El debate sobre conceptos y objetos matemáticos: la posición "ingenua" en una teoría "realista" vs. el modelo "antropológico" en una teoría "pragmática"

Bruno D'Amore[1]

Introducción

En este texto se analizan diferentes interpretaciones de los términos "concepto" y "objeto" en matemáticas, en la historia de los pensamientos filosófico y psicológico y en la reciente acepción "antropológica". Se muestra de esta manera, la necesidad de introducir una teoría pragmática como marco para la interpretación de estos términos.

Los conceptos: terminología difundida, filosófica y literaria

Acerca de la naturaleza de los conceptos se han escrito libros enteros y filósofos de primer nivel se han ocupado de este tema.[2] En los diccionarios de filosofía se hallan definiciones de "conceptos" bastante semejantes; tomo como ejemplo la siguiente, de tipo aristotélico: "*En general, todo procedimiento que haga posible la descripción, la clasificación y la previsión de los objetos conocibles*". Desde esta definición se puede notar que:

- el concepto es un proceso, es decir algo dinámico y no estático;
- puede haber conceptos de cualquier cosa, desde los objetos concretos (el concepto de *mesa*) hasta los abstractos (el concepto de *número 3*); desde los objetos reales hasta los irreales, inexistentes o imaginarios;
- existe diferencia entre *nombre y concepto*; baste pensar que diferentes nombres pueden ser pertinentes para el mismo concepto; además, que conceptos diferentes pueden circular bajo el mismo nombre.

En este punto surgen dos problemáticas fundamentales: la *naturaleza* del concepto y la *función* del concepto.

La pregunta acerca de la *naturaleza* del concepto ha tenido, en filosofía, respuestas diferentes que divido en dos clases:

---

1 El doctor D'Amore es director del Grupo Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital FJC- MESCUD y profesor del Doctorado Interinstitucional en Educación de esta universidad. También es Responsable Científico del Grupo NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) y hasta septiembre de 2010 fue profesor de planta de la Universidad de Bologna (Italia).

2 Para la redacción de esta primera sección, me sirvo principalmente de D'Amore (1999-2006), cap. 6.

- el concepto es la *esencia* misma de las cosas y por lo tanto su esencia necesaria: eso por lo cual las cosas no pueden ser otra cosa que lo que son (aunque entre mil diversidades, obviamente, diría que esta idea, nacida con Sócrates y refinada por Aristóteles, ha tenido muchos seguidores hasta llegar a Husserl);
- el concepto es el *signo* del objeto, por lo que se halla con él en relación de significación (la idea es esencialmente estoica, pero fue retomada en la época medieval, remontándonos a Boecio y después a Abelardo, y aún en los siglos XVII al XIX en España y Portugal; pero fue hecha propia por los lógicos de inicios del siglo XX).

La pregunta acerca de la *función* del concepto ha dado lugar a dos concepciones fundamentalmente diferentes:

- de tipo *intencional:* el concepto tiene como objetivo expresar o revelar la sustancia de las cosas;
- de tipo *instrumental:* en este caso se tienen varios aspectos ulteriores:
  - el concepto es un instrumento para *describir* los objetos y permitir su *reconocimiento* (en la antigüedad los Epicúreos y los Estoicos; algunos filósofos de la ciencia en el siglo XX);
  - el concepto es un instrumento para *clasificar* los objetos en el modo más *económico* posible (a esta idea adhiere, por ejemplo, Mach; y aquí se desencadena la cuestión según la cual los conceptos científicos son pseudo-conceptos en el sentido de Benedetto Croce);
  - el concepto es un instrumento para *organizar* los datos de la experiencia en manera tal de poder establecer entre ellos *conexiones* de carácter lógico (idea aceptada por Duhem);
  - el concepto es un instrumento para *anticipar* (por ejemplo, aquí podemos citar a Dewey y a Quine, aunque por razones totalmente distintas).

Un modo completamente diferente de discurrir filosóficamente acerca de los conceptos es el de las escuelas francesa y alemana. Más que *definir* los conceptos, se busca analizar *cómo se forman* los conceptos. Tenemos entonces las siguientes distinciones:

- conceptos *a priori* o conceptos *puros* (de Kant): son los conceptos que no se obtienen de la experiencia: el concepto de unidad, de pluralidad etc.; tales ejemplos son tomados precisamente de Kant;
- conceptos *a posteriori* o *conceptos empíricos*: son nociones generales que definen clases de objetos dados o construidos; por ejemplo, el concepto de *vertebrado*, de *placer*, etc., se refieren a todos y solo a aquellos individuos que forman estas clases, sea que se les pueda aislar (*un gato*, tomado de la clase de los vertebrados) o no (como sería en el caso de *un placer*).

Esta es, por ejemplo, la posición asumida por André Lalande en su *Vocabulaire technique et critique de la philosophie* (PUF, París 1926).

Es claro, entonces, que se puede hablar en todo caso de *intensión* y de *extensión* de un concepto (recordando que pueden existir conceptos con extensión vacía...).

Pero, ¿qué quiere decir, etimológicamente, *concepto*? Su nombre latino (*conceptus*, de *concipere*) tiene una clara referencia al resultado del acto de la concepción o generación de la mente en su alejarse de la inmediatez de las impresiones sensibles y de las representaciones particulares y en su llegada a una significación universal. Pero entonces, se podría pensar en una coincidencia con la palabra *idea*; o se le podría hacer coincidir con el λόγος (el *verbum*, la palabra mental) o incluso con la *noción*.

Cada una de estas interpretaciones (y otras más) fueron sostenidas en el pasado por eminentes filósofos. Esto nos autoriza a confundir, de ahora en adelante, *concepto* con *idea*, aunque en la idea existe implícita también una especie de *representación*, mientras que el *concepto* podría también ser inmune a lo anterior.

Si se pasa a diccionarios de la lengua común, no filosóficos, editados en varios países, se halla, por ejemplo:

- "*Aquello que la mente entiende y comprende por medio de la observación, la reflexión y la inducción*"; a veces, además de *entiende* y *comprende,* se agrega también *concluye*;
- "*La criatura concebida - la cosa imaginada e inventada por nuestro intelecto*";
- "*Pensamiento que la mente forma derivado de dos o más ideas, partiendo de lo individual a lo general;* [pero también:] *idea, opinión*";
- "*Pensamiento, en cuanto concebido por la mente; más en particular: idea, noción que expresa los caracteres esenciales y constantes de una realidad dada que la mente se forma aferrando juntos (...) los varios aspectos de un determinado objeto que a la mente le interesa tener presentes en su totalidad*";
- "*Término filosófico referido en general al contenido lógico o al significado de los signos lingüísticos y de las imágenes mentales*".

Puede ser interesante, para nuestros objetivos introductorios, ver qué uso hacen de este término algunos literatos. Dante Alighieri usa conceptos en el sentido de concepciones en Paraíso 3-60; en este mismo sentido, se halla en muchos literatos de todos los países del mundo. Pero es claro que los literatos utilizan una palabra en el sentido más vasto posible, como además se hace –y es justo que se haga– en el lenguaje común, donde concepto indica también *opinión, modo de entender, principio, proyecto, intención, estimación, reputación*, etc., según sea la lengua.

Todo esto solo para testimoniar la enorme dificultad y las variaciones que se encuentran cuando se quiere enfrentar de manera significativa y un poco rigurosa una problemática que asigna un lugar primordial a una palabra para cuya definición se han empleado miles de años.

Los conceptos: terminología psicológica en la vertiente didáctica

Si queremos hacer progresos significativos y específicos, es necesario buscar textos más adecuados, más acordes con el espíritu del ámbito en el que nos queremos mover.

No puedo entonces dejar de recordar inmediatamente que L. S. Vigotsky (1960, 1962) trabajó durante mucho tiempo sobre la formación de los conceptos en el ámbito de su más vasto campo de investigación acerca de cómo influyen las causas sociales en las diferencias psíquicas de los individuos (la influencia del ambiente sobre las diferencias psíquicas). Él habla precisamente de desarrollo conceptual, distinguiendo esencialmente tres fases (pero el asunto es mucho más complejo y aquí lo dejo de lado):

- *fase de los cúmulos sincréticos*, caracterizada por la falta de una referencia objetiva estable;
- *fase del pensamiento por complejos*; en tal fase el sujeto tiende hacia un modo objetivo del pensamiento; el sujeto reconoce nexos concretos, pero no lógicos ni abstractos;
- *fase conceptual*; en tal fase el sujeto opera utilizando su capacidad de abstracción.

Vigotsky presta especial atención a la formación de los conceptos científicos, en particular a la de los de tipo escolar durante la infancia, evidenciando el anclaje que los niños hacen de tales conceptos a componentes concreto-figurativos, mucho antes que a los componentes lógicos o abstractos; parece ser que tal prioridad es necesaria para la “fundación” misma del concepto. A propósito del orden en la adquisición de los conceptos, Vigotsky (1962) hace una célebre afirmación, a primera vista paradójica, según la cual los conceptos científicos se desarrollan *antes* que los espontáneos; dice también “*si el programa proporciona el material adecuado*”; en resumen: la supuesta necesidad infantil de anticipar una fase empírica de aprendizaje a una abstracta no parece ser así necesaria. [Regresaremos a los conceptos científicos y a Vigotsky en la sección 4].

Pero entonces se puede poner en discusión la posición de J. Bruner (1964), aquella de la célebre terna de los modos de representación de los conceptos:

- *ejecutiva (o "enactiva"),*
- *icónica,*
- *simbólica*

que, dicho sea de paso, se refería precisamente a las matemáticas.

Pongamos un ejemplo muy famoso: la adquisición del concepto de medida por parte de niños con edad entre los tres (3) y los cinco (5) años, y contrapongamos las modalidades de Piaget a las de un famoso miembro de la escuela soviética: Gal'perin.

- En la descripción que hacen Piaget, Inhelder y Szeminska (1948) del aprendizaje espontáneo del concepto de medida, al niño se le proponen situaciones empíricas en las que se pide medir, hasta llegar a un concepto abstracto, respetando la teoría de los estadios evolutivos. El comportamiento del niño seguiría un famoso *recorrido*, muy difundido aún hoy en el nivel preescolar y en el primer ciclo de la escuela elemental –no solo italiana–: medidas espontáneas con pseudo-unidades de medida, predominancia de la actividad perceptiva; elección más cuidadosa de la unidad de medida, capacidad de llevar más veces la unidad; conciencia de la conservación de las magnitudes (y de las medidas). Como podrá notarse, abundancia de terminología típicamente piagetiana.
- La prueba de Gal'perin (1969) relaciona más la medición con la idea de número, basándose incluso en ideas fundacionales de A. N. Kolmogorov. La primera etapa es la de llegar a la idea de unidad; después, al hecho de que la medida con respecto a una unidad dada es un número que puede ser recordado incluso sin conocer su nombre, simplemente poniendo aparte un palito o un botón cada vez que se usa dicha unidad; en este punto la medida se hace coincidir con el número de veces que se usó la unidad (el ejemplo propuesto es llenar un balde con vasos de agua para estimar su capacidad); y para terminar, reconocimiento y aceptación de la relatividad del número-medida con respecto a la unidad utilizada.

Me parece que todo esto explica bien la obstinación y el interés con el que los más famosos teóricos del aprendizaje conceptual se han interesado en este tema y contribuye a explicarnos qué entienden ellos por *concepto,* al menos en el ámbito del aprendizaje cognitivo.

¿Se *deben* enseñar los conceptos? ¿Se *pueden* aprender los conceptos? Más aún: ¿tienen sentido estas preguntas?

Las precedentes son cuestiones cardinales sobre las cuales se necesita reflexionar y que algunos autores toman demasiado a la ligera.

Esta problemática se desarrolló alrededor de los años 60, sobre todo en los países de lengua anglosajona, en el vastísimo movimiento internacional de renovación de los currículos que se dio en todo el mundo, provocado por la gran revalorización educativa de los contenidos de las varias disciplinas, en particular de las ciencias y, específicamente, de las matemáticas. En este sentido, ciertamente un artífice del viraje mundial fue J. Bruner.[3] Como consecuencia, esto llevó a un profundo debate acerca de los currículos, sobre todo en lo relativo al sector de las ciencias en general y de la matemática en particular.

Lo resumo en seguida, comenzando por esta pregunta, preliminar a las precedentes: ¿hacia *qué* se debe educar, cuando en la Escuela se hace ciencia?

Existen dos posibles respuestas:

- hacia el *método científico*: el objetivo es el de proporcionar dominio de la metodología;
- hacia la adquisición y dominio de los *conceptos esenciales* de la ciencia.

El debate no es nuevo; la primera respuesta se puede conectar con el *método de la inteligencia* de John Dewey (1933), pero los años 60 fueron testigos de un encendido debate interior, del cual tuvieron vida fácil todos aquellos que propugnaron ideas didácticas bastante bien diseñadas.[4]

En este debate se inserta bien otro tipo de propuesta, la de Gagné (1965-1985), que tiende a separar la didáctica de los conceptos *concretos* de la de los *abstractos*; la concretez y la abstracción deben verse en relación a la cualidad de referencia de los objetos considerados en los conceptos:

- si se trata de conceptos derivados de la observación empírica de los objetos, se trata de conceptos concretos;
- si se trata de conceptos derivados de definiciones y que implican por lo tanto relaciones abstractas, se trata de conceptos abstractos.

3 Para entender el porqué, véase Tornatore (1974), cap. 9.
4 Para profundizar sobre el debate, puede verse Pontecorvo (1983, pp. 262-263).

Gagné elabora una teoría de las jerarquías de aprendizaje en cuya cúspide se hallan los conceptos abstractos como punto culminante. Esta idea de las jerarquías empuja a muchos otros autores a idear jerarquías semejantes, siguiendo otros parámetros; en particular, estoy pensando en los trabajos de Klausmeier, Gathala y Frayer (1974) y Klausmeier (1979, 1980), que dividen el aprendizaje de los conceptos de la escuela primaria en 4 niveles:

- *nivel concreto:* el niño reconoce un objeto ya visto, en la misma situación;
- *nivel de identidad:* el niño reconoce un objeto ya visto, pero en condiciones diferentes;
- *nivel de clasificación*: el niño reconoce que dos cosas son semejantes por un cierto aspecto y, generalizando, las clasifica juntas, aunque no sean claros los criterios de la clasificación;
- *nivel formal*: el niño sabe dar un nombre a la clase obtenida en el tercer nivel, es decir, al concepto seleccionado de los atributos que le han permitido la clasificación.[5]

Por lo que parece que el estudio de cómo se desarrollan los conceptos tiene que ver, sobre todo, con la etapa que va de los 3 a los 10 años de edad y que es necesario entrelazar esta investigación con la investigación didáctica. Entonces, el desarrollo de los conceptos y el aprendizaje se hallan muy relacionados entre sí.

¿Se puede llegar a pensar que el punto culminante de la ontogénesis sea la organización del conocimiento por categorías? Según Luria (1982), los métodos utilizados en este sentido, desde su punto de vista, son los siguientes:

- *método de la definición del concepto*: se pide responder de manera espontánea y libre a preguntas del tipo "¿Qué es?"; las respuestas pueden ser específicas, es decir, referidas a una cierta particularidad, o de tipo categorial;
- *método de la comparación-diferenciación*: dados dos objetos diferentes pero con alguna diferencia en común, se pide decir cuáles son las características comunes y las diferencias;
- *método de la clasificación*: se dan varios objetos y se pide clasificar un subconjunto formado por aquellos objetos que tienen una característica en común;
- *método de la formación de los conceptos artificiales*: se regresa a Vigotsky; el experimentador ha preordenado todo para llegar a un concepto bien establecido que se quería alcanzar.

5 Mayores clarificaciones, relaciones entre los niveles de Klausmeier, las fases de Gagné y los estadios de Piaget, así como ejemplos de aplicaciones didácticas, pueden hallarse en Pontecorvo (1983).

Debo decir que no se puede estar en desacuerdo con Cornu y Vergnioux (1992, pp. 55-56) cuando afirman: "*El aprendizaje de un concepto aislado es imposible, dado que todo concepto se halla en correlación con otros. Se debe hablar entonces de entramados conceptuales*". Sobre este punto tendremos que regresar dentro de poco (y remito a D'Amore, 1999-2006).

El papel del lenguaje en el aprendizaje y en la formulación de los conceptos

En todo esto, es evidente que el lenguaje juega un papel de extraordinaria importancia. Es bien sabido que la posición de Piaget se dirige hacia "*una progresiva devaluación cognitiva del lenguaje*" (Pontecorvo, 1983, p. 292); esto:

> *debe verse en relación con la toma de posición de Piaget contra toda concepción que ve en la comunicación social a través del lenguaje el origen del pensamiento y contra toda concepción que asimile los sistemas lógicos a los sistemas lingüísticos (...) El pensamiento, insiste Piaget, no tiene origen en el lenguaje (...); la "estructura" de un sistema operatorio no es la estructura de un sistema de signos, sino la estructura de un sistema de "acciones interiorizadas"* (Tornatore, 1974, p. 137).

Esta es la razón por la que Piaget toma la siguiente posición:

- la imagen es un significante cuyo objetivo es el de designar objetos figurativamente;
- el concepto es un significado que tiene como función la de especificar caracteres constitutivos del objeto con respecto a otros términos de la misma clase (y no de nombrarlo);
- la palabra –signo verbal que designa al concepto– no agrega nada en lo que respecta al conocimiento, al concepto mismo.

Muy diferente es la posición de Vigotsky (1962), quien en cambio ve el lenguaje como mediador entre individuo y cultura; él afirma que la formación de un concepto se da con una operación intelectual que está "*guiada por el uso de las palabras que sirven para concentrar activamente la atención, para abstraer ciertos conceptos, sintetizarlos y simbolizarlos por medio de un signo*" (p. 106). Por lo que la organización cognitiva del niño recibe, gracias al lenguaje, una dimensión que le es propia, arraigada desde su comienzo: la dimensión *social*. Si es verdad que el niño aprende a categorizar en la relación lingüística con el adulto, es también verdad que formas embrionarias de categorización deben estar ya presentes *antes* del arreglo adulto definitivo de ellas. Vigotsky establece entonces una comparación entre conceptos espontáneos (o cotidianos) y conceptos científicos:

- los primeros tienen la característica de ser relativos a la experiencia personal;
- los segundos son ya parte de un sistema de conceptos; la escuela tiende, como efecto sobre las capacidades del niño, a dar un orden a los conceptos que él ya posee y que adquiere poco a poco.

Una posición en verdad revolucionaria, y sobre la cual se funda gran parte de la didáctica de hoy en día.

Quiero cerrar esta rapidísima exploración acerca de lenguaje y aprendizaje de los conceptos recordando, entre muchos otros, los estudios de Nelson (1974, 1977). Como ya he evidenciado, el concepto, al menos desde el punto de vista del aprendizaje cognitivo, se interpreta hoy como algo más vasto, no exclusivamente ligado a las categorías, a las clases, etc. El concepto se halla, para Nelson (1977), conectado a una adquisición de conocimiento cualquiera, siempre y cuando esta sea "*definida e incorporada en un contexto o en un sistema*". Por lo que, independientemente del grado de generalidad o de abstracción, lo que cuenta es que exista un marco de referencia, una red de relaciones: "*los conceptos necesariamente existen al interior de un entramado o marco* (framework) *conceptual*" (Nelson, 1977).

Se vuelve entonces decisivo para el aprendizaje de un concepto, un mapa de conocimientos referidos, por ejemplo, a un objeto. El caso propuesto por la misma autora se refiere al término "bola" en una experiencia con un niño de 12 meses: la red de relaciones que gira alrededor de la palabra "bola" es relativa al lugar donde fue vista, a las actividades que otras personas o que el mismo niño hacen con ella, a cuáles son las características funcionales del objeto y los lugares en los que todo esto puede suceder, etc., por lo que el objeto se halla ligado a toda una red relacional, cuyo complejo termina con constituir el concepto; y, como se observa, la *palabra* tiene un papel decisivo. Con el pasar del tiempo, el niño agregará a esta primera formación del concepto otros atributos, otras funciones, etc., de modo que el concepto podrá contener elementos funcionales, relacionales, perceptivos, *descriptivos*, incluso el término que lo designa, tanto individual como colectivamente. Es también obvio que aquí existe una relación muy fuerte con los guiones (*scripts)*, pensados como marcos de referencia más amplios, al interior de los cuales se pueden colocar y situar estos conceptos en las varias fases en las que evolucionan y se presentan. Todo esto permite reconocer las características identificables del concepto, en manera tal de poder después reconocer nuevos ejemplares que puedan compartir el *nombre* con el precedente.

Pero el punto final es aquel en el que, no obstante saber guiones (*scripts*) diferentes, el sujeto logra, como se usa decir, "supercategorizar":

> *Tanto las categorías como los guiones pueden ofrecer marcos de referencia para los mismos conceptos: en efecto, no existe ninguna razón por la cual conceptos introducidos en uno o en otro contexto sean diferentes en el contenido o en la estructura. Por ejemplo: los osos pueden ser parte del guión relativo al zoológico o ser parte de una categoría taxonómica relativa a los animales* (Nelson, 1977, p. 223).

Piénsese cómo estas reflexiones se hallan bajo los ojos de todos en la actividad de didáctica de la matemática, cuando el mismo concepto, introducido dentro de un guión particular, no se acepta cuando se halla en una categorización diferente.

Este es el problema: ¿Qué es lo que vuelve difícil la comprensión de los conceptos? ¿Cuál es el nivel en el que existen dificultades de comprensión de los conceptos? Existen múltiples respuestas. Para empezar, los diferentes niveles de formación de los conceptos –estudios sobre este punto son más frecuentes en el mundo de la didáctica de las ciencias naturales (Giordan, De Vecchi, 1987; Astolfi, Develay, 1989) y de la historia (Clary, Genin, 1991)–, y después, la existencia de objetivos-obstáculo (Meirieu, 1987; Astolfi, Develay, 1989). Pero sobre este tema no entramos en profundidad.

Las definiciones de concepto y de esquema dadas por Vergnaud

Gérard Vergnaud, en múltiples ocasiones, ha afrontado la problemática de distinguir y definir las ideas de concepto y de esquema. Después de haber declarado que el conocimiento racional debe ser de tipo operatorio, define esquema como "*la organización invariante del comportamiento para una clase de situaciones dadas*" (Vergnaud, 1990).

En particular, muchos de sus ejemplos son tomados del ámbito de las matemáticas:

- la numeración de una pequeña colección de objetos, por parte de un niño de 5 años, necesita de la aplicación de un esquema que le permita coordinar movimientos de ojos y manos, y de coordinar con ellos la secuencia numérica; en particular, existe la constante significativa de un comportamiento de tipo esquemático en la repetición del último numeral, pronunciado con tono diferente;
- la solución de ecuaciones lineales por parte de adolescentes, desde su punto de vista sigue un esquema, una organización invariante;

- la ejecución de la adición de números naturales en columna sigue un esquema ya aceptado;

Según Vergnaud, si se analiza críticamente la dificultad de los alumnos en la resolución de tareas matemáticas –por ejemplo niños que intentan resolver problemas de aritmética–, es necesario examinar en términos de *esquemas* la elección de los datos por usar, así como la elección de las operaciones, especialmente cuando existan varias opciones posibles. Incluso los procedimientos heurísticos no serían otra cosa más que esquemas. Él introduce, en este punto, la idea de "concepto-en-acto" y de "teorema-en-acto"; se trata de "*los conocimientos contenidos en los esquemas: se pueden incluso designar con la expresión más inclusiva de 'invariantes operatorios*'" (Vergnaud, 1990).

Según Vergnaud, existen tres tipos lógicos de invariante operatorio:

- invariantes del tipo *proposición*, aquellos a los que se asigna la atribución de ser verdaderos o falsos;
- invariantes del tipo *función proposicional*, con el que podemos entender una expresión que contiene una o más variables individuales tales que, cuando en lugar de éstas se ponen constantes individuales, se obtiene una proposición;
- invariantes del tipo *argumento*, que pueden ser objetos, relaciones, proposiciones, funciones proposicionales u otra cosa: se trata sustancialmente de requerimientos de variables o ejemplos de funciones proposicionales o proposiciones mismas.

Regresemos a los conceptos. Según Vergnaud, el punto decisivo en la conceptualización de lo real y en la didáctica es el paso de los *conceptos-como-instrumento* a los *conceptos-como-objeto*, y una operación lingüística esencial en esta transformación, es precisamente la nominalización. Esto se podría resumir en una sola palabra: *conceptualización*. Es entonces fundamental, irrenunciable, dar una definición pertinente y eficaz de *concepto*; en varias obras, aunque con pequeñísimas variaciones, Vergnaud sugiere una que podemos ilustrar como sigue:

Un concepto C es una terna de conjuntos:

C = (S, I, S)

donde:

- S es el conjunto de las situaciones que dan sentido al concepto (*el referente*);
- I es el conjunto de los invariantes sobre los que se basa la operatividad de los esquemas *(el significado)*.

- S es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (*el significante*).

Según Vergnaud, estudiar cómo se desarrolla y cómo funciona un concepto significa considerar estos tres "planos" separadamente y en mutua relación recíproca.

El viraje "antropológico": significado institucional y personal de los objetos matemáticos

Pero, ya a partir de los años 70, las preguntas acerca de la naturaleza cognitiva de los conceptos matemáticos y del significado de los objetos matemáticos tomaron una dirección diferente. Declaraba Dummett en 1975:

> *Una teoría del significado es una teoría de la comprensión; es decir: aquello de lo cual una teoría del significado debe dar cuenta es aquello que se conoce cuando se conoce el lenguaje, es decir, cuando se conocen los significados de las expresiones y de los discursos del lenguaje* (Dummett, 1975).

Pocos años después, en 1980, se preguntaba Brousseau "¿Cuáles son los componentes del significado, deducibles del comportamiento matemático, que se observan en el alumno? ¿Cuáles son las condiciones que llevan a la reproducción de un comportamiento manteniendo el mismo significado?" (Brousseau, 1981). ¿No será, por casualidad, que existe una "variedad didáctica" del concepto de sentido, específica para la matemática, jamás estudiada, jamás evidenciada hasta ahora, en lingüística o en psicología? (Brousseau, 1986).

La acentuación de la necesidad de estudios sobre los conceptos centrados en los procesos de aprendizaje la da también Sierpinska (1990):

> *Comprender el concepto será (…) concebido como el acto de adquirir su significado. Tal acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados en relación con elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" del concepto es la red de significados de los enunciados que hemos considerado). Estos significados particulares deben ser adquiridos con actos de comprensión. (...) La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente del proceso de construir el significado de los conceptos.*

Nos hallamos frente a la necesidad de dar luz a la naturaleza del significado, comparando dos categorías diferentes en las que pueden dividirse las teorías: realistas (o figurativas) y pragmáticas (división ya aparecida en Kutschera, 1979).

En las teorías realistas, el significado es "*una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; como consecuencia suponen un realismo conceptual*" (Godino, Batanero, 1994). Como ya afirmaba Kutschera (1979), "*según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que más bien sucede que el uso se apoya en el significado, siendo posible una división neta entre semántica y pragmática*".

En la semántica realista que resulta, se atribuyen a las expresiones lingüísticas funciones puramente semánticas: el significado de un nombre propio (como "Bertrand Rusell") es el objeto que tal nombre propio indica (en tal caso Bertrand Rusell); los enunciados atómicos (como "A es un río") expresan hechos que describen la realidad (en tal caso A es verdaderamente el nombre de un río); los predicados binarios (como "A lee B") designan atributos, aquellos indicados por la frase que los expresa (en este caso la persona A lee la cosa B). Por lo que toda expresión lingüística es un atributo de cierta entidad: la relación nominal que se deriva es la única función semántica de las expresiones. Se reconocen aquí las posiciones de Frege, de Carnap y del Wittgenstein del *Tractatus*.

Una consecuencia de esta posición es la admisión de una observación científica (por lo que al mismo tiempo es empírica y objetiva o intersubjetiva), como podría ser, en un primer nivel, una lógica de los enunciados y de los predicados.

Desde el punto de vista que aquí nos interesa más, si aplicamos los supuestos ontológicos de la semántica realista a la matemática, se obtiene necesariamente una visión platónica de los objetos matemáticos: en ella nociones, estructuras, etc., tienen una existencia real que no depende del ser humano, en la medida en que pertenecen a un dominio ideal; "conocer" desde un punto de vista matemático significa descubrir entes y sus relaciones en tal dominio. Y es también obvio que bajo esa perspectiva, implica un absolutismo del conocimiento matemático en cuanto sistema de verdades seguras, eternas, no modificables por la experiencia humana, dado que la preceden o, al menos, le son extrañas e independientes. Posiciones de este tipo, aunque con diferentes matices, fueron sostenidas por Frege, Rusell, Cantor, Bernays, Gödel…; y hallaron violentas críticas, como el convencionalismo de Wittgentsein y el cuasi-empirismo de Lakatos (véanse Ernest, 1991 y Speranza, 1997).

En las teorías pragmáticas, las expresiones lingüísticas tienen significados diferentes según sea el contexto en el que se usan, por lo que resulta imposible toda observación científica, dado que el único análisis posible es "personal" o subjetivo, circunstanciado y no generalizable. No se puede hacer otra cosa que examinar los diferentes "usos": el conjunto de los "usos", en efecto, determina el significado de los objetos. Se reconocen aquí las posiciones del Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas,* cuando admite que la significatividad de una palabra depende de su función en un "juego lingüístico", dado que en él tiene un modo de 'uso' y un fin concreto para el cual ha sido usada: por lo que la palabra no tiene por sí misma un significado, y sin embargo puede ser significativa. Desde la perspectiva anterior, los objetos matemáticos son símbolos de unidad cultural que emergen de un sistema de utilizaciones que caracterizan las pragmáticas humanas (o, al menos, de grupos homogéneos de individuos) y que se modifican continuamente en el tiempo, dependiendo también de las necesidades. De hecho, los objetos matemáticos y el significado de tales objetos dependen de los problemas que se enfrentan en matemáticas y de los procesos de su resolución.

	Teorías "realistas"	**Teorías "pragmáticas"**
Significado	Relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales, independientes de los signos lingüísticos.	Depende del contexto y del uso.
Semántica vs. pragmática	División neta.	Sin división o división matizada.
Objetividad o intersubjetividad	Total.	Faltante o discutible.
Semántica	Las expresiones lingüísticas tienen funciones puramente semánticas.	Las expresiones lingüísticas y las palabras tienen significados "personales", son significativas en oportunos contextos, pero no tienen significados absolutos por sí mismas.
Análisis	Posible y lícito, por ejemplo, la lógica.	Sólo es posible un análisis "personal" o subjetivo, no generalizable, no absoluto.
Visión epistemológica consecuente	Concepción platónica de los objetos matemáticos.	Concepción problemática de los objetos matemáticos.

	Teorías "realistas"	Teorías "pragmáticas"
Conocer	Descubrir.	Usar en oportunos contextos.
Conocimiento	Es un absoluto.	Es relativo a la circunstancia y al uso específico.
Ejemplos	Witgenstein en el *Tractatus*, Frege, Carnap [Rusell, Cantor, Bernays, Gödel].	Witgenstein en las *Investigaciones Filosóficas* [Lakatos].

En la dirección pragmática, se entiende la definición de Chevallard (1991) de objeto matemático:

> *un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir aquello que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos…), se puede decir, registro de la escritura.*

Siendo el "praxema" un objeto material ligado a la praxis, el objeto es entonces un "*emergente de un sistema de praxemas*". En esta acepción, ya no tiene mucho interés la noción de significado de un objeto sino más bien la de *rapport á l'objet*, relación con el objeto. Sobre tal idea se apoya la construcción que Chevallard hace de su "teoría del conocimiento", o mejor dicho de su "antropología cognitiva", al interior de la cual se puede situar la didáctica.

Pero entonces es central la persona (o la institución, como conjunto de personas) que se pone en relación con el objeto, y no el objeto en sí:

> *Un objeto existe desde el momento en el que una persona X (o una institución I) reconoce este objeto como existente (para ella). Más exactamente, se dirá que el objeto O existe para X (respectivamente para I) si existe un objeto, representado por R (X, O) [respectivamente R (I, O)] llamado relación personal de X a O (respectivamente relación institucional de I a O)* (Chevallard, 1992).

Esta posición ha marcado un viraje interesante al interior de los marcos teóricos en los que se sitúa toda investigación en didáctica de la matemática, tanto más si se subrayan los sucesivos estudios llevados a cabo por otros autores, para clarificar y volver operativas las nociones de Chevallard, creando instrumentos conceptuales adecuados y paragonándolos a aquellos propuestos por otras posiciones al respecto.

Por ejemplo, una claridad proviene de los estudios de Godino y Batanero (1994), porque en ellos se definen de manera rigurosa todos los términos de la cuestión: qué significa "práctica", qué es una "práctica personal", qué es una "institución", que es una "práctica institucional", qué diferencia existe entre objetos personales e institucionales y cómo se define cada uno de ellos, qué son los significados de un objeto personal y de un objeto institucional, qué relaciones existen entre significado y comprensión… Uno de los méritos del trabajo al que remito, consiste tanto en haber dado claridad terminológica como en haber proporcionado ejemplos adecuados, así como el poner en evidencia semejanzas y diferencias entre varias teorías del significado.

Para querer dar, de una sola vez, una característica de tal posición, en la formulación de Chevallard-Godino-Batanero lo esencial es la actividad de las personas puestas frente a la resolución de campos de problemas (fenomenologías), de las que emergen los objetos (conceptos, enunciados, relaciones, teorías etc.), los cuales son relativos a los contextos institucionales y personales. Tales contextos quedan definidos según los campos de problemas que se enfrenten y los instrumentos semióticos disponibles. Dentro de poco deberé regresar a esta posición, con ejemplos significativos.

Aún una nota. Para explicar el énfasis con el que se tratan los fenómenos típicos de la cognición humana en el trabajo de Godino y Batanero (1994), conviene resaltar que, mientras en el texto de Chevallard (1992) se da mayor peso al contexto institucional con respecto al personal, Godino y Batanero tienden a privilegiar la "esfera de lo mental", del sujeto humano, para intentar un equilibrio entre los dos contextos y para evitar que la esfera de lo personal sea ocultada por el campo institucional.

Algunas precisiones antes de proseguir[6]

En esta sección haré algunas precisiones terminológicas, consideraciones complementarias y notas cautelares.

A veces en matemática se habla de "conceptos"; a veces de "objetos". ¿Qué diferencia existe? Podría ser el resultado de un hábito de los matemáticos, pero se trata en cambio de un motivo bien fundado, dado que se basa sobre los siguientes tres puntos:

- todo concepto matemático remite a "no-objetos" desde el punto de vista del realismo ingenuo; por lo que la conceptualización no es y no se puede

6 Para la redacción de esta sección me sirvo de D'Amore (2001).

basar en significados que se apoyen en la realidad concreta, dado que en matemática no son posibles referencias ostensivas;

- todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no existen "objetos" por exhibir en su nombre o en su evocación;[7] por lo que la conceptualización debe pasar necesariamente a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos, por lo que, en matemática, no existe acceso sensible (vista, tacto…) directo a los "objetos", sino solo a sus representaciones semióticas en diferentes registros lingüísticos;
- se habla más frecuentemente en matemática de "objetos matemáticos" y no de conceptos matemáticos por cuanto en matemática se estudian preferentemente objetos más que conceptos: "*la noción de objeto es una noción que no se puede no utilizar desde el momento en el que nos cuestionamos acerca de la naturaleza, de las condiciones de validez o del valor del conocimiento*" (Duval, 1998).

En el camino trazado por Duval, la noción de concepto –preliminar o prioritaria en casi todos los autores– se vuelve secundaria, mientras que lo que adquiere carácter de prioridad es la pareja (signo, objeto), lo que lleva a la llamada paradoja cognitiva del pensamiento matemático, que presentaré más adelante y que fue evidenciada precisamente por Duval (1993).[8] El mismo autor (1996) cita un pasaje de Vigotsky en el que sustancialmente se declara que no existe concepto sin signo:

> *Todas las funciones psíquicas superiores se hallan unidas por una característica común superior, la de ser procesos mediados, es decir, la de incluir en su estructura, como parte central y esencial del proceso en su conjunto, el empleo del signo como medio fundamental de orientación y de dominio de los procesos psíquicos. El elemento central [del proceso de formación de los conceptos] es el uso funcional del signo o de la palabra como medio que permite al adolescente someter a su poder las propias operaciones psíquicas, dominar el curso de los propios procesos psíquicos* (Vigotsky, 1962; en la ed. francesa, 1985, pp. 150, 151, 157).

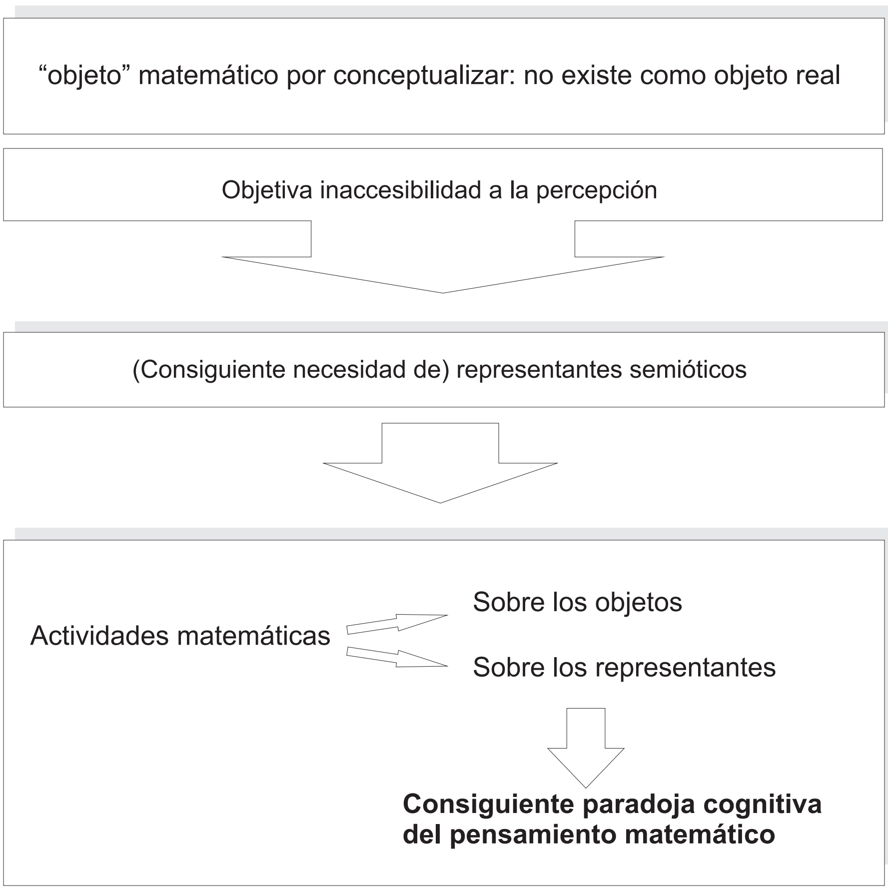
Es obvio que si se pone el acento sobre la pareja *(signo, objeto)*, todas las representaciones tríadicas (de C. S. Peirce, de G. Frege, de C. K. Ogden y I. A. Richards) caen en defecto.[9]

7 Aquí "objeto" es ingenuamente entendido en el sentido de "objeto real" o de "cosa". Cuál sea el significado de esta palabra ("cosa") se expresa en la *Metafísica* de Aristóteles, cuando afirma que la "cosa", en cuanto parte de lo real, es aquello que presenta las tres características siguientes: (1) tridimensionalidad; (2) accesibilidad sensorial múltiple (es decir simultáneamente por parte de más de un sentido) independientemente de las representaciones semióticas; (3) posibilidad de separación material y de otras partes de la realidad, desde otras "cosas".

8 Pero los primeros trabajos de Duval sobre este argumento son de 1988 (Duval, 1988a, b, c).

9 Véase D'Amore (2001) para un tratamiento más completo.

Resumo parte de lo ya dicho, interpretando a Duval (1993) en el siguiente esquema:



Veamos ahora en qué consiste esta *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, que tiene fuertes repercusiones cognitivas (Duval, 1993, p. 38):

> *por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra parte, solo por medio de representaciones semióticas es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo los sujetos en fase de aprendizaje podrían dejar de confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos sólo pueden tener relación con las solas representaciones semióticas? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, por el contrario, ¿cómo pueden ellos adquirir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un*

aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifican actividades matemáticas y actividades conceptuales, y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

En esta paradoja, tan bien evidenciada por Raymond Duval, se puede esconder una potencial causa de falta de devolución, como traté de demostrar antes (D'Amore, 2001). El problema principal, para decirlo brevemente, está en el hecho de que según el maestro, según la noosfera y según el mismo estudiante, este último está entrando en contacto con un "objeto" matemático; pero, de hecho, y a veces nadie parece darse cuenta, el estudiante está entrando en contacto solo con una representación semiótica particular de ese "objeto". El estudiante no tiene –no puede tener– acceso directo al "objeto", y el maestro y la noosfera tienden a no separar el objeto de su representación; el estudiante se queda como bloqueado, como inhibido: no puede hacer nada más que confundir el "objeto" con su representación semiótica porque no se da cuenta, porque no lo sabe. Su relación personal con el saber tiene como "objeto" una cosa borrosa, confusa. Y por lo tanto, frente a una sucesiva necesidad conceptual que se manifiesta, por ejemplo, con la necesidad de modificar la representación semiótica de ese mismo "objeto", el estudiante no tiene medios críticos ni culturales ni cognitivos; el maestro y la noosfera no entienden el porqué y acusan al estudiante, culpándolo de algo que él no entiende; lo acusan de una incapacidad vaga, no circunstanciada y detallada: nadie sabe *exactamente* qué es, en verdad, lo que el estudiante no sabe y qué es lo que no sabe hacer.

El concepto (u objeto) en matemática, como superposición o como acumulación de concepciones provisionales

Trataré aquí acerca de una convergencia entre:

a. una posición exquisitamente didáctico-cognitiva, de carácter fuertemente ingenuo, que acepte como hipótesis de base el constructivismo del conocimiento más elemental, posición basada en las concepciones acríticas más difundidas;

b. una posición antropológica en la que todo se refiere a la relación personal con el objeto matemático. Todo esto en el ámbito de una teoría del aprendizaje matemático que no se caracterice de ninguna forma por algún preconcepto teórico u ontológico.

Este título es solo un intento de primera mediación entre las posiciones más ingenuas, pero radicadas en el sentido común y lo hasta aquí expuesto.

En el siguiente, haré algunas consideraciones críticas.

Sean c_i las concepciones provisionales en un proceso lineal y evolutivo (al menos en el tiempo) de asimilación y acomodamiento, relativas a un objeto matemático C. Se necesita distinguir entre:

- c_i científicas de tipo institucional, que diremos académicas (*a*), es decir aquellas que la comunidad científica (académica) acepta como pertinentes, significativas y correctas; se trata de R[*I*(C)] compartidas; las llamaremos c_i de tipo *a*;
- c_i cognitivas de tipo institucional, que diremos escolares (*e*), debidas a la acción de la escuela y a la noosfera, es decir aquellas que una persona construye o ha construido en la escuela; se trata de R[*X*(C)] que pueden ser también no compartidos; las llamaremos c_i de tipo *e*.

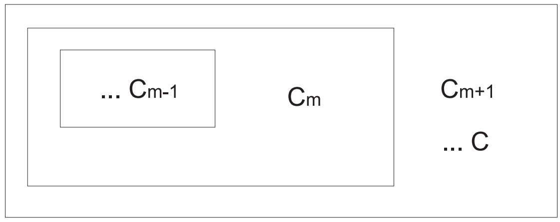
Las c_i de tipo *a* se diferencian de aquellas de tipo *e* solo porque las segundas se hallan más en retardo con respecto a las primeras (es decir: los índices son de valor numérico inferior), o porque son críticamente menos ricas y más basadas en sensaciones, en el buen sentido, ligadas a aplicaciones, menos sujetas a repensamientos y reflexión crítica, más ligadas a varias cláusulas del contrato didáctico.

El sentido del proceso didáctico usual, en su forma más ingenua pero también más difundida, es el de llevar al final a los individuos a la formación de un concepto C que sea la cúspide del proceso evolutivo, el *concepto* supuestamente existente de tipo *a* (o, por lo menos, el más cercano posible a él).

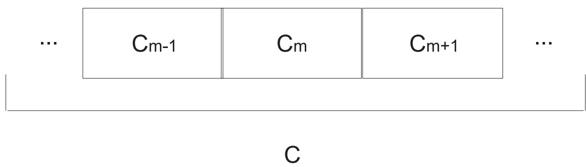
Pero como toda concepción se halla en evolución histórico-crítica perenne, es imposible valorar el logro de este límite, sobre todo porque a lo más se podrá hablar de "*objeto adquirido por la comunidad científica hasta ahora*" y no ponerse en la situación de deber prever el futuro de ese objeto. El "objeto" es por lo tanto, en esta concepción, algo ideal, abstracto, punto culminante de un proceso perennemente en acto del que tenemos solo una idea, limitada a su evolución histórica y su estado actual.

La formación de C a partir de la sucesión c_i puede ser pensada según dos modalidades:

Superposición: toda concepción provisional c_{m+1} agrega e integra la precedente c_m, es decir la comprende y le añade algo, sobreponiéndose a ella:



Acumulación: toda concepción provisional c_{m+1} agrega algo a la c_m precedente, es decir, conserva el contenido de c_m y agrega nuevas informaciones o ideas, sin borrar las viejas:



En realidad, frecuentemente se tienen mezclas de las dos modalidades.

Ejemplo 1: el objeto recta

De manera aproximada, intento dar una sucesión de concepciones provisionales relativas a un supuesto objeto *recta*. En su larga historia evolutiva, se podría pensar a una sucesión de la siguiente manera:

c_1: recta primitiva: segmento (sus características son el ser derecha y delgada, y su independencia nominal de la longitud); esta es la idea ingenua de un niño;

c_2: recta euclidiana: idealización de c_1 [sus características son el tener una sola dimensión (que es la idealización de ser "delgada") y el ser prolongable (que es la idealización de la independencia de la longitud)]; no es muy clara la relación entre puntos y recta; en el sentido pitagórico, el modelo es el de las bolitas (mónadas) de un collar (recta); pero en Euclides no existe ya esta posición ingenua;

c_3: recta densa: idealización de c_2; entre dos puntos *siempre* existe otro. Se supera el modelo pitagórico;

c_4: recta continua (ya a los tiempos de Newton y Leibniz): en la recta existen oportunas posiciones de puntos correspondientes a valores irracionales ($\sqrt{2}$) y trascendentes (π) aunque aún no es muy claro su estatuto epistemológico;

c_5: recta de Hilbert (definida implícitamente por los axiomas): no existe ya el intento de definición explícita para buscar adecuar la imagen de recta a un modelo prefijado al que se quiere llegar, pero se tiene una idealización de la concepción al interior de un sistema teórico;

c_6: recta como nombre común utilizado indiferentemente en un ámbito euclidiano o no: no se habla ya de dimensión, de ser derecha, de ser infinita (pero ilimitada siempre);

c_7: denominación de recta dada a entes diferentes de modelos diferentes (recta finita o infinita, discreta, densa o continua, limitada o ilimitada…);

c_8: objeto n-2 dimensional en una variedad n-dimensional;

…

¿Cómo podríamos decidir cuales c_i ulteriores seguirán? El objeto C “recta” es una superposición o acumulación de las concepciones precedentes; parece que de c_1 a c_4 se puede hablar principalmente de pasos del tipo “superposición”, mientras de c_5 a c_8 parecen ser pasos principalmente del tipo “acumulación”.

Ejemplo 2: el objeto adición

De manera aproximada, intento dar una sucesión de concepciones provisionales relativas al supuesto objeto *adición*. En su larga historia evolutiva, se podría pensar en una sucesión hecha así:

c_1: adición pitagórica (ordinal y cardinal indistintos) en N-{0}; la adición como cardinal de colecciones disyuntas; es la concepción ingenua de un niño pequeño (sobre este punto Vergnaud explica algunos de sus *teoremas en acto*);

c_2: adición en Q_a; estoy pensando en las adiciones entre fracciones, en la historia sumeria, egipcia y después griega;

c_3: adición en N y en Q_a (0 incluido); en la época medieval, en el mundo indo-arábigo se vuelve necesario ampliar la adición a casos en los cuales uno de los sumandos es el cero;

c_4: adición en Z;

c_5: adición en Q;

c_6: adición en R;

c_7: adición en el campo complejo C;

c_8: adición en los cuaterniones y, más en general, en los sistemas complejos n-valentes; estoy pensando a las investigaciones de Hamilton, Grassman, Frobenius y Hankel; algunas propiedades formales de la adición –típicas de los números N, Z, Q, R y C– se pierden y, sin embargo la operación que extiende y generaliza, la adición se sigue llamando del mismo modo;

c_9: adición generalizada en los retículos y en las álgebras de Boole;

c_{10}: adición generalizada en las estructuras $\langle A,+,x, 0, 1,...\rangle$;

…

¿Cómo se podría decidir si y cuales c_i ulteriores seguirán? El pseudo-objeto C "adición" es superposición o acumulación de las concepciones precedentes; parece que de c_1 a c_7 se puede hablar de pasos principalmente de tipo "superposición", mientras que de c_8 a c_{10} parecen ser pasos principalmente del tipo "acumulación".

Críticas a la precedente posición y conclusiones

La visión trazada en el título anterior, repito, es solo un esquema que resume las posiciones más ingenuas –pero también las más difundidas– al respecto. Veamos ahora algunas notas fuertemente críticas.

En todo caso, una reflexión madura muestra que es esencial la actividad de las personas puestas frente a las problemáticas que hacen surgir los c_i; en este sentido, una supuesta escala jerárquica pierde, desde mi punto de vista, sentido; por lo que una mayor "nobleza" conceptual supuesta para las c_i de tipo *a*, con respecto a las de tipo *e*, desaparece.[10] Los "objetos" emergen de la actividad de las personas puestas frente a la solución de problemas, incluso independientemente de todo contexto institucional pri-

10 Este punto, si se acepta, podría tener fuertes repercusiones en la práctica didáctica; y, desde mi punto de vista, debería estudiarse no solo desde la perspectiva teórica, como se ha hecho hasta ahora, en el ámbito de la así llamada Educación Matemática, sino también desde el punto de vista de la acción práctica, en el ámbito de la Didáctica de la Matemática (Godino, Batanero, 1998).

vilegiando, en un cierto sentido, los significados personales con respecto a los institucionales.

Desde esta perspectiva, no parece tener sentido hablar, por ejemplo, del "objeto recta" (o de la "idea de recta", o del "concepto de recta") como normalmente se hace: más bien nos vemos obligados, evidentemente, a hablar de "pluralidad de objetos", no tanto porque se trate de una "escalada" hacia un vértice, sino en cuanto una pluralidad de "objetos" *diferentes* que banalmente tienen en común un nombre propio, pero que no identifica una sola entidad, como en la visión que hemos llamado "teoría realista", sino que su significado depende del contexto de uso, desde la "teoría pragmática". Por lo que toda C_i es, en esta visión, un "objeto recta" (probablemente, con un más cuidadoso análisis, se podría descubrir que, en realidad, el mismo es, a su vez, una pluralidad).

Toda C_i es el resultado de una relación personal con el objeto, pero como hemos visto en Chevallard y en Godino-Batanero, *el objeto es esta misma relación personal*, no un supuesto "objeto en sí".

Por otra parte, el mismo Wittgenstein insiste en el hecho de que no se debe hablar de ideas matemáticas en el sentido en el que se hace habitualmente, es decir, como resultado de un proceso de abstracción, dado que esto origina graves confusiones filosóficas y psicológicas [y didácticas, como me sugiere Juan Díaz-Godino (en una carta privada)]. El Wittgenstein de las *Investigaciones filosóficas* insiste en hablar de diversidad de uso o de usos diferentes del "término" ("recta", "adición", en mis ejemplos precedentes).

En la posición de Godino-Batanero, al "objeto matemático Ox" se propone asociarle la entidad teórica "significado de Ox" (en realidad una clase de significados): se pasa así de la acentuación puesta en el "concepto", sus definiciones y sus reglas de uso, a una nueva acentuación puesta sobre los campos de problemas, de prácticas, de técnicas, de las cuales emergen estas entidades intencionales. Por lo que los dos casos por mí proporcionados, "recta" y "adición", constituyen precisamente un ejemplo de la relatividad de los objetos Ox, que unas veces son entidades mentales (por lo tanto personales), y otras, entidades abstractas (institucionales). No me he detenido demasiado en clarificar y resaltar esta distinción, porque la considero ocasional e intercambiable.

Me parece poder afirmar que en los estudios teóricos de Educación Matemática, en la investigación en este sector y en la práctica didáctica, es de fundamental importancia identificar cuáles son los problemas específicos, las actividades prácticas, las actividades técnicas, etc. que, también históricamente, han llevado al surgimiento de toda "concepción", todo "objeto", toda "regla"; así como tiene suma importancia establecer su real o presunta dependencia de contextos institucionales (podría tenerse una razón histórica, educativa o instrumental, etc., o todas estas juntas).

Referencias bibliográficas

Anderson, R. C.; Spiro, R. J. y Montague, W. E. (1977). *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale, NJ: LEA.

Astolfi, J. P. y Develay, M. (1989). *La transposition didactique en mathématique, en physique et biologie*. Irem de Lyon: Lirdis.

Brousseau, G. (1981). Address of members of the GRDM (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 130-135.

_______________ (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, 19, 1-15.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble.

________________ (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par un approche anthropologique. *Recherches en Didactique de la Mathématique*, 12(1), 73-112.

Clary, M. y Genin, C. (1991). *Enseigner l'histoire à l'école?* Paris: Hachette/Istra.

Cornu, L. y Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions*. Paris: Hachette.

D'Amore, B. (1999-2006). *Didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio. (I ed. italiana: 1999, Bologna: Pitagora).

_________________ (2001). Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèses sur quelques facteurs inhibant la dévolution. *Scientia Paedagogica Experimentalis*. Gent, Belgie XXXVIII, 2, 143-168.

Dewey, J. (1933). *How we think*. Boston: D. C. Heath.

Dummett, M. (1975). What is a Theory of Meaning? En: *Mind and Language*. Oxford University Press, Oxford.

Duval, R. (1988a). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 7-25.

__________________ (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74.

__________________ (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 235-253.

__________________ (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives,* 5, 37-65.

__________________ (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre répresentations et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 139-163.

Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Gagné, R. (1965-1985). *The conditions of learning.* New York, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1965. [El libro fue completamente cambiado en su formulación, cuando se publicó para la Harcourt-Brace College Publishers, 1985].

Gal'perin, P. J. (1969). Contributo allo studio dello sviluppo intellettuale del bambino, in: *Veggetti M. S*. (ed.) (1977), (pp. 43-63). [El artículo de Gal'perin fue publicado en una revista soviética en 1969].

Giordan, A. y De Vecchi, G. (1987). *Les origines du savoir*. Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, 3, 325-355. [Trad. italiana Bologna, Pitagora 1999, como libro en la colección: Bologna-Querétaro].

____________________ (1998). The dialectic relationships among theory, development and practice in Mathematics Education: a meta-analysis of three investigations. In N. A. Malara (ed.). *An international view on didactics of mathematics as a scientific discipline. Proceedings of WG 25 ICME 8, Sevilla, July 1996.* Modena: CNR-MURST-University of Modena, 13-22. [Tr. it. *La Matematica e la sua Didattica*, 4, 1998].

Klausmeier, H. J. (1979). *Un modello per l'apprendimento dei concetti.* En: C. Pontecorvo y P. Guidoni (ed.). Scienza e scuola di base. Roma: Istituto Enciclopedia Italiana.

Klausmeier, H. J. (1980). *Learning and teaching concepts*. New York: Academic Press.

Klausmeier, H. J.; Gathala, E. S. y Frayer, D. A. (1974). *Conceptual learning and development.* New York and London: Academic Press.

Kutschera, F. von (1979). *Filosofía del lenguaje.* Madrid: Gredos.

Luria, A. R. (1982). *Language and Cognition*, (ed. J. V. Wertsch). Washington: V. H. Winston.

Meirieu, P. (1987). *Apprendre... oui, mais comment?* Paris: ESF.

Nelson, K. (1974). Concept, word and sentence: interrelations in acquisition and development. *Psychological Review*, 81(4), 267-285.

__________________ (1977). Cognitive development and the acquisition of concepts. In: R. S. Anderson; R. J. Spiro y W. E. Montague (eds.). *Schooling and the acquisition of knowledge*. Hillsdale. N. J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1948). *La géométrie spontanée de l'enfant,* Paris: PUF.

Pontecorvo, C. (Ed.) (1983). *Conoscenza scientifica e insegnamento.* Torino: Loescher.

Pontecorvo, C. y Guidoni, P. (1979). *Scienza e scuola di base*. Roma: Istituto della Enciclopedia Treccani.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.

Speranza, F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.

Tornatore, L. (1974). *Educazione e conoscenza*. Torino: Loescher.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19, 133-169.

Vigotsky, L. S. (1981). The development of higher forms of attention in childhood. In J. V. Werscht (ed.). *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 189-240). Armonk, NY: Sharpe. [La I edición rusa es de 1960, Moscú: Izd. Akad. Pedag.]

__________________ (1962). *Thought and language*. Cambridge, MIT Press. [Se trata de un resumen tomado de la edición original en lengua rusa, colección de artículos publicados en Moscú en 1956. Ed. francesa: 1985, París: Éd. Sociale.]

Otras lecturas sugeridas

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*. Barcelona, España. 35, 90-106.

__________________ (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. [Barcellona, Spagna]. 38, 83-99. [Questo testo si trova anche negli Atti del *VII Simposio de Educación Matemática: Investigación en Didáctica de la Matemática*. 3-6 maggio 2005, Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina. www.edumat.com.ar].

__________________ (2005). Pratiche e metapratiche nell'attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 325-336.

__________________ (2005). Pipas, caballos, triánguloy significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. *Números*. [Tenerife, Spagna]. 61, 3-18.

__________________ (2005). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática. México DF, México: Reverté-Relime. Prefacio de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. Traducción de Martha Isabel Fandiño Pinilla.

__________________ (2004). El papel de la epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. Épsilon [Cádiz, España]. 60, 20, 3, 413-434.

__________________ (2006). Elementos de Didáctica de las Matemáticas. En: *Cartillas Pedagógicas*. Bogotá: Alcaldía Mayor de Bogotá, Secretaría de Educación – Universidad Distrital. Red Distrital de Educación Matemática.

__________________ (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: Radford L. y D'Amore B. (eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial *Revista Relime* (Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa) (Cinvestav, México DF., México). 177-196. http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

___________________ (2006). Conclusiones y perspectivas de investigación futura. En: Radford, L. y D'Amore, B. (eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial *Revista Relime* (Cinvestav, México DF., México), 301-306. http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

D'Amore, B. y Godino, J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.

____________________ (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Relime*. [Aceptado, en prensa].

D'Amore, B.; Radford, L. y Bagni, G. T. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 29B, 1, 11-40.

D'Amore, B. y Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Revista Relime*. Vol. 10, N. 1. 39-68

Radford, L. y D'Amore, B. (Eds.) (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial (en inglés, francés y español) *Revista Relime* (Cinvestav, México DF., México). http://laurentian.ca/educ/lradford/Relime_semiotic_06.pdf

Font, V.; Godino, J. y D'Amore, B. (2007). An ontosemiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*. Aceptado, en impresión. Vol. 27, n° 2, paginas 2-7 y 14.

Sito: www.dm.unibo.it/rsddm