 4 cm.



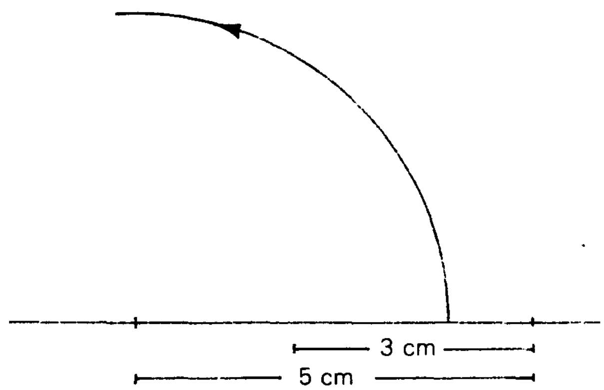
Se pone la punta del compás en el extremo izquierdo y la punta del lápiz sobre el punto intermedio:



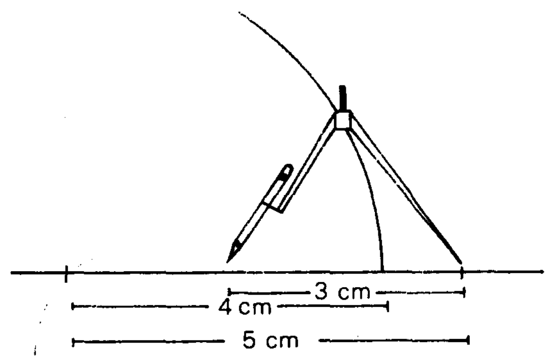
Se traza un arco con ese radio:



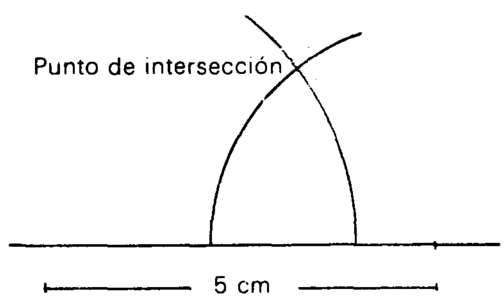
Se mide la longitud del último lado a partir del extremo derecho del primero y en sentido contrario, en el ejemplo, 3 cm:

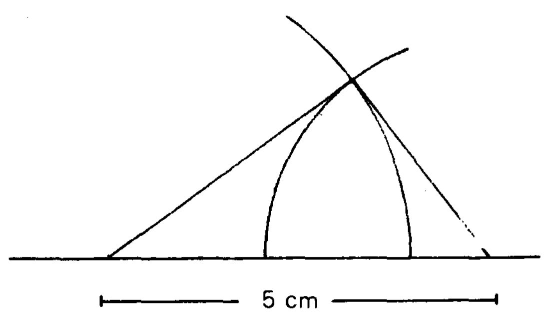


Se pone la punta del compás en el extremo derecho y la punta del lápiz sobre el nuevo punto intermedio:



Se traza un arco con ese radio hasta cortar el anterior. Desde el punto de intersección se trazan dos segmentos hasta los extremos del segmento marcado primero. En esta forma se obtiene el triángulo.





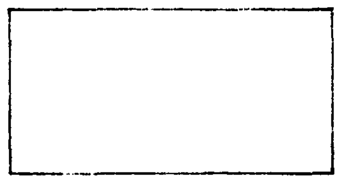
El maestro desarrolla cada paso del ejercicio y da tiempo para que todos los alumnos efectúen ese paso antes de indicar el siguiente. Además de los ejercicios aquí propuestos, el maestro puede introducir otros y dar tiempo para que los alumnos intenten algunos diseños libres.

El maestro puede indicar que estos diseños o dibujos con regla y compás se llaman también "construcciones".

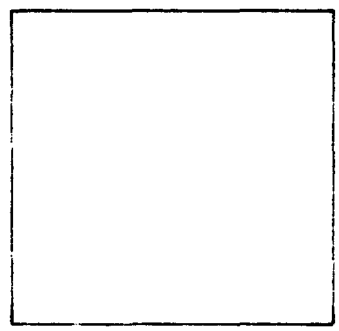
Objetivo específico	Indicador de evaluación
86 Fabricar modelos de algunos sólidos regulares (*)	El alumno construirá algunos modelos de sólidos regulares.

Sugerencias de actividades y metodología

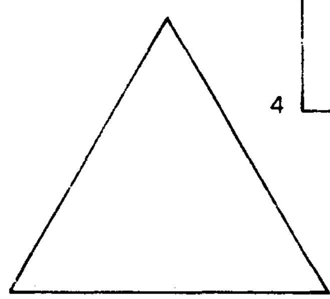
Para fabricar modelos de algunos sólidos regulares, los alumnos pueden construir tarjetas de las siguientes formas: rectangular, cuadrada, triangular. Las siguientes figuras les pueden servir para construir las tarjetas, una tarjeta según la figura 1, otra según la figura 2, otra según la figura 3, etc



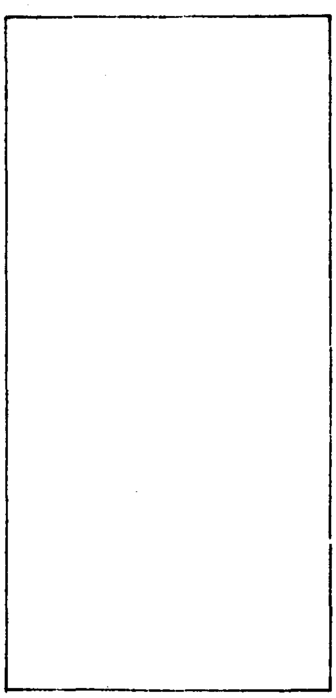
3



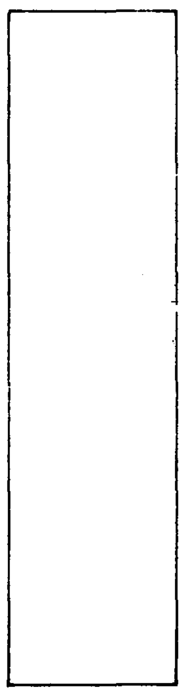
4



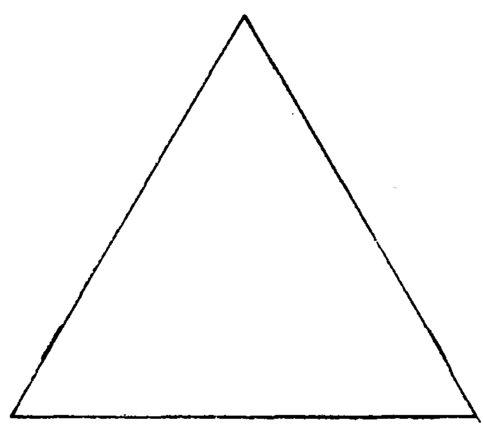
5



1

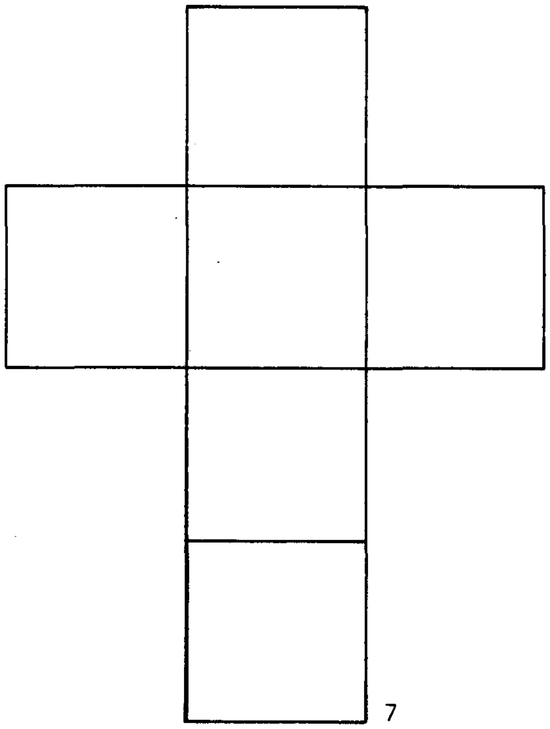


2



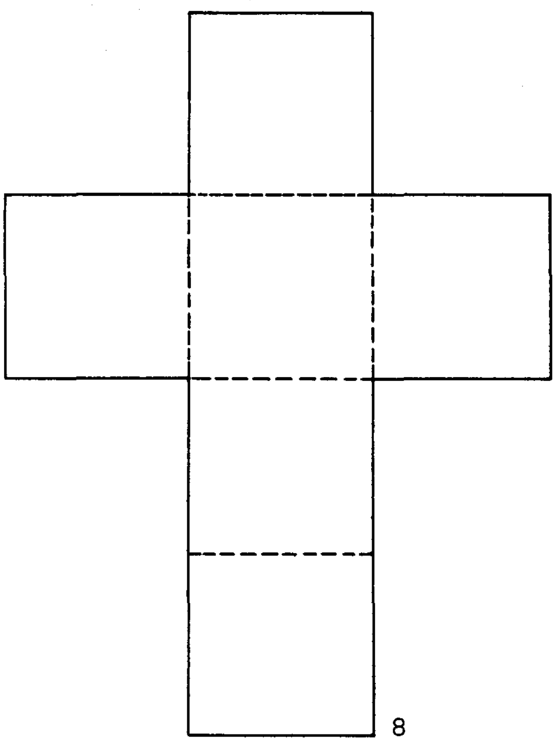
6

Para construir el modelo del cubo utilizan la tarjeta 4; trazan seis cuadrados unidos como se muestra en la figura 7.



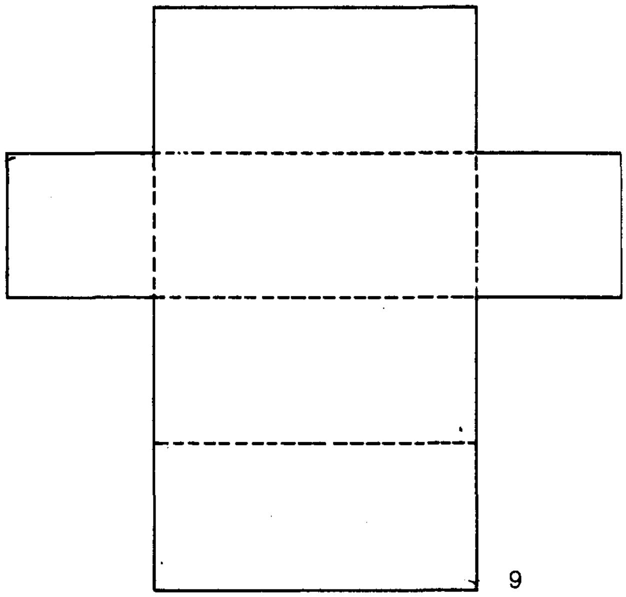
7

Después doblan por las líneas punteadas de la figura 8 para formar el modelo. Los bordes pueden unirse con cinta pegante. Si no hay cinta sino goma, engrudo u otro pegante, se dejan pestañas en los bordes que se van a pegar. (Ver nota al final de la actividad).



8

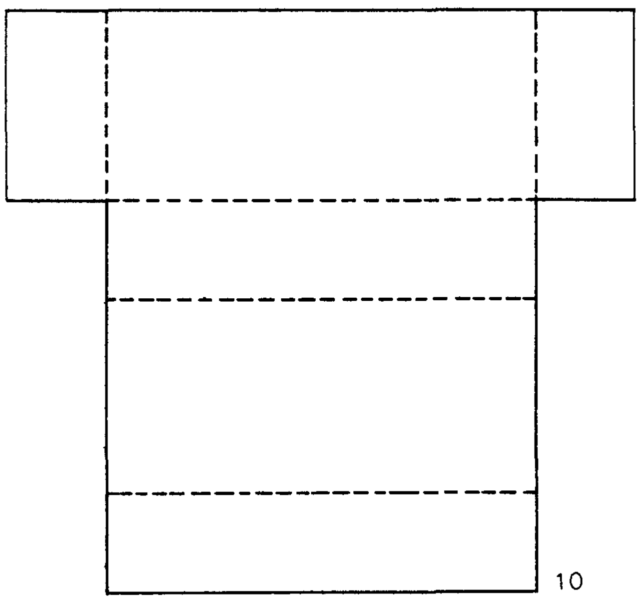
En seguida los alumnos con las tarjetas 1 y 4, pueden trazar cuatro rectángulos y dos cuadrados como se muestra en la figura, y doblar por la línea punteada para formar el modelo de prisma de base cuadrada.



9

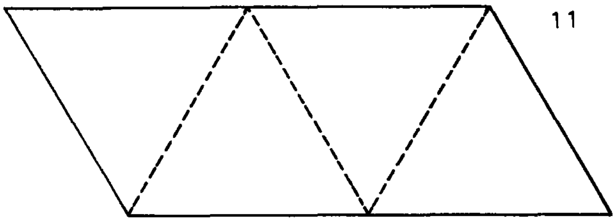
De manera análoga utilizan las tarjetas 1 y 5 para fabricar el modelo de un prisma de base triangular; la tarjeta 1 se usa lo mismo que en la figura 9, y la tarjeta 5 se emplea lo mismo que la tarjeta 4, en la figura 9.

Para fabricar un modelo de prisma rectangular (paralelepípedo), pueden utilizar las tarjetas 1, 2, 3 como se muestra en la figura 10, doblando por la línea punteada. Este prisma rectangular no se considera entre los sólidos regulares.



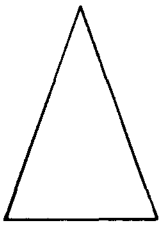
10

Ahora pueden fabricar el modelo de un tetraedro (pirámide de base triangular); para ello utilizan la tarjeta 6 y así obtienen una figura como la 11. Doblan por las líneas punteadas.



11

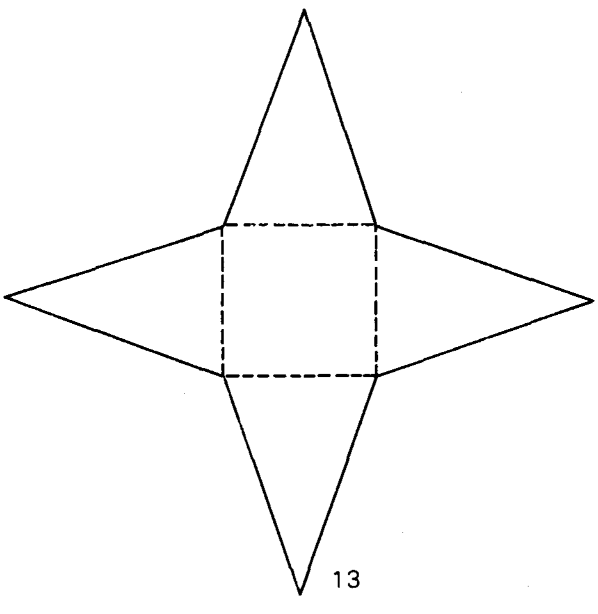
Para construir el modelo de pirámide de base cuadrada, hacen primero una tarjeta con la siguiente forma (triángulo isósceles):



12

Se tendrá especial cuidado de que la longitud del lado más corto sea igual a la longitud del lado de la figura 4.

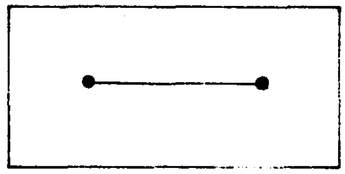
Después utilizan la tarjeta 4 y la tarjeta obtenida de la figura 12; las disponen como se indica en la figura 13. Doblando por las líneas punteadas obtendrán el modelo de una pirámide de base cuadrada.



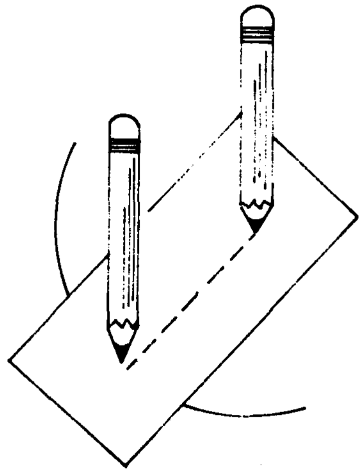
13

Por último pueden construir un modelo de un cilindro recto. Si para este trabajo los alumnos no disponen de un compás, en un pedazo de cartulina trazan un segmento de recta, por ejemplo, de 2 centímetros y en sus extremos hacen dos perforaciones. (Figura 14).

Este pedazo de cartulina hará las veces de compás. En cada perforación colocan un lápiz; uno de ellos se mantendrá fijo y el otro girará para trazar la frontera de los círculos que formarán las bases del cilindro (Figura 15).



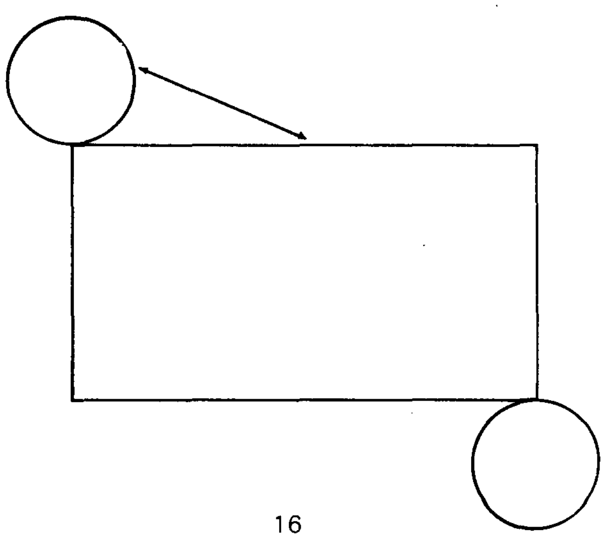
14



15

Para orientar a los alumnos en el trazo de la figura 16, el maestro debe tener en cuenta que la longitud de la circunferencia ($2 \pi r$) sea la misma que la longitud del lado que se indica en la figura 16 con una flecha. Por ejemplo, si el radio de la circunferencia mide 2 centímetros, su longitud será aproximadamente: $2 \times 3.14 \times 2$ cm = 12.56 cm

El maestro podrá decir a los alumnos que la longitud del lado indicado con la flecha es de 12 centímetros y medio, aproximadamente

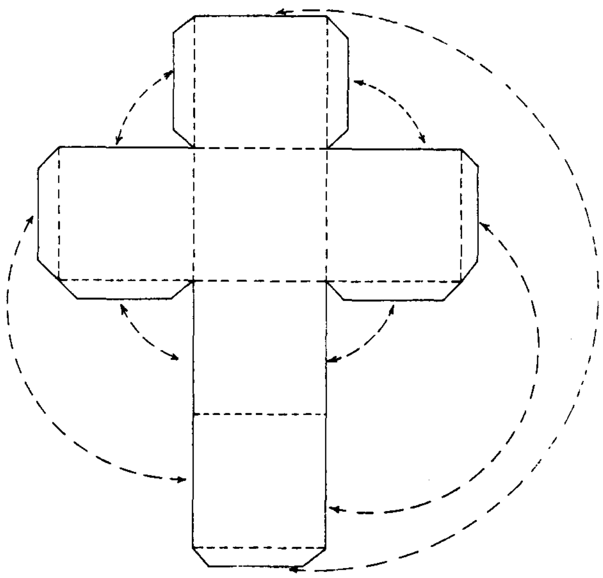


16

Nota: Si no hay cinta pegante para cerrar los bordes de los modelos, se deben dejar pestañas para pegar, las cuales deben pintarse antes de recortar la cartulina.

Se traza la figura como se explicó antes, y luego se le añaden los trazos para las pestañas: una sola para cada pareja de bordes que se vayan a pegar. Por ejemplo para el cubo, entre otras maneras de dejar pestañas, puede usarse esta:

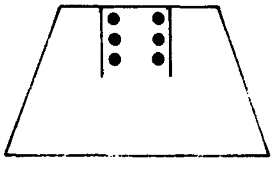
El maestro al preparar todos los modelos le indica a los alumnos dónde pueden dejar pestañas. Es preferible que sobren a que falten, las que no se utilicen se pueden recortar.

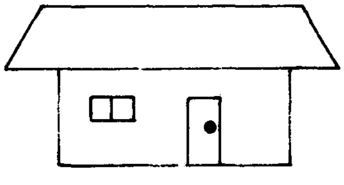


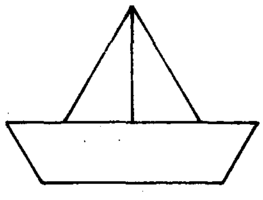
Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
87. Identificar cuadriláteros en fronteras de sólidos.	Dados varios objetos, el alumno identificará en sus caras algunos cuadriláteros y los dibujará.
88. Caracterizar el trapecio: lados, paralelismo y simetrías; y hallar su perímetro. (*)	Dado un trapecio, el alumno lo caracterizará por sus lados, bases y simetrías.
	Dado un trapecio, el alumno describirá sus ángulos y determinará el eje de simetría si el trapecio lo posee.
	Dadas las longitudes de los lados de un trapecio, el alumno hallará el perímetro.

Sugerencias de actividades y metodología

Para el logro de estos objetivos, es conveniente que el maestro disponga de algunos objetos que permitan identificar en sus caras, cuadriláteros. Los siguientes son algunos ejemplos:







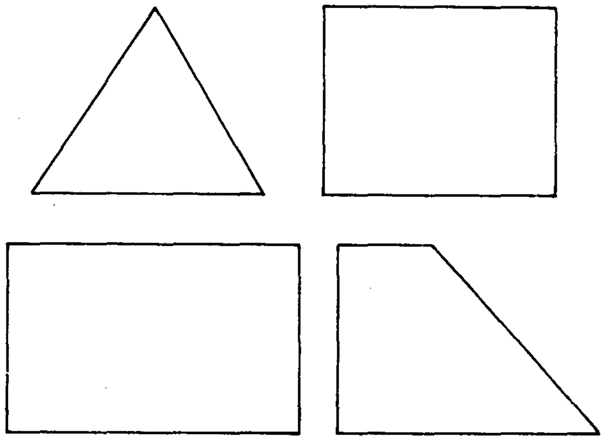
Cuando los alumnos hayan identificado algunos cuadriláteros, es posible que ellos dibujen varios objetos ya conocidos o describan verbalmente otros donde se identifiquen cuadriláteros.

Luego de que los alumnos hayan terminado de elaborar sus dibujos, los comparan para identificar figuras comunes empleadas en ellos; el maestro puede ayudarles haciendo comentarios como:

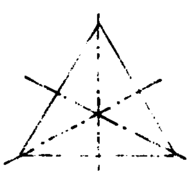
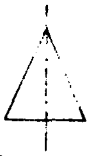
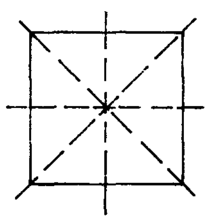
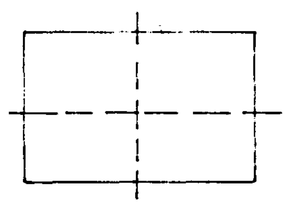
Para dibujar la puerta de la casa se utilizó un rectángulo; para dibujar un cuadro también se empleó un rectángulo, etc. Luego de identificar la figura común, ésta se dibuja en el tablero; si ya es conocida y estudiada, se escribe su nombre y se recuerdan algunas de sus características, como el número de lados, relaciones que existen entre ellos, sus ángulos, ejes de simetría, etc.

El maestro orienta la actividad para que de las comparaciones y observación de los objetos representados salga el trapecio como una figura común a varios dibujos, como puede ser el techo de una casa, el dibujo empleado para representar una falda, el casco de un barco, etc.

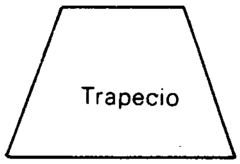
Como es posible que los alumnos desconozcan el nombre de esta nueva figura, el maestro pide que la dibujen en el tablero y que luego empiecen a describirla, diciendo el número de lados que posee, el número de ángulos internos que tiene, algunas relaciones entre sus lados, etc. Es conveniente que en el tablero estén dibujadas las otras figuras comunes que hayan sido identificadas, como por ejemplo: el triángulo, el rectángulo y el cuadrado.



De las figuras ya estudiadas, puede hacerse un resumen como:

TRIANGULO	CUADRADO	RECTANGULO
- 3 lados - 3 ángulos internos Clasificación: Triángulos equiláteros Triángulos isósceles Triángulos escalenos -Simetrías:  Equilátero: 4 ejes de simetría, 3 en el plano del papel y uno perpendicular a él.  Isósceles: 1 eje de simetría.  Escaleno: no tiene ejes de simetría	- 4 lados - los cuatro lados de igual longitud. - cuatro ángulos internos. - cada uno de los ángulos internos es recto. - lados paralelos de dos en dos. - tiene 5 ejes de simetría, 4 en el plano del papel y otro perpendicular a él. 	- 4 lados - tiene los lados de igual longitud de dos en dos. - cuatro ángulos internos. - cada uno de los ángulos internos es recto. - lados paralelos de dos en dos - tiene 3 ejes de simetría, 2 en el plano del papel y otro perpendicular a él. 

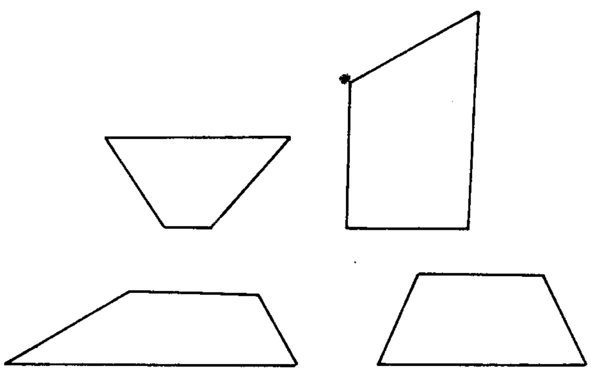
Para el trapecio se puede hacer un estudio como los anteriores. El nombre de la figura se dará al final, luego de que los alumnos descubran sus característi-cas. El siguiente puede ser el listado de característi-cas que se obtenga:



4 lados:
dos paralelos
y dos no paralelos.

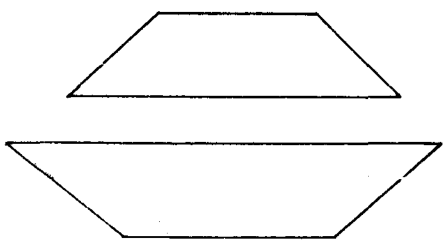
- 4 ángulos internos.

A continuación el maestro pide que dibujen figuras que cumplan las características anteriormente anota-das y que no sean ni cuadrados ni rectángulos. Los siguientes son dibujos que muestran algunas de estas figuras.

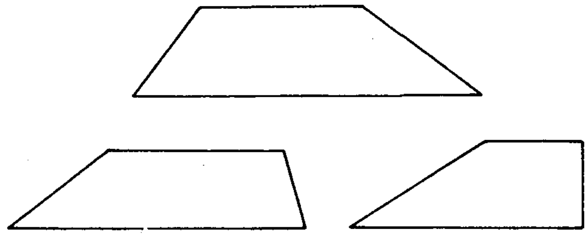


Es posible que los alumnos dibujen trapecios como los pasados, pero en diferentes posiciones; lo impor-tante sin embargo es que las figuras cumplan con las características dadas, sin tener en cuenta la posición. Con base en estos dibujos se estudian las particula-ridades en cuanto a ángulos y lados se refieren, para concluir que hay trapecios en los cuales los lados no paralelos son de igual longitud, así como también que en ese tipo los ángulos son iguales de dos en dos. Otro tipo de trapecio es aquel en el cual un lado de los no paralelos es perpendicular a los paralelos. Por último, están los trapecios en los cuales los lados no paralelos son de diferente longitud. A continuación se buscan nombres para este tipo de trapecios, para lo cual será útil recordar la clasificación que se hizo con los triángulos; así los trapecios se podrán clasificar en:

- Trapecios isósceles: aquellos cuyos lados no para-lelos son de igual longitud. Ejemplo:



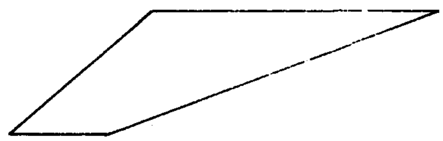
- Trapecios escalenos: aquellos cuyos lados no para-lelos son de diferente longitud. Ejemplo:



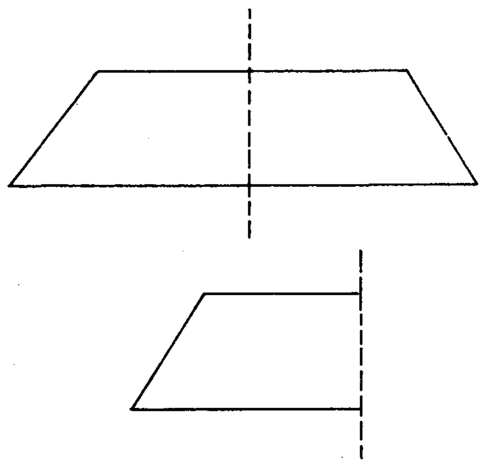
Dentro de estos trapecios podemos identificar como caso especial el trapecio rectangular, que se caracteriza porque uno de sus lados no paralelos forma ángulos rectos con los lados paralelos.

Es posible que al dibujar figuras que cumplan con las características dadas, los alumnos hagan el siguiente cuadrilátero.

El maestro debe explicarles que esta figura no cumple con las características, pues se exige que tenga dos lados paralelos y los otros dos no, y este cuadrilátero los tiene todos paralelos de dos en dos. En cambio la figura siguiente sí es un trapecio por cumplir con las características dadas.



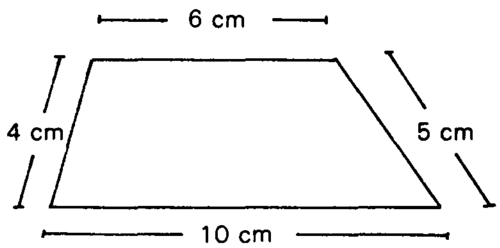
A continuación se pide a los alumnos que recorten algunos de los trapecios que han dibujado y traten de hacer dobleces, uno en cada intento, para lograr que al doblar la figura las dos partes coincidan. Se espera que después de varios intentos los alumnos lleguen a descubrir que los únicos trapecios que cumplen esta condición son los trapecios isósceles, así:



De lo anterior se espera que los alumnos lleguen a concluir que los trapecios isósceles son los únicos que tienen un eje de simetría.

Por último, se puede organizar en el patio, como actividad, el dibujar varios trapecios, para luego tratar de encontrar el perímetro.

Ejemplo:



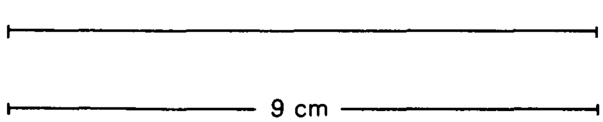
Para hallar el perímetro se suman las longitudes de los lados, así:

Perímetro del trapecio = 4 cm + 6 cm + 5 cm + 10 cm = 25 cm.

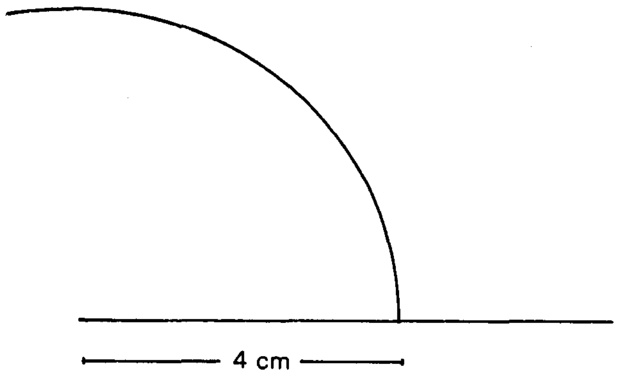
Otra actividad es la de recorrer los lados del trapecio barriendo los ángulos internos en forma similar a como se propuso para el triángulo, para que cubran algunas diferencias que se obtienen al comparar estos dos recorridos, como puede ser: si se recorre el perímetro del triángulo barriendo los ángulos internos, al terminar se está en sentido contrario al cual se inició el recorrido. En cambio, si se hace barriendo los ángulos internos, al finalizar el recorrido se encuentran en la misma posición que al iniciarlo.

Como actividad complementaria, y dado que en objetivos anteriores se estudió el manejo de las escuadras, la regla y el compás, se puede proponer a los alumnos dibujar un trapecio conociendo las dimensiones de los lados. Supóngase que las dimensiones son: 9 cm, 6 cm, 5 cm, 4 cm y las longitudes de los lados paralelos son 9 cm y 6 cm. Para dibujarlo se pueden seguir los siguientes pasos:

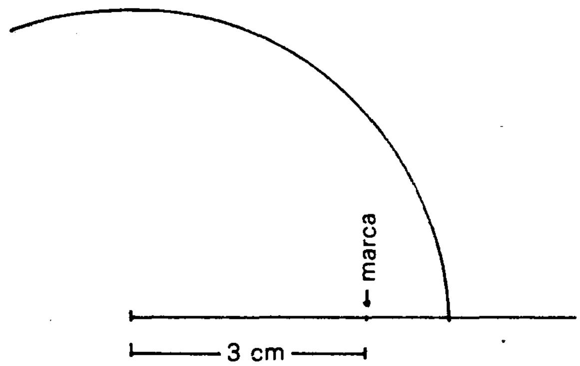
1. Se traza una recta de una longitud igual a la del lado paralelo más largo.



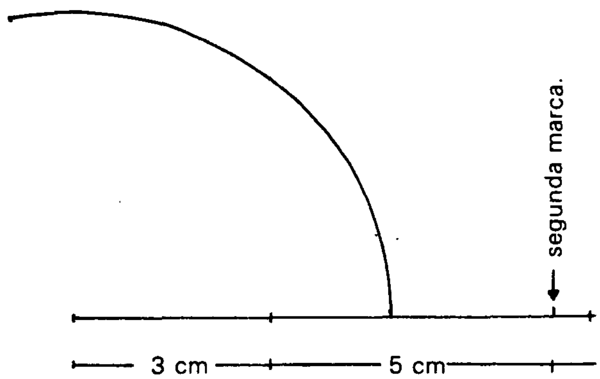
2. Haciendo centro en uno de los extremos del segmento trazado, se traza un arco con un radio igual a la longitud de uno de los lados no paralelos; para el ejemplo se tomarán 4 cm.



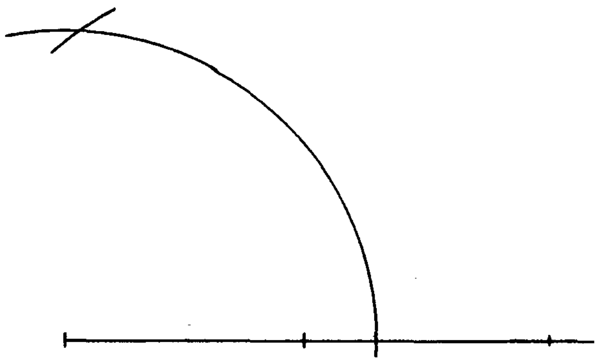
3. De la longitud del lado paralelo mayor se resta la longitud del lado paralelo menor, y esa distancia se mide sobre el lado paralelo mayor a partir del mismo extremo del cual se había medido el lado anterior (de 4 cm); se hace una marca en el punto encontrado.

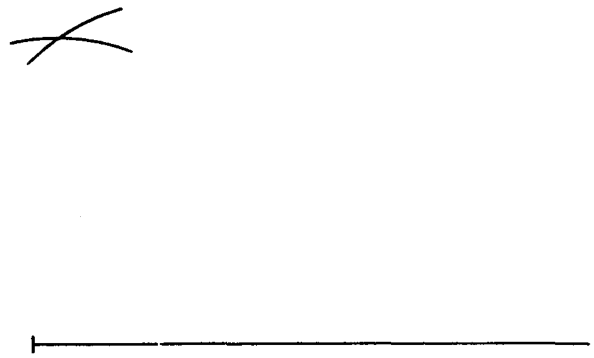


4. Con centro en la marca hecha en el paso anterior, se traza la longitud del otro lado no paralelo, para el ejemplo, 5 cm. Se hace una marca en el punto encontrado.



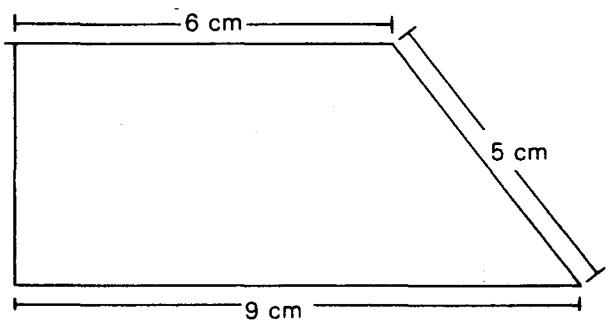
5. Haciendo centro en la primera marca, se pone el lápiz del compás sobre la segunda y se traza un arco que corte el que se trazó en el segundo paso:





6. A continuación se traza una paralela al lado paralelo más largo, que pase por el punto donde se cortaron los arcos. Para hacerlo emplearán las escuadras.

7. Sobre la paralela que se trazó en el paso anterior, se mide la longitud del lado paralelo más corto a partir del punto de intersección de los arcos, para el ejemplo, 6 cm. A continuación se hacen los trazos para completar el trapecio.

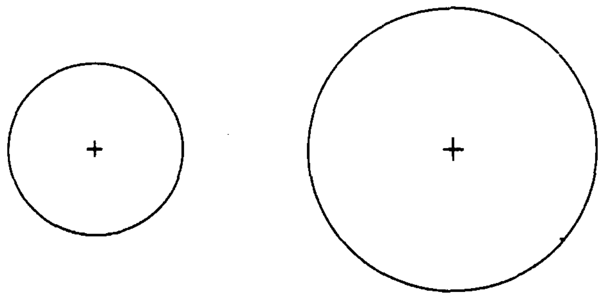


	Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
89.	Reconocer radios, diámetros, cuerdas, secantes y tangentes.	Dada una circunferencia y en ella varias de sus líneas notables el alumno dirá cuál de ellas es un radio, cuál un diámetro, cuál una cuerda, cuál una secante y cuál una tangente.
90.	Medir perímetros de círculos, longitudes de radios y de diámetros.	Dados tres círculos, los alumnos medirán sus radios, diámetros y perímetros.
91.	Comparar la longitud de la circunferencia con la longitud del diámetro. (*)	Los alumnos dividirán la longitud del perímetro del círculo entre la longitud del diámetro y obtendrán un valor aproximado de la razón de la circunferencia y el diámetro.
92.	Encontrar un procedimiento para hallar aproximadamente el perímetro del círculo. (*)	Dados tres círculos, el alumno hallará el perímetro de cada uno de ellos.

Sugerencias de actividades y metodología

Es conveniente que los alumnos dispongan de diferentes sólidos en los cuales algunas de sus fronteras sean de forma circular, como tarros, frascos, etc. Para medir, van a utilizar un pedazo de pita y una regla.

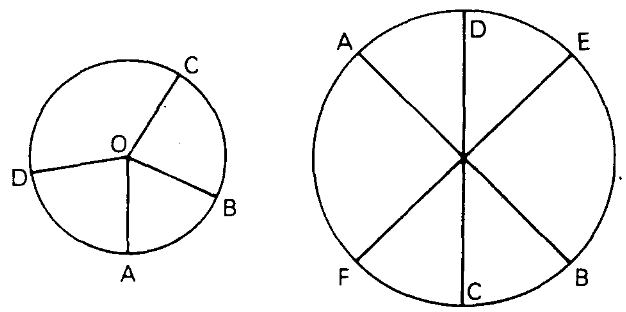
Reunidos en grupos de 5, colocan sobre el cuaderno los sólidos que tengan y trazan sus contornos; en caso de no poder trazar la frontera de forma circular de algún contorno en el cuaderno, se hará en el tablero.



Tratan de identificar el centro de la figura trazada, el que podrán señalar por medio de una pequeña cruz, de tal modo que el punto donde se cortan las dos líneas pequeñas represente el punto central.

El maestro pide a los alumnos que tracen segmentos de recta, uniendo el punto central y un punto cualquiera de la circunferencia. Ejemplo, si denotamos el punto central por la letra "O", el punto de la circunferencia por la letra "A" y unimos ambos puntos, se obtiene el segmento $\overline{OA}$. Los alumnos trazan otros segmentos: $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, etc.

Los alumnos miden con la pita todos los segmentos trazados y notan que siempre se obtiene la misma medida. También podrán hacerlo con la regla. A esa medida común la llamamos el radio de la circunferencia.



El radio es, pues, la longitud de cualquier segmento de recta que una el punto central con un punto de la circunferencia. El maestro anotará que cada uno de esos segmentos también se puede llamar "un radio".

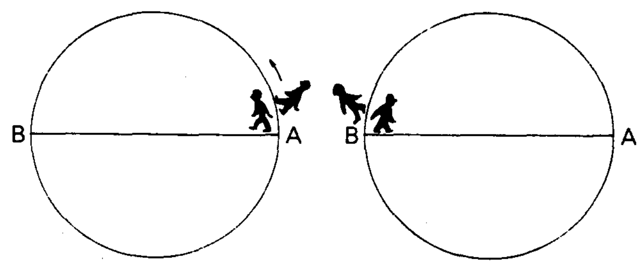
En la otra circunferencia trazan segmentos de recta, cuyos puntos extremos estén sobre la circunferencia y además que pasen por el centro. Ejemplo, los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$, etc. Los alumnos miden con la pita todos los segmentos trazados y observan que siempre se obtiene la misma medida.

Podrán hacerlo también con la regla. A esa medida común la llamamos el diámetro de la circunferencia. *El diámetro* es, pues, la longitud del segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro. Cada uno de esos segmentos también se puede llamar "un diámetro".

Si es necesario, el maestro explica a los alumnos que la regla se utiliza para medir la longitud de los segmentos de recta. La regla viene dividida en centímetros y en milímetros. Los alumnos pueden identificar las rayitas correspondientes a los centímetros, medios centímetros y a los milímetros.

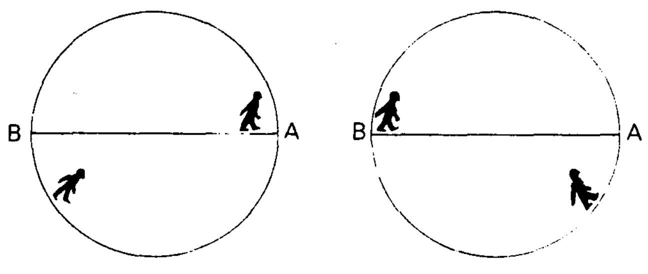
Con un cordel de 3 metros de longitud, el maestro puede trazar en el patio una circunferencia cuyo radio tenga una longitud de 2 metros y medio. O sea que el diámetro $\overline{AB}$ tendrá una longitud de 5 metros.

Se eligen dos alumnos de tal manera que, al caminar, sus pasos tengan aproximadamente la misma longitud; se colocan en el punto A de la circunferencia trazada y a una orden del maestro empiezan a caminar el uno a lo largo del diámetro $\overline{AB}$ y el otro a lo largo de la circunferencia. El maestro trata de controlar, por medio del pulso o de un metrónomo, que los pasos los den al mismo tiempo.



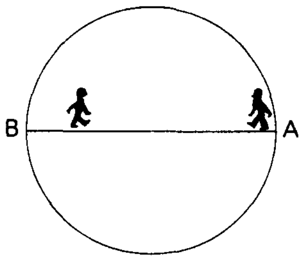
Cuando el alumno que camina a lo largo del diámetro llegue al punto B, el maestro le dice al otro alumno que se detenga. El alumno que arribó al punto B da media vuelta sobre dicho punto y a otra orden del maestro sigue caminando; el que iba sobre la circunferencia continuará y el que dio media vuelta en el punto B, se dirigirá caminando hacia el punto A.

Cuando el alumno que va sobre el diámetro regresa al punto A, el que camina sobre la circunferencia está más o menos donde indica la figura. Ambos se detienen.

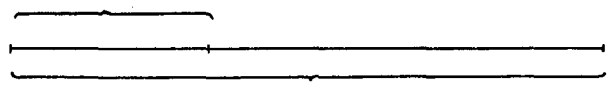


El alumno que regresó al punto A, da media vuelta y, a otra orden, ambos siguen caminando. Cuando el alumno que camina sobre el diámetro llegue al punto B, el otro alumno está ubicado, más o menos, sobre la circunferencia, como indica la figura. Allí se detienen nuevamente.

El alumno que llegó al punto B da otra media vuelta, sobre el punto B, y luego ambos continúan. Cuando el alumno que camina sobre la circunferencia llegue al punto A, el maestro les dirá a ambos que se detengan; los alumnos quedarán, más o menos, como indica la figura.

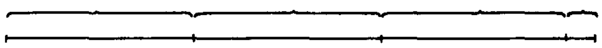


Longitud del diámetro

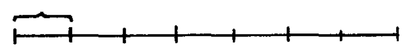


Longitud del contorno de la tapa (Perímetro del círculo)

Tomando la longitud del diámetro como una unidad de medida, el alumno puede encontrar cuántas unidades hay en la longitud del contorno de la tapa.



De acuerdo con la figura, los alumnos posiblemente digan que la longitud del contorno de la tapa quedó dividida en 3 partes, y sobró un "pedacito". Tomando la longitud del "pedacito" que sobró, como unidad de medida, tratan de averiguar cuántas unidades hay en la longitud del diámetro.



El resultado obtenido puede ser que la longitud del "pedacito" que sobró, corresponde aproximadamente a la séptima parte de la longitud del diámetro.

De lo anterior se puede deducir que al comparar (dividir) la longitud del contorno de la tapa con la de su diámetro, el resultado obtenido es aproximadamente igual a 3 más $\frac{1}{7}$, o sea $3 + \frac{1}{7}$.

Los alumnos observan que todos llegaron, más o menos, a la misma conclusión, aunque las tapas tenían diferente tamaño. El maestro hace notar esta coincidencia a medida que pregunte por los resultados que va obteniendo cada grupo. Si el resultado se desvía mucho de $3 + \frac{1}{7}$, se repite con cuidado la medición.

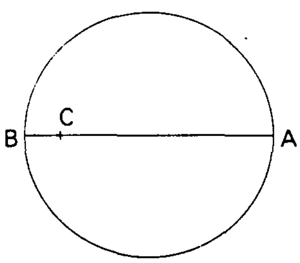
Siempre que comparemos (dividamos) la longitud de la circunferencia (perímetro del círculo) entre la longitud de su diámetro, notaremos que el resultado es igual a un poco más de 3; lo que podríamos expresar así:

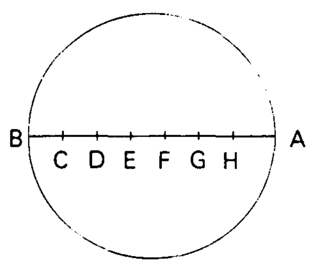
$\frac{\textit{Longitud de la circunferencia}}{\textit{Longitud del diámetro}} = 3 + \frac{1}{7}$ (aproximadamente.

Nota: Si la experiencia no corresponde con los resultados esperados, se repetirá y tratará de hacerse con la mayor exactitud posible.

Después que varios alumnos hayan realizado la experiencia, el maestro puede preguntar: ¿Cuántas veces ha recorrido la longitud del diámetro el alumno que caminó sobre él, mientras el otro ha recorrido la longitud de la circunferencia? Posiblemente los alumnos concluirán que: 3 veces la longitud del diámetro más un "pedazo" de la longitud del diámetro.

El maestro puede preguntar de nuevo: ¿Ese "pedazo" de la longitud del diámetro, comparado con toda su longitud, a cuánto corresponde? Los alumnos, con el cordel, miden la longitud desde el punto B hasta donde se quedó parado el alumno que caminaba sobre el diámetro al terminar la experiencia, y ahí marcan el punto C.





Con esta medida (longitud de $\overline{BC}$), se hacen nuevas marcas: D, E, F, G, H, sobre el diámetro $\overline{AB}$. Contando los "pedazos" en que se ha dividido la longitud del diámetro, notarán que el "pedazo" $\overline{BC}$ corresponde a la séptima parte de la longitud del diámetro. (Esta fracción es la que se espera obtener, aunque al desarrollar la experiencia puede resultar un poco más o un poco menos).

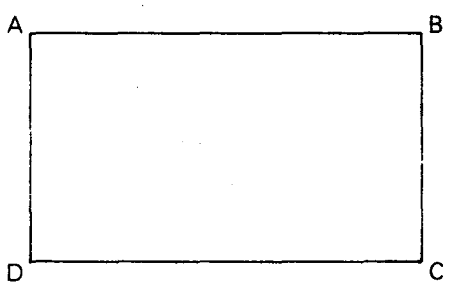
La conclusión que los alumnos dieron con anterioridad se podrá expresar así: si se compara la longitud de la circunferencia con la longitud del diámetro, se obtiene un resultado aproximadamente igual a: $3 + \frac{1}{7}$.

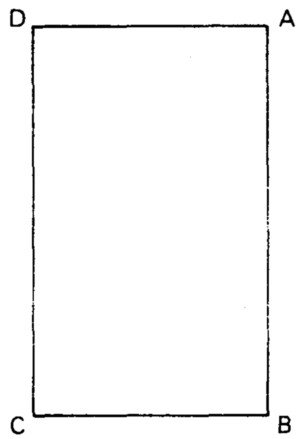
Ahora cada alumno de cada grupo puede proceder de la siguiente manera: coge una tapa y una pita, hace una marca en la pita cerca a uno de sus extremos, luego mide la longitud del contorno de la tapa y marca otra vez cuando termine de medir. Después, partiendo de la primera marca hecha en la pita, mide la longitud del diámetro de la tapa y hace una tercera marca en la pita. Por ejemplo:

Objetivo específico	Indicador de evaluación
93. Generalizar el procedimiento para hallar el área del rectángulo y del cuadrado. (*)	Dados varios rectángulos y varios cuadrados, el alumno explicará oralmente y por escrito cómo hallar el área de cada uno de ellos.

Sugerencias de actividades y metodología

El maestro puede dibujar en el tablero dos rectángulos, nombrando sus vértices, en la siguiente forma:



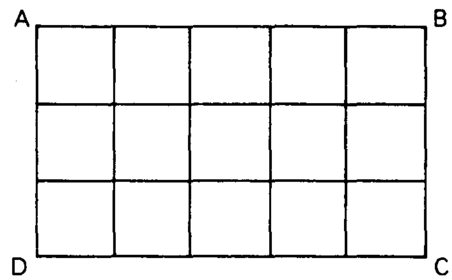


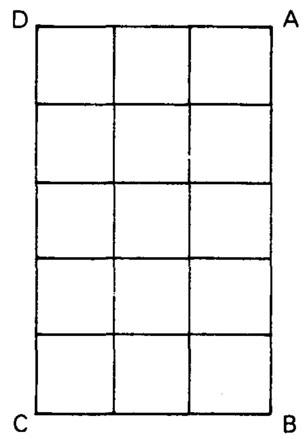
Se espera que los alumnos recuerden que en los rectángulos los lados paralelos tienen la misma longitud. Por ejemplo: en el primer rectángulo, $\overline{AB}$ tiene igual longitud que $\overline{DC}$, y $\overline{AD}$ tiene la misma longitud que $\overline{BC}$. Igual sucede con el segundo rectángulo, lo que podrán comprobar midiendo los lados con la regla.

Los alumnos dibujan rectángulos en el cuaderno, teniendo en cuenta que los lados más largos miden 5 centímetros y los más cortos 3 centímetros.

Ahora se trata de hallar el número de centímetros cuadrados que hay en cada rectángulo. Se toma como unidad de medida el centímetro cuadrado.

Los alumnos orientados por el maestro dividen los lados de los rectángulos en centímetros y los cuadriculan así.



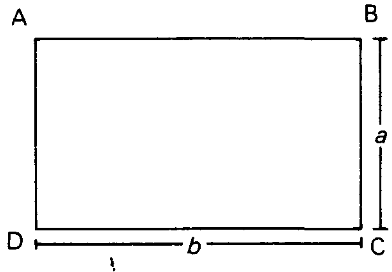


El número de centímetros cuadrados que hay en cada rectángulo permite hallar su área. Si los contamos, notaremos que en ambos hay 15 centímetros cuadrados.

O sea que en el primer rectángulo, si a lo largo del lado $\overline{DC}$ (base) hay 5 cuadritos de un centímetro cuadrado y a lo largo del lado $\overline{BC}$ (altura) 3, entonces el número de centímetros cuadrados que hay en el rectángulo es $5 \times 3 = 15$. Análogamente, en el segundo rectángulo, si hay 3 cuadritos de un centímetro cuadrado a lo largo del lado $\overline{BC}$ (base), y 5 a lo largo del lado $\overline{AB}$ (altura), entonces el número de centímetros cuadrados que hay en el rectángulo es $3 \times 5 = 15$.

Estudiados estos y otros ejemplos, se puede decir que para cualquier rectángulo: si b es el número de unidades de área a lo largo de la base y a es el número de unidades de área a lo largo de la altura, entonces el área del rectángulo será $b \times a$ unidades de área. El maestro les hace notar que a veces se confunde la base como línea o segmento con la longitud de esa base, y la altura como línea o segmento con la longitud de esa altura.

Lo anterior se puede resumir de la siguiente forma: Si se tiene un rectángulo ABCD, y se quiere hallar su área, medimos su base (b) y su altura (a), y el número de unidades de área que hay en el rectángulo vendrá dado por el producto de la base por la altura. Otra manera de expresar esto mismo es decir que el área de un rectángulo se encuentra multiplicando la medida de dos lados contiguos.



La base del rectángulo, puede ser cualquiera de sus lados: se acostumbra tomar como base aquel lado sobre el cual parece que descansa la figura.

En el de la izquierda:

$\overline{DC}$ = base
$\overline{BC}$ = altura

En el de la derecha:

$\overline{CB}$ = base
$\overline{DC}$ = altura

Area del rectángulo = base × altura

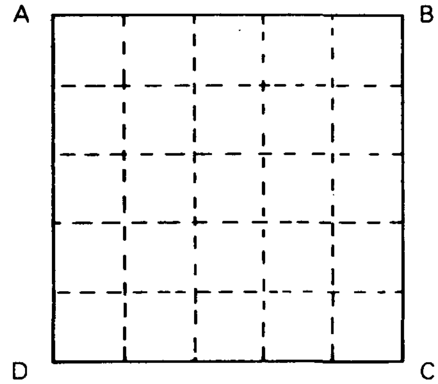
$$A = b \times a$$

Si se llaman l la longitud del lado largo y c la del lado corto, $A = l \times c = c \times l$.

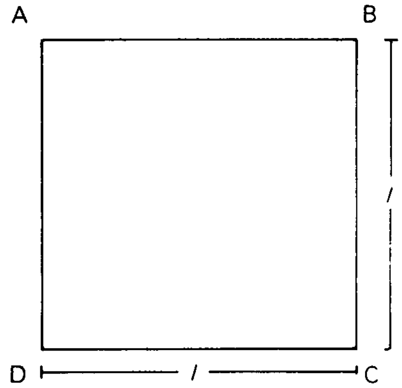
El maestro pide a los alumnos que dibujen un rectángulo cuyos lados tengan la misma longitud, y les pregunta qué nombre recibe dicho rectángulo (cuadrado). Por ejemplo, si dibujan el cuadrado ABCD, y cada uno de sus lados mide 5 cm, les pregunta cómo se podría hallar su área.

Posiblemente dirán que encontrado el producto de su base (lado BC) por la altura (lado DC); ya que el cuadrado es un rectángulo, lo cual es correcto. O sea: tiene $5 \times 5 = 25$ cuadritos de un cm². Por lo tanto: Area del cuadrado ABCD = 25 cm².

El maestro les hace notar que como el cuadrado tiene todos sus lados de igual longitud, y su área se puede hallar obteniendo el producto de dos de ellos, entonces podemos decir que el área del cuadrado es



igual a lado por lado. Les hará notar también que unas veces se llama "lado" a la línea o segmento, y otras a su longitud: 5 cm.



$\overline{DC} = l$ $\overline{BC} = l$
Area del cuadrado = lado × lado
$A = l \times l$
$A = l^2$

El maestro les puede explicar la lectura de esta última expresión: "ele cuadrado", y el hecho de que ese número sea el área del cuadrado que tiene "ele" unidades de longitud.

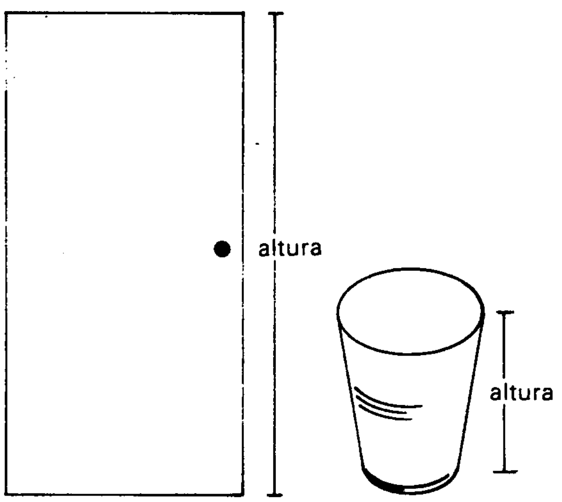
El maestro puede proponer ejercicios donde se pueda hallar el área, por ejemplo de: ventanas, jardines, campos de juego, etc., que tengan forma de rectángulo o de cuadrado.

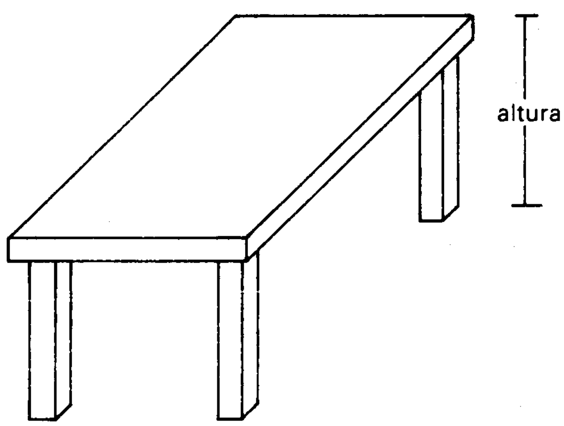
Nota: Los ejercicios no deben plantearse con números decimales, sino con longitudes expresadas en números "enteros": en metros sin centímetros, o en centímetros sin milímetros.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
94. Hallar área de triángulos a partir de rectángulos.	Dado un triángulo, el alumno hallará su área a partir de rectángulos.
95. Trazar alturas de diversos tipos de triángulos. (*)	Dado un triángulo, el alumno trazará la altura luego de elegir uno de sus lados como base.
96. Encontrar un procedimiento para hallar el área de un triángulo. (*)	Dado un triángulo, el alumno hallará su área.

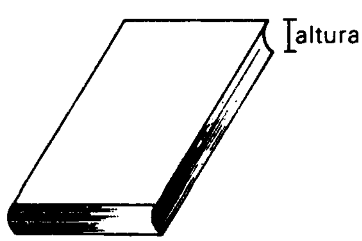
Sugerencias de actividades y metodología

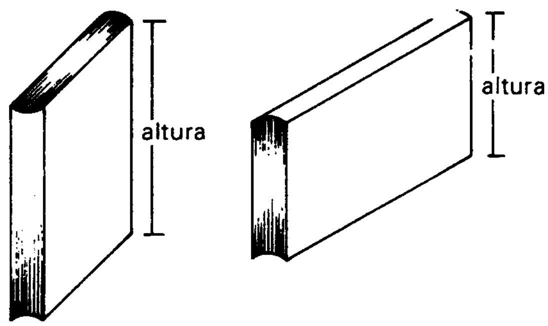
Esta actividad se puede iniciar haciendo algunas observaciones cuando los alumnos estén formando una fila y se les pida que lo hagan por oden de estatura. Esta experiencia puede servir para aproximarse al concepto de altura y de base. A continuación se pide que indiquen la altura de algunos objetos como una puerta, un vaso, una mesa, etc.



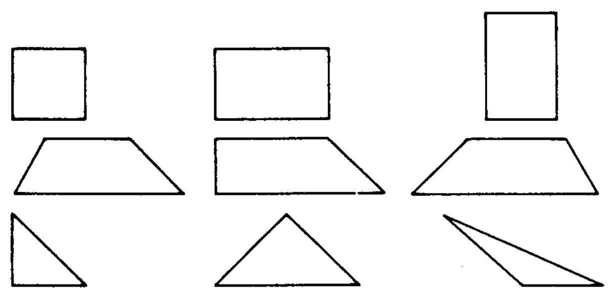


Es posible que, en algunos objetos, la determinación de la altura sea un poco más arbitraria que en otros, como puede ser el caso de un libro, donde la medida de la longitud que se elija como altura depende de la posición de éste, ejemplo:

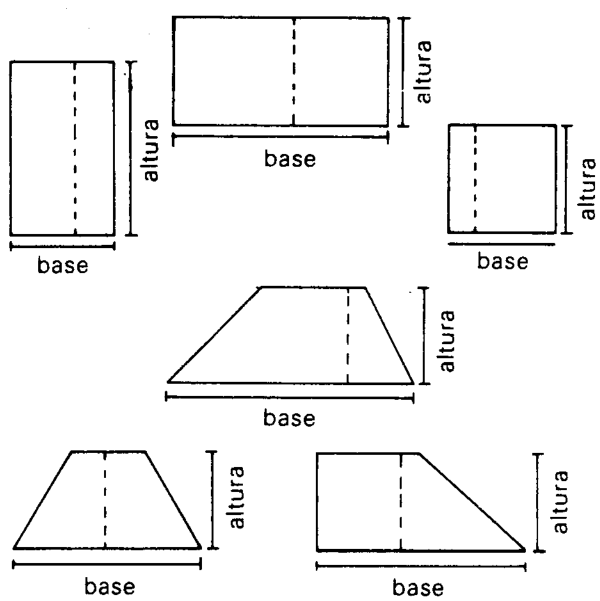




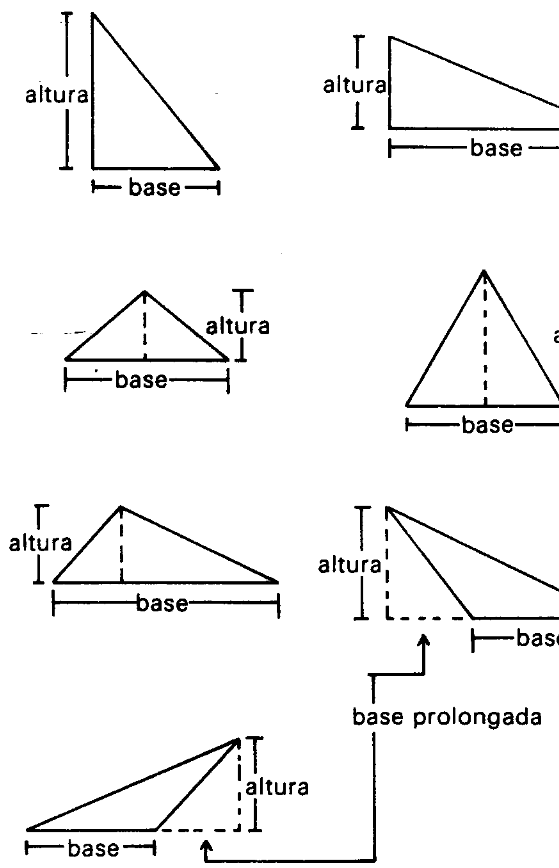
A continuación se dibujan en el tablero algunas figuras como cuadrados, rectángulos, trapecios y triángulos, para que en cada caso tracen un segmento que represente la altura.



Es importante que los alumnos observen que en cada caso es necesario elegir un lado como base, y que la altura forma ángulo recto con la base elegida. Este criterio les será de utilidad cuando vayan a trazar las alturas de los triángulos.

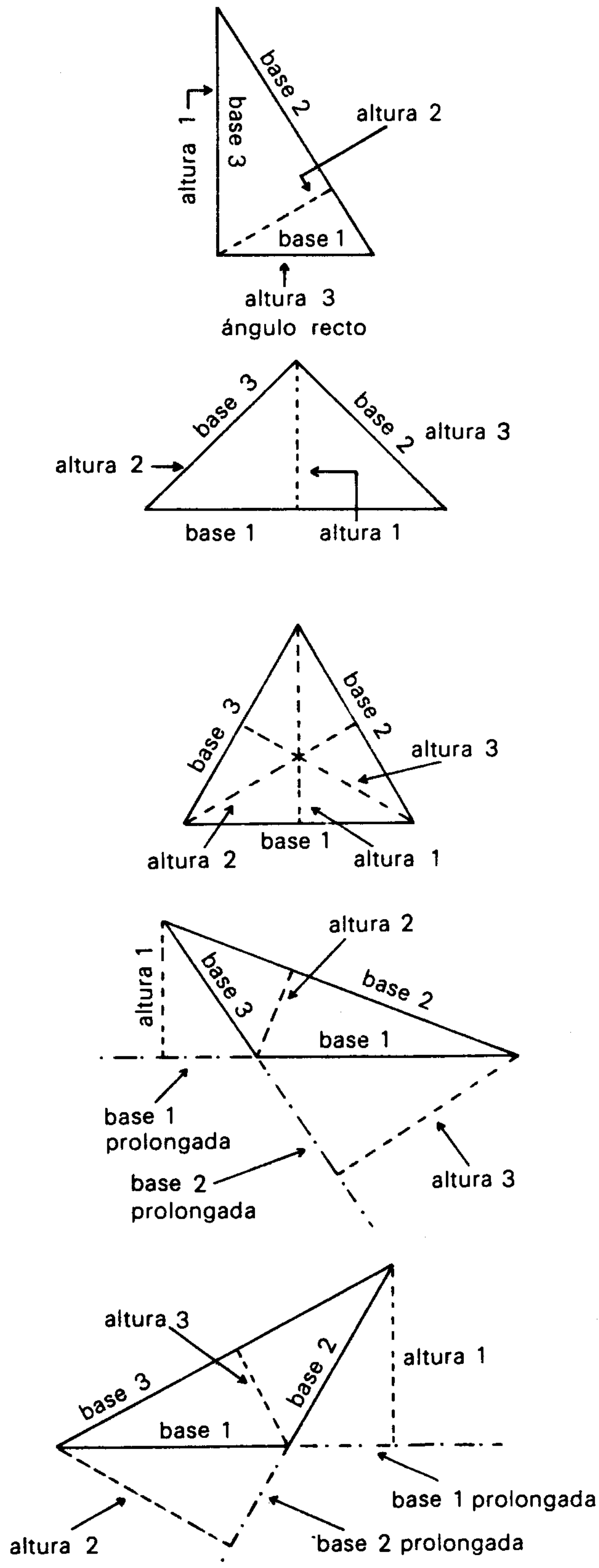


También es importante que los alumnos observen cómo en algunos casos un lado de la figura sirve como altura y en otros casos no. En el tablero para indicar la altura, si es posible, los alumnos la harán con tiza de otro color o con trazos discontinuos como se indica. A continuación se trazan las alturas de los triángulos.



El maestro, por medio de preguntas, orienta a los alumnos cuando encuentren dificultad para trazar la altura de algunos triángulos luego que hayan elegido uno de sus lados como base. Nuevamente, es importante que los alumnos observen que la altura forma siempre ángulo recto con la base; que en algunos casos la altura coincide con uno de los lados; que en otros es necesario prolongar el lado que se eligió como base para trazar la altura. En el tablero se marca la altura de los triángulos empleando la convención hecha (como se muestra en la figura). Luego de que se hayan trazado todas las alturas, los alumnos pueden observar cómo en todos los casos la altura es la distancia perpendicular desde el vértice opuesto hasta la base o su prolongación.

Es conveniente que los alumnos realicen un variado número de ejercicios de trazar la altura de triángulos. Un ejercicio que se debe proponer a los alumnos para que lo desarrollen consiste en trazar las tres posibles alturas que tiene un triángulo dependiendo del lado que se elija como base. En el ejemplo que se encuentra a continuación se han dibujado las tres alturas de varios triángulos; obsérvese que cada altura tiene un número (1, 2 ó 3), que depende del lado que se haya elegido como base (1, 2, 3).



Como ayuda para los alumnos, conviene que en este ejercicio se empleen varios colores:

uno para trazar los lados del triángulo
uno para trazar las alturas
uno para la prolongación de las bases cuando sea necesario

Otra variante es trazar cada lado con un color diferente, y cada altura con el color que le corresponde al lado que se use como base.

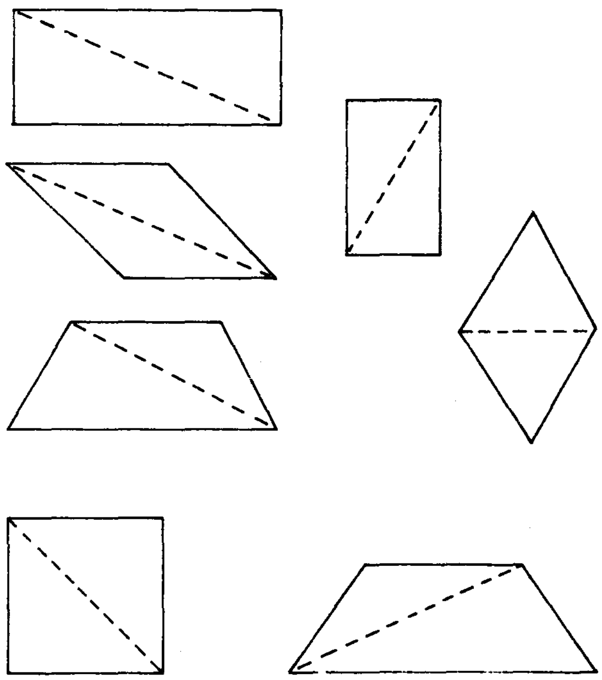
Si no se dispone de este material podrán emplearse las convenciones usadas en los dibujos.

———————— para trazar los lados del triángulo

…………………… para trazar las alturas

-·-·-·-·-·-·- para trazar la prolongación de las bases cuando sea necesario, o una convención para cada uno de los lados y para las alturas respectivas.

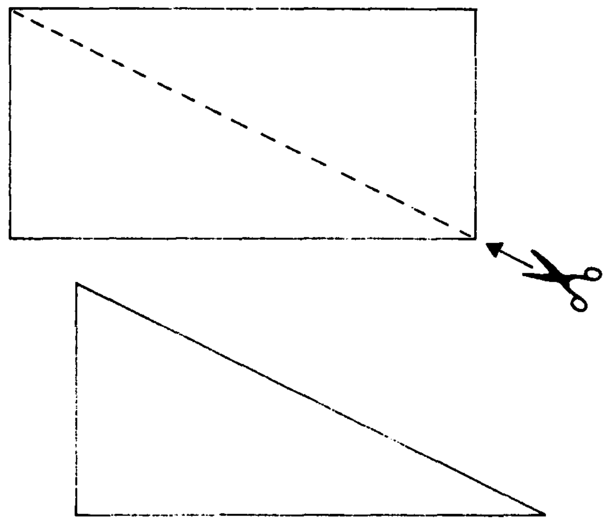
Una vez que los alumnos se hayan ejercitado en el trazo de las alturas de un triángulo y se hayan aclarado las dudas, se presentará otro tipo de ejercicio que consiste en obtener triángulos a partir de otras figuras, en especial paralelogramos o cuadriláteros con algunas regularidades:



Este ejercicio lo pueden desarrollar en hojas de papel con el propósito de que puedan recortar las siluetas y hacer algunas observaciones.

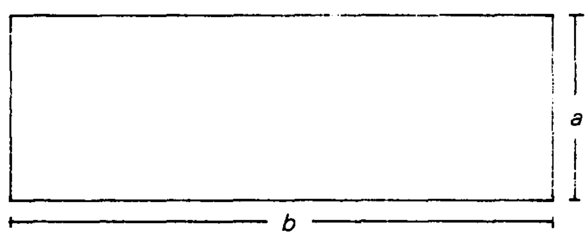
Luego que hayan realizado los trazos que conducen a obtener triángulos, como son las diagonales, los alumnos observan que en algunos casos los triángulos que se obtienen presentan ciertas particularidades como son:

Al trazar una diagonal, o sea una línea recta que une dos vértices no consecutivos en un rectángulo, se obtienen dos triángulos que al ser superpuestos el uno sobre el otro coinciden; esto lo podrán verificar los alumnos si cortan la silueta de uno de estos paralelogramos por la diagonal y superponen los dos triángulos que se obtienen.



De la anterior observación los alumnos posiblemente lleguen a concluir que si del rectángulo se obtienen dos triángulos que al ser superpuestos coinciden, el área de los dos últimos será igual al área del rectángulo; esta observación también es válida si a cambio de trazar la diagonal a un rectángulo se la trazan a un cuadrado: el área de uno de los triángulos que se obtienen es igual a la mitad del área del cuadrado.

Continuando con el ejemplo del rectángulo, tenemos que si a la longitud de la base del rectángulo la llamamos b y a la altura la llamamos a, el área del rectángulo será:



Area del rectángulo $= b \times a$

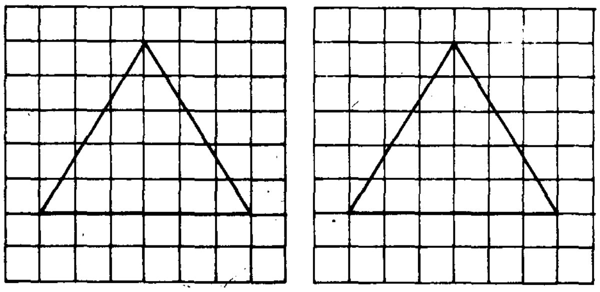
Como el área de uno de los triángulos que se obtiene es la mitad de la del rectángulo, dividimos por dos:

Area del triángulo $= \dfrac{b \times a}{2}$

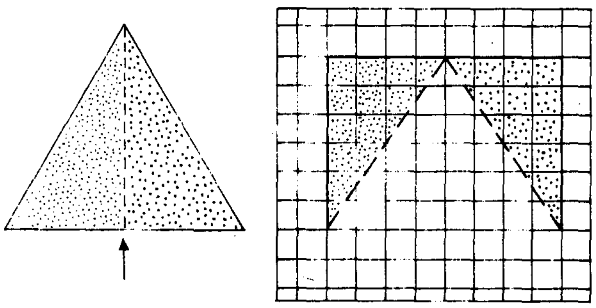
Los alumnos pueden verificar que la base del triángulo tiene la misma longitud que la base del rectángulo, y que la altura del triángulo es la misma altura del rectángulo.

Lo mismo sucede con los triángulos que se obtienen al trazar una diagonal al cuadrado.

Otro tipo de triángulo que los estudiantes ya conocen es el isósceles, que se caracteriza por tener dos lados de igual longitud. Nuevamente, conviene que los alumnos dibujen sobre papel cuadriculado dos triángulos isósceles de igual base y altura. En el ejercicio anterior a partir de un rectángulo se obtuvieron dos triángulos; en éste se intentará un proceso inverso, o sea obtener un rectángulo a partir del triángulo. El procedimiento a seguir puede ser el siguiente:



Se recortan los triángulos dibujados, y uno de ellos se divide en dos, como indica la siguiente figura. A continuación se forma un rectángulo así:



El área del rectángulo que se obtuvo es igual al producto de base por altura. Si la base es b y la altura a, entonces:

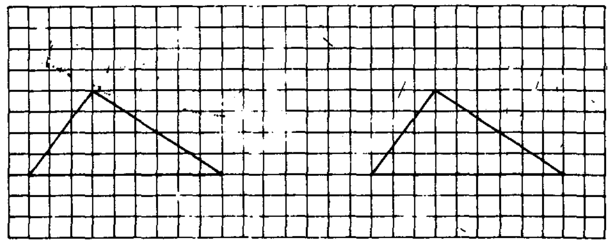
Area del rectángulo $= b \times a$

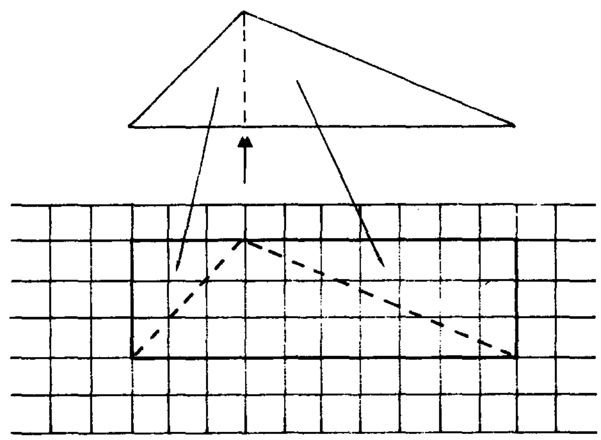
Pero la longitud de la base del rectángulo es igual a la longitud de la base del triángulo, y la altura del rectángulo es igual a la altura del triángulo. Como este rectángulo se formó con dos triángulos de iguales dimensiones, el área de un triángulo será la mitad del área del rectángulo.

Area del triángulo $= \dfrac{b \times a}{2}$

Esta forma de averiguar el área también se puede desarrollar en el caso de triángulos equiláteros. Es conveniente que los alumnos trabajen con triángulos de diferentes dimensiones para que comprueben que ésto se cumple independientemente del tamaño del triángulo.

Un caso diferente para que los alumnos lo trabajen, consiste en hallar el área de unt riángulo escaleno. El procedimiento sugerido es similar al anterior. A continuación se ilustra con algunos dibujos.





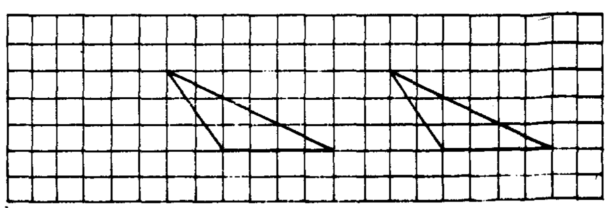
Nuevamente el área del rectángulo es igual a la longitud de la base b por la altura a.

Area del rectángulo $= b \times a$

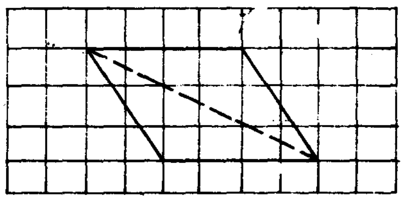
El área de uno de los triángulos será la mitad de la del rectángulo:

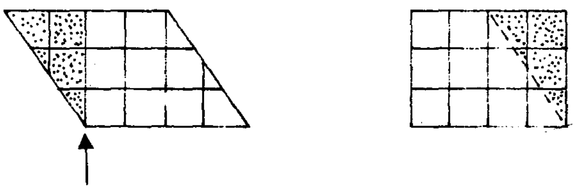
Area del triángulo $= \dfrac{b \times a}{2}$

Un último caso puede ayudar a que el alumno generalice cuál es el procedimiento para hallar el área de un triángulo: es el de un triángulo con uno de sus ángulos mayor que un ángulo recto, como:



En este caso conviene que además de seguir el procedimiento sugerido se anote en una hoja la longitud de la base y de la altura. Como en los casos anteriores, se recortan dos triángulos y se colocan de tal modo que formen un cuadrilátero como se indica en la figura; a continuación saldrá de éste cuadrilátero un rectángulo. Se recorta por donde indica la figura y con el triángulo que se obtiene se completa un rectángulo así:





Los alumnos llegan a comprobar que la longitud de la base del rectángulo que se obtuvo es la misma que la de la base del triángulo original, y que la altura del rectángulo tiene la misma longitud que la altura del triángulo original. Se llaman b, la longitud de la base del rectángulo y a, la de la altura; el área del rectángulo será:

Area del rectángulo = $b \times a$

Como el rectángulo se obtuvo a partir de dos triángulos, el área de uno solo será la mitad:

Area del triángulo = $\frac{b \times a}{2}$

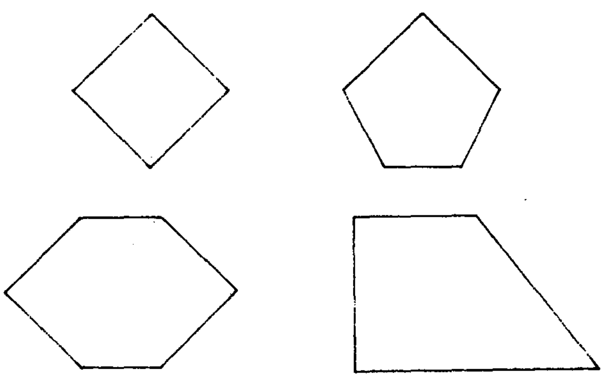
Los alumnos comprueban así que en todos los casos estudiados, el área del triángulo se obtuvo multiplicando la longitud de la base por la altura y este resultado dividiéndolo entre dos.

A continuación se pueden proponer varios ejercicios donde se den la longitud de la base y de la altura de triángulos para que los alumnos hallen el área.

Objetivo específico	**Indicadores de evaluación**
97. Triangular y cuadricular figuras planas.	Dadas algunas figuras planas, el alumno las triangulará. Dadas algunas figuras planas, el alumno las cuadriculará.

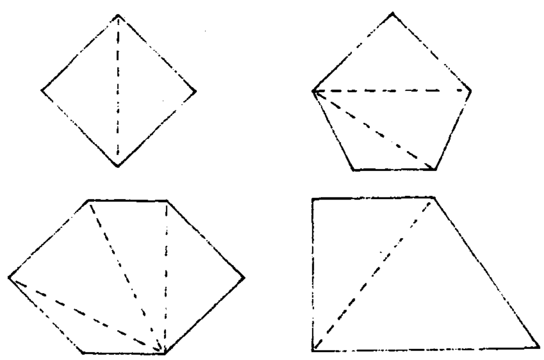
Sugerencias de actividades y metodología

Para iniciar la actividad, el maestro puede dibujar en el tablero figuras como las siguientes:



Los alumnos a su vez dibujan en sus cuadernos figuras similares a las que están en el tablero.

Cuando hayan dibujado las figuras se les pide que sobre cada una de ellas tracen todas las diagonales que sea posible desde un vértice cualquiera, escogido por ellos mismos. Ejemplos:

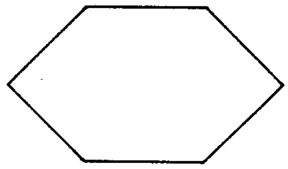


Cuando los alumnos hayan terminado, el maestro les puede pedir que observen las figuras y descubran una característica común de la forma como han quedado divididas. Se espera que concluyan que todas las figuras han quedado divididas en triángulos.

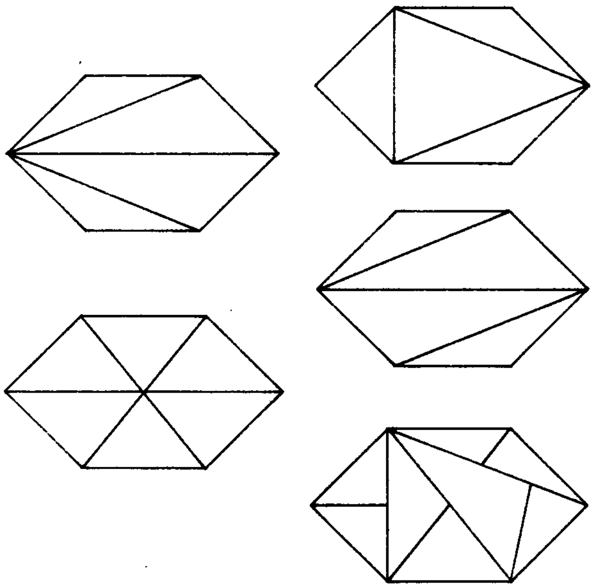
El maestro les dice que cuando una figura se divide en triángulos se dice que ésta ha sido "triangulada".

Enseguida el maestro puede proponer un concurso en el que, dada una figura, gana el alumno que presente mayor número de formas diferentes de triangularla. (En un tiempo de 10 minutos).

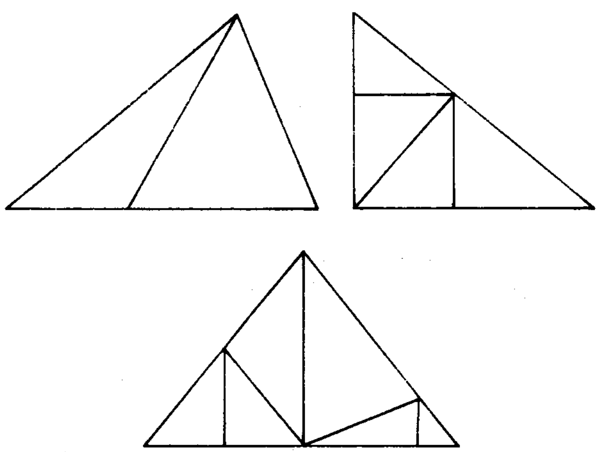
Ejemplo: Dada la siguiente figura.



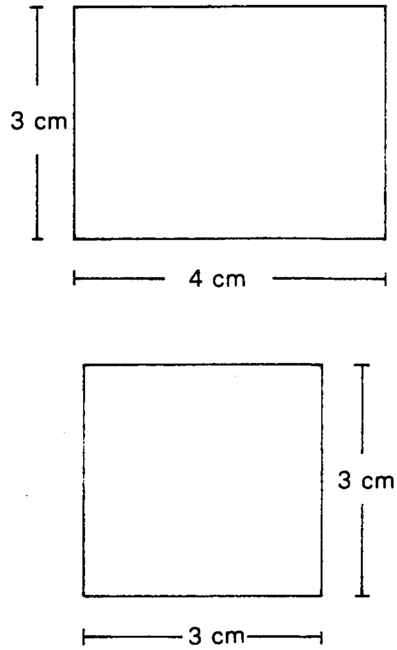
Algunas formas de triangularlas son:



Otra figura que el maestro puede proponer a los alumnos para que ellos la triangulen es un triángulo, en el cual con sólo trazar una recta desde un vértice cualquiera al lado opuesto queda triangulado. Ejemplos:

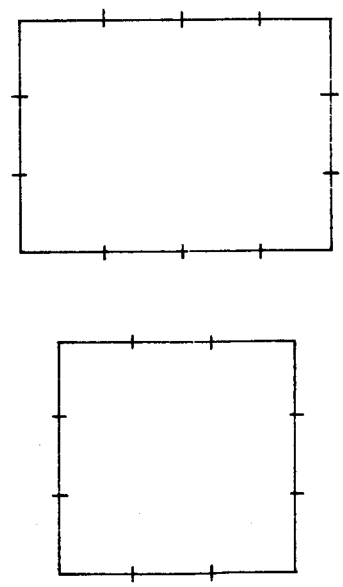


Luego el maestro dibuja en el tablero un cuadrado y un rectángulo para que los alumnos los copien en el cuaderno utilizando las medidas que él les indique. Ejemplo:

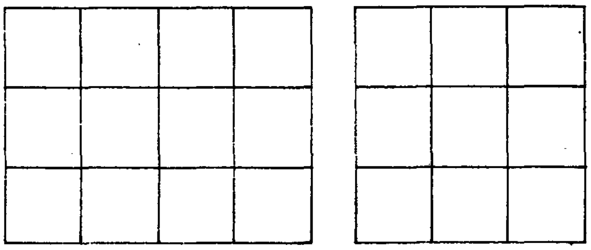


Cuando todos tengan las figuras en sus cuadernos, les puede dar las siguientes instrucciones:

Utilizando una regla graduada, dividan todos los lados de las figuras en centímetros haciendo pequeñas marcas, así:



Tracen todas las paralelas a los lados de la figura que pasen por las marcas hechas sobre éstos:



Observen la forma como han quedado divididas las figuras. Se espera que lleguen a concluir que las figuras han quedado divididas en cuadrados de la misma área.

El maestro les informa que cuando una figura se divide en cuadrados, se dice que ha sido "cuadriculada". Por ejemplo, una hoja de papel cuadriculado es una hoja que está dividida en cuadrados.

También se pueden dibujar otras figuras para que los alumnos las cuadriculen. Ejemplo:

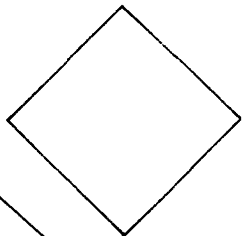


Figura 1

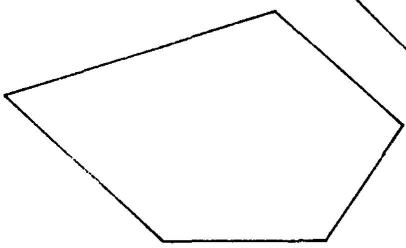
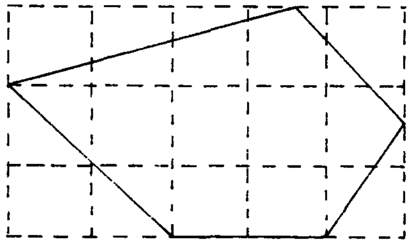
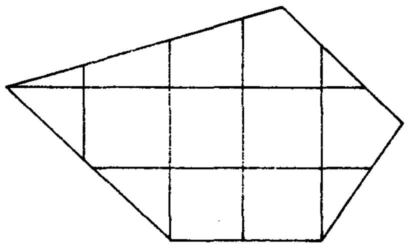


Figura 2

Para la figura 1 pueden hacerlo siguiendo las instrucciones del primer ejemplo; para la figura 2 es posible que los alumnos respondan que no se puede cuadricular; el maestro acepta la respuesta, y explica que no todas las figuras pueden quedar completamente cuadriculadas, y que en estos casos queda cuadriculada sólo una parte de ellas. Una forma de hacerlo es la siguiente: se traza alrededor de la figura un rectángulo o un cuadrado y se siguen los mismos pasos del primer ejemplo. Después se pueden borrar las partes que sobran de la figura:





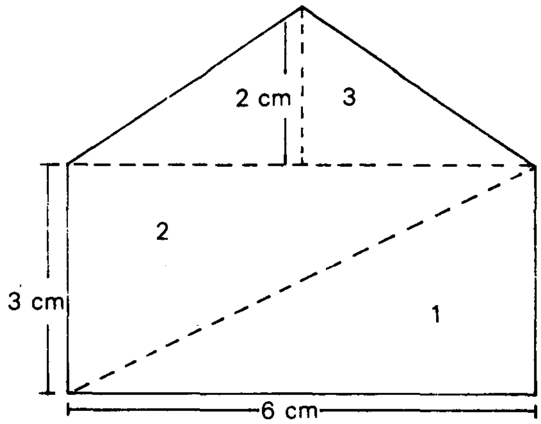
Los alumnos podrán cuadricular otras figura utilizando cuadros más pequeños o más grandes.

Objetivos específicos	**Indicadores de evaluación**
98. Encontrar el área de figuras que han sido cuadriculadas o trianguladas. (*)	Dada una figura, el alumno la triangulará o cuadriculará para hallar su área.
99. Encontrar un procedimiento para hallar el área de un trapecio.	Dado un trapecio, el alumno explicará oralmente y por escrito cómo hallar su área.

Sugerencias de actividades y metodología

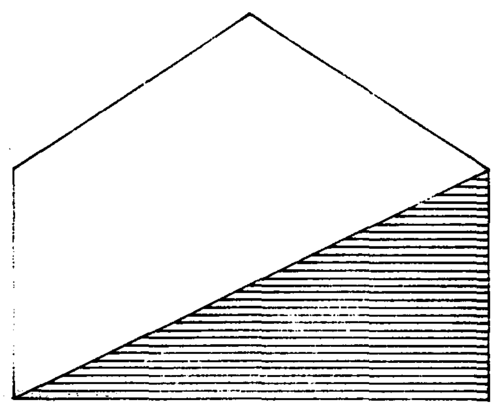
Para iniciar la actividad conviene que los alumnos recuerden los procedimientos para hallar el área del triángulo y del rectángulo.

Enseguida el maestro dibuja una figura como la siguiente para que los alumnos la dibujen en su cuaderno y encuentren el área. Ejemplo:



Los alumnos encuentran el área de la figura hallando el área de cada uno de los triángulos que se formaron, así:

Area del triángulo 1 $= \dfrac{6\ \text{cm} \times 3\ \text{cm}}{2} = 9\ \text{cm}^2$

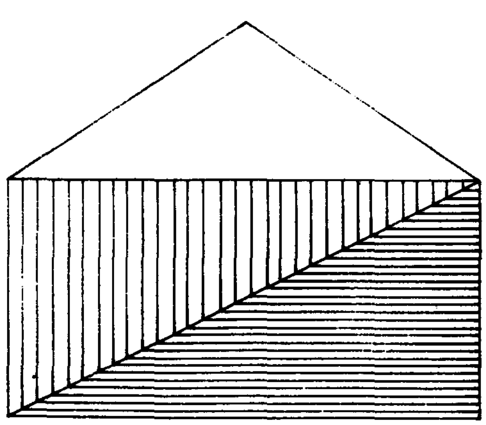


Sobre la figura sombrean la región cuya área ya averiguaron.

9 cm²: área de la región sombreada.

Enseguida hallan el área del triángulo 2.

Area del triángulo 2 $= \dfrac{3\ \text{cm} \times 6\ \text{cm}}{2} = 9\ \text{cm}^2$



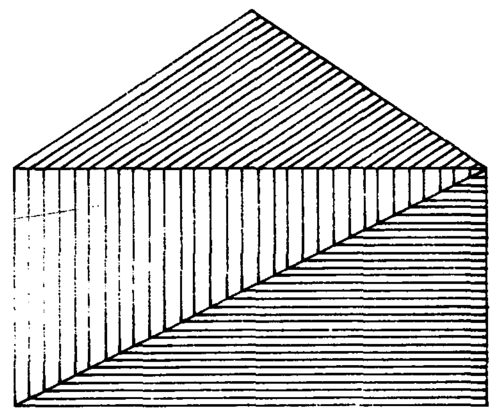
Ahora sombrean la región triangular cuya área hallaron.

$9\ \text{cm}^2 + 9\ \text{cm}^2 = 18\ \text{cm}^2$

Area de la región sombreada

Depués hallan el área del triángulo 3.

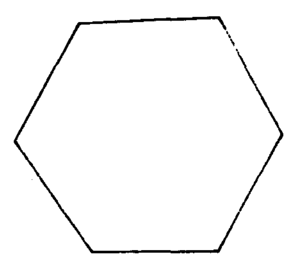
Area del triángulo 3 $= \dfrac{6\ \text{cm} \times 2\ \text{cm}}{2} = 6\ \text{cm}^2$



Sombrean esta región sobre la figura.

Area de la figura $= 6\ \text{m}^2 + 9\ \text{cm}^2 + 9\ \text{cm}^2 = 24\ \text{cm}^2$

Enseguida el maestro puede dibujar una figura como la siguiente:



Los alumnos se organizan en grupos de a 4 para hallar el área de dicha figura; después pasa un representante de cada grupo a exponer en el tablero el procedimiento que utilizaron para hallarla. (Las respuestas, aunque no sean exactamente las mismas, deben ser aproximadas. En caso de que a un grupo le dé un valor muy diferente, revisarán el procedimiento utilizado).

Dos formas de cómo podrían hacerlo son las siguientes:

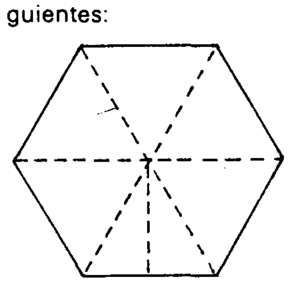


Figura 1.

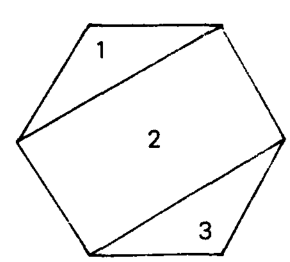


Figura 2.

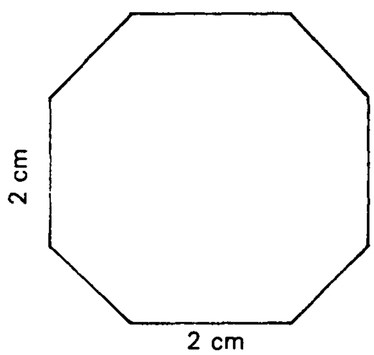
Al trazar las diagonales, como en la figura 1, se forman 6 triángulos de la misma área. Entonces basta hallar el área de uno de los triángulos y multiplicar por 6 para obtener el área de la figura.

Si trazan diagonales, como en la figura 2, podrán hallar el área de la figura, obteniendo el área del triángulo 1 y del rectángulo 2. Como el área del triángulo 1 es igual a la del triángulo 3, basta sumar el doble del área del triángulo 1 con el área del rectángulo 2.

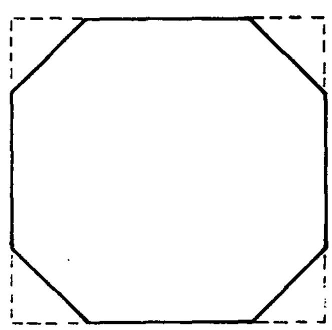
Nota: Las medidas que los alumnos necesiten para hallar las áreas las podrán buscar utilizando una regla graduada en centímetros, omitiendo o "despreciando" los milímetros.

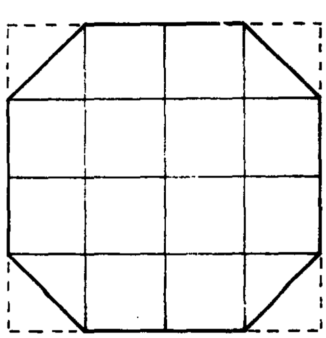
Otra forma de hallar áreas de figuras puede ser utilizando cuadrícula.

Ejemplo: Dada la siguiente figura:



Se prolongan algunas de las líneas de la figura para obtener una figura cuadrada. Después la cuadriculan utilizando un lápiz de otro color.

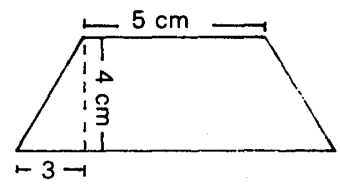


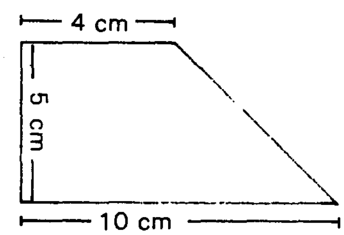


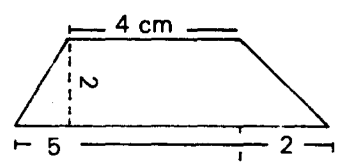
Para hallar el área de la figura cuentan primero los cuadros que se forman completamente dentro de la figura (en este caso 12) y después calculan a cuántos cuadros equivalen las otras partes. Aquí se observa que los cuatro triangulitos tienen la misma área que dos cuadros. Como cada uno mide 1 centímetro cuadrado, pueden concluir que la figura tiene 14 centímetros cuadrados de área.

El maestro puede proponer otras figuras para que los alumnos encuentren el área por el método que ellos quieran.

Después dibuja en el tablero algunos trapecios como los siguientes:



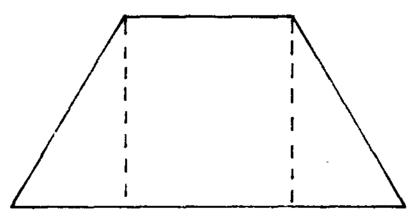




Los alumnos hallan sus respectivas áreas.

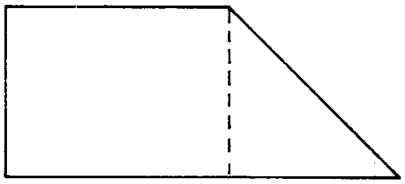
Cuando todos hayan terminado, el maestro explica que para hallar el área de cualquier trapecio se puede seguir un procedimiento como el siguiente:

a) Si el trapecio es isósceles:



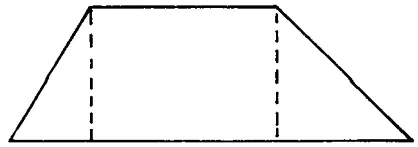
Trazando dos perpendiculares desde los extremos de la paralela menor a la paralela mayor, se forman dos triángulos de la misma área, y un rectángulo; por lo tanto, para hallar el área del trapecio, basta hallar el área de uno de dichos triángulos y el área del rectángulo. Después se suma dos veces el área del triángulo con el área del rectángulo, y se obtiene el área del trapecio.

b) Si el trapecio es rectángulo:



Basta trazar una sola perpendicular, puesto que la otra es un lado del trapecio, y en este caso sólo se forman un triángulo y un rectángulo. Hallando el área de estas dos figuras, y sumando dichas áreas, se obtiene el área del trapecio.

c) Si el trapecio es escaleno:



Se siguen los mismos pasos que en el trapecio isósceles; en este caso los dos triángulos que se forman tienen diferente área, y por lo tanto hay que hallar el área de los dos triángulos y la del rectángulo, para que después, al sumarlas, se obtenga el área del trapecio.

El maestro puede proponer algunos ejercicios de hallar el área de trapecios para que los alumnos los resuelvan utilizando el procedimiento anterior.

Objetivo específico	**Indicador de evaluación**
100. Dibujar sobre una cuadrícula, conservando el tamaño, láminas que han sido previamente cuadriculadas.	Dada una lámina sencilla, el alumno hará una copia de ella utilizando cuadrícula.

Sugerencias de actividades y metodología

Es conveniente que cada alumno tenga una pequeña lámina, más o menos del tamaño de la mitad de una hoja de cuaderno. El dibujo de la lámina debe ser sencillo. Para pasarlo al cuaderno primero cuadriculan la lámina, y luego hacen la misma cuadrícula en el cuaderno para que les sirva de guía en el traslado de las líneas que forman la frontera del dibujo.

Los cuadros que forman la cuadrícula sobre la lámina que trajeron se trazan de un centímetro de lado, como se indica en la figura 1.

Después de haber cuadriculado la lámina, hacen la misma cuadrícula en el cuaderno, es decir, cuentan los cuadros que se trazaron en la lámina (en este caso 13 a lo largo de la base, y 11 a lo largo de la altura).

Después de hecha la cuadrícula en el cuaderno, observan la lámina con el fin de trazar, más o menos, la misma figura en el cuaderno, pasando los trozos de la figura cuadro por cuadro.

Se espera que los alumnos caigan en la cuenta de la utilidad de esta técnica para reproducir dibujos. Es conveniente trazar una cuadrícula en forma suave, para borrarla cuando se haya terminado de hacer el dibujo deseado.

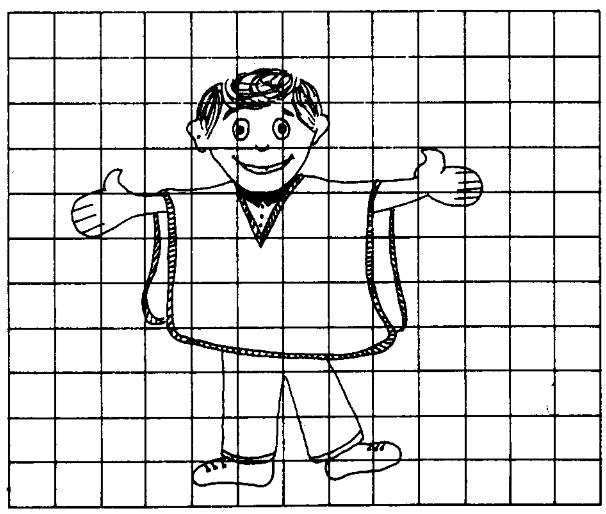


Figura 1.

Esta técnica se emplea muy a menudo cuando se desea hacer croquis de mapas. El maestro puede asignar como ejercicio, hacer el mapa del departamento respectivo o el de Colombia, utilizando esta técnica.

Objetivos específicos	Indicadores de evaluación
101. Ampliar al doble o reducir a la mitad las dimensiones (largo y ancho) de una lámina, empleando cuadrícula. (*).	Dada una lámina con un dibujo, el alumno lo ampliará o lo reducirá utilizando cuadrícula.
102. Reconocer el efecto que tiene sobre el área de una figura la ampliación o reducción de sus dimensiones (largo y ancho).	Después de ampliar o reducir un dibujo sencillo, el alumno explicará cómo varió el área de dicho dibujo.

Sugerencias de actividades y metodología

Los alumnos pueden disponer de dos (2) láminas; una más pequeña que otra; se debe tener en cuenta que sean láminas sencillas, es decir, fáciles de dibujar.

El maestro puede sugerir a los alumnos que sobre la lámina más pequeña tracen una cuadrícula, de tal modo que los cuadros tengan de lado medio centímetro, y que luego tracen en el cuaderno otra cuadrícula con el mismo número de cuadritos, pero de 1 centímetro de lado; de tal manera que al copiar el dibujo de la lámina en el cuaderno, quede ampliado. (Ver figura 2).

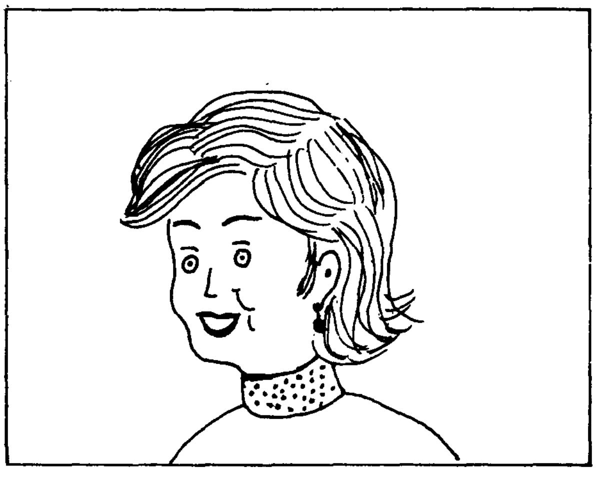


Figura 2.

Observemos este ejemplo:
supongamos que se dispone de una lámina como esta (Ver figura 3.)

Al cuadricular la lámina trazando cuadritos de medio centímetro de lado, se obtiene:

Para poder ampliar el dibujo de la lámina, trazan en el cuaderno una cuadrícula semejante, es decir, hacen el mismo número de cuadritos, pero de 1 centímetro de lado. (Ver figura 4.)

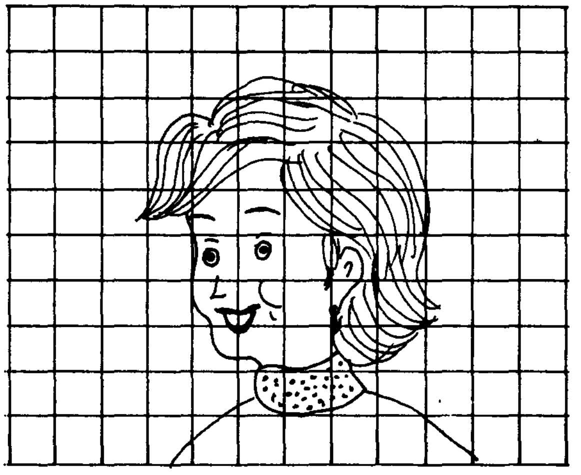


Figura 3.

Después, observando la lámina, empiezan a pasar los trazos que hay en cada cuadrito de la lámina a los cuadritos que hicieron en el cuaderno. Se pueden ver, en la cuadrícula anterior, algunos trazos ya hechos; si se continúa copiando el ejemplo propuesto, se puede pasar el dibujo de la lámina al cuaderno. Al terminar, se observa que el dibujo quedó ampliado.

Ahora podemos hacer el proceso inverso o de reducción; los alumnos cuadriculan la lámina más grande con cuadritos de 1 centímetro de lado; en el cuaderno hacen el mismo número de cuadritos, pero de medio centímetro de lado; luego pasan los trazos del dibujo que hay en cada cuadro de la lámina a los cuadritos que hicieron en el cuaderno. Al terminar podrán observar cómo se ha reducido el dibujo al pasarlo de la lámina al cuaderno.

Después de hacer varios ejercicios como los anteriores, los alumnos pueden ensayar a realizar el mismo proceso sin el uso de la cuadrícula, es decir, tratarán de reducir a la mitad las dimensiones longitudinales (largo y ancho) de una lámina sin emplear cuadrícula, como también podrán tratar de ampliar al doble las dimensiones longitudinales (largo y ancho) de una lámina sin utilizar cuadrícula.

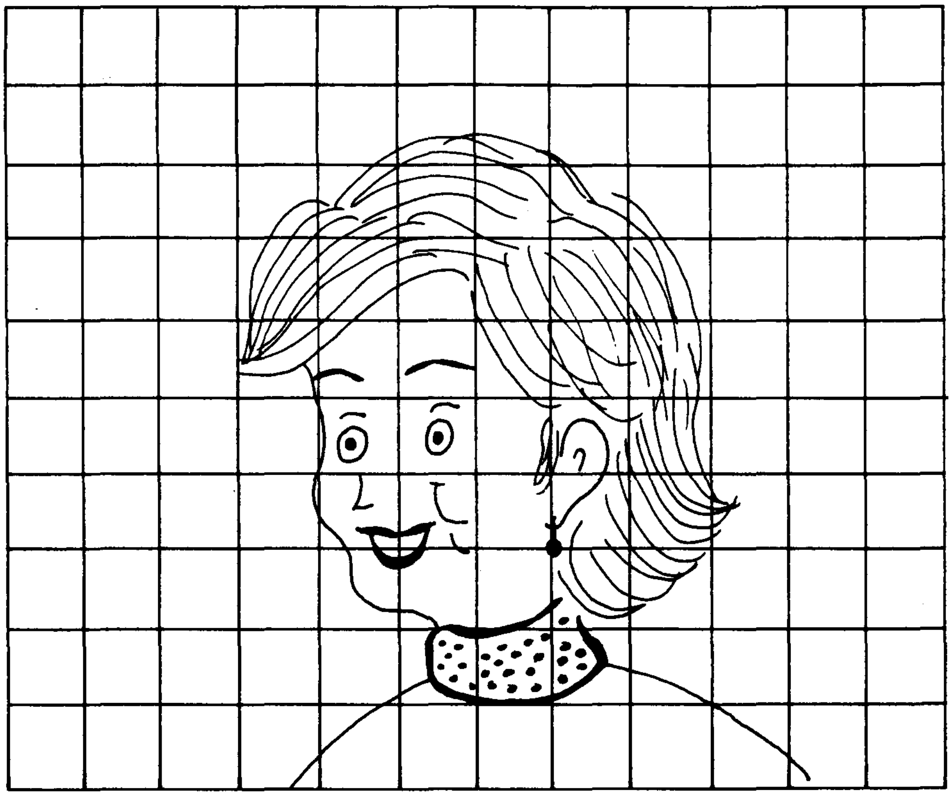


Figura 4.

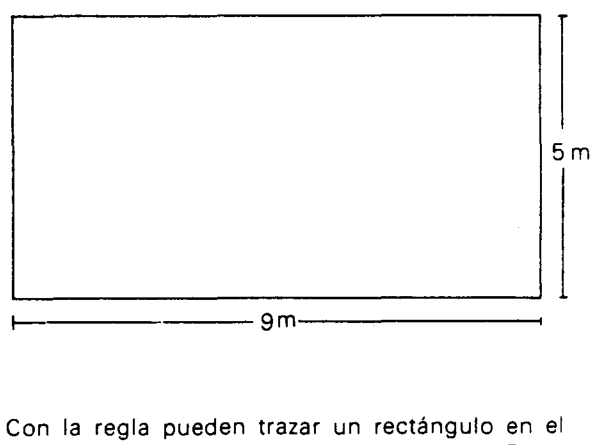
Es importante que el maestro prevea que, cuando el alumno trate de ampliar al doble las dimensiones longitudinales (largo y ancho) de una lámina sin emplear cuadrícula, el área del dibujo que trazará en el cuaderno, será cuatro veces mayor que el que está en la lámina; por tal motivo, el dibujo de la lámina debe ser pequeño y fácil de dibujar.

Ahora, cuando el alumno trate de reducir a la mitad las dimensiones (largo y ancho) de una lámina sin utilizar cuadrícula, el maestro tendrá presente que el dibujo de la lámina que los alumnos empleen sea, más o menos, del tamaño de una hoja de cuaderno, ya que al trazarlo en el cuaderno, les debe quedar reducido, más o menos, a la cuarta parte.

Nota: En caso de que las proporciones anteriormente anotadas, entre el dibujo de la lámina y el dibujo realizado, no sean muy exactas, el maestro debe aceptarle al alumno la aproximación hecha al ampliar o reducir el dibujo de la lámina. Puede hacerle repetir el dibujo, esta vez por medio de cuadrícula, para que él mismo compare los dos dibujos y evalúe la precisión de su ampliación o de su reducción.

Por último y como aplicación de los conceptos anteriormente expuestos, el maestro puede escoger un grupo de 4 alumnos y les dice que midan el largo y el ancho del salón, para lo cual pueden emplear una pita de 5 a 10 metros de longitud que el maestro previamente consiga; para facilitar la medición, se hacen unas marcas sobre la pita y se señalan con un color los puntos correspondientes a 1 metro, 2 metros, 3 metros, etc., y con otro el punto medio entre 1 metro y 2 metros, entre 2 metros y 3 metros, etc.

Si el grupo mide el largo del salón y su longitud es de 9 metros, y mide el ancho y su longitud es de 5 metros, dibuja en el cuaderno el piso del salón, teniendo en cuenta la siguiente convención: 1 metro se representará por un centímetro; por lo tanto, al trazar en el cuaderno el piso del salón quedaría así:



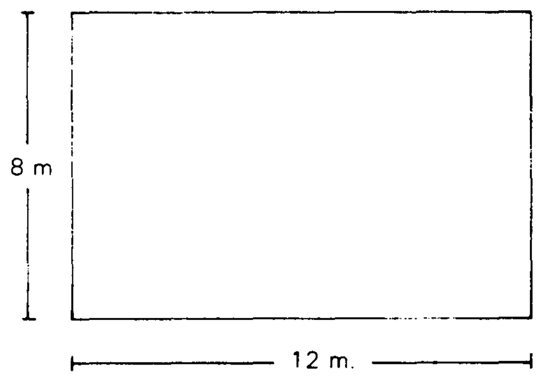
Con la regla pueden trazar un rectángulo en el cuaderno, que tendrá de largo 9 cm y de ancho 5 cm, cada uno de los cuales representa un metro de longitud. Al lado del dibujo pueden escribir la siguiente nota:

Cada centímetro de este dibujo representa un metro.

Al anotar las dimensiones reales en la figura trazada, escribirán 9 metros y 5 metros, como se observa en la figura.

En caso que las dimensiones sean mayores, por ejemplo, que el largo del salón mida 12 metros y el ancho mida 8 metros, para hacer el dibujo en el cuaderno podrán tener en cuenta la siguiente convención.

1 metro se representará por medio centímetro.



Con la regla pueden trazar un rectángulo en el cuaderno, el que tendrá de largo 6 centímetros, y de ancho 4 centímetros.

En la figura se escriben las dimensiones reales:

12 metros de largo y 8 metros de ancho.

Pueden hacer otros dibujos como el piso del patio de la escuela, la superficie de una mesa, etc.

Se procurará elegir superficies de forma rectangular, y al tomar las medidas de sus dimensiones longitudinales, lo pueden hacer en metros, en casos que la medida tenga una fracción de más de medio metro, se puede tomar como aproximación un metro más.

Si la medida es de 12 metros con 20 cm, se toman 12 metros; pero si es de 15 metros con 70 cm, se toman 16 metros. Esto se hace con el fin de escoger una convención apropiada para poder realizar los dibujos en el cuaderno. Si sale un número impar, por ejemplo 15 m, los alumnos pueden medir 7 cm y medio para representar esa longitud, utilizando las rayitas de la regla, sin necesidad de emplear la notación "7.5 cm".