Dificultades en las prácticas del Cálculo Diferencial: una mirada desde la teoría de los obstáculos y los conflictos semióticos

Gloria Inés Neira Sanabria

12

COLECCIÓN
TESIS
DOCTORAL

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE
Universidad del Valle
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

ACREDITACIÓN DE ALTA CALIDAD
10 AÑOS

PREMIO AUIP A LA CALIDAD
del Postgrado en Iberoamérica
9ª Edición

Dificultades en las prácticas del Cálculo Diferencial:
una mirada desde la teoría de los obstáculos y los conflictos semióticos

Dificultades en las prácticas del Cálculo Diferencial: una mirada desde la teoría de los obstáculos y los conflictos semióticos

COLECCIÓN TESIS DOCTORAL

Tesis doctoral presentada por

Gloria Inés Neira Sanabria

DIRIGIDA POR

Dr. Rodolfo Vergel Causado
y Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle · Universidad Distrital Francisco José de Caldas · Universidad Pedagógica Nacional

ACREDITACIÓN DE ALTA CALIDAD 10 AÑOS

PREMIO AUIP A LA CALIDAD del Postgrado en Iberoamérica 9ª Edición

Primera Edición 2020
ISBN Impreso: 978-958-787-223-1
ISBN Digital: 978-958-787-224-8

Sección de publicaciones
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
www.udistrital.edu.co
Carrera 24 No. 34 - 37
PBX: (57+1) 3239300, ext.6201
publicaciones@udistrital.edu.co

Preparación Editorial
Doctorado Interinstitucional en Educación
http://die.udistrital.edu.co/publicaciones
Sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas
www.udistrital.edu.co
Aduanilla de Paiba, Edificio de Investigadores, calle 13 No. 31-75

Asistente editorial
Elban Gerardo Roa Díaz
eventosdie@udistrital.edu.co
PBX: (57+1) 3239300, ext.6330

Corrección de Estilo, Diseño, Diagramación e impresión
Fundación Común Presencia

Impreso en Bogotá, Colombia, 2020

Neira Sanabria, Gloria Inés
Dificultades en las prácticas del cálculo diferencial : una mirada desde la teoría de los obstáculos y los conflictos semióticos / Gloria Inés Neira Sanabria. -- 1a. ed. -- Bogotá : Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2020.
p. – (Colección tesis doctoral ; 12)
Incluye índice de tablas e índice de figuras. -- Tesis (Doctoral) -- Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, 2020. -- Contiene referencias bibliográficas.
ISBN 978-958-787-223-1 -- 978-958-787-224-8 (digital)
1. Cálculo diferencial - Enseñanza superior - Tesis y disertaciones académicas I. Título II. Serie

CDD: 515.33071 ed. 23 O-BoBN– a1057344

UD Editorial

Este libro fue sometido a un proceso de evaluación por pares.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Dedicatoria

A la memoria de Carmen y Francisco, mamá y papá, soportes de la vida que iluminan cada día.

A Gerardo, esposo, compañero y apoyo incomparable…

A Nicolás, Laura, Valentina y Alejandro, hijos del alma, amores de mis amores, luces de mis ojos, la vida en todo su esplendor.

Agradecimientos

A Carlos Eduardo Vasco por sus enseñanzas, su paciencia, su luz, su mano, su guía, maestro de maestros, un lujo en mi camino investigativo. ¡Gracias maestro!

A Vicenc Font por su apoyo, formación, corrección, guía y recibimiento en la pasantía hecha en su bella ciudad de Barcelona.

A Rodolfo Vergel por su apoyo y respaldo incondicional.

A Olga Lucía, Dora Inés, Pedro Javier, y tantos otros compañeros y maestros, cuyos comentarios y apoyo permanente fueron claves para aclarar tantas veces tantos temas.

Al DIE-UD, a la Universidad Distrital, gracias por existir, por forjarse y por ser. Total, agradecimiento.

A Fernando Ramírez, coequipero estudiante por su interés, entrega, constancia, responsabilidad en la digitación, corrección, elaboración de principio a fin y quien sigue acompañándome en la labor investigativa y de publicación.

A “la profesora” que con generosidad y sencillez me permitió hacer parte de su aula y documentar su práctica.

Prólogo

El lector o lectora tiene en sus manos un trabajo denso y profundo sobre las formas de enseñanza inicial del Cálculo Diferencial por parte de una investigadora que siguió a una profesora de un curso del primer año de una universidad colombiana. La autora observó las interacciones entre estudiantes y profesora sin juzgar los fenómenos como "buenos" o "malos", tratando de adivinar los propósitos, métodos y técnicas de la profesora y buscando compararlos con lo que sus estudiantes aprenden o no aprenden bien, o entienden o no entienden bien, o al menos repiten bien después de un semestre de clases, estudio, resolución de problemas en clase o en casa, exámenes y otras torturas a los que los somete con la mejor voluntad para que aprendan algo de matemáticas, "formen su cabeza" y pasen a los cursos superiores de matemáticas y de otras asignaturas de sus carreras respectivas, sin desertar en el intento.

De lo primero que se sorprenderá el lector o lectora —eso espero— es que por su propia experiencia y por los recuerdos de sus primeros años de universidad, sin necesidad de "muestras grandes", ni de investigaciones longitudinales, ni multirregionales, algo muy parecido a lo narrado en este libro le sucedió en su primera experiencia de enseñanza del cálculo en el primer semestre de universidad. En la medida en que converse con otros colegas y amigos, se sorprenderá más todavía de que este estudio de caso se extiende casi al pie de la letra a decenas, centenares, tal vez a miles de casos en distintos tiempos y lugares de Latinoamérica. Efectivamente, parece que las situaciones estudiadas hubieran cambiado muy poco durante la segunda mitad del siglo XX. Lo grave es que, si seguimos así, no cambiarán tampoco durante la primera mitad del siglo XXI.

Pero ¿qué hacemos para no seguir así? He ahí el problema de investigación y el principal acicate para proseguirla. Estudios, investigaciones, seguimientos y análisis parecidos se han repetido periódicamente en muchos países sin lograr que su publicación y difusión cambien las prácticas usuales de enseñanza inicial del cálculo. ¿Podemos esperar algo más del presente libro?

Afortunadamente, cuando empezó esta nueva investigación, pudimos contar con abundante literatura sobre el tema y, ante todo, con nuevas herramientas teóricas para el análisis de lo que pasa y sigue pasando, así como para vislumbrar lo que podría cambiarse y no se ha cambiado.

Estas herramientas más refinadas podrían sintetizarse en tres grandes tipos: desde el punto de vista epistemológico, la autora pudo avanzar significativamente en las conceptualizaciones sobre los distintos obstáculos al aprendizaje. Desde el punto de vista didáctico, pudo estudiar y utilizar distintas técnicas contemporáneas de análisis didáctico de las situaciones de aula observadas, y desde el punto de vista semiótico, tuvo acceso a las más recientes precisiones sobre los símbolos, diagramas, gráficos, palabras y gestos del profesor, los estudiantes y los autores de los libros de texto, y sobre las constelaciones de interpretaciones y modelos mentales de los estudiantes y —quien creyera— de los mismos profesores, quienes, a pesar que han estudiado, enseñado y saben mucho de matemáticas, parecen tener ciertas confusiones e imprecisiones que suelen causar insuperables dificultades en sus estudiantes.

Respecto a los aspectos epistemológicos, la autora logra penetrar la maraña de vocablos, definiciones e interpretaciones que circulan en la literatura de la educación matemática sobre los obstáculos, errores, conflictos, dificultades y concepciones o "misconcepciones" de los estudiantes, para proponer operacionalizaciones que le permiten atribuir distintas formas de influencia de las acciones u omisiones de los profesores en los procesos de aprendizaje de sus estudiantes, e identificarlas certeramente en los protocolos de las interacciones de aula observadas en su estudio de caso. Encuentra así, obstáculos semióticos que no producen conflictos semióticos observables, pero sí agudizan los efectos de obstáculos epistemológicos en los estudiantes y obstáculos didácticos en los profesores. Esta es una primera contribución que podrá influir significativamente en las investigaciones ulteriores y en los cursos de formación inicial y continuada de los profesores de matemáticas, no solo en el Cálculo Diferencial e integral, sino en muchas otras ramas de las matemáticas.

Respecto a los aspectos didácticos, la autora analiza distintas formas de análisis didáctico desarrolladas en distintas partes del mundo, especialmente las herramientas de la Teoría de las Situaciones Didácticas y Adidácticas de Guy Brousseau; las del enfoque onto-semiótico EOS de Godino, Batanero y Font en la Universidad de Granada, basado en la semiótica de Hjelmslev, con rica y diversificada propuesta de análisis de la idoneidad didáctica de la instrucción; el análisis didáctico de Rico, Gómez y Bedoya en la misma universidad, orientado por la fenomenología de Hans Freudenthal, y el enfoque semiótico-cultural de Luis Radford, con su propia teoría de la objetivación de los saberes matemáticos por el uso de los recursos semióticos que circulan en la cultura del aula. La utilización atinada de estas refinadas herramientas de análisis de los datos le permite a la autora identificar los episodios clave y los momentos precisos en los que se cruzan aspectos epistémicos y cognitivos, institucionales y subjetivos y proponer una interpretación plausible de lo que ocurre en esos momentos significativos. Logra identificar una posible nueva categoría intermedia del saber que el profesor toma por epistémico y trata de institucionalizar en el aula, cuando no corresponde al saber institucional ni al epistémico del análisis de variables y funciones reales de la comunidad matemática de investigación. Esta segunda contribución podrá también ayudar mucho para refinar las futuras investigaciones sobre enseñanza de las matemáticas y para enriquecer la formación inicial y continuada de los profesores de matemáticas y, posiblemente, de los de ciencias naturales.

Respecto a los aspectos semióticos, la autora utiliza el enfoque noético-semiótico de Raymond Duval para precisar la distinción clave entre el registro semiótico como sistema productor de representaciones semióticas con las que el profesor quiere externalizar sus modelos y teorías matemáticas, y las representaciones semióticas producidas por cada registro semiótico, que, a su vez, son sistemas de trazos y símbolos que requieren interpretación en los modelos mentales de los estudiantes. Así pueden distinguirse dos tipos de transformaciones de esas representaciones como sistemas simbólicos: los tratamientos que transforman una representación semiótica en otra perteneciente al mismo registro, y las conversiones que la transforman en otra representación perteneciente a otro registro. Con esas finas distinciones detecta la autora la presencia de escrituras con distinta interpretación en el álgebra elemental, en la geometría analítica y en el Cálculo Diferencial, que la llevan a identificar un deslizamiento entre las notaciones para la derivada en el Análisis real y para las diferenciales en la Geometría diferencial. Este deslizamiento de las derivadas a las diferenciales plantea nuevos y profundos interrogantes acerca del saber matemático mismo de los profesores de Cálculo y acerca de las dificultades de comunicación con sus estudiantes en los intentos de enseñar estos temas. Espero que esta tercera contribución también sirva para potenciar futuras investigaciones y eventos de formación inicial y continuada de profesores de matemáticas, que puedan comenzar a cambiar las formas de enseñanza inicial del Cálculo Diferencial e integral en todas las universidades de Latinoamérica.

Carlos Eduardo Vasco Uribe

Introducción

La investigación acerca de las dificultades, conflictos y obstáculos que encuentran los estudiantes de primeros semestres de ingeniería al abordar el estudio del Cálculo Diferencial, percibida por los múltiples tropiezos, repitencias y deserciones presentes en diferentes estudiantes, es la semilla que ha generado este camino investigativo iniciado hace ya varios años y que ha requerido la observación y el seguimiento de diferentes cursos de Cálculo Diferencial, múltiples entrevistas y profundas y permanentes reflexiones.

En el primer capítulo se encuentra la contextualización del proyecto de investigación y la justificación que desde diferentes dimensiones ha consolidado esta investigación, así como también el planteamiento del problema, y la pregunta de investigación junto con los objetivos que han dirigido la indagación.

En el segundo capítulo se presentan los antecedentes teóricos, los antecedentes desde investigaciones doctorales, y desde otros reportes de investigación, y un estado del arte que parte del origen y planteamiento de los obstáculos epistemológicos iniciado por Bachelard en la epistemología, pasa por su incorporación a la educación matemática elaborada en sus orígenes por Brousseau con su arqueología de los obstáculos epistemológicos, y aborda los trabajos de Sierpinska que la continuaron. En esta misma vía se exponen otras tendencias asociadas y relacionadas, unas más cercana y otras más lejanas con esta noción, como concepciones, errores, conflictos, obstáculos didácticos, semióticos, misconcepciones, principalmente, con el fin de elaborar un amplio y completo panorama desde distintos enfoques y perspectivas y con diferentes nominaciones que han pretendido describir en todo caso esa perplejidad o confusión que se evidencia en los errores y en las dificultades y cuya etiología puede proponerse desde los obstáculos o los conflictos semióticos.

Se encuentra también una sección que aborda la transición o ruptura del álgebra al cálculo, a partir de una reflexión epistemológica y didáctica acerca de las dificultades detectadas al pasar del álgebra al cálculo en educación matemática; dificultades detectadas tanto en la literatura especializada como documentadas en las investigaciones realizadas, que es pertinente en tanto la investigación se sitúa en el estudio del Cálculo Diferencial, curricularmente dispuesto sobre unos requisitos algebraicos y que cognitivamente requiere de ciertas competencias y habilidades necesarias, pero no suficientes, que adicionalmente dan lugar a ciertos obstáculos y conflictos en el nuevo registro semiótico.

A continuación, se presentan algunas consideraciones sobre límites y configuraciones epistémicas sobre la derivada, seguido de una aproximación a la conceptualización de dificultad, conflicto y obstáculo con el fin de precisar el sentido y significado de estas nociones al interior del presente libro. Se presentan también algunos elementos del Enfoque Onto Semiótico (EOS), las categorías descriptivas del análisis didáctico y el Análisis de Facetas de Idoneidad Didáctica de Godino, Font y colaboradores, y del Enfoque Noético-Semiótico (ENS) de Duval para la Educación Matemática.

En el tercer capítulo se presentan los lineamientos metodológicos y la presentación de los datos con las matrices documentales correspondientes a los episodios de clase observados. Fundamentalmente consta de lo que se ha denominado Matriz Documental en la que aparecen los diferentes episodios de clase observados, dispuestos cada uno en un cuadro a 4 columnas, cada una de las cuales contiene una numeración, unas observaciones, el relato del guion, y la descripción de unas actividades o prácticas no verbales observadas. Se han dejado en esta sección solamente las correspondientes a los episodios 4 y 12, llamados *"episodios fundamentales"*; el primero sobre límites y el segundo sobre derivadas. Los demás, por su gran extensión, no se han incluido en este libro. También se presenta en este capítulo la Matriz Categorial Descriptiva de los dos episodios fundamentales. Esta matriz descriptiva contiene el análisis de las matemáticas implicadas en los dos episodios en cuanto a las prácticas matemáticas con problemas, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos tal como lo presenta el EOS.

El cuarto capítulo está dedicado al análisis general de los datos y contiene los cinco niveles de análisis para cada episodio fundamental. Se presenta la Matriz Categorial Descriptiva de Prácticas Matemáticas, Configuración de Objetos y de Oposiciones, denominada así pues contiene las categorías de análisis que atraviesan los episodios y que están en estrecha relación con las categorías de análisis en lenguajes, conceptos y procedimientos y las cinco dualidades del decágono del EOS. En esta matriz se han incluido proposiciones y argumentos en la categoría de lenguajes que hemos ampliado y refinado, pues el análisis mismo así lo ha requerido. En una columna contiene Prácticas matemáticas y configuración de objetos y en una segunda columna, las oposiciones del decágono del EOS que refinan las categorías iniciales. Se presenta además una descripción de la práctica docente observada y unos resultados obtenidos a partir de estos análisis.

El quinto capítulo presenta los resultados y unas conclusiones tanto a nivel, de la indagación teórica como del análisis de los datos, junto con unas observaciones particulares inferidas de esta. También contiene algunos resultados esperados y posibles impactos en la comunidad académica e investigativa. Finalmente se encuentran la sección de las referencias bibliográficas.

Capítulo 1.

Contextualización

1.1 Un contexto problemático sobre el cálculo diferencial en los primeros cursos de ingeniería.

Lo que se encuentra en general, al observar los cursos de cálculo en primeros semestres de universidad, tal como lo ha documentado Neira (2012), es incomprensión de los conceptos, un inadecuado manejo de los razonamientos, además de una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas. Los cursos se suelen desarrollar en forma mecánica y el trabajo descansa en lo puramente algorítmico y en el álgebra, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo.

La evidencia de los problemas de comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del Cálculo Diferencial es tan fuerte que ha desencadenado –en diferentes partes del mundo– reformas curriculares, innovaciones didácticas, propuestas con el uso de la tecnología, programas dirigidos a los profesores y a la enseñanza (Tall, 1996; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992), y hasta se ha cuestionado si se debe enseñar cálculo en la educación media; y en caso de que la respuesta fuera afirmativa, de qué manera y con qué grado de rigor.

Por ejemplo, basta consultar algunos *"handbooks"* de investigación, desde el *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, editado por Grouws en 1992, hasta los más recientes; a las memorias de las reuniones anuales del PME[1] o de recientes eventos de Educación Matemática como el ICME o CIAEM[2] a los reportes de investigación presentados en las últimas RELME,[3] para darse cuenta de lo actual y presente de las investigaciones

1 Psychology of Mathematics Education.
2 Conferencia Interamericana de Educación Matemática.
3 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

didácticas en el campo del Cálculo Diferencial e Integral. Todo lo cual revela que la reflexión profunda acerca de la comprensión de los conceptos fundamentales en el trabajo inicial del cálculo en la universidad sigue siendo una línea de investigación crucial en educación matemática

Es válido preguntarse ¿por qué a pesar de que algunos estudiantes afirman que estudian bastante pierden los parciales?, ¿por qué repiten una y otra vez el curso de Cálculo Diferencial?, ¿por qué cometen casi siempre los mismos errores?, ¿por qué les cuesta trabajo entender los conceptos?, ¿por qué los errores de tipo algebraico continúan haciéndoles perder los exámenes?, y una pregunta más profunda aún: ¿por qué, al parecer, no entienden el cálculo?

Algunas respuestas a estos interrogantes que constituyen lugares comunes entre maestros y estudiantes, por ejemplo, los profesores no saben enseñar cálculo, no se les entiende; los estudiantes no estudian lo suficiente, las matemáticas no son para todo el mundo, las matemáticas son difíciles, los estudiantes no tienen las bases necesarias para el curso y, otras respuestas que, en general, culpan de la situación o al maestro o al estudiante o a la matemática misma.

Ninguno de estos acercamientos centra la atención en el punto donde se ubicó el interés de ésta investigación, que no solamente trató de identificar las dificultades que encuentran los estudiantes cuando inician esa formación en las matemáticas superiores y de caracterizarlas como dificultades, conflictos u obstáculos y de qué tipo, sino también se esmeró en encontrar una explicación acerca de cómo ellas se generan; es decir, cómo emergen en la interacción entre estudiantes y profesores en las prácticas usuales que se dan en general en esos cursos.

1.2 Un problema de la investigación didáctica.

A partir de las investigaciones de Artigue (1995) y Sierpinska (1994), se planteó que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, la alternancia de cuantificadores, el tratamiento de los signos usados en cálculo, plantean una "ruptura" con lo que se hace en álgebra; se propuso una investigación en la Transición del Álgebra al Cálculo (TAC) como una manera de impactar significativamente en el aprendizaje del Cálculo Diferencial, pues cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos.

Del fenómeno didáctico de *algebrización* del Cálculo Diferencial escolar, ya detectado por Artigue, Azcárate, Tall, Gascón, (citados por Contreras, 2000), que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo, emerge un interés urgente y fundamental por la actividad matemática que se realiza en las aulas de clase, por las prácticas educativas, por la dimensión de significación y sentido de estas prácticas, que toca también las dimensiones didáctica y matemática.

Por tanto, la investigación en el paso, transición o ruptura del álgebra escolar al Cálculo diferencial, y las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en esa transición, constituyen dos puntos cruciales en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en la educación media y en la educación superior.

Este trabajo indagó acerca de algunas de las causas generadoras de tales errores, obstáculos, conflictos, dificultades; y la explicación se buscó en las prácticas de clase, en la interacción poca o nula que se dio en esas prácticas, y en la gestión de los conflictos presentados. Documentamos que esas mismas prácticas fueron, a la vez, generadoras de obstáculos y que en la emergencia de las dificultades reportadas actuaron también manteniendo en el sistema didáctico los mismos obstáculos que causan las dificultades y conflictos que a su vez, causan incomprensiones y repitencia.

1.3 Un problema de investigación.

Se describen y caracterizan aquí las dificultades que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del Cálculo Diferencial en una universidad colombiana; se explican tanto algunas de las causas de su emergencia, como también el modo en que estas se mantienen.

Para ello fue necesario identificar y describir las prácticas desde las aulas de clase en las que maestros y estudiantes vivieron ese proceso de enseñanza y aprendizaje; es decir, se observó para entender y poder describir las Prácticas Educativas Universitarias (PEU), en particular las vinculadas con la iniciación del Cálculo Diferencial (PEUC), por ejemplo, cómo fueron las interacciones usuales entre docentes y estudiantes y entre estudiantes, cuáles fueron las dificultades emergentes de dicha interacción y, qué conflictos surgieron, lo que nos permitió identificar, describir, clasificar y explicar los obstáculos inferidos a partir de la observación de las PEUC en estudiantes de Ingeniería.

De esta manera se documentó cómo el tipo de matemáticas enseñadas y la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje, en particular la inadecuada gestión de los conflictos, generaron las dificultades observadas, y de igual manera las continúan manteniendo., pues en la interacción dada en las prácticas o en la ausencia de ella, se encontró una explicación para la emergencia de tales dificultades, conflictos u obstáculos.

Esta categoría de lo emergente hace referencia a aquello que surge como producto de ciertas prácticas, interacciones, tratamientos, lenguajes y maneras de decir, explicar, ejemplificar y resolver. Está estrechamente relacionado con la interacción, puesto que los conflictos de significados son generados en las prácticas planteadas: lenguajes, argumentos, procedimientos, gestión de las preguntas realizadas; todo ello genera precisamente el tipo de errores detectados. Se buscó entonces sacar a la luz las ambigüedades en los discursos y explicarlas como unas metáforas o causas generadoras de conflictos para responder a la pregunta *¿Qué dificultades y conflictos podemos observar y qué obstáculos podemos inferir a partir de la observación de algunas (PEUC), en los estudiantes de ingeniería? ¿Cómo emergen, cómo y por qué se generan y cómo se pueden explicar?*

Para responder a esta pregunta, se configuró un marco de comprensión para la conceptualización de algunos constructos teóricos relacionados con la noción de obstáculo, también se describieron y caracterizaron algunas prácticas educativas universitarias (PEU) vinculadas a la iniciación del cálculo diferencial (PEUC) en un curso de primer semestre de Ingeniería, además de identificar y caracterizar las dificultades y conflictos que emergieron en las interacciones observadas en las PEUC e inferir posibles obstáculos para proponer una explicación de la ocurrencia de tales dificultades y conflictos. Logros todos los cuales constituyeron los objetivos de la investigación.

Capítulo 2.

Fundamentación Teórica

2.1 Introducción.

Tal como se ha venido subrayando, las investigaciones desarrolladas en este ámbito han experimentado en los últimos años una evolución significativa en sus enfoques y propósitos, transitando de los estudios centrados en caracterizar las dificultades y obstáculos existentes en la comprensión del límite (Cornu, 1991; Tall, 1992; Moru, 2006) a las investigaciones preocupadas por analizar las razones que subyacen a tales dificultades (Espinoza y Azcárate, 2000; Mamona-Downs, 2000, citados en Moru, 2006). Incluso, otros autores teniendo en cuenta las dificultades que plantea la definición formal de límite de una función han optado por dar una nueva definición de límite como "aproximación óptima", o por evitarla, como el caso del Análisis no estándar de Abraham Robinson.

En el caso del límite concretamente, por ejemplo, Artigue (1995) enfatiza la dificultad proveniente de la necesidad de disociar el objeto límite del proceso que permite construirlo, asociándolo con el obstáculo señalado por Sierpinska en relación con la consideración del infinito. Asociada a la formalización de la noción de límite se percibe otra dificultad que consiste en mostrar que en la definición formal de límite se concibe un solo proceso, en tanto los estudiantes parecen ver dos, uno que se efectúa sobre la variable independiente y otro sobre los valores de la función.

Por otro lado, se presentan algunas reflexiones acerca de la transición o ruptura del álgebra al cálculo, se describen algunas dificultades detectadas en esa transición y se profundiza en algunas tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva en el álgebra escolar y en el cálculo diferencial. A manera de complemento y profundización respecto a los conceptos de obstáculo y ruptura epistemológica, se analizan los conceptos de revolución científica y otros relacionados tomados de la historia y la epistemología de la ciencia.

Teniendo en cuenta que en el análisis de los datos se hizo necesario utilizar elementos importantes del Análisis Didáctico planteado por el Enfoque Onto Semiótico de la Instrucción Matemática: EOS y cuya descripción se encuentra en el Marco Teórico, capítulo III, nos pareció importante revisar otros enfoques de Análisis Didáctico cuyas corrientes se esbozan en esta parte del Estado de Arte, con el fin de mostrar que existen otros acercamientos al análisis didáctico.

También se hizo necesario incorporar una revisión histórica y epistémica acerca de algunas nociones relevantes del cálculo diferencial e integral, y las configuraciones sobre la derivada y el límite que otras investigaciones ya han logrado aportar en la educación matemática. Finalmente a través de una revisión detallada de publicaciones asociadas al EOS de Godino, Batanero, Font y otros, del 2006 en adelante, se encontró una amplia gama de trabajos que han contribuido a fortalecer teóricamente el Enfoque Onto Semiótico y otras que han enriquecido la puesta en práctica de dichas teorías, pertinente su presentación en este estado de arte por cuanto actualiza y robustece este marco teórico y metodológico, algunos de cuyos elementos fueron fundamentales para el análisis de los datos.

2.2 Aproximación histórica del obstáculo epistemológico desde la tradición filosófica.

El término *obstáculo epistemológico* fue propuesto por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard**,** quien postuló que la naturaleza no nos es dada y nuestras mentes nunca son vírgenes frente a la realidad, pues sea lo que sea que veamos, digamos u observemos está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver (Bachelard, 1938/2004, p. 15).

> *Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega muy pronto a la convicción de que hay que plantear el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto*

> *mismo de conocer, íntimamente, que aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, es ahí donde discerniremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que siempre proyecta alguna sombra. Jamás es inmediata y plena. Las revelaciones de lo real son siempre recurrentes. Lo real no será jamás "lo que podría creerse", sino siempre lo que debería haberse pensado. El pensamiento empírico es claro, inmediato, cuando ha sido bien montado el aparejo de las razones. Al volver sobre un pasado de errores, se encuentra la verdad en un verdadero estado de arrepentimiento intelectual. En efecto, se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos, o superando aquello que, en el espíritu mismo, obstaculiza la espiritualización.* (Bachelard, 1938/2004, p. 15)

Algunos de estos pensamientos, creencias y conocimientos que poseemos pueden funcionar como un obstáculo a nuestra comprensión de los fenómenos que percibimos. Nuestras generalizaciones pueden estar sesgadas por nuestra tendencia a generalizar el conocimiento en unas pocas leyes o principios de explicaciones que funcionan adecuadamente, como *todos los cuerpos caen,* o *la luz se propaga en línea recta*, o sobre metáforas como *el aire es una esponja*.

Según Bachelard, frente a lo real el alma no puede mostrarse ingenua; lo que cree saberse obstaculiza lo que debiera saberse y no es posible hacer tabla rasa de los conocimientos anteriores. "Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado" (Bachelard, 1938/2004, p. 16).

Para Bachelard, el obstáculo es un tipo de conocimiento ya disponible, a menudo instalado desde hace mucho tiempo en nuestra mente y que ya no percibimos como tal. Lejos de ser una dificultad mental, resulta de una facilidad intelectual que nos otorgamos, muy a menudo sin ser ya conscientes de ello. Y aunque la dificultad sea dolorosa, el obstáculo está confortablemente asentado, de tal forma que se vuelve a él constantemente. El autor enunció algunos obstáculos en su obra: la experiencia básica o conocimientos previos, el conocimiento general, el obstáculo verbal, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo sustancialista y el animista. (Bachelard, 1938/2004).

Estrictamente hablando, es posible afirmar que Bachelard mismo nunca dio una definición de obstáculo epistemológico, aunque sí dio muchos ejemplos tomados de la química y de la física del siglo XVIII y la física contemporánea y sugirió el uso de esta idea como psicoanálisis del pensamiento científico. Los obstáculos pueden ser encontrados en las tendencias humanas a las generalizaciones precipitadas o a las explicaciones de las cosas con metáforas familiares, o leyes universales tales como: "todos los cuerpos caen" o aún, buscando una sustancia responsable para un fenómeno. Los obstáculos aparecen así en el proceso del cambio del pensamiento común al científico, en el proceso del cambio de una clase de racionalidad a otra clase de racionalidad.

Bachelard construyó esta epistemología en 1938 y fue solo en el año 1976 cuando Brousseau la incorporó a la investigación en educación matemática en el marco de su teoría de las situaciones didácticas, en el marco de la Ingeniería Didáctica y de todo ese fenómeno didáctico que se dio en Francia en la década de los 70. Se describe brevemente el tránsito de esta noción hacia el campo específico de la investigación en educación matemática, que se tardó alrededor de 38 años.

2.3 Aproximación histórica desde la educación matemática.

Ninguno de los ejemplos de obstáculo epistemológico dado por Bachelard se aplica a las matemáticas, como él mismo lo advirtió,[4] puesto que la matemática no es una ciencia natural, no trata acerca de fenómenos del mundo real, ni se basa en la observación y la inducción. Sin embargo, a partir del debate que desató la incorporación del concepto a la educación matemática, se empezó a creer que sí tenía sentido hablar de obstáculos epistemológicos en matemáticas, y que podían ser la explicación para eso que a diario se detectaba como obstaculizante en los aprendizajes de los estudiantes. Se buscaba un fundamento teórico para el nuevo concepto, y naturalmente transferir este concepto de las ciencias naturales a las matemáticas requería adaptaciones cuidadosas y profundas reflexiones filosóficas acerca de la naturaleza de las matemáticas.

4 "…En efecto, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce pausas. Ella no conoce los periodos de errores. Ninguna de las tesis que sustentamos en este libro apunta hacia el conocimiento matemático. No se refieren sino al conocimiento del mundo objetivo". (1938/2004) Pág. 25

Esta visión, a su vez, requirió repensar la enseñanza y la valoración de la comprensión de los estudiantes, lo cual explicaba sus errores, pues algunos de ellos eran causados por formas de pensar completamente legitimas con una cierta estructura de la mente, un cierto contexto de problemas y ciertas creencias acerca de lo que es verdadero en matemáticas.

Emergió claramente entre algunos investigadores que algunas de las formas de comprensión de los estudiantes merecían más respeto y atención, y que en vez de tratar de reemplazar el conocimiento errado por el correcto, el esfuerzo de los profesores debería ser invertido en la negociación de significados, en la invención de problemas especiales en los cuales los estudiantes experimentaran un conflicto mental que los hiciera conscientes de que dichas formas de comprensión habituales, posiblemente no sean las únicas y que no son universales.

Brousseau (1983/1995) ya veía en la noción de obstáculo el medio de cambiar el estatuto del error mostrando que el error y el fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar, dado que el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo de sentido del conocimiento adquirido.

Distinguió, tres orígenes fundamentales de los obstáculos encontrados en la enseñanza matemática:

- *Un origen ontogenético, debido a las limitaciones impuestas, por el nivel de desarrollo de las capacidades cognitivas de los alumnos, en el proceso de enseñanza.*
- *Un origen didáctico, debido a las decisiones del sistema educativo, o las acciones del profesor en el proceso de enseñanza.*
- *Un origen epistemológico, por los obstáculos ligados a la naturaleza del conocimiento mismo y que son propios de él, se repiten en la historia, muestran su persistencia y dificultad para evolucionar, es decir los obstáculos en el sentido de Bachelard.*

Todo un programa de investigación empezó a desarrollarse alrededor de la noción de obstáculo epistemológico. Como un ejemplo de lo anterior se cita la tesis sobre el aprendizaje de la noción de límite sustentada por Cornu en 1983 y los trabajos de Sierpinska (1994) que la prolonga, quien se propone descubrir los obstáculos epistemológicos ligados a las matemáticas que se enseñan en la escuela y encontrar los medios didácticos para ayudar a los alumnos a superarlos, conservando dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico según Bachelard (1938/2004): el carácter inevitable de su aparición, y la repetición de su aparición en la filogénesis y la ontogénesis de los conceptos. Reafirma a partir de esta investigación, que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico, es su aparición inevitable y su resistencia en la historia de los conceptos considerados.

Según Sierpinska (1994, p. 133)[5] las investigaciones se enfocaron entonces en el diseño de situaciones de enseñanza, -ingeniería didáctica la llamaron los franceses-, que suministraran condiciones favorables para la superación de obstáculos epistemológicos y posibilitaran así una comprensión mejor y más profunda de los conceptos matemáticos. En esa tendencia prácticamente se identificó comprensión con superación de obstáculos. En la necesidad de explicar las dificultades de comprensión en matemáticas que se evidencian en los estudiantes, se llegó a concluir que estas dificultades no dependían solamente de la falta de experiencia con las matemáticas, ni de las habilidades o destrezas que puedan o no tener, ni de la idiosincrasia de su pensamiento aún inmaduro, sino también de la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos y de la cultura en la cual estos han sido desarrollados.

Es entonces cuando el concepto de "obstáculo epistemológico" de Bachelard se vuelve muy importante, puesto que el pensamiento de los estudiantes parece estar influenciado por ciertos obstáculos epistemológicos que deben ser superados si se quiere que emerja una real comprensión en matemáticas. Estos obstáculos epistemológicos –formas de comprensión basadas en algo inconsciente, esquemas de pensamiento culturalmente adquiridos, creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas y de categorías fundamentales como número, espacio, causa, infinito, … inadecuadas con respecto a teorías actuales- direccionaron el desarrollo de los conceptos en la historia y han permanecido de alguna manera en su significado.

5 Understanding in Mathematics. Edición inglesa de 1994. Obra publicada en inglés, de la cual la autora de este artículo ha elaborado ya una traducción, en particular del capítulo IV.

Se concentró así la investigación, desde una cierta tendencia, en detectar los obstáculos epistemológicos y precisar su concepto y se formularon entonces varias preguntas: ¿Sobre qué bases podemos afirmar que el pensamiento de los estudiantes se encuentra influenciado por obstáculos epistemológicos? ¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión, o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos, pero se revela inadecuada en otros? ¿O es una actitud de la mente que permite tomar opiniones por hechos, y unos pocos casos de evidencia por leyes generales? Es esta la temática que emprende Anna Sierpinska, cuyas ideas principales se describen a continuación.

A partir de la observación de dos parejas de alumnos identificando la tangente como límite de una secante variable, y encontrando la ecuación de la tangente de una curva representativa de la función seno en el origen, Sierpinska (1994) propuso una lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite:

- *Horror al infinito,* que reagrupa los obstáculos ligados al rechazo al estatuto de operación matemática para el paso al límite, la transferencia automática de los métodos del álgebra propuesto para manipular magnitudes finitas a las magnitudes infinitas, la transferencia de las propiedades de los términos de una serie convergente a su límite, y finalmente el obstáculo que consiste en asociar el paso al límite a un movimiento físico, a una aproximación.
- *Los obstáculos ligados al concepto de función***:** no visualización de la noción de función subyacente, restricción de una sucesión de valores, reducción monótona, no distinción de la noción de límite y de extremo inferior o inferior.
- *Los obstáculos geométricos:* la intuición geométrica constituye "un obstáculo serio en la formulación de una definición rigurosa, tanto al impedir la determinación de aquello que debiera comprenderse por la diferencia de dos magnitudes como por un apego de la noción de límite a la noción de extremo de un conjunto".
- *Los obstáculos lógicos:* ligados a la borradura de los cuantificadores o de su orden.
- *El obstáculo simbólico*: ligado a la reticencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite.

Y concluyó que de esos trabajos se obtiene la impresión que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, así como la observación de concepciones análogas en los alumnos.

En general Sierpinska se propone valorar como más significativo un acto de comprensión que otro, si hay superación de obstáculos, sean estos epistemológicos o de desarrollo, o culturales, o relacionados con la madurez del proceso hacia el conocimiento científico. Se ilustra con un ejemplo (Sierpinska, 1994, p. 124):

> Cuando se introduce la noción de la potencia cero y por definición se dice que $a^0=1$, algunos estudiantes sencillamente adicionarán esta información a otras reglas matemáticas conocidas por ellos, sin pensar mucho en esta definición. Otros lo aceptarán como una convención útil que les sirve para preservar la continuidad de la función $y=a^x$. Pero habrá quienes se rebelarán en contra diciendo que la notación $a^0=1$ no tiene ningún sentido, si tomar la potencia significa multiplicar por sí misma una cantidad $n-1$ veces.

En ese momento la conceptualización de la potenciación como una multiplicación repetida, (esquema tradicional de las clases convencionales en las que se estudia la potenciación), se convierte en un obstáculo para comprender la función exponencial. Esto implica una revisión de la noción de potenciación, para superar el obstáculo, lo cual involucra una construcción y no solamente una memorización del concepto de función exponencial. Se relaciona explícitamente con las dificultades evidentes que se tiene en matemáticas con "lo dado" y las definiciones por decreto, sin ninguna argumentación que las sustente.

Pero, para la educación matemática lo que es esencial son exactamente estas aceleraciones y regresiones, citadas por Piaget y García, y las rupturas epistemológicas, tanto como los obstáculos epistemológicos y las dificultades, porque se supone que comprender y aprender es superar obstáculos. Para Sierpinska, decir entonces que el equilibrio ha de obtenerse finalmente, constituye una trivialidad, pues sin desestabilizar primero las estructuras cognitivas de los estudiantes, ningún aprendizaje de algo radicalmente nuevo podrá ocurrir: la construcción de sentido y de significados está determinada más por el impacto negativo de varias normas y creencias y caminos de pensamiento que constituyen obstáculos para dicho cambio.

En cuanto a su filosofía de los obstáculos epistemológicos, reafirma los principios de Bachelard en la investigación en educación matemática y enuncia ejemplos de las matemáticas, al decir que el primer supuesto de los obstáculos epistemológicos es que, de un nivel de conocimiento y comprensión a otro, hay una necesidad de integración y reorganización; que la cognición no es un proceso acumulativo y que las nuevas comprensiones pueden solamente ser parcialmente construidas sobre caminos de desarrollo previos.

Por ejemplo, cuando se pasa de los números naturales a los números enteros, o de la aritmética al álgebra debemos romper, para el arrepentimiento intelectual, parodiando al epistemólogo francés, una reorganización de entendimientos previos. Mientras que los enteros pueden ser considerados como una generalización de los números naturales, debemos tener en cuenta que ni la comprensión ni el desarrollo de los niños en los primeros años de la escuela han de servir de inmediato para esta generalización.

Con su investigación Sierpinska reafirmó también el otro supuesto de la filosofía de los obstáculos epistemológicos: que no podemos hacer metafísica de la comprensión científica, lo cual significa que los obstáculos epistemológicos son inevitables (Sierpinska, p. 126). Nuestras creencias acerca de la naturaleza del conocimiento científico, nuestras visiones de mundo, imágenes que tomamos y que están impresas en el lenguaje que usamos, esquemas de pensamiento, todo ello forma un punto de partida para nuestro manejo de los problemas científicos tanto que ellos desvían nuestros acercamientos y soluciones. Ellos se vuelven apoyos, pero también obstáculos para un buen entendimiento. Su superación requiere una reconstrucción de comprensiones fundamentales.

Lo que es considerado como obvio y natural, lo que es incuestionado determinará de alguna manera lo que será considerado problemático. En el nivel informal puede imprimirse el mismo como un esquema de pensamiento, un hábito tan natural que se vuelve parte de nosotros mismos. ***Los niveles formales e informales son, entonces, el semillero de los obstáculos epistemológicos.***

Hasta aquí la recopilación en la historia y las investigaciones en educación matemática que desató el concepto introducido por Brousseau y la mirada de Anna Sierpinska. A continuación, algunos constructos teóricos asociados al concepto de obstáculo.

2.4 Visiones y perspectivas actuales en la educación matemática relacionadas con la noción de obstáculo.

Existen diversos investigadores, enfoques y escuelas que han trabajado con nociones que tienen una estrecha relación con el concepto de obstáculo epistemológico, y que han extendido su significado a otros ámbitos, no solamente cognitivos sino culturales, didácticos, semióticos, y de otros tipos. Es ingenuo pensar que el concepto de obstáculo epistemológico sólo tiene defensores e investigadores fervientes que encausan todos sus esfuerzos alrededor de esta categoría. Todo lo contrario. El término ha suscitado polémica, debates, se le ha asociado con una carga semántica fuerte en el sentido negativo de barrera intraspasable y el adjetivo epistemológico ha desatado por su parte una serie de posturas divergentes pues lo asocian más a una postura estricta y radicalmente cognitivista que deja de lado la cultura como elemento fundamental en la construcción y socialización del saber, siendo que epistemológico para Bachelard es la connotación que dirige al sujeto hacia el espíritu científico, hacia el acto del conocimiento, postura compartida en esta investigación.

A continuación, se presentan algunas de esas nociones. En primer lugar, está el término de *concepción* de Michele Artigue; en segundo lugar, la terminología de *error* según el enfoque de Luis Rico; en tercer lugar, la perspectiva sociocultural de la matemática y su concepción de *obstáculos culturales y didácticos* de Luis Radford; en cuarto lugar, se cita la perspectiva de "El Enfoque Onto Semiótico de la Instrucción matemática", EOS, de Godino, Batanero, Font y otros, con su constructo de conflicto semiótico y sus tipos; en quinto y último lugar, y sin pretender ser exhaustiva, la mirada de Bruno D'Amore con una visión renovada del término *misconcepción*.

2.4.1 Concepción.

En este parágrafo, se intenta restaurar la trayectoria de esta noción en la comunidad didáctica francesa, para poner en evidencia sus relaciones a la vez epistemológicas y cognitivas y para evocar, muy brevemente, el problema de su supervivencia en la escena de una teoría antropológica como la desarrollada por Chevallard.

La palabra «concepción» se usa aquí en el sentido de Artigue (1984), para establecer una distinción entre el objeto matemático que es único y las significaciones variadas que le pueden asociar los estudiantes, a medida que su conocimiento va evolucionando hacia un estatus superior. La identificación y caracterización de las concepciones que los estudiantes construyen, a medida que avanzan en el estudio de las matemáticas, es un tema que ha despertado el interés de los investigadores en didáctica de las matemáticas porque, como se ha señalado (Brousseau, 1998, p. 142), son conocimientos que, en algunos casos, se constituyen en obstáculos para el aprendizaje, en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes. Gómez (2000), afirma que además el estudio de las concepciones permite conocer el efecto de la enseñanza al determinar qué es lo que realmente están aprendiendo los estudiantes y tomar decisiones al respecto.

Artigue (1984) propone también que hay diferentes concepciones previas derivadas del constructivismo, que sostiene que la mente del alumno no es una página en blanco: el alumno tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces son un obstáculo en la formación de este. El conocimiento nuevo no se agrega al antiguo, sino que lucha contra él y provoca una nueva estructuración del conocimiento total. Los errores cometidos por los alumnos en matemática son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de estos, y su utilización positiva en una suerte de realimentación del proceso educativo.

2.4.2 Errores.

Otra tendencia que se encuentra al revisar la literatura es la mirada dirigida hacia la noción de error, trabajada fundamentalmente por Luis Rico. Se presentan a continuación algunas visiones de la concepción de error encontradas en distintas perspectivas, que muestran sobre todo el paso de una connotación descalificativa a una apuesta por ser la fuente de explicaciones acerca del aprendizaje de los individuos.

Hay una pluralidad de aproximaciones teóricas acerca de las causas de los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

La preocupación por el concepto erróneo, por las condiciones que lo hacen posible y por las funciones que puede desempeñar en el dominio y avance de la ciencia, ha ocupado parte importante de las reflexiones de filósofos de la ciencia y epistemólogos: Popper, Bachellard, Russell, Lakatos.

Si los errores son elementos usuales en nuestro camino hacia el conocimiento verdadero, concluiremos que en el proceso de construcción de los conceptos matemáticos van a aparecer de forma sistemática errores y el proceso de construcción deberá incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación, mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones (Rico 1998, p. 75).

Acerca de la conceptualización de los errores se ha llegado a varias conclusiones: pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, no aparecen por azar sino que surgen en un marco conceptual consistente basado sobre conocimientos adquiridos previamente, cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores culpabilizando a los estudiantes de los mismos, todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento y llevarlo a la comprensión.

Rico (1998, p. 84) enuncia algunas características generales de como consideran los errores distintas tendencias actuales:

- Los errores son sorprendentes, extremadamente persistentes y resistentes a cambiar por sí mismos ya que puede requerirse una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos.
- Pueden ser de dos tipos: sistemáticos o por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera como correcto. Los errores por azar reflejan falta de atención y lapsus ocasionales, que tienen relativamente poca importancia.
- Ignoran el significado al no cuestionar el significado espontaneo que se le dan a símbolos y conceptos con que se trabaja (Rico, p. 1998) y surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente.
- Cualquier teoría de instrucción debe modificar la tendencia a condenar los errores y a culpabilizar a los estudiantes de estos, sin perder de vista que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores.

- Al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento y llevarlo a la comprensión.

Rico (1998, p. 84) afirma que Brousseau, Davis y Werner señalaron tres vías mediante las cuales se presenta el error:

- Ellos son el resultado de concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de la matemática, resultan de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado o cuando los alumnos utilizan procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas, y requiere invención de métodos propios y originales para resolver una tarea específica.

Esta noción de concepción deficiente señala una línea de pensamiento que causa una serie de errores, todos procedentes de una premisa incorrecta subyacente, en vez de errores esporádicos, desconectados y no sistemáticos. Aclara que la mayor parte de los estudios informan sobre la clasificación de errores y su frecuencia, lo cual no explica su origen y por tanto no pueden tratarse sistemáticamente.

Estas consideraciones acerca del error muestran sobre todo el paso de una connotación descalificadora a una apuesta por ser la fuente de explicaciones acerca del aprendizaje de los individuos.

Avancemos hacia otra mirada de los obstáculos en la perspectiva de la teoría de la objetivación cultural.

2.4.3 Obstáculos culturales y didácticos.

Luis Radford (2007), desde una perspectiva Socio-cultural de la matemática, y desde su Teoría Cultural de la Objetivación (TCO) afirma que una de las principales características de la aproximación histórico-cultural al pensamiento matemático es el componente histórico, lo cual significa, entre otras cosas, que aquello que conocemos y el modo con el cual llegamos al conocimiento deben enmarcarse no sólo por medio de aquello que hacemos ahora y cómo lo hacemos, sino también por una inteligencia histórica que reposa en prácticas sociales, instituciones, lenguaje, artefactos, libros, monumentos, etc.

El conocimiento y el conocer son ambos sostenidos por esta inteligencia histórica que hemos heredado de las generaciones pasadas. Ese es el motivo por el cual los profesores deben conocer algo de la historia de la matemática. La historia nos hace conscientes del hecho de que no somos ni el producto exclusivo de nuestras actividades, ni el producto irrevocable de nuestras prácticas discursivas. La historia de la matemática es un medio para comprendernos a nosotros mismos como seres históricos y comprender nuestra responsabilidad de educadores.

De acuerdo con esta aproximación histórico-sociocultural, el conocimiento está relacionado con las actividades en las cuales los sujetos se ocupan y esto debe ser considerado en relación con las instituciones culturales del contexto que se esté estudiando. Aquello que hace que un obstáculo sea epistemológico es su presunta naturaleza no cultural, no didáctica, no onto-genética: lo es por su propia naturaleza epistémica intrínseca. Por tanto, con dicha premisa, la naturaleza epistémica de la cultura está excluida desde el inicio.

En este orden de ideas, el "milieu" (como se considera en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau) se concibe como algo que se opone al individuo, y más precisamente, la relación del individuo con su milieu es antagónica.

Por tanto, se pregunta Radford qué tan fuerte puede ser el vínculo del obstáculo epistemológico y los factores sociales, y se atreve a concluir que no puede ser tan fuerte, pues si lo fuera, la idea de obstáculo epistemológico resultaría destruida y la tipología de obstáculos (onto-genético, didáctico, cultural y epistemológico) ya no tendría sentido.

Considera que el pensamiento y el conocimiento están imbricados definitivamente en sus contextos culturales, y que la cultura es mucho más que un estímulo y mucho más que un obstáculo para el conocimiento: la cultura es co-sustancial al conocimiento, y sugiere que el conocimiento es un producto del pensamiento – un tipo específico de actividad humana – y pensar es un género de praxis social, una forma de reflexión sobre el mundo, que responde a categorías conceptuales, éticas, estéticas, y otras categorías culturales.

La episteme china estaba conformada por categorías conceptuales diferentes, por ejemplo la oposición yin-yang, distinción que hizo concebible en el campo matemático algo similar a lo que hoy llamamos números negativos, números inconcebibles en el periodo griego clásico; entonces el mundo occidental tuvo que enfrentar profundas transformaciones para crecer con el germen de nuestro concepto contemporáneo de números negativos… el vínculo entre cultura y matemática es profundo y la razón es que las matemáticas son formas culturales de reflexión sobre el mundo, formas culturales de dar sentido a éste.

Puede pensarse que los obstáculos aparecerán cuando se lleven a cabo las prácticas socioculturales, y en esa visión antes de ser potenciadora la cultura parece ser impedimento; otra cosa es considerar la cultura y sus prácticas. Al respecto dice que existen buenos modos de enseñar y malos modos de enseñar, pero esta distinción entre bueno y malo depende de la concepción cultural del conocimiento y del rol con el cual profesores y estudiantes están involucrados en los procesos de enseñanza aprendizaje. Por esto un profesor puede ser bueno en un país y malo en otro.

Entonces, dado que Radford privilegia la construcción social, histórica y cultural del conocimiento matemático, es posible inferir que concibe los obstáculos en tanto culturales o didácticos, pues parece plantear una oposición radical entre lo epistemológico y lo cultural. Según esta mirada se debe, a partir de las perspectivas culturales explicar el trabajo de los alumnos: cuál es el valor social que hace que uno cambie una cosa por otra, cuáles son las cosas que permitieron ese desenvolvimiento.

Finalmente, considera Radford (2007) que, si con el término “obstáculo epistemológico” nos referimos a un tipo de conocimiento parcial, puesto en alguna parte del recorrido del desarrollo conceptual, un conocimiento que sirve para resolver ciertos problemas, pero que comienza a ser causa de errores en el momento en que es aplicado por fuera de ese tipo de problemas, entonces para él la cuestión fundamental a tratar concierne a la explicación de la naturaleza del camino, que se supone es recorrido por todos nosotros durante el desarrollo conceptual, prescindiendo de nuestro encuadramiento temporal y cultural.

2.4.4 Conflictos Semióticos.

Otra perspectiva, no tan divergente, de la de los obstáculos epistemológicos, didácticos y culturales es la que plantean Godino, Batanero y Font en “Un Enfoque Onto Semiótico del conocimiento y la instrucción matemática, EOS” (Seminario Doctorado DIE-UD I-2007). Hablan de conflictos semióticos y los definen como: "Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa".

Los conflictos semióticos se consideran como explicaciones potenciales de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos. Aclara Godino (2007) que si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo, en tanto que cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales. Entonces afirma que "Como se ve, el conflicto es una noción más general que la de Obstáculo, y algo más específica que la de "error" o "dificultad". La idea de conflicto sugiere un origen (semiótico) de tales errores o dificultades." Y dota a tales nociones de un sentido pragmático mediado por la actividad y la práctica.

La noción de conflicto semiótico y sus tipos puede ser más flexible, al aplicarse en situaciones menos exigentes que la de obstáculo (según la concibe Brousseau), y además aporta una posible explicación: disparidad de significados. Esta noción se puede interpretar en términos de "conflictos de significados". Siempre que podemos decir que hay un obstáculo, existe un conflicto de significados. Pero no a la inversa, o sea no todo conflicto semiótico es un obstáculo, en el sentido de Brousseau. Por tanto, la noción de conflicto semiótico puede ser una herramienta más flexible que la de obstáculo.

En general, obstáculo o concepción epistemológica, se refiere al conocimiento de un sujeto "epistémico", un sujeto ideal. Afirma Díaz-Godino[6] que el obstáculo (de origen epistemológico, cognitivo, didáctico) se concibe como un conocimiento, no una falta de conocimiento, que al ser aplicado en situaciones donde no es pertinente produce respuestas no adaptadas. Ese conocimiento tiene unas características especiales que Brousseau describe (es resistente al cambio, etc.).

6 Comunicaciones personales (2007). En Seminario_idm_eos. Archivos – Contribuciones al foro. Sesiones 1, 7, 10. (sesión 1: 19 de febrero de 2007; sesión 7: 23 de abril de 2007; sesión 10: junio de 2007).

2.4.5 Misconcepción.

La palabra misconcepción es una traducción del inglés "misconception" que antes se traducía "concepción equivocada". D'Amore (2005) explica los conflictos cognitivos en términos de imágenes al decir que un estudiante ha podido en el transcurso del tiempo, haber adquirido un concepto y haberse hecho una imagen, imagen misma que pudo haber sido reforzada en el tiempo a través de pruebas, experiencias repetidas, pero entonces ella se revela inadecuada respecto a otra del mismo concepto… se crea así un conflicto entre la imagen que tenía el estudiante y que la creía válida, incuestionada (verdadera), y la nueva, que generalmente amplía los limites o profundiza la aplicabilidad del concepto.

Dicho autor asocia la misconcepción o concepto errado afirmando que para alcanzar la construcción de un concepto es necesario pasar por una misconcepción momentánea. Para él algunas imágenes pueden ser misconcepciones, interpretaciones erradas de informaciones recibidas. Interesante sí la relación que hace con el currículo oculto del propio estudiante: aquellas reglas que él considera correctas porque generalmente le han funcionado, y para ello cita el ejemplo de las sustracciones en columnas (diferencia entre currículo enseñado y currículo aprendido).

Por tanto, el conflicto cognitivo es un conflicto interno, a causa de la no congruencia entre dos conceptos, o entre dos imágenes o entre una imagen y un concepto. Pero también dota de una connotación social al conflicto. Es social cuando no solo actúa sobre el plano interno del estudiante, sino que su significado no es compartido por el grupo de práctica social. Concluye D'Amore que la carrera escolar de un individuo en las matemáticas se construye por el paso o tránsito de misconcepciones a concepciones correctas, luego la misconcepción es una concepción momentánea no correcta, en espera de consolidarse cognitivamente más elaborada, ellas no pueden ser eliminadas, ni son un daño ni un error, parecen ser un momento necesario y delicado hacia el concepto correcto.

Para terminar esta mirada desde las visiones externas, desde la epistemología hacia la educación matemática en general y hacia el cálculo en particular, en el siguiente apartado se presenta un panorama general acerca de las prácticas vinculadas con el aprendizaje y la enseñanza del cálculo, en ese estado de transición de estado curricular, cognitiva, cronológica, de paso del álgebra al cálculo que configura lo que aquí se ha denominado "trabajo inicial en el cálculo diferencial".

2.5 Transición o ruptura del álgebra al cálculo: dificultades y tensiones disciplinares.

En esta transición del álgebra al cálculo TAC, es inevitable citar a Michelle Artigue (1995), quien reagrupa las dificultades que encuentran los estudiantes en la transición álgebra-cálculo en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, entre otros, objetos que están precisamente en construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de *límite*, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

En esta última categoría, lo radical del término "*ruptura*" se puede ejemplificar mediante el tratamiento que se da en el cálculo a las desigualdades e inecuaciones, a la alternancia de cuantificadores, a las aproximaciones, al simbolismo, al lenguaje, a los razonamientos y, en particular, a las demostraciones, todo lo cual rompe con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del cálculo escolar, por ejemplo, en los cursos de álgebra. Como Artigue (1995) afirma, generalmente se han atacado los problemas de incomprensión del cálculo con reformas e innovaciones al interior del cálculo mismo, sin estudiar todo ese proceso que le antecede, y propone centrarse allí, para emprender una investigación que se ubique en la Transición Algebra-Cálculo, postulando que no existe un paso natural del álgebra al cálculo, que no existe un desarrollo continuo y regular del conocimiento, sino que se da un desarrollo caótico: una ruptura, frente a la cual se debe emprender una investigación, que impacte en una comprensión de los conceptos del análisis.

Artigue enfatiza que, mientras la ruptura numérico/algebraico no sólo se ha identificado, sino que ha desencadenado numerosas investigaciones que aportan respecto a la comprensión del pensamiento numérico y algebraico, no ha sucedido algo similar con la ruptura álgebra/cálculo: no existe una multiplicidad de investigaciones sistemáticas ni posturas paradigmáticas sobre lo que distingue esos dos pensamientos, esas prácticas educativas, ni se sabe cómo tender el puente y alistar el camino para iniciar el trabajo en el cálculo diferencial y más importante aún tampoco se tiene conciencia sobre la importancia de estudiar esa transición, esas prácticas educativas del trabajo inicial del cálculo como otra manera de entender los problemas de comprensión de esta disciplina, ya sea en los cursos de educación secundaria, media o bachillerato (o como se llame en cada país), ya sea en los primeros semestres de la educación superior.

Artigue (1995) también resalta que el uso común de la palabra *límite* evoca las ideas de lo no traspasable, lo no alcanzable o de fin de un proceso. Señala también una segunda dificultad que tiene que ver con la doble naturaleza, estructural y operacional, que tiene el concepto de límite, y enfatiza la dificultad proveniente de la necesidad de disociar el objeto límite del proceso que permite construirlo, asociándolo con el obstáculo señalado por Sierpinska en relación con la consideración del infinito. La formalización de la noción de límite es otra dificultad, que consiste en mostrar que en ella se concibe un solo proceso, en tanto los estudiantes parecen ver dos, uno que se efectúa sobre la variable y otro sobre los valores de la función.

La reflexión acerca del paso, transición o ruptura del álgebra escolar al cálculo diferencial y de las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en dicha transición, en esas prácticas educativas iniciales, categorías todas cargadas semántica y teóricamente y que han generado diversas tendencias, constituye un punto crucial en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en la educación media y superior, punto central de esta investigación.

Dando respuesta a la pregunta: ¿qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿qué requiere para acceder al cálculo?, las posibles respuestas (Neira, 2000) involucran entidades como: funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, nociones que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación, los que además están en construcción precisamente en este estadio de desarrollo cognitivo y conceptual, cuando se inicia el trabajo en el cálculo.

Con respecto a las funciones, en álgebra se manejan muy dependientes de su representación gráfica o tabular, o de los procesos que las engendran, y en cálculo se deben trabajar como entes conceptuales sobre los cuales se van a aplicar nuevas nociones. El tema de funciones tiene su propio campo de estudio y es él mismo un núcleo de investigación en educación matemática; es, además, el eje central de toda la investigación sobre pensamiento variacional.

Vale la pena recordar aquí las dificultades que encuentran los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representación con sus representaciones semióticas (Duval, 1992, 1998) y reconocer en todas el mismo objeto matemático. Por ejemplo, usualmente no es reconocida como función por parte de los estudiantes, la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma "$y=4$", porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x o de función como variación; en cambio, si se presenta gráficamente por la asociación "recta = función", se presentan menos errores.

Aquí hay que destacar el doble estatus de los objetos matemáticos: el operacional (dinámico) y el estructural (estático). En la historia de los conceptos, el primer estatus precede al segundo, aunque luego se vuelve un proceso dialéctico, y las investigaciones realizadas muestran que en la comprensión individual sucede lo mismo. A ese salto cualitativo que se refiere al paso de una concepción en un estatus dinámico a un estatus estructural, se le ha denominado "encapsulación" o "reificación". Tall (1996) ha designado "proceptual" al carácter de las nociones matemáticas que representa a la vez los objetos y los procesos. Aquí se presenta un problema: esa flexibilidad es condición necesaria en la comprensión del cálculo, pero a la vez se evidencia la dificultad que hay para desarrollarla individualmente.

En cuanto a los números reales, surge el interrogante ¿será que los estudiantes tienen una clara distinción de los diferentes referentes numéricos? Algunas investigaciones (como la de Artigue, 1995) muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, por ejemplo, las expresiones para $\pi, \sqrt{2}$... Entonces, en ese estadio, se cuestiona por ejemplo si los números decimales son iguales a los números reales. También se han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de college o de primeros semestres de universidad en los Estados Unidos, como que entre 3.25 y 3.26 no hay ningún número, o que 3.138 es mayor que 3.4, o que $(3.4)^2$es igual a 9.16, situaciones que muestran la complejidad de estas simbolizaciones. No es difícil hacer un sondeo entre nuestros estudiantes para confirmar que adolecen de los mismos vacíos conceptuales respecto a estos referentes.

Según Artigue (1995) hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes respecto a los límites. Por ejemplo, la concepción de que el límite de la sucesión 0.9, 0.99, 0.999,… debe ser menor que 1; que 0.9, 0.99, 0.999,… no tiende a 1 pero tiene límite 1; que 0.999 es menor que 1, por más nueves que se le agreguen, siempre será estrictamente menor que 1; aceptan que nunca puede pasar de 1 (porque "tiende a tener" la propiedad de los números como 0.9999 que nunca pueden pasar del límite 1). Estas ideas se han catalogado como el principio de continuidad (Leibniz) que consiste en creer que cualquier propiedad común a todos los términos de una sucesión también la tiene el límite.

Para configurar las tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva en el álgebra escolar y el cálculo diferencial se plantean consideraciones de la escolaridad institucional. Curricularmente el modo en que ocurre la instrucción en la escolaridad institucional es dos cursos de algebra en 8º y 9º grados, respectivamente, y un curso de cálculo en grado 11,[7] es decir se presenta el álgebra como un dominio, unas prácticas, anteriores al cálculo, y no solo anteriores sino como prerrequisito para entrar a él posteriormente. En la universidad en primer semestre de ingeniería, por ejemplo, y en la mayoría de las carreras, el estudiante debe tomar un curso de cálculo diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de Fundamentos de matemática o matemáticas básicas, repaso del algebra y de las funciones, para suplir los vacíos que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de cálculo. Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que, en este primer acercamiento, paso o transición significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el álgebra y el cálculo escolar.

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en el medio, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en el medio, el infinito potencial).

7 Así es en nuestro país y guardando las proporciones la organización curricular es similar en la mayoría de países del mundo, por lo menos en cuanto al orden en los cursos de álgebra y el cálculo.

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece ser la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve, ante todo, por la ausencia de la composición; por el entendimiento del exponente menos uno (–1) como recíproco, no como inverso de la función; por el uso del apóstrofe para la derivada; por la manera de entender las igualdades que empiezan por "y =…" como funciones; por la yuxtaposición de letras –sin indicar multiplicación– en los nombres de las funciones (como "Inx"). La idea consistió en documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado los estudiantes nunca vieron una "o" pequeña entre dos términos algebraicos como $2x$ y x^2, pues no representaban dos funciones: la que duplica,d(_), y la que eleva al cuadrado,c(_), sino los números resultantes. En cálculo habría que escribir (c o d) (x) y (d o c) (x) que no es lo mismo. Los objetos del cálculo son, pues, muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreta (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en el medio hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q^+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con un conjunto o tipo de funciones muy limitado: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). Poco se trabaja con funciones constantes como funciones, se tratan más como constantes, la x se considera más como incógnita, como variable o indeterminada, pero no generalmente como función (representa la función idéntica en los reales).

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

En el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura $a(x) = b(x)$ en una sucesión de escrituras:

$$\begin{aligned} a_1(x) &= b_1(x) \\ a_2(x) &= b_2(x) \\ &\cdots \\ a_i(x) &= b_i(x) \end{aligned}$$

Hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que, en el cálculo, se hace un encaje con la proposición.

$$\forall \varepsilon > 0, |a - b\,| < \varepsilon,\ \exists\, \delta > 0, tal\ que\ si\ \delta > 0,\ 0 < |a - x| < \delta.$$

Lo cual ha de llevar a comprender que, para demostrar que en la vecindad de un punto a,

$f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.

En efecto, al iniciar los cursos de cálculo, se debe concebir la *función* como un objeto, como una entidad sujeta a las operaciones que otros procedimientos efectúen sobre ella, cuando lo que se concebía en cursos de álgebra, por ejemplo, era una noción de función presentada como un procedimiento aplicado a ciertos objetos llamados números; ahora ese mismo concepto, el de función, deviene en objeto al ser operado bajo otros procesos como el límite, la diferenciación o la integración, y se convierte en un sujeto sobre el cual se predican propiedades como la existencia de límite, la continuidad, la diferenciabilidad o la integrabilidad. No en vano ha sido nominado como el concepto fundamental de la llamada matemática moderna. (Tall, 1992, p. 11) El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los principales rasgos que caracterizan al pensamiento variacional. Pero para que los alumnos logren un acercamiento a esta forma de pensamiento es necesario que superen la idea de función como correspondencia entre dos valores, y que comiencen a visualizar una situación cambiante.

La noción de tangente proporciona un caso prototípico de la reconstrucción que los estudiantes están obligados a hacer para entrar al mundo del cálculo (Vasco, 1995). La tangente (de un círculo, por ejemplo) es un objeto geométrico que posee propiedades específicas:

1. No corta al círculo.

2. Lo toca solo en un punto.

3. Y en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso, si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común. Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo, parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas.

Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Para complementar este panorama, se enuncian a continuación, algunas consideraciones sobre el álgebra escolar, el cálculo diferencial y el caso del límite, abordando como tema central si el álgebra de octavo y noveno grados es solo aritmética genérica o generalizada sin pretensiones adicionales, o si las tiene, qué es lo que pretende. Creemos que es lo primero. Precisamente cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, todavía los términos reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico. Aquí pueden ser útiles las ideas de Ed Dubinsky en su Teoría APOE (*"APOS Theory"*).

Se consideran el álgebra y el cálculo como dos sistemas conceptuales diferentes, con registros semióticos para diferentes sistemas: diferente semántica, sintaxis casi igual. Como se señaló arriba, una diferencia en la sintaxis del cálculo (pero no del álgebra) es el uso del símbolo "redondeado" usado para designar la función compuesta. Una diferencia en la semántica es la interpretación de la *x* como función idéntica, que ciertamente no es del álgebra, dominio simbólico escolar que sirve para representar regularidades que se repiten en patrones y que se asocia con el pensamiento variacional, categorizado para sistemas algebraicos y analíticos. En el cálculo los tópicos más importantes que se suelen estudiar son el de razón o tasa de cambio, los límites, las derivadas, la continuidad, las integrales, nociones que giran alrededor del concepto de límite.

Para caracterizar lo que llamamos *"el caso del límite"*, es necesario citar la aproximación geométrica que tradicionalmente se presenta. *"La tangente es el límite de la secante (o de las secantes)"*, se dice en el tratamiento tradicional. Hay que plantear el límite de la secante como la tangente, pues eso se hace en los cursos: se traslada el problema al terreno geométrico, pero ese es otro tipo de límite, que no tiene ε ni δ; es bueno para mostrar que el profesor está usando una noción de límite que no es la que se define con ε ni δ, y también para llamar la atención sobre otro punto poco explicitado: el profesor utiliza la palabra *tangente* en dos sentidos: uno, con el significado del final de décimo grado, cuando se habla de las funciones trigonométricas, y otro, en el sentido de la primera parte del décimo grado, cuando se habla de la tangente a las gráficas; luego, ahí el que está poniendo un obstáculo didáctico es el profesor. Está tendiendo una trampa que distingue dos usos que el enunciador sabe que son diferentes, pero el estudiante no. El profesor debería decir: *"la tangente del ángulo que forma la recta tangente con el eje horizontal"*. El concepto de pendiente como inclinación puede medirse por el ángulo, por el seno del ángulo o por la tangente del ángulo, y esto es más coherente que tratar de definirla como razón de dos variaciones $\frac{\Delta y}{\Delta x}$¿Dónde está la tangente?

En las expresiones simbólicas que involucran el símbolo de infinito, como:

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

Suele haber una inconsciencia en los estudiantes, pero también en el profesor, quien usa igual sintaxis y vocabulario cuando dice que *"la x que tiende* *a infinito es una variable y la otra x es una función"*. Precisamente ahí hay un ejemplo de ese paso del álgebra al cálculo: en el álgebra, la *x* representa variables en el sentido de incógnitas para averiguar, o de números genéricos, pero en el cálculo representa la función idéntica.

Desde este marco conceptual, así como la longitud de la circunferencia, el área del círculo y otros problemas de cuadratura involucran ya el concepto de límite en el sentido que se quisiera lo manejara el estudiante de cálculo. Lo mismo puede decirse respecto a los decimales infinitos: ¿será que 0,9 periódico es igual a 1 o diferente de 1? Ahí está presente el concepto de límite como nosotros lo vamos a entender en el marco teórico: sin absolutamente ninguna preparación sobre sucesiones, series, límites y desigualdades, sin construcción de los números reales ni conciencia de su completitud, etc.

En Euclides ya se habla de límite y hay una diferencia entre segmento finito, semirrecta y recta indefinidamente larga. Para los profesores de educación media y de universidad, "cálculo" es lo que aparece en los textos sobre cálculo. La conceptualización básica involucra el estudio de los límites, las derivadas, las integrales… y el caso del límite lo conforman todas aquellas situaciones que requieren aproximaciones y vecindades; el mismo profesor en su lenguaje utiliza expresiones como *"acercarse más y más"*, *"acercarse tanto como se quiera"*, *"tender hacia"*, *"infinitamente cercanas"*, que involucran entidades como lo infinito y lo infinitesimal. Esquematizando, tenemos:

Tabla 1. Tratamientos del álgebra, del cálculo y de otras áreas relacionadas

Álgebra	Cálculo	Geometría Analítica	Análisis
Como tratamientos en un registro simbólico para la aritmética generalizada	Como tratamientos en un registro simbólico para el análisis	Como conversiones entre dos registros simbólicos de ecuaciones y gráficas	Como sistema conceptual cuyos elementos son las funciones reales de valor real

Hay tres operadores sobre funciones que son los que caracterizan el trabajo analítico que se suele hacer en el cálculo: el límite (L), la derivada (D) y la integral ($\int$).

El siguiente cuadro muestra en la primera columna cada operador analítico por sí solo y el mismo aplicado a su argumento (que es una función reificada como objeto, como aparece en la segunda columna); en la tercera columna, el valor de esa función cuando se aplica a su propio argumento genérico (que es un número real); luego el argumento aparte (que es un número real todavía no determinado) y un caso particular de un número real.

Tabla 2. Operadores Analíticos

Operador		Argumento del op.	Valor	Argumento	Caso particular
L	L(f)	f	f(x)	x	*1*
D	D(g)	g	g(y)	y	*2/7*
∫	∫(h)	h	h(z)	z	*Π*

Tres elementos fundamentales: "Procepts, reification, APOS theory"

Tall y Vinner (1981, citados por Vasco, 2009[8]) y Fischbein[9] propusieron dos tipos de nociones intermedias entre las nociones vagas y los conceptos científicos (en inglés los llamaron *"concept image"* y *"procept"*).

"*Concept image*" (*"imagen conceptual"*). Para comparar el concepto con la imagen conceptual, Vasco (2009) propone pensar como ejemplo en el concepto de curva en geometría diferencial; el concepto matemático de curva difícilmente puede separarse de la imagen conceptual de una línea curva, aunque dicho concepto se refiere a una función que proyecta un intervalo de R en un espacio de dos o más dimensiones, no a la imagen del intervalo bajo la función, que es la que mantenemos indisociablemente ligada a la curva. La imagen conceptual es un conglomerado de todas las estructuras, imágenes, procedimientos y relaciones asociadas con el concepto, y muchas de sus regiones pueden estar muy alejadas y aún contradecir la definición formal del concepto ya institucionalizada.

La palabra inglesa *"procept"* se podría traducir directamente por "procepto", en el sentido de concepto procedimental, pues se relaciona más con los procesos, procedimientos o algoritmos que con los objetos o las relaciones, pero oscila de uno a otro. Por ejemplo, el estudiante de primaria y secundaria suele rechazar la distinción entre *adición* y *suma*, pues no conceptualiza propiamente la operación binaria de adición, sino que la confunde con la

8 Documento de trabajo en Seminario de investigación del DIE-UD. Bogotá, 2009

9 Los autores se remiten a una idea de Fischbein, Tirosh y Hess de 1979 sobre las intuiciones del infinito y a la ponencia "Concept image, concept definition and the notion of function"de Vinner de 1980 en el PME IV.

manera como hace las sumas, sin distinguir la operación del resultado, ni éstos del algoritmo que aprendió (por ejemplo, el algoritmo usual para sumar varios numerales decimales dispuestos en columna). En símbolos, $a+b$ puede significar sumar a con b , o el resultado de ese proceso.

Otro ejemplo es el del concepto de igualdad. Cualquier estudiante, siendo aún "exitoso", puede pasarse todo el bachillerato sin configurar el concepto de igualdad como relación de equivalencia entre expresiones simbólicas que se refieren al mismo objeto y que permite la sustitución de la una por la otra. Le basta el procepto de igualdad, que condensa el proceso de obtener un resultado y la relación estática de igualdad. Este procepto le permite leer el símbolo "=" como "da", aunque se pierda la propiedad simétrica. Va a creer, por ejemplo, que la ecuación "$0 = x2 - 1$" está "mal escrita". Pero la idea de Tall es que esa oscilación o confusión entre proceso y concepto no es rechazable, más aún, es una ambigüedad muy conveniente en el pensamiento de orden superior y los expertos también la utilizan sin darse cuenta de que a veces se refieren al proceso y a veces al producto conceptual de ese proceso.

Las palabras *reificación o cosificación*, según Vasco (2009), son dos traducciones del inglés *reification*, que se extendió en la educación matemática con los primeros trabajos de Anna Sfard (1991). En latín, *"res"* significa "cosa", y "hacer de algo –que no es cosa– una cosa", se puede decir *cosificación* o *reificación*.

La noción inicial de cosificación o reificación es la de formar mentalmente un objeto de lo que era un proceso, una acción, una operación o una relación. Por eso se encuentra a veces la palabra *objetivación*. Como toda palabra terminada en "*-ción*", *cosificación*, *reificación* u *objetivación* a veces se refiere a la operación mental y a veces al resultado de esa operación.

Vasco (2009) enumera algunas pistas sobre la ocurrencia de la reificación de un nuevo producto mental:

- Separarlo de y contrastarlo con otras cosas, objetos, elementos o componentes.
- Operar sobre el nuevo producto.
- Nombrarlo con un sintagma nominal.
- Atribuirle predicados unarios o monádicos.
- Relacionarlo con otros y atribuirles predicados binarios, ternarios, etc.

La propuesta inicial de Anna Sfard (1991) era que el progreso en la conceptualización matemática con frecuencia consistía en cambiar de una manera de concebir un proceso o procedimiento como algo activo, que ocurre en el tiempo, a una consolidación y detención de este como un nuevo objeto o cosa sobre la cual se empieza a actuar. Para el caso del análisis, se podría pensar en que el estudiante toma las expresiones del álgebra de bachillerato solo como instrucciones para calcular un resultado; por ejemplo, entendería el término *"$x^2 - 1$"* como *"eleve el número al cuadrado y quítele uno"*. Es una comprensión limitada, porque no permite pasar a la función respectiva, pero es correcta. Por eso puede tener éxito en aprobar dos años de álgebra sin construir el concepto de función, pues ese concepto requiere una reificación del procedimiento de calcular el resultado. Si no se reifican las funciones como objetos, no puede construirse un sistema analítico en el que los elementos u objetos sean las funciones reales de valor real. Aquí podría estar la diferencia entre el álgebra de bachillerato y el análisis real.

En este caso, Vasco (2009) plantea que la reificación es muy cercana al paso del procepto de Tall, Vinner y Fischbein al concepto respectivo. Así lo ha utilizado Ed Dubinsky en experimentos de enseñanza de la teoría de grupos. Pero no es el único caso. Por ejemplo, las relaciones simbolizadas por los signos "<" y ">", que los estudiantes generalmente leen *menor* y *mayor* cuando la lectura es izquierda a derecha, suelen quedarse en una comparación entre dos números y no pasan a configurar un sistema de relaciones con sus propiedades, su composición, su inversión, etc., pues esas relaciones no han sido reificadas, cosificadas u objetivadas. No se puede trabajar con un sistema cuyos elementos sean las relaciones si los estudiantes no las reifican, es decir, si no las vuelven cosas u objetos mentales.

Aquí también puede haber una barrera para el paso al análisis desde el álgebra de bachillerato y el estudio de precálculo y cálculo con funciones como instrucciones o como relaciones, sin reificarlas.

2.6 Nociones relacionadas con la ruptura epistemológica.

De otro lado, y continuando con consideraciones de tipo epistemológico acerca de dos constructos importantes planteados aquí –obstáculo y ruptura epistemológica–,[10] Vasco (1991) analiza los conceptos de revolución científica, ruptura epistemológica y otros relacionados con ellos, tomados de la historia y de la epistemología de la física, para estudiar su aplicabilidad a la constitución de las disciplinas matemáticas. Discute y concluye las siguientes tres tesis:

- En cada una de las disciplinas matemáticas la ruptura epistemológica, si tiene sentido identificarla con la conformación de la respectiva disciplina, se da una sola vez.
- En cada una de las disciplinas matemáticas una vez conformada no se dan propiamente revoluciones científicas en el sentido de Kuhn, sino solo refundiciones de esas disciplinas.
- Los intentos de unificación de las disciplinas matemáticas en una sola ciencia llamada "la Matemática" –en singular y con mayúscula– no solo no son ni revoluciones ni rupturas epistemológicas, sino que puede decirse que han fracasado, y que las matemáticas, con o sin mayúscula, continúan, y previsiblemente continuarán siendo plurales.

Fichant y Pécheux (1969/1975) definen *ruptura epistemológica* como el origen o comienzo de una ciencia, en el momento que Kuhn llamó *"revolución científica"*. Estos autores consideran la ruptura constitutiva de esa ciencia, que deviene en un nuevo paradigma. Podría plantearse que las revoluciones científicas constituyen un acercamiento más sociológico que epistemológico al problema de los cambios científicos. El término *ruptura epistemológica* marca, en cambio, el punto de no retorno a partir del cual comienza una nueva ciencia; en particular es todo el hecho epistemológico que sucedió con la constitución de la física científica desde Copérnico hasta Newton.[11] Pero una vez constituida la nueva ciencia o disciplina después de la ruptura, quedan aún muchas regiones del campo teórico abierto por esa ruptura, en las cuales se mantiene un agregado de proposiciones teóricas que pretenden ser científicas, a pesar de estar formuladas todavía con lenguaje ambiguo. El trabajo de elaboración de los nuevos conceptos, las propuestas de respuestas

10 La *ruptura epistemológica* es un concepto introducido por el filósofo y poeta Gastón Bachelard (27 de junio de 1884, Bar-sur-Aube – 16 de octubre de 1962, París) en Filosofía de las Ciencias (posteriormente desarrollado en el ámbito de la sociología en 1975), a raíz de un ensayo publicado en Francia por Pierre Bourdieu, Chamboredon y Passeron, titulado *El oficio de sociólogo*.

11 Expresión atribuida a F. Regnault que usan Fichant y Pécheux para describir la ruptura epistemológica, en un curso en 1967-1968 en París, según aparece en la advertencia inicial de Oscar Landi al libro de Fichant y Pécheux (1969/1975, pp. 7-8; ver definición I, p. 9, y la nota 6 de la p. 12).

a las nuevas preguntas y la búsqueda de coherencia conceptual llevan a periódicas revisiones de esas subregiones que constituirían las *refundiciones* o cortes intracientíficos, terminología que se atribuye también a Regnault (Fichant y Pécheux, 1969/1975, p. 12, definición III y nota 6).

En este sentido, no se podría afirmar propiamente que, al pasar del álgebra al cálculo en la organización curricular y cognitiva, lo que se da sea una ruptura epistemológica en el sentido aquí planteado, pero sí se afirma como posición inicial, que hay una ruptura en cuanto a prácticas, simbolismo, lenguaje, modos de demostración y argumentación, respecto a lo que habitualmente se hace en los cursos de álgebra y lo que se empieza a trabajar en el cálculo.

2.7 Algunas consideraciones sobre límite y derivada.

El concepto de límite es uno de los más complejos de las matemáticas que se enseñan en los cursos de las carreras universitarias. Son de esperarse los tropiezos de los estudiantes, dadas las complicaciones que Newton y Leibniz no lograron sobrepasar, como lo muestra Neira (1998). Uno y otro procedían intuitivamente, del mismo modo habría que proceder inicialmente en los cursos de cálculo, en lo que se emplean expresiones como “tender a”, “acercarse”, y otras por el estilo que deberían desaparecer progresivamente del lenguaje del estudiante cuando este haya madurado bien el manejo del proceso.

Históricamente, el retiro de tales expresiones ha sido forzado por la mejor comprensión del proceso. Cauchy respecto de Newton, por ejemplo, o Weierstrass respecto de Newton y Cauchy; ciertamente el curso de cálculo no es un curso de historia, pero el profesor que conoce el concepto genéticamente está más preparado para el desarrollo de sus estudiantes en dicho aprendizaje, que el profesor que basa su enseñanza en el conocimiento refinado del cálculo y reduce su enseñanza al esquema: definición, teorema, demostración.

Transcribo a continuación, algunos de los problemas del cálculo diferencial tratados por Newton, tomados de sus manuscritos originales de Methods of Series and Fluxions tal como aparece en Neira (1998) en el que procede mediante problemas que clasifica en dos fundamentales, que actualmente equivalen a hallar la derivada y hallar la primitiva de una función dada.

> Considero el tiempo como fluyendo o creciendo mediante flujo continuo y a otras cantidades como creciendo continuamente con el tiempo y de acuerdo con la fluxión del tiempo, llamo fluxiones a las velocidades con las cuales se incrementan todas las otras cantidades. También de acuerdo con los momentos de tiempo doy el nombre de momentos a las partes de cualesquiera otras cantidades generadas en momentos de tiempo…

Es decir, las fluentes o cantidades fluentes son cantidades que varían con respecto al tiempo, dicho de otra manera, a las cantidades que fluyen se les llama fluentes por oposición a las cantidades constantes. Llama fluxión a la velocidad de cambio con respecto al tiempo de las cantidades fluentes. La forma en que las fluentes varían con el tiempo es arbitraria, Newton usualmente hace la hipótesis de que una de las variables, por ejemplo x se mueve uniformemente, es decir, que $\dot{x}=1$ y lo que es importante no son las fluxiones en sí, sino sus razones.

Por otro lado, según Neira (1998) tres ideas fundamentales guiaron a Leibniz en su creación del cálculo diferencial; la primera era una idea filosófica, trataba de la construcción de una "Characteristica generalis", es decir, un lenguaje simbólico mediante el cual se pudieran escribir todos los procesos de argumentación y razonamiento, idea que explica su gran interés por las cuestiones de simbolismo y notación en matemáticas. La segunda idea a pesar de lo imprecisa que era hacia 1673, sugería ya un cálculo infinitesimal de sumas y diferencias de ordenadas mediante el cual podían ser determinadas cuadraturas y tangentes y en el que estas determinaciones aparecían como procesos inversos. La tercera idea principal fue la relativa al uso del "triángulo característico" en las trasformaciones de cuadraturas.

Resumiendo, los principales conceptos en la obra de Leibniz: la diferencial de una variable y es la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y; dy es la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, mientas que dx es la diferencia infinitamente pequeña entre dos abscisas x sucesivas, que en este caso es igual a la distancia infinitamente pequeña entre dos sucesivas.

Cuando Leibniz presentó su cálculo recibió muchas objeciones acerca esa noción de cantidades infinitamente pequeñas por lo cual decide cambiar el concepto de diferencial y en su primera publicación del cálculo "*Un nuevo método para hallar* máximos y mínimos, así como tangentes" introduce un segmento finito llamado dx.

En cuanto al significado de los infinitesimales (una cantidad que no es 0, pero es que más pequeña que todo número real positivo) Leibniz, reconoció que la existencia o no existencia de estos no es obstáculo para abreviar y hablar universalmente, los llamo "ficciones útiles" y era un poco precavido acerca de la existencia real de ellos. En cuanto a Newton, afirma "por ultima razón de cantidades evanescentes (es decir, las que se aproximan a 0) se debe entender la razón de las cantidades, no antes ni después que ellas de desvanecen, sino con la cual ellas se desvanecen"; utiliza los indivisibles o infinitesimales como un simple simbolismo o sistema conveniente para sus pruebas matemáticas.

Desde la invención paralela de las derivadas y las integrales por Newton y por Leibniz (sin precisar los aportes de Barrow), ya comenzaron dos enfoques muy diferentes del Cálculo infinitesimal, el enfoque de Newton y el de Leibniz. Desde la perspectiva actual, el enfoque de Newton parece más "analítico", en el sentido de incluir los cambios en los valores de las variables como dependientes del tiempo, con la notación del punto sobre la x como símbolo de la fluxión de un fluyente en el tiempo (hoy diríamos "de los flujos como funciones del tiempo", pero "función" es una terminología posterior). En cambio, el enfoque de Leibniz parece ser más geométrico, pues se preocupa por calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a las gráficas y las áreas bajo las gráficas.

2.7.1 Configuraciones epistémicas sobre derivada.

La noción de configuración epistémica (CE) permite encontrar un análisis más detallado y completo sobre los significados parciales de la derivada. Para determinar este significado de la derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2013) hicieron una revisión histórico-documental desde la matemática griega hasta el siglo XX, en la cual identificaron nueve configuraciones epistémicas asociadas a los distintos problemas:

1. Trazado de tangentes en la matemática griega.
2. Problemas sobre variación en la edad media.
3. Cálculo de sub tangentes y tangentes con el álgebra.
4. Trazado de tangentes mediante consideraciones cinemáticas.

5. Cálculo de máximos y mínimos mediante la idea intuitiva de límite.
6. Cálculo de tangentes y subtangentes mediante métodos infinitesimales.
7. Cálculo de fluxiones.
8. Cálculo de diferencias.
9. Derivada como límite.

Las configuraciones anteriormente enunciadas, son un recuento de algunos conceptos por los cuales se tuvo que pasar para poder llegar a definir la derivada como un límite. Las configuraciones epistémicas se componen de los objetos matemáticos primarios y sus relaciones, que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en distintos contextos de uso.

La configuración epistémica más global es la de la derivada como un límite. Así mismo los textos guías propuestos y analizados consideran como conocimientos previos a la introducción de la derivada: funciones, continuidad y la noción de límite. Adicionalmente se pudo observar, independientemente del contexto de uso de la derivada, siempre aludían a un mismo significado: la derivada como límite del cociente de incrementos.

2.8 Una aproximación a las nociones de dificultad, conflicto y obstáculo.

Las investigaciones sobre los errores, dificultades y conflictos en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utiliza indistintamente dificultad y obstáculo. En todo caso, los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de obstáculos y dejan en un segundo plano las limitaciones en los aprendizajes debidos a significados personales poco representativos de los significados institucionales de referencia.

En el EOS se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado. Los objetos matemáticos personales, según Godino y Batanero (1994, p. 335), son: "emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas". Estos objetos personales van cobrando forma –van emergiendo en un aprendizaje suscitado por la propia práctica-, así que un objeto personal implica la generación de una regla de comportamiento en el sujeto.

Dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona, dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. El significado de un objeto personal queda entonces ligado a otros objetos personales y significados, puesto que en las prácticas intervienen diversos objetos personales. Aquí también se logra entrever el carácter tríadico de la semiótica de Peirce en cuanto a la terceridad que se recrea en un ciclo de signos permanente, y también podría verse aquí el primer supuesto de los obstáculos epistemológicos, que de un nivel de conocimiento y comprensión a otro, hay una necesidad de integración y reorganización. La cognición no es un proceso solo acumulativo.

Con relación a los objetos matemáticos institucionales, se pueden considerar como entes que emergen progresivamente de sistemas de prácticas socialmente compartidas en una institución, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. Emergencia ésta que es progresiva a lo largo del tiempo. Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. (Godino y Batanero, 1994, p. 340)

Para el EOS, el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, la relación entre los significados de los objetos personales y los institucionales hay que pensarla básicamente en términos de "ajuste". Esta parte es clave y acerca al EOS con la Teoría Cultural de la Objetivación TCO de Radford, sin perder de vista los objetos personales y los demás aspectos cognitivos. Se pretende que el significado de los objetos personales se ajuste lo más posible al significado de los objetos institucionales. Esta relación de ajuste es la que subyace y posibilita "la evaluación de los conocimientos de los alumnos, y es la que me parece potente, coherente y práctica para estudiar tales obstáculos o conflictos semiótico de cualquiera de los órdenes enunciados, relación de ajuste que la veo mediada y medida por la normatividad. Esta parte de la teoría dota de metodologías y marcos teóricos aterrizados y prácticos a las investigaciones; es decir, se vuelve tangible lo que se va a medir en términos de los significados.

En el EOS se define conflictos semióticos como: "Cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa"; considera que cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje. De acuerdo con Font (2000a) y Godino, Batanero y Font (2003, p. 73-74):

- Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar.

- El término dificultad indicará el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. Si el porcentaje de respuestas incorrectas (índice de dificultad) es elevado se dice que la dificultad es alta, mientras que, si dicho porcentaje es bajo, la dificultad es baja.

- A veces el error no se produce por una falta de conocimiento, sino porque el alumno usa un conocimiento que es válido en algunas circunstancias, pero no en otras en las cuales se aplica indebidamente.

- Si un tipo de error se manifiesta en un cierto número de alumnos de manera persistente en una tarea, su origen se debe buscar en los conocimientos requeridos por la tarea, y no tanto en los propios alumnos. La complejidad semiótica asociada a la práctica matemática es una posible causa de las dificultades de aprendizaje. El análisis de la trama de funciones semióticas asociada al contenido matemático permite prever su grado de dificultad potencial e identificar las variables a tener en cuenta para facilitar su enseñanza.

- Cuando el error se produce porque el alumno usa un conocimiento, que es válido en algunas circunstancias, en contextos donde no se puede aplicar decimos que existe un obstáculo. La superación del obstáculo requiere que el alumno construya un significado personal del objeto en cuestión suficientemente rico, de manera que la práctica que es adecuada en un cierto contexto no se use en otro en el que no es válida. Para ello será necesario, además, que los significados pretendidos e implementados sean suficientemente representativos de los significados de referencia.

Los errores, dificultades y conflictos que tienen su origen en la complejidad semiótica o bien en la falta de representatividad de los significados pretendidos e implementados, en el EOS se llaman conflictos semióticos y conflictos epistémicos. Esta parte de la teoría del EOS es la que tiende un puente, posibilita un tránsito entre lo planteado por Brousseau en la escuela didáctica francesa clásica de corte básicamente cognitivo y, nuevos enfoques más dinámicos y fluidos, que la permean de cultura y socialización en la interacción humana.

La noción de conflicto semiótico y sus tipos puede ser más flexible al aplicarse en situaciones menos exigentes que la de obstáculo (según la concibe Brousseau), y además aporta una posible explicación: disparidad de significados. Según Godino en "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática" (Seminario Doctorado I y II-2007), esta noción se puede interpretar en términos de "conflictos de significados". Siempre que podemos decir que hay un obstáculo, existe un conflicto de significados, pero no necesariamente aparece como un conflicto semiótico percibido por el profesor o el estudiante mismo. Esta relación no se da a la inversa, o sea no todo conflicto semiótico se genera por un obstáculo, en el sentido de Brousseau. Por tanto, la noción de conflicto semiótico puede ser una herramienta más flexible que la de obstáculo, pero no pueden confundirse. Los obstáculos epistemológicos más profundos no producen ningún conflicto en el estudiante ni en sus interacciones con los profesores y compañeros.

Los análisis a priori permiten formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido. Por su parte, los análisis a posteriori permiten determinar los conflictos semióticos realmente producidos y contrastarlos con los detectados a priori. En el EOS, los conflictos semióticos se consideran como explicaciones de las dificultades y los significados pretendidos.

2.9 Una aproximación propia a una conceptualización de los obstáculos.

De este panorama posible: obstáculo epistemológico, concepciones, obstáculos culturales, obstáculos didácticos, conflictos semióticos, epistémicos, cognitivos e interaccionales, misconcepciones, podemos ver que, reconociendo sus diferencias sustanciales, han existido en la literatura distintos modos de enunciar esas dificultades, errores, caídas, tropiezos que los maestros detectamos en los estudiantes en las aulas de clase, en todos los niveles de escolaridad, en toda clase de instituciones y de diferentes maneras; sin embargo, como el lector encontrará documentado en este libro, algunas de esas dificultades, caídas, tropiezos pasan desapercibidas para maestros y estudiantes sin generar conflicto alguno, y se ha focalizado el interés de los investigadores por indagar lo que subyace a tales dificultades con el afán de proponer categorías de análisis para explicarlas potencialmente.

Se conceptualizó obstáculo como un conocimiento y no como una ausencia de conocimiento; como un conocimiento y no como un error; un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce "errores". Un inconveniente concreto que se presente en algún tema y que se revele en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o a que los que se tienen dificultan el trabajo. A diferencia del que falta, el conocimiento que sí está pero que provoca dificultades y conflictos, dudas y errores, es síntoma de la existencia de conocimientos previos –presentes o ausentes– que entorpecen y dificultan el aprendizaje. Una dificultad concreta que se presenta en un tema y que se revela en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o puede deberse a que los conocimientos que sí se tienen dificultan el trabajo.

Esta misma diferencia se plantea en el tipo de errores detectados: accidentales, ocasionales, *lapsus* y errores sistemáticos, que se deben a algo… ¿a qué se deben? En la conceptualización de obstáculos planteamos como supuesto una contraposición entre el conocimiento ausente (ignorancias) y el presente, pero dificultante que son los obstáculos. Esta es una variable importante para precisar lo que son los obstáculos: que son conocimiento, y no falta de él.

Los errores, en el marco teórico de esta investigación, se consideran como los síntomas de los obstáculos; como las manifestaciones visibles de las dificultades que emergen en las prácticas educativas; y los obstáculos como la posible causa atribuida a esos errores; los obstáculos se convierten en la etiología que explica, epistemológicamente hablando, tal o cual error.

Se reconoce creatividad en los errores que cometen los estudiantes y se explican como comprensiones divergentes de las preguntas formuladas. Se trata de no cargar la palabra semánticamente con la tradición que la asocia al enjuiciamiento peyorativo y calificativo hacia los estudiantes. Los errores –concebidos de esa manera– se convierten en la fuente de indagación más importante, pues los obstáculos pueden inferirse de los errores en las prácticas y de la dificultad experimentada por los que participan en ellas.

En síntesis, concebimos obstáculo como un constructo del que suponemos o inferimos su presencia como fuente de los errores sistemáticos y de las dificultades experimentadas por los estudiantes, de manera general, en las prácticas educativas. Es una atribución de causalidad a las dificultades manifiestas por los estudiantes en las PEUC. Vino entonces la caracterización para precisar su naturaleza, sea que genere o no algún tipo de conflicto.

Para entender las reservas sobre el calificativo “epistemológico” que encontramos en Radford, llamémoslo obstáculo cognitivo o didáctico, pues se debe a un conocimiento presente en el estudiante en un proceso cognitivo de aprendizaje, sin decidir todavía si es solo de orden cognitivo individual en el EOS, o también es de orden epistémico de la comunidad académica de referencia, o si es generado por la didáctica presente en las prácticas.

2.10 Análisis didáctico del EOS y categorías descriptivas.

2.10.1 *Configuración didáctica.*

El EOS (Godino, 2016) define la noción de *configuración didáctica* como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin de una tarea, que incluye las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. Distinguen tres tipos de configuraciones:

- *Configuración epistémica:* (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea).
- C*onfiguración instruccional* (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes).
- C*onfiguración cognitiva – afectiva:* (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan).

2.11 Análisis de facetas de idoneidad didáctica.

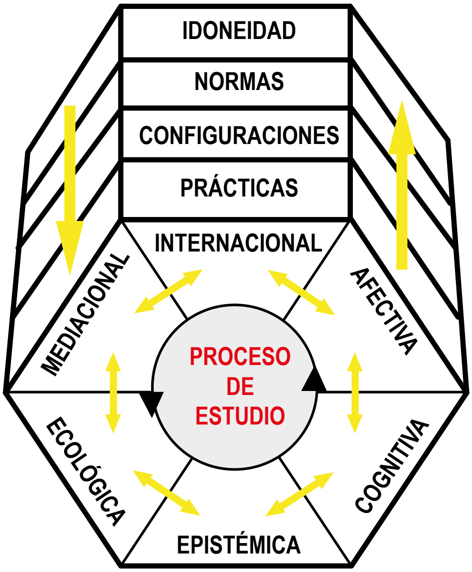

Figura 1. Facetas y niveles de análisis didáctico

La noción de idoneidad didáctica, sus dimensiones y criterios según Batanero (2013) fueron introducidas en trabajos previos (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, 2011) como herramienta de paso de una didáctica descriptiva – explicativa a una didáctica normativa, esto es, orientada hacia la intervención efectiva en el aula. Ésta se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero y Font, 2007):

- Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva: expresa el grado en que los significados pretendidos/ implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/ implementados.
- Idoneidad interaccional: un proceso de enseñanza-aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y

trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori), y por otra parte permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción.

- Idoneidad mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza aprendizaje.

- Idoneidad afectiva: grado de implicación (interés, motivación,) del alumnado en el proceso de estudio. La idoneidad afectiva está relacionada tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

- Idoneidad ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

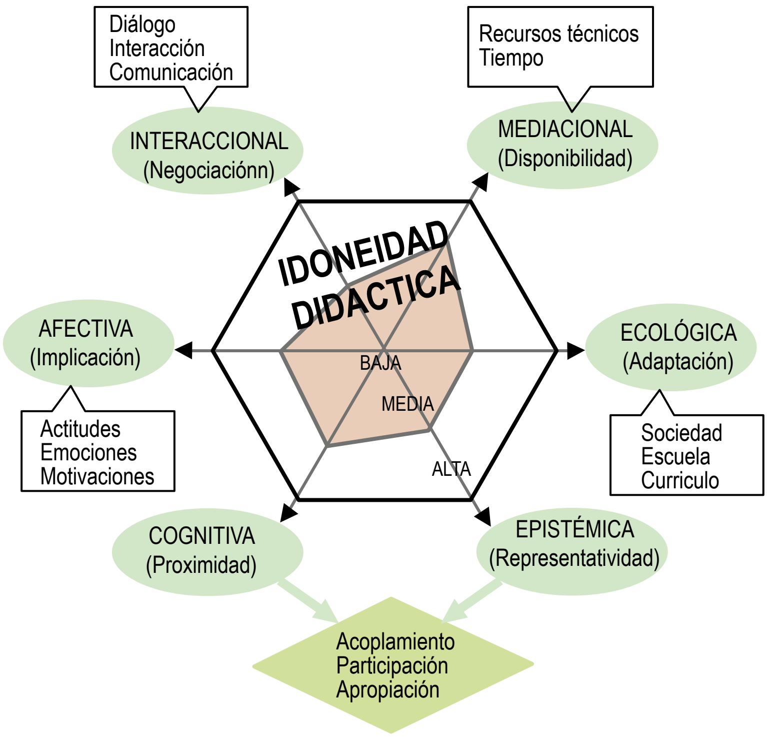

Figura 2. Idoneidad didáctica

Representan mediante un hexágono regular la idoneidad correspondiente a un proceso de estudio El hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado, y sitúan en la base las idoneidades epistémica y cognitiva al considerar que el proceso de estudio gira alrededor del desarrollo de unos conocimientos específicos.

Niveles de análisis

Primer nivel: configuraciones de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas

Se mira el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos dos lenguajes son parte de conceptos, preposiciones y procedimientos que están en la elaboración de argumentos para decidir las acciones simples; en conclusión, cuando alguien tiende hacer una práctica matemática activa situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos que están presentes en un lenguaje matemático.

Además, aparecen estas tipologías que se basan en el lenguaje matemático que son:

- Elementos lingüísticos: están términos, expresiones, notaciones y gráficos; también están de forma escrita, oral y gestual.
- Situaciones-problemas: se encuentran las aplicaciones matemáticas, tareas y ejercicios.
- Proposiciones: son enunciados que se encuentran según el concepto.
- Procedimientos: son los algoritmos, operaciones y técnicas de cálculo.
- Argumentos: se articulan con las preposiciones y procedimientos para validar una explicación sobre un tema en específico.
- Conceptos: definición (introducido mediante definiciones o descripciones).

Las situaciones-problemas son el origen de las actividades; el lenguaje sirve para representar las ideas y sirve de instrumento para la acción y los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos.

Segundo nivel: atributos contextuales

Según Godino (2002) los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas según el juego del lenguaje en que participan, pueden considerarse en las siguientes facetas duales:

- Personal/institucional.
- Ostensivo/no ostensivo.
- Expresión/contenido.
- Extensivo/intensivo (ejemplar-tipo).
- Unitario/sistemático.

Por otro lado, la herramienta configuración ontosemiótica incorpora nociones de concepto, concepción, esquema, praxeología matemática y registro de representación semiótica. Para el EOS un objeto abstracto es entendido como una entidad: Inmaterial (no ostensiva), General (intensiva); que a su vez se puede considerar de manera: Unitaria (como regla) o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos), Personal (mental) o institucional (sociocultural) y Antecedente (significante) o consecuente (significado) en una relación semiótica.

La articulación de estos elementos se aprecia en la siguiente figura tomada de Godino (2016), y se amplían en el capítulo 4:

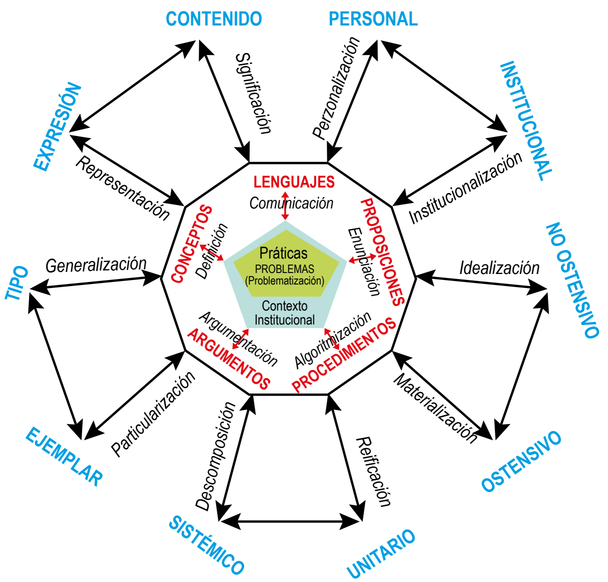

Figura 3. Configuración ontosemiótica

A continuación, se presentas algunas ideas fundamentales de la Teoría de los Registros de Representación Semiótica de Raymond Duval, a los que acudimos para la comprensión de algunos objetos descritos en la configuración ontosemiotica como lenguajes, proposiciones, argumentos, definiciones y conceptos.

2.12 Enfoque Noético-Semiótico (ENS) de Raymond Duval.

En la perspectiva de Duval (2006a), las matemáticas se distinguen de otras áreas del conocimiento, entre otros aspectos, en que el único acceso a sus objetos es de naturaleza semiótica: solo se conocen por la vía de sus representaciones semióticas, cada una de las cuales pertenece a un registro semiótico específico RSR(m). Según el registro al que pertenezca, cada una de las representaciones de un objeto matemático solo lo puede presentar parcialmente: no presenta las mismas propiedades o características del objeto que pueden presentar otras representaciones del mismo registro o de otros registros, y recíprocamente, ninguna representación en ningún registro es completa y adecuada al objeto.

Además, según la naturaleza del sistema productor de la representación o registro semiótico RSR, y el modo fenomenológico de producción de sus representaciones, se habla entonces de representaciones semióticas de producción intencional, para distinguirlas de las representaciones neurales, cuya producción no es intencional sino automática, en tanto se involucran procesos motores, sensoriales y neuronales. Dicho de otra manera, una representación semiótica se produce con signos y reglas de uso que llevan un carácter intencional; en cambio, las representaciones no semióticas no tienen este carácter intencional. En efecto, Duval (2006a), señala dos características que distinguen el papel central y particular de las representaciones semióticas en matemáticas que pueden ayudar a los alumnos a no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas.

En primer lugar, las representaciones semióticas son importantes en la medida en que pueden transformarse en otras representaciones semióticas pertenecientes al mismo registro RSR(m) o a otro registro RSR(n). Según Duval (2006a), las transformaciones de representaciones semióticas se pueden clasificar en dos tipos. Por una parte, el tratamiento, como transformación de una representación en otra representación de un mismo registro, y la conversión, como transformación de la representación de un objeto en un registro en otra representación del mismo objeto en otro registro. Así pues, las representaciones semióticas son importantes porque se las puede utilizar para efectuar tratamientos, como razonamientos simbólicos aritméticos, algebraicos o analíticos, y para hacer cálculos internos en el mismo registro, o para hacer conversiones de una representación semiótica RS (m, k) perteneciente a un registro RSR(m) a otra representación RS (n, l) perteneciente a otro registro diferente RSR(n).

En segundo lugar, es necesario recurrir a tipos diferentes de representaciones semióticas producidas por dos o más registros diferentes, ya que cada RS (m, k) como sistema semiótico ya producido ofrece posibilidades diferentes de tratamiento según el sistema semiótico productor o registro RS(m) que la produzca y presenta diferentes aspectos del mismo objeto matemático que pueden aparecer mejor a través de conversiones a representaciones de otros registros. Piénsese por ejemplo en la representación de los primeros cuatro números de contar levantando uno o varios dedos de la mano derecha; o con palitos o muescas como I, II, III, IIII; o en numeración romana como I, II, III, IV, en numeración griega como las letras alfa, beta, gama y delta, y en la sino-indo-arábiga decimal como 1, 2, 3, 4, mientras que en otro registro semiótico diferente, como la numeración en base cuatro ya el mismo número cuatro no tiene numeral propio, sino que habría que escribirlo '10', aunque en base tres sería '11' y en base dos '100'. Cada numeración en base natural b de dos en adelante es un registro diferente, y en el caso de n=16 o hexadecimal digital, se utilizan también literales como A, B, C, D, E, F, G que sirven, así como dígitos para los números representados por los numerales decimales 10, 11, 12, 13, 14 y 15.

Es decir, el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización de representaciones semióticas, lo cual es necesario e ineludible, sino la capacidad para pasar de una representación semiótica a otra representación semiótica del mismo objeto en el mismo registro o en otro registro.

Desde esta perspectiva se postula que las representaciones en matemáticas son de naturaleza semiótica y que toda actividad matemática implica el recurso a representaciones semióticas y a sus transformaciones (tratamientos o conversiones), porque los objetos estudiados no son accesibles perceptiva o instrumentalmente, como en otros ámbitos de conocimiento científico; es decir, sólo se puede acceder a los objetos matemáticos mediante sus representaciones semióticas, pero no se puede confundir el objeto con ninguna de sus representaciones.

En la Didáctica de las Matemáticas en cuanto a la enseñanza, para Duval es crucial presentar a los estudiantes el mismo objeto matemático a través de representaciones diferentes producidas por registros semióticos diferentes, al menos dos de ellos y preferiblemente más, así como distinguir claramente y enseñar a efectuar los dos tipos de transformaciones semióticas, los tratamientos y las conversiones. En cuanto al aprendizaje, Duval es radical al precisar la comprensión en matemáticas como la habilidad para articular distintos registros de representación con el fin de construir y estudiar los objetos matemáticos a través de las conversiones y los tratamientos. Esta precisión duvaliana de lo que es comprender un sistema conceptual de objetos matemáticos con sus relaciones y sus operaciones permite orientar eficazmente los procesos de enseñanza, de aprendizaje y de evaluación.

Cuando se le brinda al estudiante una pluralidad de representaciones del mismo objeto matemático, se le están brindando mayores posibilidades de comprensión de ese objeto; pero no basta el carácter multi-representacional, es decir, no es suficiente representar de diversas maneras un mismo objeto en un registro, por potente que sea, como el verba oral o el verbal escrito, si no se garantiza también mediante el trabajo cognitivo de carácter multi-registro el reconocimiento del mismo objeto en distintas representaciones de los diferentes registros.

Por ejemplo, el objeto "mitad", se puede representar como 'el 50%' en un registro numérico porcentual, o como '0,5' en el decimal usual, o como '½' en el fraccional, o como "un medio" o "la mitad de" en el verbal escrito, o como un cuadrado dividido en dos partes rectangulares iguales con una de ellas sombreada en un registro gráfico areal, o como '|—I—|' en otro registro gráfico lineal. El objeto mental se construye en la medida en que se detecta aquello que permanece invariante ante las conversiones de sus representaciones de un registro a otro o ante los tratamientos dentro de un mismo registro, como en el caso de escribir '$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0{,}5 = 0{,}50$' en el registro numérico decimal usual.

Acerca de la comprensión de los estudiantes, Duval (2006a) manifiesta la importancia que tiene para los profesores el hecho de que los alumnos usen diferentes representaciones en el aprendizaje de objetos y conceptos matemáticos, pero a la vez resalta que el tema principal en la formación inicial y continuada de los docentes es saber cuáles son los tipos de tareas y actividades que sirven para lograr este propósito, qué dificultades ofrece cada registro y qué potencial presenta para apoyar y guiar la detección de distintos aspectos y propiedades de cada objeto matemático por cada tipo de estudiantes y situaciones.

Al parecer la idea más obvia es exponer varias posibles representaciones al mismo tiempo. Pero, desde un punto de vista didáctico estas actividades por sí mismas no suelen llegar muy lejos, dado que toda representación comporta dos dimensiones semánticas que pueden dificultar la aprehensión del objeto: la del contenido que representa solo parcialmente, y que es intrínseca al registro movilizado, y la del objeto que representa, que es independiente del registro que se moviliza, pero que también puede capturarse solo parcialmente en una sola representación de ese registro.

2.13 Algunas consideraciones acerca de las prácticas educativas universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el Cálculo Diferencial.

Se considera en esta investigación que las prácticas educativas universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial PEUC de los estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital, incluyen las prácticas discursivas y no discursivas usuales con que estudiantes y maestros "viven" las clases, con las que participan en el aula de clase alrededor de las temáticas propias de la disciplina. Contienen, entre otras, las formas de "hacer tareas", de discutir con otros, de estudiar individualmente y en grupo, de participar.

En esta investigación se indagó la entrada al mundo del cálculo diferencial en un curso más formal que el acercamiento que da el bachillerato, como fuente rica de información acerca de los obstáculos epistemológicos, semióticos, culturales, didácticos, o de la naturaleza que sea, precisamente en ese trabajo inicial, porque se empieza a construir un lenguaje, una forma de nominar, un rigor, un hacer que permea la práctica. Porque se empiezan a tratar funciones como objetos, sobre los cuales se van a definir límites, continuidad y derivadas. Porque se habla, se escribe y se significa de una cierta manera: es ahí donde se ubicó esta investigación que partió del supuesto que esa Transición del álgebra al cálculo que conforma lo que hemos denominado trabajo inicial, es fuente de indagación importante.

Se concibió la práctica configurada también por las actividades de estudiantes y maestros, por el contexto, el medio, el "currículo oculto" y el explícito por el que transita un "curso". Implica la apropiación de unas prácticas, cuyo sentido está dado por la práctica misma, y crean una cultura propia. Se caracterizan porque constituyen una realidad colectiva, delimitan un espacio específico, actúan en unos límites temporales determinados, definen roles, predeterminan y sistematizan contenidos y proponen formas de aprendizaje descontextualizado, pues los alumnos construyen sus propios procesos intelectuales, compartiendo medios semióticos, como la escritura o formales como las matemáticas.

Se describen a continuación algunos elementos constitutivos de esas prácticas, como los esquemas de clases, los textos usados, las tareas y ejercicios, las evaluaciones, los planes de estudio, los perfiles de profesor y el tratamiento más o menos general de algunas nociones. Descripción basada no solo en la experiencia personal y la observación, sino confirmada a través de diálogos, entrevistas con un número significativo de maestros del ciclo básico de ingeniería de varias universidades colombianas, además de consultas con documentos curricularmente institucionalizados en el área de matemáticas de la facultad de ingeniería. Toda esta parte constituye lo institucional en el EOS.

- *Acerca de los esquemas de clase:* las clases de introducción al Cálculo Diferencial, en general, de las universidades colombianas, incluida la Universidad Distrital y, específicamente, en su Facultad de Ingeniería, son clases tradicionales,[12] en las que el profesor explica los contenidos inscrito en el esquema convencional: definiciones, teoremas,[13] ejemplos, ejercicios generalmente basados en un texto guía o de consulta, en los que el tratamiento de las temáticas es usualmente el mismo. En el aula, no hay espacios para elaboración de talleres y trabajos en grupo.

- *Acerca de los textos guía y de consulta:* los textos más utilizados (impresos o ahora en formato PDF) son Cálculo o Introducción al Cálculo, de autores como Stewart, Thomas, Swokowski, Purcell, Leithold, Protter, Larson; libros que han reinado como textos guía según se vuelvan paradigmáticos en

12 Se reconoce que hay esfuerzos individuales innovadores y también algunos mediados por la tecnología. Pero la generalidad, la institucionalidad del enfoque del área y del ciclo básico de ingeniería está diseñado sobre una metodología tradicional.

13 Los teoremas tienden a desaparecer de la clase tradicional, no sus enunciados, sino sus demostraciones formales; a cambio, lo que generalmente se hace son "mostraciones" argumentadas del hecho que enuncia el teorema.

algunas facultades de la Universidad Nacional de Colombia, de la Universidad de los Andes, y de la Escuela Colombiana de Ingeniería…, al parecer todos ellos comparten un enfoque tradicional de por lo menos 50 años.[14]

- *Acerca de las tareas y ejercicios*: lo usual es que cada profesor disponga de un repertorio o archivo personal referente a ejercicios que ilustran mejor una situación, comúnmente tomados de los libros, de los solucionarios o generados en grupos de trabajo de docentes. Esto se puede corroborar en las notas de clase que publican algunos maestros por medio de la Oficina de Publicaciones de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, como también en las guías dejadas por los profesores en las fotocopiadoras de las facultades.

  Se aclara, por supuesto, que el hecho de que el tratamiento sea clásico, convencional o tradicional, no significa que no se haga un buen trabajo, comprometido, responsable y guiado hacia lo que se considera juega un rol importante en el desarrollo conceptual de los estudiantes, es decir que puede tener una alta idoneidad epistémica, usando la terminología del EOS.

- *Acerca de las evaluaciones*: hay parciales y exámenes conjuntos, lo cual lleva al necesario consenso acerca de contenidos, enfoques, temáticas y metodologías. Los profesores llevan propuestas de evaluación y se conforma así la prueba, que se convierte en un verdadero sufrimiento para los estudiantes, pues la “mortalidad” es significativamente alta en estas pruebas conjuntas: se vuelven todo un reto, pues se advierte que últimamente han desaparecido las pruebas finales conjuntas, debido a los problemas generados por protestas, paros, y recorte de tiempo de semestres.

- *Acerca del currículo general de ingeniería en la Universidad Distrital*: hay un ciclo básico en matemáticas que comprenden cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal, lógica, cálculo multivariado y ecuaciones diferenciales.

- *Acerca del perfil del profesor en ingeniería:* en general, el perfil requerido es matemático o licenciado en matemáticas con posgrado en el área. Se encuentran profesores egresados principalmente de las universidades: Nacional,

14 Por citar un ejemplo, la primera edición del Cálculo de Thomas es de 1952, y van en la 12ª edición. Si comparamos la edición de 1945 y la de 1995, podemos efectivamente confirmar su enfoque tradicional.

Pedagógica, Distrital y de los Andes, quienes, por lo general, dictan clases en más de una universidad; una gran cantidad cuenta con maestría en matemáticas o en áreas de la ingeniería; muy pocos tienen especializaciones o estudios en educación o en educación matemática. Al parecer, ni en el área de matemáticas –ni en ningún área del ciclo de especialización en ingeniería en sí– la pedagogía y la didáctica son consideradas un problema pues se parte del hecho que, el conocer la materia es suficiente para saber enseñarla. En ciertos casos, algunos docentes se desempeñan únicamente con el conocimiento que recibieron en sus carreras; por ejemplo, ingenieros con las matemáticas que vieron en sus respectivos pensum de formación de pregrado.

- *Acerca del tratamiento del cálculo diferencial en libros de texto*: dentro de los libros más utilizados ya enunciados, si bien algunos acuden a la historia de la matemática como anécdota, se encuentra un tratamiento, en general, formal desde el punto de vista de favorecer un esquema basado en definiciones, ejemplos y ejercicios propuestos. Los teoremas básicos no se demuestran desde el punto de vista formal matemático y, los ejercicios propuestos, son de un nivel apropiado para estudiantes de ingeniería, es decir, no muy abstractos, ni tampoco muy superficiales.

Capítulo 3.
Lineamientos metodológicos y presentación de los datos

3.1 Introducción.

En este apartado se presentan algunos lineamientos de orden metodológico que describen el proceso realizado desde la observación, documentación y constitución de datos, como también la elaboración de los diferentes tipos de matrices que fue necesario construir para el análisis y discusión de resultados de los objetivos propuestos.

3.2 Lineamiento metodológico.

Esta investigación se enmarcó en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo-interpretativo, con estudio de caso. El enfoque es cualitativo, en tanto se orienta al estudio de las acciones humanas y de la vida social y utiliza la metodología interpretativa.

Se realizaron entrevistas a estudiantes para documentar sus vivencias y experiencias con el fin de tratar de encontrar las causas de las dificultades y errores sistemáticos en las PEUC, así como la observación de las prácticas, lo que permitió determinar las posibles dificultades, conflictos y razones que los generan y los mantienen. Estos elementos aportaron en la consecución de los objetivos 2 y 3. El objetivo 2 se complementó con la observación no participante de tipo etnográfico. Para el objetivo 4 se hizo un análisis de los episodios seleccionados a partir de las categorías descriptivas del EOS.

En particular para el Objetivo 1

1. Configurar un marco de comprensión para la conceptualización de algunos constructos teóricos relacionados con la noción de obstáculo.

Se alcanzó a partir del análisis de las diferentes teorías y tendencias que sobre obstáculos, conflictos, dificultades, errores, transición y rupturas epistemológicas se logró documentar, y sobre la construcción propia que se logró elaborar acerca de los obstáculos como atribución de causalidad de las dificultades y errores.

La metodología fue la consulta y contraste de fuentes documentales usando como instrumento fichas de contenido, lo que permitió tomar una posición propia acerca de los obstáculos como atribución de causalidad de las dificultades y errores.

En particular para el objetivo 2

2. Describir y caracterizar algunas prácticas educativas universitarias (PEU) vinculadas a la iniciación del cálculo diferencial (PEUC) en un curso de primer semestre de Ingeniería.

Se llevaron libretas de apuntes, diarios, protocolos, en los que se hizo el registro de la observación etnográfica no participante en las clases documentadas.

En particular para los objetivos 3 y 4

3. Identificar y caracterizar las dificultades y conflictos que emergen en las interacciones observadas en las PEUC.

4. Inferir posibles obstáculos para proponer una explicación de la ocurrencia de tales dificultades y conflictos.

Para cada una de las dificultades detectadas se realizó primero una triangulación de fuentes: observaciones de clases y del material usado (libros de texto, listas de problemas, etc.), diálogos con la profesora, entrevistas con estudiantes y con profesores, con el objetivo de seleccionar los episodios de aula más significativos para la explicación de la emergencia y mantenimiento de esta dificultad (reducción de datos). Posteriormente se hizo una triangulación de expertos (doctoranda, director, experto en el EOS, seminario de investigación) sobre el análisis didáctico realizado.

Se trabajaron 16 episodios de clase desde las Categorías Descriptivas del EOS (Godino, Batanero y Font, 2009) y desde la Idoneidad Didáctica, a través de la construcción de:

- Matrices documentales (trascripción a cuatro columnas de los segmentos de cada episodio de clase)
- Matrices categoriales descriptivas de análisis de las matemáticas implicadas en los episodios (problemas, lenguajes: verbal y simbólico, conceptos, proposiciones previas y emergentes, procedimientos y argumentos)
- Matrices de facetas de idoneidad didáctica binarias (Epistémico – Cognitiva, Interaccional – Mediacional y Emocional – Ecológica)
- Matriz categorial descriptiva de prácticas matemáticas y configuración de objetos y de dualidades y oposiciones.

Se hizo un análisis teniendo en cuenta los cinco niveles de análisis didáctico propuesto por el EOS (identificación de prácticas matemáticas, identificación de objetos y procesos matemáticos, descripción de interacciones en torno a conflictos, identificación de normas, valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción). Por último, se buscó explicar la emergencia de la dificultad a partir de dicho análisis.

Aunque en la investigación cualitativa no se suele hablar de población y muestra, por conveniencia descriptiva se tomó como población más amplia solo a los estudiantes que cursan la asignatura Cálculo Diferencial en la facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital en los años 2014 a 2016. El criterio para seleccionar esta población fue que eran estudiantes que, en el contexto de una carrera de Ingeniería, empezaban su formación básica en matemáticas con un curso de Cálculo Diferencial, y en este mismo grupo estuvieron los estudiantes que a pesar de llevar 3 o 4 semestres en la carrera continuaban cursando calculo I o calculo diferencial.

De esa población estudiantil se tomó como muestra solo a los estudiantes del semestre 2014-1, 2014-3, 2015-1, 2015-3 que describo así: El estrato socioeconómico es 2, 3 y 4, generalmente, la mayoría estrato 3. Son estudiantes con puntajes medio y medio altos en las pruebas Saber 11 y cierta disciplina en hábitos de estudio, de conformación familiar heterogénea, la mayoría estable, y cada vez son menos los casos de estudiantes de provincia o que trabajen al iniciar sus estudios. En general son más hombres que mujeres y proceden tanto de colegios distritales como de colegios privados, estos últimos bien posicionados en las pruebas Saber 11. El criterio de selección fue por la asignatura de Cálculo Diferencial y el semestre en que iba a iniciar la investigación.

El caso estudiado dentro de esa muestra estuvo constituido por los estudiantes de primer semestre de Ingeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, que conformaban el curso de Cálculo Diferencial cuya profesora titular permitió y cooperó con el trabajo de observación e investigación. Estos estudiantes eran en su mayoría repitentes de la asignatura Cálculo Diferencial, la están cursando por segunda, tercera, cuarta y hasta por quinta vez. El criterio de selección del caso fue por la disponibilidad de la profesora, a quien llamaré "profesora (P)"; solo hubo una profesora que accedió al estudio durante todos los semestres trabajados.

Las edades de los estudiantes están comprendidas entre 18 y 21 años, esto por el grado de repitencia y atraso en que caen al perder materias del llamado ciclo básico en la Universidad Distrital, del que hace parte el cálculo.

La "profesora (P)" es Licenciada en Matemáticas egresada de una Universidad oficial de Bogotá, ejerce la docencia universitaria hace 15 años; dicta clases simultáneamente en varias universidades de Bogotá de carácter públicas como privadas y manifiesta haber dictado el curso de Cálculo Diferencial unas 20 veces aproximadamente. A diferencia de una gran cantidad de profesores que dictan en la Facultad de Ingeniería, se declara comprometida con la enseñanza, preocupada porque los estudiantes pasen la materia e interesada por los métodos para enseñar y aprender mejor.

La investigación requirió la observación directa de las prácticas en el curso, así como con las clases de dos profesores más; también de alguna propuesta de las tareas pertinentes a las temáticas del curso, la elaboración de cuestionarios, diseño y ejecución de entrevistas para complementar la información.

Un estudio de caso es importante pues es fuente de información y se suscribe en una problemática relevante tanto local, nacional o internacional.

Por ello, el presente estudio aborda elementos particulares correspondientes a diversas prácticas compartidas (profesores, textos, talleres, ejercicios, …) dentro de la educación superior en Colombia, respecto a la enseñanza de la materia Cálculo Diferencial, constituyéndose además en el primero en su género en haberse realizado en Colombia, de ahí la importancia del presente estudio. Contestar estas preguntas siempre va más allá de un caso particular porque el maestro, los estudiantes, las clases son representativas de la generalidad de estudiantes y cursos tanto a nivel local, nacional, como internacional por compartir unos estándares curriculares y de evaluación.

Se elaboró una matriz documental a 4 columnas: Segmento – Observaciones o Relato – Transcripción y Actividades de cada uno de los dos episodios que se han denominado *fundamentales*: *Ep. 4] Episodio 4. Ejercicios sobre límites algebraicos y trigonométricos, y [Ep. 12] Episodio 12: Derivada logarítmica y trigonométrica, por* cuanto aportaron elementos muy interesantes en las PEUC y que permitieron inferir elementos contenidos en la pregunta de investigación a través de los indicadores y descripciones del EOS. Fueron numerados episodios 4 y 12 de acuerdo con el orden temático que cronológicamente sucedían en el curso. Fueron seleccionados porque documentaron unas dificultades respecto a los límites y las derivadas. También por su riqueza en datos acerca del lenguaje, de lo semiótico, de la gestión de las preguntas y eventuales conflictos, además permitieron inferir elementos contenidos en la pregunta de investigación a través de los indicadores y descripciones del EOS. Además, se hizo necesario centrar la atención en uno o dos elementos de la gran cantidad de información y de datos recogidos y trabajados. Por motivos de extensión de estas matrices no se presentan aquí, no obstante, se pueden consultar en la tesis completa, y pasaremos directamente a presentar la *matriz categorial descriptiva* de estos episodios.

Existen otros 14 episodios que se han denominados *complementarios* puesto que, al igual que los fundamentales, se generaron a partir de la observación de clases completas de 2 horas en diferentes momentos de los semestres académicos de la misma "profesora (P)", de los cuales se han seleccionado momentos que nos han permitido corroborar nuestras inferencias respecto a las viñetas seleccionadas de los episodios fundamentales. A estos también se les trabajó la matriz documental y las categoriales y de indicadores de idoneidad.

ANÁLISIS DE LAS MATEMÁTICAS IMPLICADAS EN LOS EPISODIOS

Matriz Categorial Descriptiva de los episodios fundamentales

Prácticas matemáticas

Tabla 3. Configuración de objetos: problemas

Ep	PROBLEMAS
4	Problemas **P1:** Calcular $\lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)}{x - 3}$ **P2:** Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x}$ **P3:** Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{(tagx - senx)}{x^3}$ **P4**: Calcular $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$ **P5:** Calcular $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan x)}{sen\, x - \cos x}$

12	**P1:** Hallar la derivada de $y = \ log_6 \left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-\ x}\right)\left(\frac{x^2\ +\ 1}{x+\ 2}\right)\right]$ **P2:** Hallar la derivada de $f(x) = \ \ln\left(\frac{3x}{x+\ 2}\right)^{\frac{1}{3}}$ **P3:** Hallar la derivada de $f(x) \ = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ **P4:** Hallar la derivada de $f(x) = \ \ln\sqrt{x(x+1)}$ **P5:** Hallar la derivada de $f(x) \ = \ \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ **P6:** Hallar la derivada de $f(x) = \ sen\ (x^2+3x)$ **P7:** Hallar la derivada de $f(x) = \ (\sin(x^4+5x))^3$ **P8:** Hallar la derivada de $f(x) \ = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$ **P9:** Demostrar mediante definición formal de límite. $y \ = \ sen\,x \ \rightarrow y' \ = \ Cosx\ dx$ **P10:** Hallar la derivada de $f(x) = (\sec(5x^3-7x))^2$

Tabla 4. Configuración de objetos: lenguajes

LENGUAJES		
Ep	**Verbal**	**Simbólico**
4	Límite, límite especial, limites trigonométricos, identidades trigonométricas, ángulos especiales, ángulos coterminales, indeterminación, seno, coseno, tangente, circunferencia unitaria, ángulo, grados, triangulo, conjugado.	$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$; $\lim_{x\to a} f(x)$; $\frac{0}{0}$ Símbolos de las expresiones simbólicas de las funciones que aparecen (tan x, x, x^2, x^3…)
12	Diferencia de cuadrados, derivada, logaritmo, derivación Exponencial, derivación logarítmica, propiedades, funciones trigonométricas, límite.	El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base: $y = \ln x \;\to\; y' = \frac{1}{x}dx$ $y = log_b x \;\equiv\; y = \frac{\ln x}{\ln b}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x\ln b}$ $y = e^x \;\to\; y' = e^x\,dx$ $y = a^x \;\to\; y' = a^x \ln a\; dx$ $Si\; y = sen\,x \to y' = (cosx)\,dx$ $Si\; y = cosx \to y' = (-senx)dx$ $Si\; y = tgx \to y' = (sec^2x)\,dx$ $Si\; y = ctgx \to y' = (-csc^2x)\,dx$ $Si\; y = secx \to y' = (secx)(tgx)dx$ $Si\; y = cscx \to y' = (-cscx)(ctgx)dx$ $f'(0) = -\frac{2}{0} \to f'no\; está\; definida\; en\; 0$

Tabla 5. Configuración de objetos: conceptos

Ep	CONCEPTOS
4	Límites especiales, funciones trigonométricas, identidades trigonométricas, límite indeterminado de tipo 0/0
12	Derivación, funciones trigonométricas, logaritmos, derivadas de las funciones trascendentes, común denominador, simplificación.

Tabla 6. Configuración de objetos: proposiciones

PROPOSICIONES		
Ep	**Previas**	**Emergentes**
4	Para las funciones continuas (implícita) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ $1 - cos2x = sen2x$ $Tan\ x = \frac{senx}{cosx}$ $\frac{a}{a} = 1$ El límite de un producto de funciones es el producto de límites $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$	$\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$ $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3} = \frac{1}{2}$ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right) = 1$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\ x - \cos x} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$
12	$f(x) = c \rightarrow F'(X) = 0$ $F(X) = X \rightarrow F'(X) = 1$ $F(X) = MX \rightarrow F'(X) = M$ $CF(X) = C.F'(X)$ $F(X) = X^n \rightarrow f'(x) = nX^{n-1}$ $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$ $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$	**1):** $y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$ $\downarrow$ $y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$ **2):** $f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$

12	$y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x} dx$ $y = \log bx \;\equiv\; y = \frac{\ln x}{\ln b}$ $\downarrow$ $y' = \frac{dx}{x} \ln b$ $y = e^x \quad \rightarrow \quad y' = e^x \, dx$ $y = a^x \;\rightarrow\; y' = a^x \ln a \; dx$ $Si\; y = \sin x \rightarrow y' = \cos x \; dx$ $Si\; y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x \, dx$ $Si\; y = \tan x \rightarrow y' = (\sec x)^2 \, dx$ $Si\; y = \cot x \rightarrow y' = -(\csc x)^2 dx$ $Si\; y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \tan x \, dx$ $Si\; y = \csc x \rightarrow y' = -\csc x \cot x \; dx$	***3):*** $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$ ***4):*** $f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$ ***5):*** $f(x) = \ln\left[\frac{(e^x+1)}{(e^x-1)}\right]$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$ ***6):*** $f(x) = sen\,(x^2+3x)$ $\downarrow$ $f'(x) = [cos(x^2+3x)](2x+3)$ ***7):*** $f(x) = (\sin(x^4+5x))^3$ $\downarrow$ $f'(x) = 3(8x^3+5)(Cos(2x^4 + 5x))(sen(2x^4+5))^2$ ***8):*** $f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$ $\downarrow$ $f'(x) = \frac{16\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{(x+4)^2}$

		9): Demostrar mediante definición formal de límite. $y\ =\ sen\,x\ \rightarrow y'\ =\ Cosx\,dx$ $\downarrow$ $f^{'}(x) = \cos x$ ***10):*** $f(x) = (\sec(5x^3 - 7x))^2$ $\downarrow$ $f^{'}(x) = 2\sec(5x^3 - 7x)\ \sec(x^3 -$ $7x)\ \tan(x^3 - 7x)(15x^2 - 7)$

Tabla 7. Configuración de objetos: procedimientos

Ep	PROCEDIMIENTOS
4	1) Cálculo de límites por evaluación 2) Racionalización 3) Cálculo de límites indeterminados del tipo 0/0 4) Evaluar la función en $x = a$ 5) En caso de tener una indeterminación hay que expresar la función de una forma diferente (hay que hacer un tratamiento usando propiedades) 6) Volver a evaluar para ver si desparece la indeterminación 7) En caso contrario hay que volver a hacer un tratamiento usando propiedades 8) Despeje de ecuaciones 9) Uso de identidades trigonométricas para solución de limites

12	1) Aplicación propiedades logaritmos. 2) Factorización 3) Derivación 4) Aplicación límites

Tabla 8. Configuración de objetos: argumentos

Ep	ARGUMENTOS
4	• Argumento 1: Tesis $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$ Razón 1° Forma $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}*\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}$ $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ Tambien\ \frac{\sqrt{3}}{6}\ racionalizando$ 2° Forma $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ o Argumento 1.1: Tesis $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=na^{n-1}$ Razón $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ $Limite\ Especial$

- Argumento 2:

Tesis

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$$

Razón

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}*\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1-cosx)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{1+cosx}=1*\frac{0}{2}=0$$

Se ha seguido el procedimiento de cálculo de límites para el caso de indeterminación 0/0 realizando un tratamiento y utilizando, entre otras, la propiedad que el límite de un producto es el producto de límites

- Argumento 3:

Tesis

$$\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}=\frac{1}{2}$$

Razón

Se cumple que $Tan\ x = \frac{senx}{cosx}$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}=$$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx-senx*cosx}{cosx}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{senx(1-cosx)}{x^3cosx}=$$

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0}\frac{senx(1-cosx)}{x^3cosx}*\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim_{x\to 0}\frac{senx(1-\cos^2 x)}{x^3cosx(1+cosx)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx*sen^2x}{x^3cosx(1+cosx)}=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{1}{cosx(1+cosx)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

El resultado de evaluar la función en x = 0 es $\frac{1}{2}$

- Argumento 4:

Tesis

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x} \right) = 1$$

Razón

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{senx}{cosx}}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{senx}{x * cosx} \right) =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} * \frac{1}{cosx} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{cosx} = 1$$

- Argumento 5:

Tesis

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan x)}{sen\, x - \cos x} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Razón

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \tan x)}{sen\, x - \cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(1 - \frac{senx}{cosx}\right)}{sen\, x - \cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\left(\frac{cosx - senx}{cosx}\right)}{sen\, x - \cos x}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{cosx - senx}{cosx(senx - cosx)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} - \frac{cosx - senx}{cosx(cosx - senx)} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} - \frac{1}{cosx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

12

- Argumento 1:

Tesis

$y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right] \rightarrow y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$

Razón

$$y = log_6\left[\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{1-x}\right)\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)\right]$$

$$y = \log_6\left(\frac{x}{2}\right) + \log_6\left(\frac{3}{1-x}\right) + \log_6\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$$

$$y = \log_6(x) - \log_6(2) + \log_6(3) - \log_6(1-x) + \log_6(x^2+1) - \log_6(x+2)$$

$$y = \left(\frac{\ln(x) - \ln(2) + \ln(3) - \ln(1-x) + \ln(x^2+1) - \ln(x+2)}{\ln 6}\right)$$

$$Si\ y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \rightarrow y' = \frac{dx}{x\ln a}\ dx$$

$$y' = \frac{1}{x\ln 6} - \frac{(-1)}{(1-x)\ln 6} + \frac{2x}{(x^2+1)\ln 6} - \frac{1}{(x+2)\ln 6}$$

- Argumento 2:

Tesis

$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$

Razón

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$f^{'(x)} = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{3x}{x+2}\right)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\ [\ln(3x) - \ln(x+2)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x} - \frac{1}{x+2}\right)$$

- Argumento 3:

Tesis

$$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right] \rightarrow f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

Razón

$$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$

$$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$$

$$f(x) = 3\ln(x-2) - \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)$$

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

- Argumento 4:

Tesis

$$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)} \rightarrow f'\ (x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

Razón

$$f(x) = \ln\sqrt{x(x+1)}$$

$$f(x) = \ln\frac{x(x+1)}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ (\ln x(x+1))$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ (\ln x + \ln(1-x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)$$

- Argumento 5:

Tesis

$$f(x) = \ln\left[\frac{(e^x + 1)}{(e^x - 1)}\right] \rightarrow f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

Razón

$$f(x) = \ln\left[\frac{(e^x + 1)}{(e^x - 1)}\right]$$

$$f(x) = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x - 1)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)} - \frac{e^x}{(e^x - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{(e^x - 1)e^x - (e^x + 1)e^x}{(e^x + 1)(e^x - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{(e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x)}{(e^x + 1)(e^x - 1)}$$

$$f'(x) = \frac{-2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$f'(0) = -\frac{2}{0} \rightarrow f' no\ está\ definida\ en\ 0$$

- Argumento 6:

Tesis

$$f(x) = sen\ (x^2 + 3x) \rightarrow f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$$

Razón

$$f(x) = sen\ (x^2 + 3x)$$

$$f'(x) = [cos(x^2 + 3x)](2x + 3)$$

- Argumento 7:

Tesis

$$f(x)=(\sin(x^4+5x))^3 \rightarrow f'(x) = 3(8x^3+5)(Cos(2x^4+5x))(sen(2x^4+5))^2$$

Razón

$$f(x) = (\sin(2x^4+5x))^3$$

$$f'(x) = 3\left(sen(2x^4+5x)\right)^2 Cos(2x^4+5x)(8x^3+5)$$

$$f'(x) = 3(8x^3+5)(Cos(2x^4+5x))(sen(2x^4+5))^2$$

- Argumento 8:

Tesis

$$f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2 \rightarrow f'(x) = \frac{16\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{(x+4)^2}$$

Razón

$$f(x) = \left[sen\left(\frac{2x}{x+4}\right)\right]^2$$

$$f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)((2(x+4)-2x)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)(8)}{(x+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16\sin\left(\frac{2x}{x+4}\right)\cos\left(\frac{2x}{x+4}\right)}{(x+4)^2}$$

- Argumento 9:

Tesis

$$y = sen\,x \rightarrow y' = Cosx\,dx \rightarrow f'(x) = \cos x$$

	Razón Si $$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$ $$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} f(\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h})$$ $$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} f(\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h})$$ $$f^{'}(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{\sin x(\cos h-1)}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\frac{\sin h\ \cos x}{h}$$ $$f^{'}(x) = \sin x\lim_{h\to 0} f\left(\frac{(\cos h)-1}{h}\right)+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$ $$f^{'}(x) = \sin x\,(0)+\cos x\,(1)$$ $$f^{'}(x) = \cos x$$ • Argumento 10: Tesis: $f(x) = (\sec(5x^3-7x))^2 \to f'(x)$ $= 2\sec(5x^3-7x)\sec(5x^3-7x)\tan(5x^3-7x)(15x^2-7)$ Razón: $f^{'}(x) = 2\sec(5x^3-7x)\ \sec(5x^3-7x)\ \tan(5x^3-7x)\,(15x^2-7)$

Capítulo 4.

Análisis general de los datos

4.1 Introducción.

Se disponen a continuación algunos elementos teóricos del EOS que permiten construir los atributos de oposiciones duales a las matemáticas implicadas en cada episodio dispuesto en la Matriz Documental.

Según el EOS (Godino, Batanero y Font, 2008) se considera que los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Tal emergencia la explican mediante dos niveles de objetos que emergen de la actividad matemática. En el primer nivel están problemas, definiciones, proposiciones, etc. En el segundo nivel se tiene una tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar sobre los objetos del nivel anterior, es decir objetos personales o institucionales, ostensivos o no ostensivos, unitarios o sistémicos, etc.

En el primer nivel encontramos la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
- Situaciones-problemas
- Conceptos- definiciones
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...).

En el segundo nivel encontramos los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas; según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser consideradas desde las siguientes facetas o dimensiones duales (Godino, 2002):

- Personal/Institucional. Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, los objetos emergentes se consideran "objetos institucionales", mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran como "objetos personales" (Godino y Batanero, 1994, p. 338).

- Ostensivo/No ostensivo: cualquier objeto que es público y que, por tanto, se puede mostrar a otro es ostensivo. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos…). Esta clasificación entre ostensivo y no ostensivo es relativa al juego de lenguaje en que participan.

- Expresión/Contenido: antecedente y consecuente La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

- Extensivo/Intensivo (ejemplar - tipo). Un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (un ejemplo la función $y = 2x + 1$) y una clase más general (p.e., la familia de funciones $y = mx + n$). La dualidad extensiva/intensivo se utiliza para explicar una de las características básicas de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos (Contreras y cols, 2005). Esta dualidad permite centrar la atención en la dialéctica entre lo particular y lo general,

- Unitario/Sistémico. En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. En el estudio de la adición y sustracción, en los últimos niveles de educación primaria, el sistema de numeración decimal (decenas, centenas, …) se considera como algo conocido y en consecuencia como entidades unitarias (elementales). Estos mismos objetos, en el primer curso tienen que ser considerados de manera sistémica para su aprendizaje.

Según Godino (2017), la necesidad de identificar los objetos y procesos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones - problemas conduce a la noción de *configuración ontosemiótica* (de prácticas, objetos y procesos), y dicho reconocimiento de tales objetos y procesos permite, entre otras cosas, prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje.

El EOS entiende un objeto abstracto como una entidad: inmaterial (no ostensiva), y general (intensiva); que se puede considerar de manera:

- Unitaria (como regla) o sistémica (configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos).
- Personal (mental) o institucional (sociocultural).
- Antecedente (significante) o consecuente (significado) en una relación semiótica.

Con el fin de ampliar, analizar y enriquecer un poco más las nociones aquí expuestas para extraer elementos e indicadores metodológicos que permitan aplicar dichas oposiciones a la matriz categorial de nuestros dos episodios, se agregó una columna a la matriz individual de cada episodio teniendo en cuenta los elementos teóricos citados antes, y que por razones de extensión no se disponen aquí, pero pueden ser consultadas en el documento de tesis. Solamente se presentarán en detalle algunas de las viñetas seleccionadas de cada episodio.

4.2 Análisis de los episodios fundamentales.

4.2.1 *Episodio 4.*

4.2.1.1 Cinco Niveles de Análisis.

A continuación, se presentan los cinco niveles de análisis planteados por el EOS, aplicados al episodio 4.

Primer nivel de análisis.

En cuanto a la identificación de prácticas matemáticas según Font, Planas y Godino (2009) se observa que:

La "profesora (P)": tiene el papel protagónico de este episodio. De manera general es la que **formula y plantea** los ejercicios, ella misma los **resuelve**, **genera** y **comunica** preguntas, **selecciona los estudiantes** que pasan al tablero, **enfatiza**, **repite**, **da instrucciones** para la solución de los ejercicios, realiza **llamados de atención,** generaliza sobre un tipo de límites y nomina (les coloca nombre) **[EP.4-Sg3].**

Los estudiantes: tienen un papel menos activo que el de la "profesora (P)", solo intervienen dos estudiantes del curso; ellos se ocupan de los procesos de **racionalización**, **factorización**, **simplificación** y **evaluación del cálculo de límites.**

Desde el punto de vista de la práctica matemática la "profesora (P)", tanto plantea como resuelve los ejercicios, lo cual puede deberse a factores como:

- El paradigma de formación por el cual ha pasado la "profesora (P)".
- Modelo de desarrollo de la clase limitado por el currículo (guía de cátedra, pensum).
- Tiempo de desarrollo del curso (Cronograma curricular).
- Falsa percepción de optimización del tiempo por parte del profesor al solucionar los problemas el mismo.
- El esquema de clases de matemáticas de la facultad de ingeniería que sigue el o patrón:
    - Definir
    - Describir
    - Ejemplificar

  - o Solucionar
  - o Ejercitar (dejar ejercicios de tarea).
- Desconfianza en la capacidad de los estudiantes para resolver los problemas.
- El imaginario que el profesor es quien sabe más y explica mejor.
- Desconocimiento del error como herramienta de aprendizaje.
- Desinterés por buscar herramientas que mejoren la práctica docente y posibiliten un mejor aprendizaje.
- En general la "profesora (P)" se relaciona con un estudiante repitente (Alejo) [EP.4; Sg.6, Sg.7, Sg.9].

Por otra parte, desde el punto de vista de la práctica matemática podemos identificar que para este caso los estudiantes están representados por dos alumnos que son los visibles. Asumen el rol de receptores y cuando tratan de resolver los ejercicios propuestos lo hacen de manera general, fenómeno que puede deberse a:

- Predominancia de la "profesora (P)" como protagonista.
- Metodología propuesta por la "profesora (P)".
- Imaginario de los estudiantes de que así se desarrolla una clase de matemáticas.
- Carencia de los elementos bases para participar, preguntar, proponer, cuestionar.
- Pena, timidez al participar.
- Desinterés debido a:
  - o Porque no entiende.
  - o Falta de empatía con el profesor.
  - o Incomodidad por la repitencia de la materia.
  - o Falta convicción por la carrera.

- o Falta de claridad sobre el proyecto de vida.
- o Conflictos personales de diversas índoles.
- o Falta de coherencia entre lo que se enseña y el mundo que vivencia.
- o La predominancia del enfoque cuantitativo en las materias versus ganancias de saber cualitativo (conocimientos adquiridos, procesos de aprendizaje).

Segundo nivel de análisis.

En cuanto a la identificación de objetos y procesos matemáticos según Font, Planas y Godino (2009) se tiene:

- **Procesos**

Se evidencia un proceso de algoritmización de cálculo de límites en el que tiene un papel importante el proceso de tratamiento para conseguir expresiones equivalentes.

En síntesis, podríamos estructurar la configuración de la siguiente manera: hay un procedimiento general para calcular límites de reales de una variable:

- Sustituir o evaluar.
- Ver si sale una indeterminación o no.
- Si sale una indeterminación, expresar la función de forma equivalente pero diferente, es decir, hacer tratamientos.
- Según el tipo de indeterminación y de función, sugerencias, maneras, recursos, herramientas, intuiciones, algoritmos, formas de tratamientos específicos.
- Recordar propiedades: identidades, casos de factorización, productos notables, potencias, …
- Según sea la función, es más conveniente usar un proceso que otro.

Podríamos dar pautas de un procedimiento general para calcular límites que luego se subdividen en específicos, no para algoritmizar o mecanizar, sino para que tengan cada vez más elementos en el cálculo de límites que, junto con derivadas, es lo que busca el Cálculo Diferencial, ya sea en las facultades de ingeniería o en general, de primer semestre que no sea de una carrera de matemática pura o disciplinar; con lo cual se quiere decir que, si este cálculo tiene como fin principal, entre otros, dotar a los estudiantes de las herramientas y conceptos necesarios para lograr un buen desempeño, tener éxito en la solución de límites, debería al menos, cumplir con esa función adecuadamente.

El tratamiento, como una de las transformaciones propuestas por Duval, en el cálculo de límites, es un procedimiento no epistémico de la profesora en estos tratamientos de lo cual es lógico que los estudiantes experimenten dificultades de diversa índole.

Los alumnos en general encuentran dificultades en cálculo de límites, lo cual se evidencia en el hecho de que, descontando un porcentaje muy bajo de estudiantes (aproximadamente el 15%), la mayoría no tiene éxito.

Tercer nivel de análisis.

En cuanto a la descripción de interacciones en torno a conflictos matemáticos según Font, Planas y Godino (2009) se tiene:

- **Interacción**

En esta clase, la "profesora (P)" pasa al tablero a dos alumnos, los mismos que pasan en casi todas las clases.

La "profesora (P)" procede con el siguiente patrón de interacción: **inicio-respuesta-evaluación**, en algunos casos la respuesta es de un alumno (**r**), pero en muchos casos ella misma se responde (**R**).

"Realicen el siguiente ejercicio. No sé si está o no en el taller, pero lo vamos a revisar:"

$\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$ *Que está en la forma 0/0 y pasa Alejo.*

"Listo Alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago?" ella misma dice: "quitar ese indeterminado y cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea "

La "profesora (P)" resuelve el primer límite en el tablero y hace intervenir a dos alumnos siguiendo el patrón **I-r-E** *(iniciación profesora-respuesta alumno-evaluación profesora)*. En el segundo límite la interacción comienza con **I-R-E** *(la profesora pregunta, ella misma contesta y ella misma lo da por bueno)* y continua con I-r-E; I-R-E; I-r-E; I-R-E hasta que la "profesora (P)"misma dice: *"me perdí". El segundo problema queda sin resolver*.

En el tercer problema sale un alumno al tablero y lo resuelve sin decir nada. La "profesora (P)" lo da por bueno. Lo mismo sucede con el cuarto problema, aunque el alumno que lo resuelve es otro.

Hay que resaltar que la "profesora (P)":

1. No resuelve el primer límite como un caso particular de $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x-a}$, a pesar de decir que lo iba a hacer y,
2. que el cálculo del tercer límite lo deja sin terminar.

La interacción que está presente en esas prácticas fomenta que siempre sean unos pocos alumnos los que solucionan los problemas:

> *Espera un ratico (creo que no más de 3 minutos) y pasa a Felipe:*
>
> *Luego dice "Felipe te escucho"*
>
> *La sucesión de las rectas secantes (Sn) se acerca a la recta tangente T, esto ocurre cuando qué Felipe*
>
> *Realicen el siguiente ejercicio. No sé si está o no en el taller, pero lo vamos a revisar:* $\lim_{x \to 0} \left(\frac{tgx}{x}\right)$ *que está en la forma* 0/0 *y pasa Alejo.*
>
> *Listo Alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago? ella misma dice: quitar ese indeterminado y ¿cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea*
>
> *Evalué Alejo, Alejo dice: 0/2*

Y en otros semestres el papel de Alejo estuvo representado por Carlos y Cindy.

Conflictos y dificultades

- **Conflicto semiótico** (**CS1**)

En el primer ejercicio $\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$, para llegar al mismo resultado que la estudiante llegó por medio de la racionalización de la expresión algebraica, la profesora pretende que los estudiantes lo vean como un caso de $\lim_{x\to 3} \frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ *("que denomina ¡limites especiales!")*. Se produce una ambigüedad ya que debería haber escrito $\lim_{x\to a} \frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$.

En este punto se produce un conflicto de interpretaciones ya que los alumnos normalmente asocian la letra **n** del exponente con un número natural y la "profesora (P)" pretende que lo consideren un exponente fraccionario.

Esta disparidad de interpretaciones - junto al hecho de que la manera prototípica de resolver límites con raíces sea la racionalización y no el tratamiento para pasar a una expresión con potencias - produce una dificultad en los alumnos *(en el sentido que ninguno de ellos hace el tratamiento que quiere la profesora)*. La interpretación de **n** como un número natural aquí se convierte en un obstáculo de tipo. Si la profesora hubiese utilizado, por ejemplo, una **k** en lugar de la n este obstáculo quizás se habría superado.

- **Errores y Ambigüedades**

Hay que resaltar que la "profesora (P)" es poco cuidadosa con las notaciones. Además de utilizar la **n** para representar números que no son enteros como ya hemos comentado, introduce notaciones ambiguas que no son válidas desde el punto de vista institucional al hacer una reducción simbólica *(usa LIM en lugar de* $\lim_{x\to a} \square$*, quizá para no escribirlo todo)* lo cual puede generar confusiones e interpretaciones incorrectas en sus alumnos.

Otro ejemplo de uso poco preciso, lo tenemos en el siguiente diálogo:

"Listo alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago?" (Ella misma dice): "quitar ese indeterminado y ¿cómo?... pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea; quitar ese indeterminado".

En otro momento (2) del episodio

La "profesora (P)" comete varios errores e incurre en algunas ambigüedades. No señala las cosas importantes. Deja un problema a medio hacer. No resalta la importancia ni es muy cuidadosa con el tratamiento de expresiones algebraicas. Tampoco precisa el conjunto al que pertenece la potencia , es decir, es natural, entero, racional, … lo cual posibilita explicar las dificultades en el cálculo de límites.

La interacción que está presente en esas prácticas fomenta que siempre sean unos pocos alumnos los que solucionan los problemas:

En el primer ejercicio propuesto presentado en la tabla de episodio 4:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)}{x - 3}$$

Cuando ella insiste en que los estudiantes lo vean como un caso de lo que denomina "límites especiales":

1) $\lim_{x\to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$, Institucionalmente la expresión que corresponde es $\lim_{x\to a} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$
2) $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$
3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$

Específicamente el 1: $\lim_{x\to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x-a} = na^{n-1}$en primer lugar es muy importante establecer las condiciones para el exponente n que aparece en esta "fórmula"; por otra parte también aparece la duda de si es válido, es decir si es un teorema, si aparece en los libros, luego hacemos una búsqueda bastante intensiva y exhaustiva, encontrando un video en el que lo enuncian y lo demuestran de dos maneras: tanto con el teorema del binomio como por la regla de L'Hôpital, anunciando de entrada la condición para n número natural, entero positivo. Ante lo cual es válido preguntarnos si por ejemplo al desarrollarlo por el teorema del binomio se supone tácitamente n entero positivo, o si la aplicación de la regla de L'Hôpital es correcta o se suponen funciones continuas y diferenciables. La "profesora (P)" quiere que lo vean como un caso particular del límite especial que ha numerado 1 y le apliquen la fórmula para llegar al mismo resultado que la estudiante llegó por medio de la racionalización de la expresión algebraica.

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x^{1/2} - 3^{1/2})}{x - 3} = 1/2(3^{-1/2}) = 1/2\sqrt{3}$$

Al omitir la condición para la potencia se comete un error, y es una cuestión de tratamiento, se observa que los estudiantes tienen poco éxito en hacer este tratamiento, entonces inferimos que tienen dificultad porque ellos identifican, asocian que n es natural o entero positivo, entonces al ser la potencia fraccionaria: ½, no le otorgan el sentido ni significado que la maestra ve natural otorgarle.

Y ¿por qué nadie lo ha hecho? pregunta la "profesora (P)".

Esta transformación en la representación (tratamiento) es en últimas es de lo que se trata todo[15]. Y también es importante preguntar: ¿Por qué ellos asocian inmediatamente, sin dudarlo, sin pensarlo que n es natural y por tanto no tiene sentido para potencia fraccionaria?

Entonces también podría constituir un error de la "profesora (P)" que potencia o genera un conflicto u obstáculo en los estudiantes; además no lo resuelve porque finalmente en esa clase de límites, ni en las siguientes, volvió a abordar este ejercicio ni otro similar.

1. Escritura no institucional de la "profesora (P)":
   $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$ $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$ no es válido cuando n no sea un número natural, entero positivo.
2. Si no hay error y puede ser válido también para racional o real…hay una dificultad de tratamiento para convertir raíces en potencias y una dificultad de sentido y significado para asociar una expresión algebraica enunciada en términos de raíces con una regla algebraica como la sustracción de raíces enésimas.

- Dificultades

15 Hay trabajos que dan cuenta de dificultades o conflictos asociados a dichas transformaciones. Por ejemplo: Rojas, P., Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos. Tesis Doctoral 2012.

Los alumnos encuentran dificultades en cálculo de límites, lo cual se evidencia en el hecho de que (descontando un porcentaje muy bajo de estudiantes) la mayoría no tiene éxito.

Una explicación plausible de cómo emerge esta dificultad es: que el procedimiento general para resolver límites no se ha explicado con claridad ni se ha institucionalizado, como tampoco se han explicado ni institucionalizado los procedimientos de cálculo de límites específicos.

En efecto, institucionalmente hay un procedimiento general para calcular límites, que contiene los siguientes pasos:

1. *Sustituir o evaluar el límite para ver si se obtiene una indeterminación o no.*
2. *En caso de tener una indeterminación hay que expresar la función de una forma diferente (hay que hacer un tratamiento).*
3. *Volver a evaluar para comprobar si desaparece la indeterminación*
4. *Si la indeterminación persiste, hay que volver a hacer un tratamiento utilizando ciertas propiedades y definiciones (por ejemplo, que* $1 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2, \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \frac{a}{a} = 1$ *, etc.)*
5. *Según la función concreta y el tipo de indeterminación hay que usar determinadas propiedades.*

Dicho procedimiento está implícito en el episodio, pero no se explica claramente ni se institucionaliza.

En la práctica observada en los episodios de clase se evidencia que favorecería dar las pautas de un procedimiento general para calcular límites, los cuales posteriormente se subdividen en unos más específicos, ya que según sea la función y la indeterminación, es más conveniente usar un proceso u otro. Igualmente sería favorable enfatizar que el límite que se calcula es un caso de una familia de límites que tienen tales propiedades. En síntesis, al pretender responder la pregunta: ¿Por qué se genera esta dificultad?, es posible plantear las siguientes ideas:

- No hay un procedimiento general, no hay procedimientos específicos, los estudiantes no poseen los conocimientos necesarios para calcular límites y no se han dado las pautas generales.

- No hay una representatividad de tipología de límites diferentes: todo es muy inconexo. No se dice este límite es la tipología de una familia de límites que tienen tales propiedades. Falta la representatividad de una familia, los casos de límites que propone qué representatividad tienen en cuanto a los ejercicios que deberían estar calculando.

Sin pretender descalificar las prácticas de la "profesora (P)", y dado que el EOS categoriza errores y ambigüedades, en este análisis es posible detectar algunos de ellos. No se señala ni se enfatizan las cosas importantes por parte de la "profesora (P)". Se dejan problemas sin terminar. No se resalta ni se es muy cuidadosa con la importancia del tratamiento planteado por Duval, de expresiones algebraicas. Todo esto hace posible explicar la dificultad del cálculo de límites.

Continuando con el otro momento (2)

Tenemos una dificultad: En general la resolución de límites requiere un tratamiento para tener éxito, pero además aquí la "profesora (P)" quiere que hagan un tratamiento: una transformación de raíces a potencias en forma de fracciones.

No es que la causa de esto sea que, en este caso particular está implicado que el exponente está asociado como un número natural, entero positivo, si así fuera, la "profesora (P)" comete ambigüedad en la notación. El obstáculo que inferimos allí es que x^n en la expresión $\lim_{x\to 3} \frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$, correctamente enunciada: $\lim_{x\to a} \frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ representa una potencia con número natural, entero positivo. Parece ser que para los estudiantes x^n no puede representar una raíz…no puede ser una raíz…en todo caso si la clase está inscrita en un modelo mecanicista o formalista, la "profesora (P)" no realiza correctamente ciertos procesos formales, como la condición para la potencia de x.

- Generalidades

Por otro lado, en el cuarto apartado de la tabla la "profesora (P)" aborda uno de los tres límites que ha llamado "especiales": el tercero y lo escribe de la siguiente manera de la cual llama la atención que solo escribe *lim*, en vez de hacer referencia a todo el límite, y que sigue usando la notación *lim* aunque al reemplazar ya ha pasado al límite:

$$lim_{x\to 0} \frac{1 - cosx}{x} = \ lim \ = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Que además no necesita una fórmula sino requiere un procedimiento, un algoritmo de solución que involucra algunas identidades y simplificaciones básicas. Sin embargo, es de resaltar que realizó este tercer límite, después de decir que les iba a hacer el primero, lo que realmente habría sido muy adecuado pues no los dejaría con la duda y seria consecuente con el ejercicio anterior.

En cuanto al simbolismo utilizado se podría afirmar que la "profesora (P)" hace una reducción simbólica de tipo incorrecto al englobar con la expresión Lim todo el límite (¿quizá para no escribir todo?) es otra ambigüedad que puede generar confusión en los alumnos; es decir, hace un uso ambiguo de esa notación, que, por lo tanto, también está dificultando el tratamiento algebraico en los alumnos. Claramente, además no se hace necesaria esa expresión, pues ya pasa a evaluar el límite.

En el apartado 6 de la tabla del episodio 4 que estamos analizando:

Listo Alejo, y si está en la forma 0/0 ¿qué hago? ella misma dice: quitar ese indeterminado y ¿Cómo? Pues lo único que sé es lo que ustedes van a hacer de tarea quitar ese indeterminado.

Constituye una ambigüedad de tipo discursivo…una ambigüedad en el tipo de discurso que instaura en la clase, lo cual documenta el hecho de que aun acercándose a un modelo de clase formalista-mecanicista tampoco lo es por la falta de claridad y cierto rigor en el discurso, en los símbolos, en toda la semiótica puesta en juego, y luego en el apartado 7 de la misma tabla respecto al episodio 2: cuando plantea uno "más interesante" (las comillas son mías, las palabras de ella)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(tagx - senx)}{x^3}$$

…Me perdí. Por favor termínenlo por ahí ahorita que van a trabajar en grupo. Pero similarmente puedo desde el comienzo obtener un seno cubo (ella quiere decir $sen^3(x)$*).*

Y lo dejó a medio hacer, dijo "me perdí" (Matriz documental Ep4) y dio unas pautas que no corresponden al ejercicio pues aludió al ejercicio anterior de multiplicar arriba y abajo por 1 representado en una cierta expresión que no conduce al desarrollo del ejercicio. Entonces la no resolución de los ejercicios, sea cual sea su causa, podrían interpretarse como potencialmente generadoras de dificultades.

En síntesis, para este tercer nivel de análisis:

1. Los alumnos encuentran dificultades en el cálculo de límites y se pueden evidenciar en algunos exámenes conjuntos, parciales y talleres. [Ver Anexos en Tesis completa]

2. ¿Por qué se produce esta dificultad?

   Una posible explicación es que la "profesora (P)", como quizá sucede lo mismo con muchos profesores, interactúa única y repetitivamente con los estudiantes que suelen ser los más sobresalientes, olvidándose del resto. En este espacio de interacción se observa que es la "profesora (P)" la protagonista: ella formula, explica, resuelve, evalúa, institucionaliza, lo que significa que no tenemos información acerca de la faceta cognitiva de los otros estudiantes, de su comprensión y que esta la inferimos de los exámenes.

3. Al observar la interacción que se ha producido en el aula, se plantean otras razones para explicar las dificultades que encuentran los alumnos, por ejemplo, en el lenguaje y formalismo matemático se presentaron errores, ambigüedades y poca representatividad en los ejercicios desarrollados.

4. Específicamente en la clase de límites, la "profesora (P)" deja un ejercicio a la mitad, hace tratamiento de la n como si fuera un número entero positivo, usa la expresión informal lim para englobar todo el límite, y eso no constituye lo más significativo. Lo más significativo es que lo esencial del cálculo de límites, los contenidos y procesos para calcularlos, no están suficientemente conectados, pues no aparece ni se explicita el procedimiento general, en el cual el tratamiento algébrico de Duval es fundamental, además la "profesora (P)" no es especialmente cuidadosa ni tampoco le hace ver la importancia a los estudiantes de estas transformaciones algebraicas.

5. Según el tipo de función a la cual se le va a calcular el límite, se requiere emplear determinados procesos algebraicos lo cual hace necesario que se planteen diversos tipos de funciones para que haya representatividad.

Estando precisamente el Cálculo Diferencial dedicado al estudio de límites y derivadas, no se esperaría que se encuentren tantas dificultades, pero la práctica observada en la clase genera un tipo de interacción que se convierte en obstáculo; es decir, el problema es el tipo de transformaciones matemáticas que se da y el tipo de interacción que se establece. Mientras no se cambien esas prácticas matemáticas y el tipo de interacción establecida, se seguirán generando y manteniendo las dificultades observadas.

Cuarto nivel de análisis.

En cuanto a la identificación de normas y basados según Godino, Font y Wilhelmi (2008) se infiere que:

- La clase empieza a una determinada hora con los estudiantes que estén, pero los otros pueden ingresar posteriormente, así mismo pueden retirarse cuando lo necesiten.
- La "profesora (P)" es eje central en cuanto al desarrollo temático, es decir las explicaciones de los temas, la resolución de los ejercicios, el planteamiento de talleres y los modos de proceder son dispuestos y desempeñados por ella.
- No se privilegia la participación de los estudiantes, ni se da el tiempo para identificar progresos o dificultades, ni tampoco se le da importancia a esta labor de evaluación que podríamos denominar formativa.
- Los estudiantes son receptores del proceso educativo, ellos escuchan, toman apuntes, en general no responden las preguntas.
- El esquema de la clase es, podríamos llamarlo, tradicional: la "profesora (P)" explica, habla, y los estudiantes copian y tratan de hacer los ejercicios; piden ayuda extra-clase.
- La interacción es escasa, solo se da con uno o dos estudiantes que sobresalen en el curso. En este episodio es "Alejo", en otros semestres, "Felipe" u otro que hace el papel de "Alejo".
- No hay espacio para desarrollar talleres o trabajos en grupo en la clase.
- El ritmo con que se deben "dictar" los temas es apresurado, pues hay unos tiempos determinados por las respectivas guías de cátedra, y por la realización de las pruebas conjuntas.

- Los estudiantes en general no reclaman acerca de las notas, ni cuestionan formas de evaluar o metodologías, menos contenidos temáticos o ejercicios.
- La "profesora (P)" asiste a todas sus clases, se preocupa por ir al día en contenidos, y hasta planea clases extras (por ejemplo, los sábados) para poder abarcar todos los temas propuestos.
- El uso de tecnología, o estrategias para visualizar funciones, gráficas, … está a cargo de un estudiante (Alejo) quien lleva su computador portátil, y la "profesora (P)" busca un cable y conectan al televisor. Si Alejo no llega o no lleva el portátil no se realiza la actividad de visualización planeada.
- La "profesora (P)" regaña, es sarcástica ("toca pensar", "no se hagan los que están pensando" …, "por eso se caen los puentes").

Quinto nivel de análisis.

En cuanto a la valoración de la idoneidad didáctica según Font, Planas y Godino (2009) se tiene:

Componentes e indicadores de idoneidad epistémica (matemática)

La "profesora (P)" propone solo ejercicios en contexto intramatemático por lo que no se fomenta la modelización. Tampoco se fomenta la argumentación más allá de la ejemplificación del método de cálculo de límites. Por otra parte, tampoco llega a justificar claramente la aplicación de los pasos del método (por ejemplo, se dejan problemas sin terminar).

Los procesos de simbolización que realiza la "profesora (P)" en algún caso son ambiguos por no decir incorrectos *(por ejemplo, utiliza símbolos que no son institucionales como "Lim"* $\underset{x\to 3}{lim}\frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ *, <u>o el uso de la **n** para representar a un número racional</u>)*. Si bien se observan tratamientos no se institucionaliza la importancia de este tratamiento. Por otra parte, no se observan conversiones de expresiones simbólicas a numéricas (tablas) ni gráficas.

El proceso fundamental que se da es la mecanización, pero de manera imprecisa ya que la práctica que realizan los alumnos resolviendo límites (durante tres clases) no los lleva a tener claros los pasos del método.

En Contreras, García y Font (2012) y García (2008) se proponen las siguientes configuraciones epistémicas para caracterizar la complejidad del objeto límite: gráfica, geométrica, pre infinitesimal, infinitesimal, numérica, métrico-analítica y topológica. Nosotros, de manera análoga a lo que hacen en Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Ordóñez (2011) con la integral, creemos necesario considerar también otra configuración que llamaremos algebraica. La "profesora (P)" analizada presenta básicamente esta configuración algebraica y en menor medida la métrica-analítica. Por otra parte, con relación a estas dos configuraciones los elementos esenciales no están bien explicados ni claramente institucionalizados, en particular el procedimiento general de cálculo de límites está presente de forma implícita.

Hay que resaltar que, situados en la configuración epistémica algebraica, no se visualiza una muestra representativa de tipos de límites ya que se pone el énfasis sobre todo en los que tienen la forma indeterminación 0/0…

La falta de procesos relevantes, en particular de modelación y de argumentación, la falta de representatividad de significados parciales *(*básicamente solo se presenta la configuración algebraica*)*, la falta de variedad de tipos de límites donde se aplica el cálculo de límites, la falta de claridad y de institucionalización de las nociones esenciales, etc., nos permiten afirmar que estas clases sobre límites tienen una baja idoneidad epistémica.

4.2.2 Episodio 12.

4.2.2.1 Cinco Niveles de Análisis.

A continuación, se presentan los cinco niveles de análisis aplicados al episodio 12; en el quinto nivel se hace alusión a la matriz de facetas anteriormente presentada.

Primer nivel de análisis.

En cuanto a la identificación de prácticas matemáticas según Font, Planas y Godino (2009) se observa que:

De manera similar al episodio 4, la "profesora (P)" parece ser el eje central del desarrollo de la clase aun así es visible la participación de algunos estudiantes los cuales responden a las preguntas que ella realiza durante el episodio.

Durante el desarrollo de este episodio es la “profesora (P)” quien **pregunta** y **responde** a sus propios interrogantes, los cuales parecieran estar dirigidos a los estudiantes, pero a los que en varios momentos no deja responder [EP.12 Sg 2]. Análogamente la “profesora (P)” es la que **cuestiona** de manera irónica los errores que cometen los estudiantes [EP.12 Sg 4] y no profundiza en las posibles causas de dichas confusiones; la “profesora (P)” también cumple el papel de **proveer** las herramientas y conceptos bases para el desarrollo del tema, aun así algunas representaciones en leguaje simbólico de los conceptos expuestos pueden llegar a ser algo confusos [EP.12 Sg 1, Sg 7, Sg 11] lo que puede generar en los estudiantes un manejo inadecuado del lenguaje matemático. Finalmente son evidentes como procesos realizados por la “profesora (P)” la **proposición** de mecanismos de solución, la **corrección** de errores, la **exposición** de propiedades (logarítmicas), **demostración** de las proposiciones matemáticas y **resolución** de los ejercicios.

Por otra parte, los estudiantes cumplen el papel de **receptores** de los planteamientos expuestos por la “profesora (P)”, ocasionalmente **proponen** [EP.12 Sg 12]y se evidencia un notorio condicionamiento de su papel a **ejecutar** los procedimientos establecidos en el episodio por la “profesora (P)” [EP.12 Sg 2]; los estudiantes también están encargados de **calcular** algunos límites y derivadas, sin embargo son pocos los estudiantes que participan en el desarrollo y aplicación de los procedimientos, debido a que generalmente es la “profesora (P)” la que realiza estos procesos; en casos particulares son algunos de los estudiantes los que **recuerdan, reconocen y asocian** el elemento conceptual para el desarrollo de un planteamiento matemático [EP.12 Sg 12].

Segundo nivel de análisis.

En cuanto a la identificación de objetos y procesos matemáticos según Font, Planas y Godino (2009) se tiene:

Lenguajes

- **Objetos**

  Verbal (Diferencia de cuadrados, derivada, logaritmo, derivación Exponencial, derivación logarítmica, propiedades, funciones trigonométricas, límite)

Simbólico: El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base:

$y = lnx \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}dx$, $Si\ y\ = \ sen\ x\ \rightarrow y'\ = (Cosx)\ dx$,$Si\ y\ = Cosx\ \rightarrow y'\ = (-Senx)dx$, $Si\ y\ = \ tgx\ \rightarrow y'\ = \ (sec^2x)\ dx$,$Si\ y\ = \ ctgx\ \rightarrow y'\ = (-csc^2x)\ dx$, $Si\ y\ = \ Secx\ \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$, $Si\ y\ = \ Cscx\ \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)\ dx$, $f'(0) = -\frac{2}{0} \rightarrow f'no\ está\ definida\ en\ 0$, $f'(x) = \lim_{h\to 0} f\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$

Este episodio está marcado por una constante presencia de elementos simbólicos. La carga de representatividad recae en las expresiones matemáticas que se presentan durante toda la clase; el lenguaje verbal es la herramienta mediante la cual se sustentan las proposiciones simbólicas, no es en sí centro de desarrollo, sino que cumple la función de medio de interconexión entre lo expuesto como concepto y lo representado de manera simbólica; aun así, ocasionalmente es e l lenguaje verbal el que permite la poca interacción profesor-estudiante y viceversa.

- Procedimientos

Evidentemente, al ser la "profesora (P)" el eje central, la mayoría de los procesos están caracterizados por la *validación* de los conceptos [Ep.12 Sg 1, Sg 7, Sg12] que se desarrollan durante el episodio; así mismo la "profesora (P)" es la encargada de la *enunciación y argumentación* de las proposiciones matemáticas, lo que genera un bajo índice de participación de los estudiantes durante la clase. Sin embargo, el uso de la abreviatura dx al enunciar las derivadas de las funciones no hace parte del saber institucional, pues esta expresión no representa la derivada interna de la función, sino es una representación de la diferencial de x: dx. Hace parte de la faceta cognitiva de la "profesora (P)" quien usa esta expresión con la intención de que el estudiante asocie con ella la derivada de la función, y lograr así un mejor desempeño en las evaluaciones.

Los estudiantes por su parte son los encargados de los procesos de *conceptualización;* es decir, son los que deberían interiorizar los conceptos y procesos expuestos por la "profesora (P)", su papel se caracteriza por una actitud pasiva desde la cual solo responden preguntas realizadas en pocos momentos del episodio donde la "profesora (P)" permite la participación [EP.12 Sg 12], la *identificación* de la herramienta necesaria para la demostración del límite trigonométrico también hace parte de los procesos realizados por los estudiantes (puntualmente un estudiante[Ep.12 Sg 12]); aun así los procesos de *proponer* y *argumentar,* que en gran medida deberían estar marcados por la participación de los estudiantes, quedan limitados debido a la actitud de la "profesora (P)" [Ep.12 Sg 2] .

Tercer nivel de análisis.

En cuanto a la descripción de interacciones en torno a conflictos matemáticos según Font, Planas y Godino (2009) se tiene:

- Interacción

Los patrones de interacción son muy parecidos a los propuestos en el tercer nivel de análisis del episodio 4. Parece ser una característica constante en el desarrollo de las clases que dirige la "profesora (P)", al darse siempre, el siguiente patrón de interacción: **inicio-respuesta-evaluación**, en algunos casos la respuesta es de un alumno (**r**), pero en muchos casos ella misma se responde (**R**).

Por otra parte, la "profesora (P)" limita la participación activa del estudiante, pues cuando realiza una pregunta (evidentemente dirigida a los estudiantes), no espera y se responde, ella misma, casi que de manera automática suponiendo en alguna medida, que los estudiantes no lo van a hacer. No obstante, este hecho no debe verse como una responsabilidad única de la "profesora (P)", pues si bien es cierto que cohíbe el tiempo de respuesta del estudiante, también es necesario tomar en cuenta que las actitudes de los estudiantes como: desinterés, preocupación, incomodidad, etc., y los imaginarios que poseen sobre el desarrollo de una clase de matemáticas: complicada, tediosa , aburrida, etc., son otros factores que propician un ambiente complicado para el desarrollo de la clase.

[Ep.12 Sg 2]. "**P:** Por propiedades de logaritmos, Ustedes qué prefieren derivar: ¿productos y cocientes, o sumas y restas?

Se responde a sí misma.

P: Pues sumas y restas por eso hacemos las propiedades."

La predominancia de la "profesora (P)" como elemento principal de la clase genera un ambiente poco dinámico. El desarrollo del episodio se torna lineal y en ocasiones predecible; la interacción la mayoría de veces queda reducida a: **pregunta la profesora- responde ella misma (I-R-E),** en contadas ocasiones es el estudiante es el que pregunta y no necesariamente hace referencia a un tema expuesto, sino que algunas veces tiene que ver más con cuestiones de plazos y tiempos de entrega de trabajos (i-R-E) [Ep.12 Sg 2].

En el aspecto cognitivo se puede decir:

El desplazamiento del estudiante hacia una posición meramente receptiva y operativa complejiza el análisis de falencias y vacíos conceptuales, ya que estas no se muestran explícitamente, sino que se extraen momentos puntuales en los que los estudiantes mediante gestos y actitudes dejan en evidencia su incomprensión de una pregunta o un concepto; ejemplo de ello es que durante varios momentos de la clase cuando la "profesora (P)" pregunta sobre la solución de un ejercicio, ellos guardan silencio.

Conflictos y dificultades

- **Conflictos semióticos** (**CS1**)

En este episodio un conflicto semiótico se evidencia en la proposición [Ep.12 Sg 1] realizada por la "profesora (P)" donde expresa lo siguiente:

$$y = \ln x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{x}dx$$

$$y = log_b x \ \equiv \ y = \frac{\ln x}{\ln b}$$

$$\downarrow$$

$$y' = \frac{dx}{x \ln b}$$

La expresión y' significa $\frac{dy}{dx}$, que representa una razón de cambio: el cambio de y con respecto al cambio de x, por lo que constituye una falta de precisión y de rigor escribir el dx en la parte derecha de la formula pues el dx ya está contenido en y'. Se puede interpretar que utiliza el dx para representar "la derivada interna de la función". Sin embargo, esta escritura y esta forma de hacer las cosas se caracteriza como un error y como una ambigüedad, ambas categorías generadoras de conflictos y obstáculos inferidos desde las prácticas observadas. Aquí aparece claro que la "profesora (P)" usa las diferenciales (dy, dx) para la función logarítmica de manera totalmente mecánica y por demás no institucional pues no distingue entre la derivada y la diferencial.

Por otra parte, no es sencillo evidenciar cuáles razones son las que llevan a que la "profesora (P)" utilice dicha expresión [EP.12 Sg 1-2-7-11-12] para representar la derivada de la función. El primer supuesto sobre este fenómeno podría ser que la "profesora (P)" intenta generalizar la proposición no solo para x sino que desea incluir funciones compuestas de tal manera que cuando se realice la derivada se tenga en cuenta la función interna contenida en In.

- **Errores y Ambigüedades**

Hay que resaltar que la "profesora (P)" en cuanto a las notaciones no siempre sigue reglas institucionales. Además de utilizar dx para representar derivadas o diferenciales, pareciera que los utiliza para representar números, cuando de hecho no son números. Esa expresión dx claramente no epistémica, no institucional, no rigurosa, es como una estrategia para que los estudiantes recuerden la derivada interna de la función.

- **Dificultades**

De manera general se evidencia una cierta dificultad por parte de los estudiantes en la comprensión de las propiedades de los logaritmos [Ep.12 Sg 4]. La "profesora (P)" escribe la siguiente función en el tablero:

$$f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$

La "profesora (P)" la reescribe usando propiedades de los logaritmos de la siguiente manera:

$$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\left(\sqrt{2x-1}\right)$$

$$f(x) = 3\ln(x-2) - \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)$$

Deriva la función y obtiene:

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

Es en este momento donde un estudiante propone que:

E: ¿Desde el comienzo habría podido ser:

$$\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$$

?

Inmediatamente la "profesora (P)" corrige al estudiante y le dice:

P: ¡no! Esas son las propiedades que ustedes se inventan. Si también tratan de hacerlo con el producto.

La pregunta del estudiante es sumamente profunda pues para él de alguna manera el logaritmo de un cociente debería ser el cociente de los logaritmos, pues ese operador Ln en la cognición funciona algo así como un operador lineal, es decir, debería poderse distribuir en el numerador y denominador.

Sin embargo, no hay una reflexión, ni un cuestionamiento para esclarecer cuáles son los motivos por los cuales el estudiante realiza dicha pregunta, la dificultad evidentemente tiene que ver con el manejo de las propiedades de logaritmos. Este hecho puede propiciar la permanencia de la incomprensión en el estudiante y de esta manera generar posteriores conflictos sobre la utilización de las propiedades de los logaritmos.

En cuanto a la gestión de la clase por parte de la "profesora (P)", se puede inferir que cuando hay una pregunta no se responde o no se aclara la duda manifestada. La respuesta se reduce a un conjunto de normas sin explicación tal como emerge en esta situación, que puede resultar en un potenciador de conflictos, obstáculos y dificultades presentes y futuras. La respuesta más bien representa una ironía, en la que no se responde la pregunta del estudiante, ni se pone un contraejemplo para hacerle ver que la propiedad que el propone no es correcta, sino que se contesta con una especie de sarcasmo: "Esas son las propiedades que ustedes se inventan".

Cuarto nivel de análisis.

En cuanto a la identificación de normas, basados en Godino, Font y Wilhelmi (2008) se infiere que:

- La clase empieza a una determinada hora con los estudiantes que estén, pero los otros pueden ingresar posteriormente, así mismo pueden retirarse cuando lo necesiten.

- La "profesora (P)" es eje central en cuanto al desarrollo temático, es decir las explicaciones de los temas, la resolución de los ejercicios, el planteamiento de talleres y los modos de proceder son dispuestos y desempeñados por ella.

- No se privilegia la participación de los estudiantes, ni se da el tiempo para identificar progresos o dificultades, ni tampoco se le da importancia a esta labor de evaluación que podríamos denominar formativa.

- Los estudiantes son receptores del proceso educativo, ellos escuchan, toman apuntes, en general no responden las preguntas.

- El esquema de la clase es, podríamos llamarlo, tradicional: la "profesora (P)" explica, habla, y los estudiantes copian y tratan de hacer los ejercicios; piden ayuda extra-clase.

- La interacción es casi nula, se habla con uno o dos estudiantes; Alejo, o en otros semestres, Felipe u otro que hace el papel de Alejo.

- no hay espacio para talleres o trabajo en grupo elaborados en la clase.

- El ritmo de dictar temas es apresurado, pues hay unos tiempos determinados por las respectivas guías de catedra, y por la realización de las pruebas conjuntas.

- Los estudiantes en general no reclaman acerca de las notas, ni cuestionan formas de evaluar o metodologías, menos contenidos temáticos o ejercicios.

- La "profesora (P)" asiste a todas sus clases, se preocupa por ir al día en contenidos, y hasta planea clases extras (por ejemplo, los sábados) para poder abarcar todos los temas propuestos.

- El uso de tecnología, o estrategias para visualizar funciones, gráficas, … está a cargo de un estudiante (Alejo) quien lleva su computador portátil, y la "profesora (P)" busca un cable y conectan al televisor. Si Alejo no llega o no lleva el portátil no se realiza nada.

- La "profesora (P)" regaña, es sarcástica ("toca pensar", "no se hagan los que están pensando", "esas son las propiedades que ustedes se inventan", "por eso se caen los puentes".

Quinto nivel de análisis.

En cuanto a la valoración de la idoneidad didáctica según Font, Planas y Godino (2009) se tiene:

Si bien el episodio está marcado por la interacción entre los diferentes actores del contexto educativo (profesor, estudiante), dicha interacción está caracterizada en gran parte del episodio por ser unidireccional, es decir, se desarrolla de tal manera que el flujo interaccional toma como punto de inicio a la profesora y se desplaza a los estudiantes, quienes pocas veces invierten dicho flujo para retroalimentar las explicaciones de la "profesora (P)", lo cual ayudaría a monitorear la compresión o dificultad de un tema por parte de los estudiantes.

La *faceta mediacional* queda reducida en el contexto tangible a la utilización del tablero como herramienta por excelencia para la exposición de proposiciones. Herramientas como televisores, computadoras, textos académicos son ocasionales y dependen en gran medida de elementos extracurriculares; para el caso puntual de este episodio dicho medio es visualizado en el episodio [Ep.12 Sg 4].

La predominancia de la *faceta epistémica* en la mayoría de los segmentos indica que uno de los focos de interés de la clase es la obtención de procedimientos básicos para la solución de ejercicios matemáticos. Para dicho efecto la "profesora (P)" enfatiza en lo que ella considera importante; así mismo corrige y realiza comentarios sobre los errores cometidos por los estudiantes; sin embargo aunque dicha faceta posea tal importancia, pocos son los momentos en los que los estudiantes tienen oportunidad de preguntar sobre lo que no les queda claro, al tiempo que en gran parte del episodio no se resuelve ni se profundiza sobre los vacíos conceptuales y procedimentales de los estudiantes, quienes ven limitada su participación a la mera recepción de información proporcionada por y desde la "profesora (P)".

En comparación con la faceta epistémica, de *la faceta cognitiva no* podemos decir mucho debido a que son pocos los instantes en que el estudiante trabaja de manera autónoma. La mayoría de los procesos matemáticos están a cargo de la profesora, así como la proposición de enunciados y la identificación de los errores; los estudiantes poco proponen modelos o procesos de solución para los ejercicios, son contadas las ocasiones en los que son los protagonistas del episodio. Esto puede estar relacionado con el hecho de que es la "profesora (P)" la que generalmente incentiva la interacción, aun cuando es ella misma la que no permite que se concrete eficazmente.

Por último, tenemos la *faceta ecológica*. Esta faceta es escasamente perceptible en el episodio; son pocos o insuficientes los indicadores que podemos encontrar a lo largo del episodio; la relación de los contenidos académicos propuestos con elementos extraacadémicos es a grandes rasgos imperceptible, no se evidencia explícitamente referencia a variables sociales, económicas, culturales, etc., lo cual puede transformase en una posible explicación a factores como:

- Desinterés de los estudiantes (¿Por qué es importante?)
- Descontextualización del conocimiento matemático (¿Dónde se usa?).
- Aplicabilidad del conocimiento matemático (¿Para qué se aplica en el mundo?)
- Importancia de los elementos conceptuales (¿Por qué es importante adquirirlos?)
- Incomprensión del cálculo.

4.3 Matriz categorial descriptiva (prácticas matemáticas y configuración de objetos) y de oposiciones.

4.3.1 [Ep. 4] Episodio 4. Ejercicios sobre límites algebraicos y trigonométricos.

Tabla 9. Matriz categorial descriptiva y de oposiciones – episodio 4

Categorías	Dualidades y Oposiciones
Problemas **P1:** Calcular $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ **P2:** Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$	

P3: Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$ **P4**: Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$ **P5:** Calcular $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$	
Lenguaje • Verbal Limite, límite especial, limites trigonométricos, identidades trigonométricas, ángulos especiales, ángulos coterminales, indeterminación, seno, coseno, tangente, circunferencia unitaria, ángulo, grados, triangulo, conjugado. • Simbólico $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$; $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$; $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}$; $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)$; $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\,x-\cos x}$; $\lim_{x\to a}f(x)$; $\frac{0}{0}$ Símbolos de las expresiones simbólicas de las funciones que aparecen ($tan\,x$, x^2, x^3.....) • Proposiciones <u>Previas</u> Para las funciones continuas $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ (implícita)	La definición es una expansión discursiva y también un concepto. La definición como letrero es un lenguaje. La definición también es un proceso y concepto. En el lenguaje hay términos, predicados, proposiciones, expansiones discursivas. Son Términos: Ostensibles. Sistémico. Expresión. Extensivo.

$1 - cos2x = sen2x$ $Tan\ x = \frac{senx}{cosx}$ $\frac{a}{a} = 1$	Son proposiciones como parte de lenguajes. No ostensivas. Intensivo.
El límite de un producto de funciones es el producto de límites $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = 1$	
Emergentes: 1) $\lim_{x\to 3}\frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2) $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 3) $\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x} = 0$ 4) $\lim_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3} = \frac{1}{2}$ 5) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right) = 1$ 6) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\ x-\cos x} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$	Anuncia que demostrara este primer límite que llama especial, sin embargo, el que realiza es el tercero. Estas 6 proposiciones son: No ostensivas Extensiva Sistémica Personal Las proposiciones son importantes por el concepto que expresan, por tanto, también pueden estar en la casilla de conceptos.
• Argumentos Argumento 1: Tesis $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ Razón 1° Forma $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} * \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}-\sqrt{3})}$ $\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ Tambien\ \frac{\sqrt{3}}{6}\ racionalizando$ 2° Forma $\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})}$ $= \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$	En las proposiciones y las razones lo importante no es el lenguaje sino el contenido conceptual.

<u>Argumento 1.1:</u> Tesis $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=na^{n-1}$ Razón $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ $Limite\ Especial$	Son proposiciones ostensibles y extensivas
<u>Argumento 2:</u> Tesis $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=0$	La razón del argumento es no ostensible e institucional porque se comparte.
Razón $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}*\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+cosx)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x(1-cosx)}$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{1+cosx}=1*\frac{0}{2}=0$	Se reconoce una dificultad para clasificar cada evento en las categorías de EOS
Se ha seguido el procedimiento de cálculo de límites para el caso de indeterminación 0/0 realizando un tratamiento y utilizando, entre otras, la propiedad que el límite de un producto es el producto de límites	
<u>Argumento 3:</u> Tesis $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}=\frac{1}{2}$ Razón Se cumple que $Tan\ x\ =\frac{senx}{cosx}$ $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{(tagx-senx)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx}{cosx}-senx\right)}{x^3}=$ $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{senx-senx*cosx}{cosx}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx(1-cosx)}{x^3cosx}=$ $\operatorname{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{senx(1-cosx)}{x^3cosx}*\frac{1+cosx}{1+cosx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx(1-\cos^2 x)}{x^3cosx(1+cosx)}=$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx*sen^2x}{x^3cosx(1+cosx)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{senx}{x}*\frac{1}{cosx(1+cosx)}$ $=\frac{1}{2}$	Hay varios tipos de argumentos, sin embargo, en esta clase son puramente algebraicos y procedimentales, El argumento es el resultado y el procedimiento. Es resultado en tanto objeto descrito en el análisis didáctico del EOS como queda lingüísticamente en la transcripción; Es proceso en tanto procedimiento argumentativo como ocurrió en la situación problémica en el aula.

El resultado de evaluar la función en x =0 es $\frac{1}{2}$ <u>Argumento 4:</u> Tesis $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right)= 1$ Razón $\lim_{x\to 0}\left(\frac{tgx}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{senx}{cosx}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x*cosx}\right) =$ $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} * \frac{1}{cosx} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{cosx} = 1$ <u>Argumento 5:</u> Tesis $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\ x-\cos x} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$ Razón $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(1-\tan x)}{sen\ x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(1-\frac{senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\frac{cosx-senx}{cosx}\right)}{sen\ x-\cos x}$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cosx-senx}{cosx(senx-cosx)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} - \frac{cosx-senx}{cosx(cosx-senx)} =$ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{cosx} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}$	
Conceptos Límites especiales, Funciones trigonométricas, Identidades trigonométricas, Límite indeterminado de tipo 0/0	Son: No ostensibles (inmateriales) Intensivos (generales) Contenidos. Intensivos
Procedimientos 1) Cálculo de límites por evaluación. 2) Racionalización. 3) Cálculo de límites indeterminados del tipo 0/0 4) Evaluar la función en $x = a$	Son: No ostensibles. Informales y no rigurosos Cálculos algebraicos Evaluación cálculo aritmético

5) En caso de tener una indeterminación hay que expresar la función de una forma diferente (hay que hacer un tratamiento usando propiedades). 6) Volver a evaluar para ver si desparece la indeterminación. 7) En caso contrario hay que volver a hacer un tratamiento usando propiedades. 8) Despeje de ecuaciones. 9) Uso de identidades trigonométricas para solución de límites.	Transformaciones tipo tratamiento de Duval Extensiva y no intensivo

Tabla 10. Elementos de análisis de resultados del episodio 4

Al tratar de distinguir los objetos que se podrían clasificar dentro de los lenguajes y los que no lo son, se encontraron frecuentes dificultades. Por ejemplo, las definiciones que se presentan por parte de la profesora o en los libros de texto son también proposiciones, claramente identificables y ostensibles, pero también podrían ser clasificadas como *conceptos*, pero serían no ostensibles. Las *proposiciones* y las *argumentaciones* son *lenguajes*, pero habría que caracterizarlas en sus propias categorías que se distinguen entre sí porque toda argumentación tiene una o más proposiciones, pero ambas volverían a aparecer en *lenguajes*. Para evitar estas dobles clasificaciones, tanto *proposiciones* como *argumentaciones* podrían ser reubicadas como subcategorías de los *lenguajes*, que sería una macro-categoría con situaciones, procesos y objetos. Las p*roposiciones* podrían tener a su vez una subcategoría que fueran las Definiciones cuando se toman como formulaciones lingüísticas, no como procesos mentales. Pero cuando en una argumentación se usa una definición sin repetirla, se puede clasificar como Concepto, y por lo tanto sería no ostensible. Pero p*roposiciones* y *argumentaciones* como subcategorías no agotan los objetos que pueden aparecer en la macro-categoría *lenguajes*. Podrían agregarse subcategorías como expresiones semióticas no articuladas (como los gestos), y en las articuladas se podrían distinguir subcategorías como términos, operadores y predicados; luego vendrían las p*roposiciones* y las demás *expansiones discursivas*, entre ellas las *argumentaciones*, las *narraciones* y las *instrucciones*.

Tabla 11. Viñeta episodio 4

Viñeta Ep4 Seg1-2-3
P: ¿Recuerdan el taller sobre límites? Pues hoy vamos a dedicar la clase a resolverlo: ustedes lo van a hacer ¿bueno? **P**: Empecemos: $\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3}$ Pasa a un estudiante e insiste en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias. Anota en el tablero la fórmula que ella llama límites **especiales:** 1) $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n-a^n)}{x-a} = na^{n-1}$ 2) $\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$ 3) $\lim_{x \to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0$
1° Forma *racionalizando* $\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} * \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x}-\sqrt{3})}$ $\lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ Tambien \frac{\sqrt{3}}{6}$
2° Forma *factorización:* diferencia de cuadrados en el denominador $\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}+\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
3° Forma. Aplicando la fórmula del "limite especial" $\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{x-3} = \frac{1}{2} * 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$
Son proposiciones ostensibles y extensivas

Tabla 12. Análisis de dualidades y oposiciones de la viñeta del episodio 4

Viñeta Ep4 Seg1-2-3	Análisis de dualidades y oposiciones
$\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{x - 3}$ $\lim_{x \to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$ La expresión correcta que corresponde es $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$	La profesora insiste nuevamente en que la raíz se pueda ver como diferencia de potencias para aplicarle la formula enunciada. Pero en ninguno de los libros de cálculo consultados aparece este como límite especial. También es importante preguntar: ¿por qué los estudiantes asocian inmediatamente, sin dudarlo, sin pensarlo que n es natural y por tanto no tiene sentido para potencia fraccionaria? Ese exponente n que aparece en esa fórmula al desarrollarlo por el teorema del binomio se supone tácitamente n entero positivo. De hecho, es un límite que requiere un caso de factorización de resta de potencias iguales, y su procedimiento nuevamente es algebraico, manual, quizá lo especial podría ser que la potencia n es intensivo y no extensivo, es generalización y no un caso particular con n=2 o n=3. Además, podría realizarse usando la regla de L'Hôpital pues es un límite de la forma 0/0 y quedaría de la siguiente manera derivando numerador y denominador por separado: $\lim_{x \to a} \frac{(x^n - a^n)}{x - a}$ $\lim_{x \to a} \frac{nx^{n-1}}{1} = na^{n-1}$

Tabla 13. Elementos de análisis de resultados de la viñeta seleccionada

Hay una resistencia en los estudiantes para realizar el límite propuesto con la fórmula de "limite especial", pues lo abordan en primer lugar por racionalización, método que está más asociado cuando se presentan raíces en los límites. O ese segundo procedimiento que involucra un caso de factorización en el denominador, que no es en lo primero que piensan la mayoría de los estudiantes. Pero el que la profesora insiste en usar como un caso particular de lo que ha llamado límite especial, ninguno lo ha realizado por ese método, incluso se tardan bastante en aplicar la fórmula para obtener el resultado, pues ahí no habrá ningún procedimiento más que reemplazar la x por el número 3.
Los argumentos son proposiciones como parte de Lenguajes, No ostensivas, Intensivo.
Hay varios tipos de argumentos, sin embargo, en esta clase son puramente algebraicos y procedimentales.
El argumento es el resultado y el procedimiento. Es resultado en tanto objeto descrito en el análisis didáctico del EOS como queda lingüísticamente en la transcripción; Es proceso en tanto procedimiento argumentativo como ocurrió en la situación problemática en el aula.
Se reconoce una dificultad para clasificar cada evento en las categorías de EOS.
Al peguntar a la "profesora (P)" la razón por lo que llama a ese límite "especial" respondió que así se lo enseñó un profesor en la licenciatura, y ese era "el profesor" admirado, el que sabía, el que formó a muchas generaciones de licenciados. Se podría afirmar que lo llama "especial" porque se hace por un modelo matemático o formula que evita realizar procesos algebraicos. Este caso podría corroborar la creencia de que el ejemplo enseña más que la palabra, y también que, por ese rol de autoridad que ostentan algunas personas se tiende a repetir actitudes y hábitos incuestionables en estas prácticas educativas.
En cuanto al ejercicio número 3 también tiene un procedimiento analítico de solución que consiste en multiplicar por la conjugada del numerador, hacer aparecer la identidad fundamental, reemplazarla, identificar el límite fundamental y evaluarlo, es decir, no tiene el estatus epistemológico del límite número 2 que sí es un teorema, que no se puede resolver con un tratamiento algebraico, ni analítico. Lo máximo que se puede hacer es verificarlo con vecindades alrededor de 0 y tomar el , luego el cociente y estimar la tendencia de esos cocientes hacia 1.

4.3.2 [Ep. 12] Episodio 12. Derivadas logarítmica y trigonométrica.

Tabla 14. Viñeta episodio 12

Viñeta Ep12 Seg2
P: Hoy se van a trabajar ejercicios de derivación exponencial y logarítmica $Y = lnx \rightarrow y' = \frac{1}{x}dx \qquad Y = logbx \equiv y = \frac{lnx}{lnb} \rightarrow y' = \frac{dx}{x}\ lnb$ ***P:*** *El cociente de la derivada de la función entre la función multiplicada por el logaritmo de la base:* $Y = e^x \rightarrow y' = e^x\, dx$ $Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$
Viñeta Ep12 Seg7
Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x\ dx$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente "derivada de seno es coseno".
Viñeta Ep12 Seg11
P: En el tablero: $Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (Cosx)\ dx$ $Si\ y = Cosx \rightarrow y' = (-Senx)dx$ $Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\ dx$ $Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$ $Si\ y = Secx \rightarrow y' = (Secx)(tgx)dx$ $Si\ y = Cscx \rightarrow y' = (-Cscx)(ctgx)dx$ Esto seis enunciados en los que claramente aparece el uso de en la derivada se presentan con el fin de dar cuenta de que no se presentó solamente en una situación, sino que hace parte del discurso de la "profesora (P)" al explicar todas las derivadas.

Tabla 15. Análisis de dualidades y oposiciones episodio 12

Viñeta Ep12 Seg2	Análisis de dualidades y oposiciones
$Y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}dx$	Es una proposición compuesta que consta de dos partes con un operador intermedio Las proposiciones están unidas por un operador de → implicación por lo tanto parecen requerir un proceso de validación. Las razones aparecen en lo no ostensible y en lo cognitivo personal. Esa implicación es compartida por todos los profesores por lo tanto es institucional también. El operador lógico → necesita una explicación que no aparece explícitamente. Las tesis están ostensibles como proposiciones lingüísticas compuestas de dos partes. Esa razón cognitiva es también institucional o epistémica porque es aceptada por toda la comunidad académica. Son proposiciones como parte de Lenguajes, No ostensivas Intensivo Extensiva Sistémica Personal La razón es no ostensible e institucional porque se comparte. Hay varios tipos de argumentos, sin embargo, en esta clase son puramente algebraicos y procedimentales. El argumento es el resultado y el procedimiento. Es resultado en tanto objeto descrito en el análisis didáctico del EOS como queda lingüísticamente en la transcripción. Es proceso en tanto procedimiento argumentativo como ocurrió en la situación problemática en el aula. Se reconoce una dificultad para clasificar cada evento en las categorías de EOS.

Viñeta Ep12 Seg7	Análisis de dualidades y oposiciones
Si $\boldsymbol{f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x\ dx}$ **P:** La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función, es un error decir solamente "derivada de seno es coseno".	La "profesora (P)" pone la diferencial de x (dx) como parte de la derivada. Se podrían inferir por lo menos dos explicaciones para esta escritura. La primera es que está pensando en una regla de la cadena y ese drepresenta la derivada interna de la función, *"la derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función"*, y la segunda es que está pensando en la integral, más exactamente en la antiderivada que requiere ese dx para devolverse y decir algo como la antiderivada de $\boldsymbol{\cos x\, dx}$ es $\boldsymbol{\sin x}$. Revela fundamentalmente esa falta de distinción rigurosa entre la derivada y la diferencial. La notación compartida por la comunidad académica y por los textos de cálculo para lo que en la clase la "profesora (P)" quiere decir es, por ejemplo: $\boldsymbol{\text{Si } f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x\ , o}$ $\boldsymbol{\text{Si } f(u) = \sin u, y\ u\ es\ funci\acute{o}n\ de\ x \to f'(u) = \cos u \frac{du}{dx}}$

Se tuvo la oportunidad de entrevistar a la "profesora (P)" para conocer de primera mano, tanto el uso como el significado que ella hace del dx, y tener de primera mano sus concepciones acerca de esa práctica, de esa forma de notación, como también acerca del significado que le otorga a ese dx, en un cierto momento de esa entrevista, a la que el lector puede acceder en la tesis completa, afirmó: "no siempre les van a colocar en el seno derivar el *sen (x)* sino ese dx lo que les van a colocar ahí es cualquier función.

Tabla 16. Análisis episodio 12 - segmento

Ep12 Seg4
Ahora el segundo: Alejo pasa y copia el ejercicio **Ejercicio 3:** $f(x) = \ln\left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$

$$f(x) = \ln(x-2)^3 - \ln\sqrt{2x-1}$$

$$f(x) = 3\ln(x-2) - \tfrac{1}{2}\ln(2x-1)$$

P: Ahí ya puedes derivar y ¿hay alguna otra propiedad? Ella misma se responde

$$f'(x) = 3\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{3}{x-2}\right) - \left(\frac{1}{2x-1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{6x-3-x+2}{(x-2)(2x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{5x-1}{(x-2)(2x-1)}$$

P: Por el otro lado seria largo y difícil: derivada de derivada de raíz derivada de cociente y después dicen que los parciales son difíciles y largos.

E: ¿Desde el comienzo habría podido ser

$$f(x) = \frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$$

P: ¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan. Si también tratan de hacerlo con el producto.

El análisis de este fragmento se centra en la pregunta del estudiante que consiste en aplicar "mal" las propiedades de los logaritmos y, sobre todo, por la respuesta de la "profesora (P)" que no argumenta por qué no se puede aplicar "esa propiedad", ni profundiza las razones por las cuales el estudiante está convencido que es correcta y así se abreviaría los cálculos, sino que emite una frase irónica: "¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan. Si también tratan de hacerlo con el producto". Es decir, los potenciales conflictos que podemos inferir en esta situación no dan lugar a una gestión adecuada por parte de la "profesora (P)" que logre transcenderlo.

4.4 Descripción de la Práctica.

Esta sección constituye el complemento a la sección 3.6 del Marco Teórico en la que se esbozaron rasgos generales descriptores de las PEUC. En este apartado se presentan los enunciados de lo más relevante al interior de las PEUC en una secuencia de 16 clases en diferentes semestres con la misma "profesora (P)".

De las matrices documentales y categoriales es posible concluir que las clases son magistrales, en las que la "profesora (P)" define, explica, justifica, evalúa, institucionaliza, responde, desarrolla, realiza, y tiene bajo su dominio la mayoría de las actividades que soportan el curso de Cálculo Diferencial.

Los estudiantes toman apuntes, atienden, preguntan poco, intervienen poco, pasan al tablero solo uno o dos en algunas clases, de un curso de 25 a 30 estudiantes. No se les asigna trabajo en grupo en el salón, tampoco se les da espacio para desarrollar talleres de ejercicios, ni para interactuar libremente hablando entre ellos alrededor del desarrollo de algún tema.

En cuanto a la gestión de las preguntas y a la atención que se da a ellas, aproximadamente en 15 ocasiones (segmentos) donde estudiantes le preguntan a la "profesora (P)", se observó que, o no se responden, o se responden con sarcasmos, con ironías que no profundizan en el trasfondo de la pregunta para decantar las posibles dificultades o eventuales conflictos que tiene el estudiante, ni tampoco se aprovechan para ampliar un tema o para hacer caer en cuenta en algo sumamente importante, o para que ellos tomen conciencia, objetiven algún proceso u objeto matemático, o alguna práctica que se considere fundamental. En ese sentido no se gestionan las dudas, las dificultades no se tienen en cuenta, mucho menos se interesa o cuestiona acerca de posibles obstáculos que puedan estar ocasionando tales dudas o que puedan estar generando potenciales obstáculos por dejar así las preguntas.

Otro aspecto muy llamativo es el hecho de dejar a medias algunos ejercicios, aproximadamente en 22 ocasiones (segmentos) en total de los 16 episodios de clase, por ejemplo, en los segmentos 6 y 7 del episodio 4 con frases como "termínenlo", o por ejemplo, en los segmentos 6 y 11 del episodio 12 enunciando frases que parecen estar guiando el proceso que falta: simplifiquen, evalúen y ya" pero que potencialmente son generadores de obstáculos que están emergiendo para futuros cursos, como el método de la derivación implícita, asemejando un proceso de derivadas parciales, o el de separar las variables como en ecuaciones diferenciales para hallar la derivada de logaritmo natural, momentos que no causan conflicto ni a los estudiantes, ni a la "profesora (P)", pero sí al observador o investigador. No se les moviliza a cuestionarse a sí mismos y cuando alguno se da cuenta que falta algo importante como que falta el la "profesora (P)" lo pasa por alto.

Con base en la clasificación de conflictos del EOS (sección 3.1): "…conflictos semióticos potenciales, entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido", es claro que esta categoría es la que aparece cada vez que la "profesora (P)" deja sin terminar un ejercicio, o dice termínenlo, o me confundí, factoricen y evalúen y ya. Frases como esa, son indicadores claros de este conflicto semiótico con esta explicación.

La interacción se limita a uno o dos estudiantes con los que la docente cuenta para que realicen algún ejercicio, dicten una definición, evalúen un límite, respondan alguna pregunta, traigan el portátil para proyectar alguna gráfica en los televisores, entre otras. De forma general, se encontró que en el Episodio 4 (Ep4) hay un poco más de interacción pues la "profesora (P)", al menos, pregunta a su estudiante: "Alejo" y pasa algún otro estudiante al tablero, mientras que el Episodio 12 (Ep12) en contraste, se desarrolla en su mayoría con explicaciones e intervenciones teóricas por parte de la "profesora (P)". A continuación, se presentan algunos segmentos (Sg.) de los episodios fundamentales en los que se documenta, soporta y evidencia lo descrito.

Ep4 – Sg. 2/6: La "profesora (P)" hace todo, tiende a tomarse la totalidad de la clase. Ella formula, pero ella misma responde. No permite que el estudiante responda. Trabaja con un estudiante que generalmente es el mismo: Alejo. Algo visto como una especie de segregación, pues solo tiene en cuenta a uno de todos los estudiantes, solo le presta atención a uno de ellos.

Ep4 – Sg. 2/5/7/10/11: La "profesora (P)" tiende a usar frases sarcásticas, irónicas, agresivas en cierto modo, lo cual revela una actitud de burla o peyorativa de parte de ella: *"No se hagan los que están pensando"*, *"Cuántas neuronas perdimos", "En esta toca pensar…"*.

Ep4 – Sg. 1/3/6: Con base en las experiencias recolectadas de la observación y documentación de las clases de la "profesora (P)" (por ejemplo, cuando dice “esas son las propiedades que ustedes se inventan” o no resuelven un ejercicio como debe ser) y en los resultados obtenidos en las evaluaciones y parciales [Ver Anexos] se puede inferir que los estudiantes vienen con muy pocas y deficientes bases algebraicas.

Ep4 – Sg. 8: En particular, por lo observado en todos los episodios de clase, a la “profesora (P)” le cuesta dejar hacer, dejar equivocarse, dejar rectificar, dejar preguntar, en fin, dejar trabajar a los estudiantes. Ella interviene rápidamente y empieza a hacer “lo correcto”, es como si sintiera que la clase se termina y no se alcanzó a hacer nada de lo esperado; es decir, dejarlos construir su propio conocimiento es considerado como: “no hacer nada” y que el tiempo de clase se ha perdido. En conclusión, no se fomenta la práctica de construir saber, de compartir procesos, de contrastar, de poner en común, de defender procedimientos, argumentos y resultados.

Ep4 – 8/9: Hay una constante tendencia de la “profesora (P)” de cambiar las prácticas y, de paso, la intencionalidad de la clase, pues no es consecuente entre lo que dice y lo que hace; de ahí que se pueda inferir que es un comportamiento arraigado en su ser docente

Ep4 – 11: Borra muy rápido. No da el tiempo suficiente para que el estudiante tome notas, ponga atención, piense

Ep12 – 2/6: Sigue en una dinámica de preguntar y responder ella misma.

Ep12 – 4: Al hacer resta de fracciones, al parecer no siente la necesidad de explicar dudas que algunos estudiantes seguramente tienen; postura que se justica o se defiende con frases como: “eso es álgebra”, “no me puedo devolver tanto, hasta el colegio, ni más faltaba”, “esa parte es de ustedes”. Dichas frases infieren que la materia álgebra es un prerrequisito del cálculo, base sin la cual se dificulta avanzar en su estudio y, mucho menos entenderlo. Por otro lado, da una mirada peyorativa a que el álgebra se da por vista, por asimilada por el estudiante, tanto, que no se puede “rebajar” a explicar algebra, [“ni más faltaba”, no me puedo devolver tanto”].

Capítulo 5.

Resultados y conclusiones de la investigación

5.1 Introducción.

Se presenta en este capítulo una tabla de dificultades, conflictos y obstáculos inferidos (D.C.O) aplicada a las viñetas seleccionadas de los episodios fundamentales, cuya intencionalidad es distinguir lo observable que son las dificultades y los conflictos, y lo no observable que son los obstáculos, como una inferencia de tipo abductivo, lo cual hace parte de la discusión de resultados de la investigación. A partir de esta conformación de la tabla, se presentan unas conclusiones tanto desde la indagación teórica como desde el análisis de los datos que responden a las preguntas de investigación inicialmente propuestas.

5.2 Resultados.

En cuanto a la categoría de *lenguajes* en las matrices categoriales, al tratar de distinguir los objetos que se podrían clasificar dentro de los *lenguajes* y los que no lo son, se encontraron frecuentes dificultades. Por ejemplo, las definiciones que se presentan por parte de la "profesora (P)" o en los libros de texto son también *proposiciones*, claramente identificables y ostensibles, pero también podrían ser clasificadas como *conceptos*, pero serían no ostensibles.

Las *proposiciones* y las *argumentaciones* son *lenguajes*, pero habría que caracterizarlas en sus propias categorías que se distinguen entre sí porque toda argumentación tiene una o más proposiciones, pero ambas volverían a aparecer en *lenguajes*. Para evitar estas dobles clasificaciones, tanto *proposiciones* como *argumentaciones* podrían ser reubicadas como subcategorías de los *lenguajes*, que sería una macro-categoría con situaciones, procesos y objetos.

Las *proposiciones* podrían tener a su vez una subcategoría que fueran las *definiciones* cuando se toman como formulaciones lingüísticas, no como procesos mentales. Pero cuando en una argumentación se usa una definición sin repetirla, se puede clasificar como *concepto*, y por lo tanto sería no ostensible.

Pero *proposiciones* y *argumentaciones* como subcategorías no agotan los objetos que pueden aparecer en la macro-categoría *lenguajes*. Podrían agregarse subcategorías como expresiones semióticas no articuladas (como los gestos), y en las articuladas se podrían distinguir subcategorías como términos, operadores y predicados; luego vendrían las *proposiciones* y las demás *expansiones discursivas*, entre ellas las *argumentaciones*, las *narraciones* y las *instrucciones*.

A continuación, se presentan las Dificultades, Conflictos y Obstáculos inferidos (D.C.O) de los episodios fundamentales 4 y 12, con las respectivas viñetas seleccionadas, dispuestos estos resultados en forma de tabla.

Tabla 17. Tabla D. C. O. número 1

Propone un ejercicio:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)}{x - 3}$$

Al pedir que lo resuelvan no lo hacen como ella espera, sino que en primer lugar lo desarrollan racionalizando el numerador:

$$\lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)}{x - 3} * \frac{\left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{(x - 3)\left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Luego lo hacen viendo el denominador como un caso de diferencia de cuadrados, es decir, usando factorización.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{\left(\sqrt{x} + \sqrt{3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

<table>
<tr><td colspan="4">Por último, pasa un estudiante y le solicita explícitamente que lo desarrolle usando la “fórmula del límite especial” que anotó en el tablero.
$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$
Con dudas el estudiante aplica el “limite especial”.
$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{3}\right)}{x-3}=\frac{1}{2}*3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4 Seg. 2</td><th>Dificultades</th><th>Conflictos</th><th>Obstáculos Inferidos</th></tr>
<tr><td>Hay una dificultad en ver las raíces cuadradas como diferencia de potencias iguales. Y un obstáculo no precisamente semiótico sino generado por la semiótica.

Hay dificultad entre los estudiantes y la docente pues ellos no ven que se pueda aplicar la fórmula a este límite</td><td>Conflicto pues hay disparidad de significados: para los estudiantes el n de la fórmula es entero positivo, por tanto, la potencia fraccionaria no se ajusta al caso.

Hay un desajuste de significados, realmente hay un conflicto semiótico epistémico y cognitivo.</td><td>Es de resaltar que los estudiantes resolvieron el límite, e incluso de dos formas: racionalizando que fue en lo que primero pensaron, multiplicaron por la conjugada del numerador arriba y abajo, simplificaron, evaluaron el límite. Y en segundo lugar factorizando como diferencia de cuadrados el denominador, no fue nada fácil verlo de esta forma, aunque no fue tan rápido, pues se espera que las raíces cuadradas sean exactas y no que se dejen indicadas. El obstáculo radica en que ellos no pueden ver esta expresión como un caso de “límite especial” que la profesora enuncia, y el que ella espera que apliquen. La dificultad aquí no es algebraica - operativa sino como “institucional” en tanto hay desajuste de significados.</td></tr>
</table>

Tabla 18. Tabla D. C. O. número 2

<table>
<tr><td colspan="4">Cuando la profesora escribe de manera más formal los limites en el tablero comete un error, pues pone un 3 en el límite, en vez de a:
$\lim\limits_{x\to 3} \frac{(x^n - a^n)}{x - a} = na^{n-1}$ $\sqrt{x} = x^{1/2}$ $\sqrt{3} = 3^{1/2}$
En un momento de la clase cuando le pregunte en privado, porque los llamaba así, me dice que porque así se los enseñaron cuando vio calculo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4 Seg. 3</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td></td><td>Se presenta una imprecisión en la escritura del límite pues escribe en vez cuando lo está enunciando en forma general lo que también contribuye a confundir aún más la aplicación de ese “limite especial”.</td><td>Este “limite especial” que llama la profesora no es más que la aplicación de la regla de L’Hopital pues el límite está en la forma 0/0 lo que permite derivar arriba y abajo por separado y llegar al resultado que se presente.
Este argumento: “…así me lo enseñaron” demuestra que las prácticas de enseñanzas malas o buenas se adquieren y se mantienen por imitación a lo largo de la formación académica.</td></tr>
</table>

Tabla 19. Tabla D. C. O. número 3

<table>
<tr><td colspan="4">Yo voy a demostrarles el primero y el otro lo hacen ustedes y está en todos los libros.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4 Seg. 4</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td></td><td>Es un conflicto epistémico ya que se presenta una disparidad de significados del término demostración.</td><td>La profesora es imprecisa en el lenguaje puesto que dicen va a demostrar uno y realmente lo que hace es desarrollar el tercero.
Usa el termino demostrar cuando en realidad lo que hace es desarrollar el ejercicio algebraicamente a lo cual no se le puede llamar en matemáticas demostración.</td></tr>
</table>

Tabla 20. Tabla D. C. O. número 4

<table>
<tr><td colspan="4">La profesora le pide a Alejo que resuelva
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cosx}{x}$$
Multiplica por la conjugada del numerador, aplica la identidad fundamental, separa el límite y Alejo evalúa. A pesar de que afirma que ellos lo hagan de tarea, no espera ni 10 segundos y se pone a realizarlo y al final dice “termínenlo”</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 4 Seg. 6</td><th>Dificultades</th><th>Conflictos</th><th>Obstáculos Inferidos</th></tr>
<tr><td>genera una dificultad al no permitir que los estudiantes resuelvan el ejercicio para ver las dudas y posibles conflictos que tengan

Dificultad porque la docente no completa ciertos ejercicios o cortaba el proceso, lo que no permite su completa comprensión.</td><td>Termínenlo. Dejar inconcluso un ejercicio es potencialmente generador de conflictos,</td><td>Hay una baja interacción.

La profesora pregunta, formula, responde, escribe, evalúa, institucionaliza; es ella quien lo hace todo, lo cual se asocia con un nivel bajo en la faceta interaccional.

Dejar inconcluso algún ejercicio es potencialmente generador de conflictos, pues no se sabe si lo terminen bien, o si realmente lo termine, y entonces queda en su cognición y en sus prácticas a medio hacer, con vacíos.</td></tr>
</table>

Tabla 21. Tabla D. C. O. número 5

<table>
<tr><td>La profesora plantea un ejercicio que considera “interesante”.
$$\lim_{x \to 0} \frac{(tagx - senx)}{x^3}$$
Les pregunta a algunos estudiantes partes del proceso, pero no espera la respuesta y lo desarrolla a su manera.</td></tr>
</table>

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 4 Seg. 7	Dificultad al aplicar identidades trigonométricas Dificultad entre los estudiantes en los procedimientos algebraicos Dificultad en el desarrollo del límite pues no señala claramente cómo se habría podido obtener ese del que habla.	En un momento del desarrollo del ejercicio dice *"me perdí"* y pide que lo terminen. Pierde o cambia la intención de trabajo en grupo. Lo anuncia y luego lo cambia. Por último, también afirma que desde el comienzo se podía obtener un a partir del ejercicio anterior.	Considera interesante el ejercicio porque involucra varias identidades trigonométricas y procesos algebraicos, temas en lo que sabe que los estudiantes presentan dificultades. Es la profesora quien nuevamente desarrolla el ejercicio quitando la posibilidad de participación de algún estudiante a pesar de que les formula, pero son retoricas y no tiene en cuenta. El hecho de decir "me perdí, termínenlo" es generador de dificultades, conflictos y de obstáculos pues deja a medio hacer un ejercicio que potencialmente presenta vacíos, falencias, incertidumbre y más si no hay la retroalimentación respectiva. Respecto al trabajo en grupo cambia las prácticas que quisiera hacer, por supuesto también la intencionalidad.

Tabla 22. Tabla D. C. O. número 6

<table>
<tr><td colspan="4">La profesora expresa la derivada de $\boldsymbol{Y = In\ x}$ como $y' = \frac{1}{x}dx$,

Y también las dos derivadas siguientes:
$$Y = e^x \rightarrow y' = e^x\,dx$$
$$Y = a^x \rightarrow y' = a^x \ln a\ dx$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ep. 12 Seg. 1</td><td>Dificultades</td><td>Conflictos</td><td>Obstáculos Inferidos</td></tr>
<tr><td></td><td>El uso de ese dx al lado derecho es un error desde el punto de vista matemático, epistémico e institucional. Desde el punto de vista del análisis Constituye un conflicto epistémico y cognitivo de la profesora, sin embargo, ese conflicto no es público ni observable.

Es un indicador de un conflicto epistémico-cognitivo de la profesora.</td><td>Puesto que dx representa una diferencial y no una derivada. Además, la derivada es una razón de dos diferenciales: $y' = \frac{dy}{dx}$ es decir, la derivada ya contiene la expresión dx, luego no se explica cómo ese dx aparece multiplicando al otro lado de la ecuación.

Se podría atribuir esta conducta tan particular de dos formas:

Que ella está pensando como en variables separables cuando se intenta resolver una ecuación diferencial, o que el dx juegue el papel que juega en la integral indefinida.

Ella tiene su propia forma de institucionalizar, tiene su propia concepción de las derivadas con el fin de que los estudiantes se acuerden de las fórmulas.</td></tr>
</table>

Tabla 23. Tabla D. C. O. número 7

La profesora pide derivar la siguiente función:

$$f(x) = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{3x}{x+2}\right)}$$

Y convierte la raíz cubica en potencia (1/3)

$$f(x) = \ln \left(\frac{3x}{x+2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 3	Dificultad en expresar las raíces cúbica en forma de potencia Dificultad para apreciar y entender la conveniencia de escribir las raíces en forma de potencia		No explica ni ve la necesidad de aclarar por qué la potencia queda elevada a la 1/3, es decir, convierte la raíz cubica en potencia sin tener en cuenta si es claro para todos los estudiantes. Y tampoco argumenta la razón por la cual conviene más esa representación semiótica, que es justamente para aplicar propiedades de logaritmos antes de derivar.

Tabla 24. Tabla D. C. O. número 8

Al terminar de resolver la derivada de la función:

$$f(x) = \ln \left[\frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}\right]$$

Aplicando propiedades de los logaritmos, un estudiante le pregunta si desde el comienzo habría podido ser

$$\frac{\ln(x-2)^3}{\ln\sqrt{2x-1}}$$

A lo que la profesora responde: "¡No! Esas son las propiedades que ustedes se inventan… Si también tratan de hacerlo con el producto"

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 4	Dificultad al entender y aplicar las propiedades de los logaritmos, en particular el logaritmo de un cociente Dificultad al recibir la respuesta a la pregunta formulada en forma de ironía o sarcasmo	Discordancia entre lo que los estudiantes creen que debería ser el logaritmo de un cociente y lo que matemáticamente es correcto.	La pregunta del estudiante tiene mucho sentido porque parecería natural que el logaritmo de un cociente sea el cociente de los logaritmos, pero no es así y no se explica el por qué. Ésta sobre generalización de patrones de linealidad constituye un obstáculo que se mantiene porque no se profundiza la respuesta, no se hace una reflexión, ni epistémica ni didáctica sobre hechos como este, lo que mantiene y perpetúa este tipo de creencias en los estudiantes.
Aquí se puede observar un inadecuado manejo y gestión de las preguntas formuladas por los estudiantes, las escasas ocasiones en que se animan a preguntar. Una inadecuada manera de responder pues solo se señala que son invenciones, pero ni siquiera se contrasta con la propiedad matemáticamente correcta, ni se profundiza un poco para decantar las posibles dudas, creencias, misconcepciones que puedan estar provocando tal forma de pensar y proceder.			

Tabla 25. Tabla D. C. O. número 9

Se repite ese uso particular del al hablar de las derivadas trigonométricas, tales como:

$$Si\ y = sen\ x \rightarrow y' = (cosx)\ dx$$

$$Si\ y = cosx \rightarrow y' = (-senx)dx$$

$$Si\ y = tgx \rightarrow y' = (sec^2x)\ dx$$

$$Si\ y = ctgx \rightarrow y' = (-csc^2x)\ dx$$

$$Si\ y = secx \rightarrow y' = (secx)(tgx)dx$$

$$Si\ y = cscx \rightarrow y' = (-cscx)(ctgx)dx$$

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 7, 11	Dificultad de la docente consigo misma al utilizar una expresión no adecuada para significar la derivada de la función	Conflicto semiótico epistémico y cognitivo: desajuste de significados institucional-personal en el docente	Esto constituye un conflicto semiótico-epistémico y cognitivo desde el punto de vista del docente. Epistémico, porque hay una disparidad entre lo institucional matemático y lo que ella ha apropiado como la derivada de una función; y cognitivo, porque esta disparidad o discordancia de significados a pesar de darse un sujeto epistémico como el docente marca la forma como ella se ha apropiado de este saber cognitivo.

Tabla 26. Tabla D. C. O. número 10

Cuando Alejo le pregunta en donde está el en la demostración de:

$$f(x) = sen\,x \rightarrow f'(x) = (cosx)\,dx$$

Cuyo resultado de la demostración fue:

$$f'(x) = \cos x$$

La profesora no responde.

	Dificultades	Conflictos	Obstáculos Inferidos
Ep. 12 Seg. 12			Este segmento es sumamente importante pues un estudiante muy agudamente se da cuenta que en la demostración al final por ninguna parte se ha obtenido el . Esto ha debido tocar a la profesora, hacerla reflexionar pues debería crear en ella un conflicto; si se profundizara en esa pregunta del estudiante quizá se hubiera podido llegar a la conclusión que efectivamente esa forma de escribir las derivadas con ese dx al final no es matemáticamente correcta. Pero a cambio de toda esta potencialidad, no hubo respuesta por parte de la profesora y se pasó a otro tema, se dio por terminada la clase.

5.3 Conclusiones de la Indagación Teórica.

1. Inicialmente se partió de una reflexión amplia sobre las culturas, las ciencias, los conocimientos, los saberes y las opiniones, en la que se llamó la atención sobre el hecho de que en una concepción amplia de opinión, de saber, de conocimiento, de ciencia y de cultura no es posible concebir unos conceptos sin los otros, y se hizo explícito que la epistemología subyace a todos esos conceptos, en tanto forma de aproximarnos al conocimiento científico, razonado, sustentado, fundamentado, y no al de la mera opinión, primer obstáculo que hay que superar, según diría Bachelard.

2. De esa reflexión se derivó una primera conclusión. Los obstáculos epistemológicos son obstáculos para un cambio en la manera de construir conocimiento y de aprender; no son solamente obstáculos para una correcta o incorrecta comprensión; es decir, obstaculizan la comprensión en sí misma. El rastreo teórico nos ayudó a separar las *dificultades* de aprendizaje y los *conflictos* semióticos, que se observan en la interacción entre maestros y estudiantes, de los *obstáculos* subyacentes que no son ostensibles ni directamente observables, sino que solo podemos inferirlos a partir de los datos por medio de las herramientas teóricas de que disponemos porque han sido ya trabajados en varias teorías de la Didáctica de las Matemáticas: en el EOS, en la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau, en la teoría de Pensamiento Matemático Avanzado de Tall, en el Enfoque Noético-Semiótico de Duval, en el Enfoque Semiótico-Cultural de Radford y en otras teorías sobre el aprendizaje, tanto respecto a los procesos cognitivos personales de los estudiantes como respecto a la intermediación lingüística (que consideramos solo parte de las distintas interacciones semióticas en distintos registros). En síntesis pudimos especificar que las dificultades y conflictos son detectables desde la observación no participante y en las respuestas de los participantes a preguntas de otros participantes y a las posteriores preguntas, exámenes y entrevistas de los investigadores y, por ello, podrían ser en alguna forma ostensibles; pero los obstáculos no lo son, sino que son inferencias que hace, en este caso el investigador, en otros podría ser el mismo profesor (en algunos casos a posteriori) a partir de sus "microscopios" teóricos. Por ello podemos fundamentalmente atribuir las dificultades y conflictos que observamos a *obstáculos didácticos* causados involuntariamente por los procesos

seguidos por los docentes en las situaciones didácticas en las que ubican a sus estudiantes y en los problemas o tareas que en ellas les proponen, y por las herramientas de enseñanza empleadas por los docentes (incluido el lenguaje utilizado como herramienta privilegiada, según Vygotsky, y en particular, incluidas las producciones lingüísticas producidas por el registro semiótico de la lengua materna del estudiante como registro privilegiado pero no único pues sería ineficaz en algunos casos, si no se triangula con otros registros, según Duval); también podemos atribuir las dificultades observadas a *obstáculos cognitivos* en cada estudiante, debidos a los distintos grados de conocimientos previos de tipo conceptual o de adquisición de destrezas de cálculo algebraico y, a mayor nivel de profundidad, podemos atribuirlas a *obstáculos epistemológicos* que se deben a conocimientos previos adquiridos y arraigados que han sido exitosamente utilizados en otras situaciones problemáticas anteriores pero que inconscientemente para maestros y discípulos impiden las reconceptualizaciones necesarias para superar las dificultades observables. En una u otra concepción de sociedad, cultura e interacción humana, los tres tipos de obstáculo referidos anteriormente son culturales.; por ser atribuibles a cada estudiante en particular, son también obstáculos individuales, y todos ellos, más o menos directamente, son también de naturaleza semiótica; pero los obstáculos didácticos, y en particular los lingüísticos, se pueden considerar más directamente como culturales, y los cognitivos y los epistemológicos se pueden considerar más directamente como individuales, en cuanto la cultura y en particular el lenguaje, han sido ya internalizados y "hechos propios" o "apropiados" por el estudiante en procesos de aprendizaje anteriores a la situación observada en una investigación.

3. Así que podemos introducir a los estudiantes en una nueva situación didáctica, problemática o situación-problema y esperar que en el curso de ella emerjan toda clase de dificultades y conflictos, que denominamos errores, misconcepciones, malas comprensiones o les damos otros nombres peyorativos, pero difícilmente podremos reorientar eficazmente nuestras prácticas como docentes de manera que podamos superar esas dificultades y conflictos si no podemos atribuirlas a obstáculos específicos que consideramos actuantes y potentes aunque directamente inobservables. Precisamente esta es una de nuestras principales tareas como profesores: si conjeturamos a

qué tipo de obstáculo pueden deberse las dificultades y conflictos experimentados, con más eficacia podremos ayudar a los estudiantes a superarlos por sí mismos, a ser conscientes de las diferencias; entonces, los estudiantes quizás puedan hacer sus propias reorganizaciones mentales y reconceptualizaciones de manera que tengan menos dificultades y experimenten menos conflictos para alinear sus producciones cognitivas internas con las epistémicas institucionalizadas en los currículos, textos y producciones matemáticas avanzadas.

4. *Superar obstáculos* no significa cambiarse a otro sistema de creencias o a otro esquema de pensamiento más persistente y más creíble, sino más bien es un proceso crítico y autocrítico que –con la ayuda del docente dotado de los "microscopios" teóricos apropiados– puede llegar a ser más apropiado para que cada estudiante pueda aproximarse a los problemas con los que se enfrenta en cada situación didáctica con una permanente conciencia sobre el campo de construcción y aplicación de los conceptos, modelos y teorías, acerca de su alcance y de sus limitaciones para saber en qué dominios aplicarlos y en cuáles no, así como para automotivarse y autoevaluarse.

5. La razón por la cual un educador matemático de cualquier nivel de enseñanza podría llegar a interesarse por la teoría de los obstáculos y a distinguirlos de los conflictos y dificultades es porque el patrón del desarrollo conceptual en la historia de muchas ramas de las matemáticas y la física parece ser "recapitulado" cada vez que un estudiante en su niñez y adolescencia se embarca en el proyecto de comprensión de algo nuevo o en la construcción de un nuevo concepto. En ese sentido muy restrictivo pero utilizable de manera heurística, podríamos hablar de la recapitulación del asocio génesis histórico-cultural de los conceptos científicos en la ontogénesis individual del aprendizaje de esos mismos conceptos por parte de los estudiantes (Piaget y García, 1982; para la reinterpretación heurística, ver Vasco, 1995).

6. El estudio de los conflictos y dificultades detectados en la transición del álgebra al cálculo diferencial y de los obstáculos que se pueda conjeturar que están activos detrás de lo observado podrá aportar muchas herramientas de apoyo y orientación didáctica a los formadores de profesores, a los profesores en ejercicio y a los estudiantes que se preparan para ser futuros profesores en varios aspectos: en la caracterización y explicación de la estructura y

funcionamiento de cada obstáculo inconscientemente atravesado en el camino de los estudiantes por la actividad semiótico-comunicativa del docente mismo, y por lo tanto, dentro del sistema didáctico; en afinar su mirada y su atención para no caer en imprecisiones que se conviertan en obstáculos didácticos que creen dificultades y conflictos a sus estudiantes, y en la explicitación de herramientas teóricas y metodológicas para el mejoramiento de su práctica docente que le sean útiles para superar esas dificultades y conflictos si se dan, y para facilitar y potenciar su propio aprendizaje continuado y permanente en el cálculo diferencial e integral y en su enseñanza en diferentes niveles de escolaridad.

7. Respecto a cómo se generan ciertas dificultades o conflictos a partir de las prácticas cotidianas en el aula, sin consciencia y sin culpa alguna por parte del docente, se podría afirmar que siempre que las clases sean tales como transcurrieron las clases que fueron documentadas, observadas y analizadas en esta investigación, la consecuencia difícilmente evitable es que se van a generar este mismo tipo de dificultades y conflictos. Paralelamente, se puede también afirmar que siempre que la gestión de los conflictos y las respuestas a las preguntas, a las dudas y a las inquietudes de los estudiantes sean como se documentó en los episodios analizados aquí, estas mismas dificultades van a seguir estando presentes; es decir, se van a mantener en un modelo de prácticas educativas universitarias en la iniciación del Cálculo Diferencial e Integral (PEUC) que no permiten, ni fomentan, ni parecen posibilitar la interacción productiva, ni la retroalimentación apropiada, ni la gestión eficaz de los conflictos, ni las respuestas adecuadas a las preguntas de los estudiantes.

8. En el camino del aprendizaje del Cálculo en las universidades, o sea, en las Prácticas Educativas Universitarias (PEU) de la adquisición de conocimientos, habilidades y destrezas matemáticas, para el caso del Cálculo como rama aplicada del análisis matemático se podría ya adelantar otra conclusión: mientras el estudiante no pase de tomar las fórmulas y ecuaciones como símbolos de procesos de calcular números a partir de remplazar variables por constantes numéricas o —para reformular lo anterior con la teoría APOE de Ed Dubinsky y con la teoría de la primera Anna Sfard (1991, 1994)— mientras no se logre el paso de *acciones y procedimientos* a los

objetos y *esquemas*, y mientras no se pase de los *procesos* a la *reificación*, el estudiante no puede pasar de los sistemas aritmético-algebraicos, cuyos elementos son los números enteros, fraccionarios y reales, a los sistemas analíticos, cuyos elementos son las funciones como operaciones unarias reificadas. Tanto los estudiantes como muchos de sus profesores siguen pensando que el sistema simbólico que aprendieron en el álgebra de bachillerato representa lo mismo cuando se usa en el cálculo, pues en ambas asignaturas basta saber operar con algunas reglas que se refieren solo a los símbolos, sin tener que pensar en los conceptos. Pero no es así, pues manejar variables como $x, y, z,$ cuyos valores son números específicos de un sistema numérico elemental, como R, no es lo mismo que utilizar, además, nuevas variables como $f, g, h,$ cuyos valores son funciones específicas de un espacio funcional F(R^n en R^m), que transforman los valores de argumentos, por ejemplo, x, y, z en otros valores, ni las operaciones usuales entre números son las mismas que las operaciones entre funciones, y menos todavía, no hay consciencia clara de que esas operaciones pueden o no diferir de la nueva operación básica entre funciones, que es la composición, nunca explicitada en el álgebra elemental. (Neira, 2012)

5.4 Conclusiones del análisis de los datos.

5.4.1 Respecto al uso del dx al plantear las derivadas de $senx, lnx, cosx, tanx$ y otras funciones

Cuando la "profesora (P)" ubica, siempre al lado derecho de la derivada de la función la expresión dx, como se documentó en la sección respectiva, es posible afirmar que hay aquí unas prácticas, discursos, formas de expresión y de enseñanza que no se pueden atribuir a la comunidad académica internacional, ni siquiera a la de la misma universidad y facultad en donde ejerce su docencia la "profesora (P)" observada, sino a ella como "profesora (P)" concreta y particular o a cada profesor que incorpore ese tipo de prácticas, discursos y formas de expresión con la convicción de que está proponiéndola a sus estudiantes como mediación del saber sabio al saber que está de facto enseñando, sin ser consciente de las diferencias entre el saber sabio o epistémico, el saber institucional de su propia institución y el saber que él toma por el saber a enseñar aquí y ahora. Esta distinción nos aclara por qué la "profesora (P)" puede utilizar algo que no está ni en el saber sabio ni en el saber a enseñar, con toda la consciencia de que es una expresión matemáticamente correcta y didácticamente potente para resolver futuros ejercicios de derivación.

Aparece en esa viñeta una práctica distante de lo epistémico y de lo institucional. Podemos categorizarla como una práctica no institucional, no epistémica, que es fruto de la apropiación personal que la "profesora (P)" ha hecho de las derivadas y las diferenciales, por una parte, y de otra, por las dificultades que ella sabe que los estudiantes van a encontrar en las preguntas de los exámenes, y por tanto ella se ha apropiado una práctica que cree les va a ayudar a sus estudiantes resolver esos ejercicios sin dificultad. El uso del dx después de la derivada de la función, no es institucional, es cognitivo de ella; parece jugar el rol para la "profesora (P)" de la derivada interna de la función que ella en la entrevista aclara diciendo:

> "¡Está mal decir que la derivada de seno es coseno, no no no no! *La derivada del seno de una función es el coseno de la función por la derivada de la función": dx* representa justamente "la derivada de la función".

Curiosamente, la "profesora (P)" utiliza no una expresión que se parezca a otras que ha utilizado para las derivadas, como '$\frac{du}{dx}$', o un apóstrofe (como u'), sino 'dx', que se utiliza en las integrales para expresar cuál es la variable con respecto a la cual se integra: $\int f(x)dx$.

Aunque no se tienen datos explícitos acerca del aspecto cognitivo en los estudiantes, porque la interacción de la "profesora (P)" con ellos fue muy poca y porque no fue posible seguir el desempeño de los estudiantes precisamente por el esquema y la práctica instaurada por la "profesora (P)" ya descrita en las matrices documentales, sí es posible inferir algunos elementos a partir de las preguntas, a partir de las proposiciones interrogativas y de los resultados obtenidos.

Analizando los exámenes parciales, en los casos "exitosos", que son más que los reportados como exitosos en el episodio de límites, sus estudiantes lograron identificar una "derivada interna" distinta de la función que se les pedía derivar. La conjetura de que se trata de la derivada interna se confirma con lo que ella manifiesta en la entrevista, y es que a sus estudiantes "les va mejor" que, en otros temas, pues logran "acordarse" del *'dx'* al lado de la derivada de la función y notan la necesidad de hacer una derivación intermedia. Parece pues ser claro que la buena intención de la "profesora (P)" funciona; aunque es una práctica no institucional ni epistémica, en términos de lo cognitivo de lo que se logra apropiar el estudiante, sí le ayuda en cuanto a escribir bien las fórmulas de las derivadas que requieren la derivación intermedia de la función que afecta al argumento final.

5.4.2 Sobre la distinción entre lo epistémico y lo cognitivo y su relación con lo institucional y lo personal en el Enfoque Onto Semiótico—EOS

En el Análisis Didáctico planteado por el Enfoque Ontosemiótico–EOS hay una distinción entre lo epistémico y lo cognitivo; el primero, asociado a lo institucional, representado por libros de texto, disciplinas y currículos, por maestros, autoridades educativas y científicas como representantes institucionales del saber epistémico o saber sabio; el segundo, asociado al estudiante y a sus procesos personales de estudio y aprendizaje. Pero el análisis de los episodios y viñetas en las que la "profesora (P)" introduce diferenciales en la expresión algebraica de las derivadas, nos obligó a revisar y contrastar las oposiciones entre lo cognitivo y lo epistémico, y entre lo personal y lo institucional, como se venían utilizando en el EOS y como comenzamos a utilizarlas en el análisis de los datos.

En el caso de la introducción de diferenciales en las expresiones de las derivadas, hay un elemento cognitivo en la "profesora (P)" al apropiarse de saberes y conocimientos epistémicos manifestados constantemente en su discurso oral y escrito durante sus clases, al punto que toma dicha apropiación personal como algo institucional procediendo a imponerla con autoridad a los alumnos, a pesar que esa concepción no es epistémica ni aparece validada e institucionalizada en los textos y currículos, ni siquiera entre sus colegas que enseñan el mismo curso de Cálculo Diferencial.

Esta distinción más fina entre las dos polaridades el EOS –la una entre lo institucional y lo personal y la otra entre lo epistémico y lo cognitivo– no se esperaba antes del análisis, pero apareció clara y repetidamente en las transcripciones de la actividad docente de la "profesora (P)".

Según el esquema metodológico ya muy extendido para la clasificación de los conocimientos, saberes, opiniones y creencias de los actores del sistema didáctico, tanto en el triángulo didáctico de Brousseau como en el de Chevallard (Saber-Profesor-Estudiante), en el saber hay una distinción clara entre el saber apropiado por el profesor (el saber-a-enseñar) y el cognitivo del estudiante (el saber-aprendido).

La conclusión de nuestro análisis es, al menos en este caso, que se da claramente un nivel intermedio entre lo Institucional de la Universidad, la Facultad y las Carreras de Ingeniería y lo Personal de cada sujeto individual, y entre lo Epistémico del saber circulante en la comunidad matemática y lo Cognitivo del saber provisorio del que haya logrado apropiarse cada estudiante.

Proponemos que hay un nivel intermedio de saber que ha interiorizado el profesor, el cual pretende enseñar al estudiante, con una concepción o creencia subjetiva, acompañada de un convencimiento personal del profesor que, ese saber, es coincidente con el saber institucional de tipo epistémico para el Cálculo Diferencial e Integral.

Así pueda parecer repetitivo, nuestra interpretación del saber de la "profesora (P)", observada en clase de derivadas, diferenciales, sus relaciones y anotaciones, no corresponde ni a lo epistémico de la comunidad matemática, ni a lo institucional de la universidad, ni de la facultad, ni a lo cognitivo y personal del estudiante, tal como está descrito en el EOS de Godino, Batanero y Font. Habría que situarlo en un nuevo nivel de transposición del saber epistémico, al saber cognitivo-del-docente que podría compararse y evaluarse con relación al saber epistémico, avalado por la institución y que puede o no llegar a convertirse en saber cognitivo personal del estudiante, o generarle nuevas interpretaciones y concepciones alternas y aun equivocadas al estudiante que experimenta situaciones didácticas diseñadas y gestionadas por un docente que tiene ese tipo de concepción intermedia.

Sin entrar en detalles o diferencias de interpretación, esta propuesta parece coincidir con una de las críticas que le hizo Chevallard a Brousseau sobre el saber sabio y el saber escolar como transposición didáctica del saber sabio. La idea es que no hay solo una transposición didáctica del saber sabio de la comunidad de investigadores en matemáticas, que podría considerarse epistémico solo para un tiempo, un lugar amplio y una cultura específica, a un saber escolar que podría considerarse institucional pero solo para una institución educativa específica. Habría muchas y muy distintas transposiciones, prácticamente una para cada institución situada en un tiempo y lugar y una para cada educador afiliado a esa institución en ese tiempo y lugar, o para cada texto escolar específico, y el educando solo estaría expuesto a ese saber particular, sin acceso directo al saber epistémico o saber sabio, pero al menos con la posibilidad de criticar uno de esos saberes escolares a los cuales está expuesto desde otro de ellos. En nuestro caso, un estudiante detectó la ausencia del '*dx*' en la conclusión de una pretendida "demostración de la fórmula de la derivada".

Algo parecido le sucedió a Chevallard cuando empezó a trabajar en la transposición didáctica con Josep Gascón y Mariana Bosch: encontró que la transposición didáctica no era solo del saber sabio de las matemáticas de investigación a los libros de texto escolar, como creían inicialmente Brousseau y él, sino que también aparecía en la apropiación diferencial de los maestros de ese saber ya traspuesto, que era otra especie de transposición que hace difícil mantener la distinción entre el saber sabio (que en el EOS es el epistémico institucionalizado) y el saber escolar (que en el EOS es el cognitivo personalizado por los estudiantes), pues aparece como intermediario ese saber circulante entre los maestros, que es personal de cada uno de ellos pero no puede calificarse de epistémico por no coincidir con el saber circulante en la comunidad de matemáticos investigadores, ni de institucional por no aparecer en los planes, programas, syllabus y textos recomendados y otros documentos oficiales de la universidad o la facultad o el departamento de matemáticas, aunque cada docente cree que sí lo es y siente la necesidad de institucionalizarlo así en su actividad docente cotidiana.

No hay duda de que hay una primera transposición del saber sabio al saber institucional escolar local representado en textos, libros, manuales y artículos, syllabus, guías de cátedra, notas del profesor, que ya dispersa lo que parecía homogéneo como lo sería el saber escolar institucional para esa escuela o institución educativa. Así, la transposición didáctica puede tener diferentes etapas y ser efectuada varias veces por distintas personas hasta llegar al aula. Pero otra transposición puede ocurrir en el momento en que el mismo profesor de la asignatura Cálculo I empieza a escribir un texto escolar, una guía, un taller o un plan de clase o de período escolar, o cuando toma un curso de capacitación o profundización y cambia su percepción de lo que creía que debería enseñar. Ahí hay otra transposición cuyo producto podría distanciarse y aun contradecir otros productos de otras transposiciones. En el Cálculo Diferencial, por ejemplo, de hecho, la definición de límite que se encuentra en un libro puede ser diferente de la de otros libros de cálculo. La categoría del saber cognitivo del docente pone también en cuestión la categoría del saber escolar en el sentido saber institucionalizado y su relación con el saber sabio y con el saber escolar en el sentido del saber específico que circula durante las clases concretas de ese docente en un período escolar dado. Es la presencia documentada en la "profesora (P)" observada de esa práctica de enseñar un saber intermedio entre el epistémico, el institucional y el escolar la que nos exige refinar y subdividir estas categorías del EOS.

Tal vez fue por alguna razón semejante por lo que Chevallard propuso que en la TAD no deberíamos partir de que los investigadores ya sabemos lo que es institucional y lo que es epistémico, sino que lleguemos al salón de clase como un antropólogo que quiere estudiar etnográficamente una cultura extraña de la que sabe poco, no domina su lenguaje, y solo puede describir las prácticas y sus praxeo-logías observables, así como las técnicas y sus tecno-logías acompañantes, sin juzgar externamente cuáles cree el mismo investigador que son "las verdaderas, correctas, epistémicas o institucionalizadas", sino afirmar cuáles parecen ser las "localmente institucionalizadas" en esa cultura escolar, con un sentido mucho más etnográfico de "institución" y sin postular una institución matemática universal que sea la poseedora del saber sabio y epistémico.

5.4.3 Acerca de la Idoneidad Emocional y la ocurrencia de sarcasmos

Cuando la "profesora (P)" da a sus estudiantes un discurso sobre la importancia de estudiar, de tomar buenas decisiones, la primera vez tiene una alta idoneidad emocional, pero, la segunda o tercera vez, es de baja idoneidad emocional, pues los estudiantes lo perciben como mera repetición ya sin sentido para ellos. Un aspecto para tener en cuenta es si la "profesora (P)" considera que, estas repeticiones de las exhortaciones a estudiar, contribuyen a formar un buen clima de aula. Otro aspecto difícil de evaluar es, si los estudiantes lo perciben de esa manera.

En cuanto a la ironía y la manera como la "profesora (P)" responde a los estudiantes cuando formulan una pregunta: cómo habla de bonito, no se haga el que está pensando, no se invente leyes o reglas, estas expresiones no solo no tienen en cuenta la duda manifestada en la pregunta, la incomprensión que están tratando de hacer explicita, sino que causan una cierta ruptura en la interacción de la pregunta con la respuesta esperada. Esto corresponde a la faceta emocional pero también a la ecológica y es parte central de la gestión de los conflictos ante las preguntas que formulan los estudiantes, incluso no detecta su sentido, ya sean de carácter profundo o superficial, llegando a ignorarlas y banalizarlas hasta con frases irónicas. Por consecuente, dicha práctica no solo no aclara las dudas de sus estudiantes, sino que se convierte quizá en un mecanismo que genera y mantiene las dificultades de la enseñanza vinculadas con el Cálculo Diferencial.

5.4.4 En cuanto a la Herramienta metodológica del EOS utilizada

La metodología empleada en el análisis de los datos emerge como una herramienta potente para futuras investigaciones, en particular por el refinamiento metodológico realizado junto con el hecho de unir la matriz de *prácticas matemáticas* y *configuración de objetos* con la de oposiciones agregando una columna. La matriz descriptiva de procesos, objetos y polaridades también es un aporte y una innovación pues se le aplica a cada objeto. En síntesis, el aparato analítico-metodológico utilizado y configurado en esta tesis es un aporte al EOS.

En cuanto a los episodios fundamentales y las viñetas seleccionadas, se estudiaron las prácticas en las que observamos algunos procesos y objetos; entre los procesos los que se repiten son los procedimientos tipo algorítmico y, entre los objetos, encontramos los observables y los no observables.

Se analizó una clase dedicada a límites en un episodio y otra a derivadas en otro episodio; de ellos sacamos los lenguajes, los conceptos y los procedimientos. Al tratar de usar el EOS caímos en cuenta que hay lenguajes, gestos y expresiones de otro tipo, por lo cual la categoría de *lenguajes* queda demasiado amplia, pues allí están contenidos: símbolos, términos, proposiciones, predicados…y aún expresiones que no se podrían catalogar como ninguna de ellos como, razón por la cual tratamos de usar una lingüística más fina.

El aporte al EOS no es solamente el resultado del análisis, sino emerge del esfuerzo de utilizar las categorías del Enfoque y de haber encontrado muchas dificultades para clasificar los objetos y los procesos. De esas dificultades y de los distintos conflictos semióticos experimentados durante el análisis de los datos y la redacción de resultados y conclusiones, se pudo inferir que el obstáculo que estaba detrás era la ambigüedad de los términos y la no disyunción de las categorías y subcategorías de los Lenguajes y los Conceptos/Definiciones. Así fui cayendo en la cuenta de la necesidad de refinarlas y operacionalizarlas mejor.

Esto se vio de manera muy específica en el análisis de algunos casos que llaman mucho la atención en las transcripciones. Por ejemplo, en el caso de solución de un límite para la "profesora (P)" es una fórmula, pero para los estudiantes no; o por ejemplo que $\frac{1}{x}dx$ no es una proposición ni es una FBF (fórmula bien formada) entonces surge la pregunta, ¿qué es? Nos quedamos cortos con las categorías de proposición, argumento, concepto, definición, … casos como este nos hace requerir un instrumento más refinado, que hile un poco más delgado y en el que se puedan plantear atributos correspondientes. En el proceso de análisis nos dimos cuenta de que clasificamos todo en lenguaje. Eso da la necesidad de refinar la categoría para lenguajes, proposiciones y argumentos. Podría por ejemplo proponerse la utilización de categorías o subcategorías como términos, predicados, operadores.

En la lista de los seis tipos de objetos ciertamente las *Proposiciones* y los *Argumentos* ya son subtipos del tipo *Lenguajes*. Los *Procedimientos* (algorítmicos o no) sí formarían un tipo objeto diferente de los *Lenguajes*. Lo mismo pasa con *Concepto/Definición*: generalmente se identifican los conceptos con las definiciones rigurosas que dan los libros, y eso también reduciría este subtipo al tipo *Lenguajes.* No quedarían sino dos tipos puros: *Lenguajes* y *Procedimientos*.

En síntesis, usamos el EOS con su análisis didáctico descriptivo: se distinguen las situaciones, los procesos y los objetos; luego se clasifican en: *lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, argumentos y procedimientos*. A esas cinco categorías se le aplicaron las oposiciones del decágono, y se hizo necesario subdividir y refinar la categoría *lenguajes*, y precisar la de *conceptos-definiciones*.

Comenzando por la última, hay un problema en entender la definición como una expansión discursiva, con lo cual volvería a quedar en la categoría *lenguajes* y sería claramente ostensiva, mientras que, si se considera como un concepto mental, sería apenas inferida de los usos de la misma palabra o expresión, y claramente no ostensible. La definición como un letrero estereotipado con una palabra o expresión breve al comienzo (definiendum), el verbo "es" y luego otra expresión larga (definiens) es claramente de la categoría *Lenguajes*, pero también puede ser un *concepto* mental, y en algunos casos también puede ser un *proceso* de definir un concepto nuevo con la ayuda de otros conceptos ya definidos y por medio de la conocida técnica de dar ejemplos y contraejemplos.

También se hizo necesario precisar la categoría Argumentos, pues hay varios tipos de argumentos, y a veces algunos tienen una sola proposición explícita; en el caso de algunos tratamientos puramente algebraicos para transformar un término en otro ni siquiera tienen proposiciones explícitas. Los argumentos observados en las clases fueron puramente algebraicos y procedimentales, de tal manera que pareciera que el argumento fuera la coincidencia del resultado de seguir paso a paso el procedimiento con la regla o caso prototípico enunciado previamente, tal como se aclaró en el análisis de oposiciones.

Igualmente, la categoría de Argumentos y la de Proposiciones son subcategorías de la de Lenguajes, no son dos categorías paralelas a Lenguajes. En caso de que un argumento tenga una sola proposición explícita, no hay criterio claro para ubicar ese renglón como Proposición o como Argumento. Ya vimos cómo una Definición puede ser una proposición, y por lo tanto sería también de la categoría Lenguajes y de la subcategoría Proposiciones. Esto requiere una revisión por parte de los expertos en el EOS para reformular y distinguir las cinco categorías, precisar las distinciones apropiadas, dar los criterios que operacionalizan cada categoría y reforzarlos con algunos ejemplos.

5.4.5 Acerca del obstáculo de la “sobregeneralización “de Linealidad

Según De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel (2007) diversas investigaciones han demostrado que los estudiantes de diferentes edades tienen una fuerte tendencia a aplicar modelos lineales o proporcionales en cualquier lugar, incluso en situaciones donde no son aplicables. Por ejemplo, en geometría se sabe que muchos estudiantes creen que, si los lados de una figura se duplican, el área se duplica también. Sin embargo, también la historia de la ciencia proporciona varios casos de pensadores que postularon inadecuadamente las relaciones lineales para describir las situaciones.

El uso indebido de la linealidad se ha encontrado en diferentes niveles y en una variedad de contextos matemáticos (véase, por ejemplo, De Bock et al., 1999). En la aritmética elemental, el fenómeno del razonamiento proporcional inadecuado se relaciona a menudo con una “falta de sentido común” en el aula de matemáticas (Gagatsis, 1998, Greer, 1993, Nesher, 1996, Verschaffel et al., 1994, Wyndhamn y Säljö, 1997). Cuando se enfrentan a los llamados “problemas de pseudo proporcionalidad” (por ejemplo, “Se tarda

15 minutos en secar una camisa en el tendedero. ¿Cuánto tiempo tardará en secar 3 camisas fuera?"), muchos estudiantes dan respuestas basadas en la proporcionalidad directa, es decir, triplicando el tiempo de secado porque el número de camisas se triplica. También en los casos en que el modelado con proporcionalidad directa en el mejor de los casos ofrece una aproximación, como, por ejemplo, en el problema del corredor: "el mejor tiempo de John para correr 100 metros es 17 segundos ¿Cuánto tiempo le llevará a correr 1 kilómetro?),

Sólo muy pocos estudiantes se dan cuenta de que la proporcionalidad directa dará sólo una respuesta aproximada. En la educación secundaria, los «errores de linealidad» se presentan a menudo en los campos de álgebra y precálculo. Los estudiantes tienden a sobre generalizar lo que se ha experimentado como "verdadero" para funciones lineales a funciones no lineales; por ejemplo, un caso muy común es querer concluir que la raíz cuadrada de una suma, es la suma de las raíces cuadradas, o que, el logaritmo de un producto es el producto de los logaritmos. O como en lo evidenciado en el episodio 12 [Segmento 4] cuando el estudiante pregunta si desde un principio se hubiera podido expresar el logaritmo de ese cociente, como el cociente de los logaritmos; a lo que la "profesora (P)" respondió con un sarcasmo en señal de que esas son invenciones de los estudiantes, pero sin tener conciencia que esa pregunta, expresa un obstáculo que es la ilusión de la linealidad.

De Bock., et al citan a Matz (1992), quien afirma que estos errores de linealidad resultan de la sobre generalización de la ley distributiva por parte de los estudiantes. La utilización tan reiterada de la ley distributiva en la aritmética y el álgebra temprana hace que los estudiantes la apliquen en contextos no lineales, sin preguntarse en qué condiciones se utiliza, y sin que los profesores ni siquiera adviertan esa sobre generalización que es potenciadora de errores, conflictos, dificultades y obstáculos.

El ejemplo más conocido del uso indebido de la linealidad por parte de los estudiantes es la aplicación inadecuada de ésta en problemas que involucran relaciones entre la longitud y el área o el volumen, ampliados o reducidos (De Bock et al., 1998). Como el esclavo en el diálogo de Platón, los estudiantes de diferentes niveles educativos tienden a generalizar cambios en las dimensiones lineales a cambios en el área y el volumen. Al responder a las preguntas sobre el efecto de reducir a la mitad o duplicar las caras de una figura para producir una figura similar, la mayoría de los estudiantes -e incluso los futuros profesores- afirman que el área y el volumen serán reducidos a la mitad o duplicados (Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas, 1989; Y Mitchelmore, 2000, Simon y Blume, 1994, Tierney et al., 1990). En palabras de Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel (2007):

> Intuitive reasoning, the linearity illusion, shortcomings in geometrical knowledge, inadequate habits and beliefs seem to be a fertile soil for a superficial or deficient mathematical modelling process. As several authors have stressed, mature mathematical modelling involves a complex, cyclical process consisting of a number of subsequent steps: understanding the situation described; selecting the elements and relations in this situation that are relevant; building a mathematical model and working through it; interpreting the outcome of the computational work in terms of the practical situation; and evaluating the results and the applied model itself (Burkhardt, 1994; Greer, 1997; Verschaffel et al., 2000). In the modelling process observed in many of our students, some of these steps were completely bypassed. Little effort was invested in understanding the problem situation and in making a clear mental representation of the relevant elements and relations. The mathematical model then mainly occurred on the basis of 'reflex-like recognising', and is almost immediately translated in calculations. These calculations received the most time and attention in the problem-solving process. The superficial modelling was moreover affected by inadequate habits and beliefs (e.g. solving word problems is just doing the correct operations with the given numbers, drawings are less trustworthy than formulas).
>
> …students' improper use of linear reasoning can also be seen as a symptom of an immature and even distorted disposition towards mathematical modelling.

A manera de síntesis:

Del panorama presentado en el estado del arte en cuanto a las miradas, enfoques y formas de nominar aquello que se ha manifestado dificultante en el aprendizaje del cálculo, se quiso caracterizar lo encontrado como una dificultad, o como un conflicto; sin embargo, se concluye que el concepto de obstáculo sigue siendo válido y no se puede reemplazar por el de conflicto porque el hecho de que no haya conflicto no evidencia para nadie el problema.

En el marco teórico se consolidaron como punto de partida varios elementos referentes a esta categoría que a lo largo del análisis fueron adquiriendo identidad propia, aunque un poco distinta a lo consolidado en lo teórico, que fue emergiendo y constituyendo un valioso aporte de esta investigación por cuanto muestra la dinámica del proceso de discusión y análisis.

Lo observable es que hay una dificultad, evidenciada en la demora al contestar, en los errores, en el tipo de preguntas que formulan cuando se atreven a hacerlo, en las respuestas que dan cuando se atreven a hablar, en los errores que comenten en los exámenes, todo esto constituye los síntomas y podrían muchos de estos ser caracterizados como conflictos, en el sentido de la disparidad entre los significados institucionales y/o personales, pero puede ocurrir la dificultad sin conflicto y esas son las más difíciles de detectar precisamente porque no son observables, se les pasa al profesor, al observador, al estudiantes, a todos. Se adoptó la categoría de obstáculo y las otras dos se tomaron como síntomas: dificultades en la comunicación, dificultades en el desarrollo de ejercicios y dificultades para terminar los ejemplos, entre otras. Las dificultades y los conflictos fueron lo observable, mientras que los obstáculos fueron inferencias de lo que estaba pasando. Algunos ejemplos de dificultades:

- El estudiante no puede terminar el ejercicio.
- Cuando la "profesora (P)" habla de triángulo "recto" hay una dificultad de comunicación por el conflicto semiótico de llamar a ese objeto incorrectamente.
- En el uso de no hay dificultad, no nota ningún conflicto, pero ahí viene la inferencia de que eso no es institucional, pero la "profesora (P)" lo institucionaliza como si lo fuera: esta es precisamente la categoría nueva. Las prácticas parecen ocurrir sin conflicto.
- Los estudiantes no aplican la fórmula del límite "especial" porque no reconocen las hipótesis para su aplicación: la potencia fraccionaria
- Los trabajos en grupo aún no están institucionalizados como prácticas, cuando lo anuncia lo hace por darle gusto al observador (a mí), pero finalmente no lo realiza
- En el episodio que la "profesora (P)" pregunta qué no entendieron de la definición de limite se habla de la vecindad, y ella responde que *"no es la vecindad del chavo",* la pura definición de limite es un obstáculo didáctico, y al ponerlos a leer y decir *"eso así se estudia, leyendo, consultando, preguntando"*, institucionaliza el buen estudio, los buenos hábitos de estudio pero

no la definición ni el concepto de limite, ni de vecindad, porque no explica lo que es, solo hace un chiste con el programa televisivo "El chavo del ocho", ni la noción de distancia, ni la de valor absoluto, ni la de los cuantificadores, ni la de los épsilon y deltas. De hecho, algo importante en cuanto a las vecindades es que se pierde el concepto de cercanía al exigirle la clausura al espacio, lo cual sí crea un obstáculo epistemológico pues ya no es vecindad si no está cercano, lo cual es condición para serlo. La "profesora (P)" soslaya la dificultad diciendo lean, investiguen, empíricamente diferentes.

- En el episodio donde deriva implícitamente un producto de la forma xy, diciendo *"derivo respecto a x, luego derivo respecto a y"*, está haciendo algo como una derivada parcial, lo cual no es epistémicamente correcto pues no son derivadas parciales porque requeriría que tanto x como y fueran variables independientes de otra función z que depende de ellas, también es como un truco o un algoritmo que puede funcionar pero que al institucionalizar, tanto el proceder como el concepto, y tanto la "profesora (P)" como luego los estudiantes lo institucionaliza y es su propia reconstrucción puede devenir en obstáculos epistemológicos, por ejemplo al definir el concepto de derivada parcial en un futuro curso de cálculo multivariado que obligatoriamente verán los estudiantes en su carrera. Se están sembrando las semillas de potenciales obstáculos a futuro. Importante también ampliar un poco este tema de las variables dependientes e independientes. La forma de derivar de ella puede ser un truco o un algoritmo que puede funcionar pero que epistémicamente es erróneo.

El asunto que una dificultad no genere conflicto es un riesgo para que ni el docente, ni el estudiante, ni el investigador vean una dificultad y entonces no podamos decir qué fue lo que causó el obstáculo. El hecho que no haya conflicto no quiere decir que no haya una dificultad, un problema. La categoría de obstáculo que no produce conflicto es muy potente, lo cual se ve por ejemplo en la viñeta en la que la "profesora (P)" usa el dx de esa manera.

Resumiendo:

- Conflicto lo tomamos como perturbación de una conducta; es un observable, un ostensible como dice el EOS.

- Obstáculo (epistemológico) es un constructo que "emerge" de la repetición de ciertas perturbaciones en las prácticas.

Todas estas consideraciones nos han llevado a proponer que hay razones para mantener el concepto de obstáculo, es decir, que está bien utilizado el término obstáculo como algo que inferimos que describe bien algo que pasa desapercibido porque no hubo conflicto. El problema de que no haya conflicto observable es semejante a una situación en que no nos ponemos a buscar la llave porque ni siquiera nos hemos dado cuenta de que se cayó. En nuestro caso y a manera de metáfora una situación es que la "profesora (P)" le ponga una cascara de plátano para que el estudiante caiga y otra que ponga una cascara sin darse cuenta, como es el caso del uso dx en las derivadas. Al no crear conflicto, tanto profesores, como estudiantes e investigadores podrían pasarse toda la vida sin cuestionarse nada.

Se mantuvo la conciencia acerca de la ambigüedad de las ideas de obstáculo, dificultad y conflicto, lo cual fue potente analíticamente para hacer el análisis de los datos, pues esa independencia en las categorías descritas permitió que emergieran libremente los problemas epistémicos, didácticos, cognitivos, … con su correspondiente explicación.

Por ejemplo, en nuestro caso de dx, ese dx es un símbolo, una GESTALT que puede significar que la "profesora (P)" no distingue entre diferencial y derivada, que usa el dx como abreviatura de la derivada interna o abreviatura de la diferencial, y que claramente no es correcta ninguna de las dos interpretaciones, se está confundiendo la derivada con la diferencial, lo que constituye un obstáculo semiótico, epistémico y cognitivo de la "profesora (P)".

El problema es que estas formas de proceder no corresponden ni con la derivada de Leibniz ni con el teorema fundamental del cálculo: la derivada es una razón de diferenciales:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Si $f(x) = Ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}dx \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}dx$

Es una equivocación llamar dx a la derivada y dx a la diferencial. Desde el punto de vista semiótico es un error llamar lo mismo a cosas diferentes, resaltamos que lo contrario sí se puede hacer, es decir, llamar de diferentes maneras a lo mismo, por ejemplo, ½ = mitad.

Se debe usar el mismo signo para lo mismo, pero llamar de la misma manera a dos cosas diferentes no es correcto. Se tiene aquí claramente un obstáculo semiótico.

Desde el punto de vista analítico podemos observar que la "profesora (P)" no da explicación de las fórmulas que enuncia para las derivadas que involucran el uso del dx y esa falta de aclaración se puede explicar porque desde el punto de vista de la "profesora (P)" no es necesario, todo está bien, lo hace porque así lo hace siempre y lo considera correcto, es más considera que el dx le da un énfasis casi nemotécnico para que los estudiantes recuerden cuando saquen una derivada, sin embargo desde el punto de vista académico-matemático no es algo correcto, va en contra de lo institucional. En cuanto a la categoría Lenguajes, $\frac{1}{x}$ es un término compuesto de 2 términos y 1 operador simbólico. Nos quedamos cortos con las categorías de proposición, argumento, concepto, definición, …casos como este nos hace requerir un instrumento más refinado, que hile un poco más delgado y en el que se puedan plantear atributos correspondientes. En el proceso de análisis nos dimos cuenta de que clasificamos todo en lenguaje. En la lista de los seis tipos de objetos ciertamente las *Proposiciones* y los *Argumentos* ya son subtipos del tipo *Lenguajes*. Los *Procedimientos* (algorítmicos o no) sí formarían un tipo objeto diferente de los *Lenguajes*. Pero si se trata de programas de computador o simples listas de instrucciones, también serían subtipos del tipo *Lenguajes*.

Y claro que ese refinamiento se hizo necesario cuando, por ejemplo, quisimos analizar lo que dice la "profesora (P)" cuando escribe un límite como $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$, y vimos que no aportó mucho escribir en la matriz categorial que eso es lenguaje, pues no pudimos clasificar ese sistema de semiótico en un subtipo de lenguaje, como proposición, pues no lo es, ni siquiera es una fórmula bien formada. Tampoco es un argumento, ni un predicado ni una propiedad. Parece que en algunas exposiciones del EOS se propuso que las propiedades son ciertos tipos de proposiciones, pero una cosa es la propiedad conmutativa de la multiplicación y otra cosa es una proposición que la enuncie, como "$xy=yx$".

Por todo lo anterior al intentar avanzar en el análisis, experimentamos la necesidad de refinar las categorías del EOS, en particular, la categoría Lenguajes.

Lo mismo pasa con *Concepto/Definición*: generalmente se identifican los conceptos con las definiciones rigurosas que dan los libros, y eso también reduciría este subtipo al tipo *Lenguajes*. No quedarían sino dos tipos puros: *Lenguajes* y *Procedimientos*.

Por otra parte, evaluar no es sinónimo de institucionalizar, aunque toda evaluación puede ser una forma de institucionalización, pero no al contrario. La evaluación como actividad didáctica es diferente de la gestión de la situación didáctica. Un proceso se institucionaliza en el momento en que se vuelve semejante al ostentado por los libros, por las guías, por los currículos; en cambio al evaluar lo que se hace es más revisar si ese proceso ha sido asimilado por el estudiante.

Al considerar la faceta Epistémica centrémonos por ejemplo en las siguientes expresiones: dx^2 y d^2x. Respecto a ellas podemos formular algunos interrogantes: ¿por qué son diferentes?, ¿qué significan?, ¿qué representa cada expresión?, ¿por qué el cuadrado en sitios diferentes?, ¿los estudiantes se dan cuenta de esto?, ¿reconocen estas diferencias? Generalmente se usan estas notaciones sin la suficiente explicación ni profundización sobre lo que el cuadrado está haciendo en cada una de las expresiones y, mucho menos, reflexionando si para los estudiantes significan, lo que nosotros queremos que ellas signifiquen. Este caso es un prototipo de cómo la simbología de las matemáticas oculta los significados de los objetos.

Acerca de la faceta interaccional, ella está marcada por las interacciones que se den o no, a propósito de los temas que se estén desarrollando, en cambio lo normativo es todo aquello que explicita o tácitamente rige la interacción (profesor-alumno; alumno-alumno) en la clase, y además de la interacción determina y condiciona el desarrollo de los contenidos y de todo el curso. Luego lo normativo no se reduce solamente a lo interaccional.

El EOS prefiere no hablar de obstáculos ni dificultades ni errores, sino de conflictos semióticos. El problema es que, al hacer el análisis, se empieza a ver que las dificultades más de fondo se dan precisamente cuando ni el profesor ni el estudiante parecen tener ni sentir ningún conflicto. El observador no ve conflictos como conductas disruptivas en el aula de clase que observa (que sí los ve cuando el saber personal cognitivo del estudiante choca con el saber institucional epistémico que el profesor representa) pero sí detecta una especie de conflicto o dificultad entre el discurso que desarrolla el profesor y lo que es el saber epistémico que el observador cree que debería presentar el docente como representante de lo institucional, o entre lo que el profesor trata de institucionalizar con recomendaciones, instrucciones, ejemplos y evaluaciones y lo que el observador cree que debería haber institucionalizado, pues no es lo que el observador considera epistémico. Efectivamente, es el investigador el que experimenta esa sensación de que hay un conflicto, no el profesor ni los estudiantes.

Se vio muy bien en la manera como la "profesora (P)" agrega "dx" a las derivadas usuales, pensando que con eso les ayuda a sus estudiantes a recordar la derivada interna cuando la variable sobre la que actúa la función no sea x sino otra función de x. Eso no es epistémico ni institucional, pues no aparece ni en el texto, ni en el syllabus ni en lo que dicen y usan otros profesores de Cálculo I (diferencial) de la misma Universidad. Más aún, es un error epistémico confundir la diferencial con la derivada; pero desde el punto de vista didáctico, la "profesora (P)" cree que eso ayuda, y lo confirma con que a sus estudiantes les va mejor en esas preguntas capciosas en donde los estudiantes de otras secciones "caen en la trampa" de derivar directamente.

Ni el caso de dificultades y obstáculos epistemológicos, semióticos y didácticos que no producen conflicto, ni el caso de la tensión entre lo que es personal-cognitivo del profesor respecto al saber epistémico institucional están contemplados en el EOS, y por eso son conclusiones muy valiosas que constituyen un aporte metodológico al EOS y a futuras investigaciones.

Es decir que, si afinamos el análisis y los resultados, vemos dificultades y tensiones que no producen conflicto abierto, y vemos un nivel intermedio entre el saber epistémico institucionalizado y el saber cognitivo personalizado por cada estudiante, así no sepamos cómo llamarlo, pues es cognitivo en el maestro, pero él cree que es epistémico, y así lo hace aparecer antes sus alumnos, considerando "de buena fe" que debe institucionalizarlo.

En los enfoques citados en el estado del arte se consideran los obstáculos cognitivos y los epistémicos, caracterizados fundamentalmente porque los cognitivos están asociados a procesos en los estudiantes, mientras que los epistémicos están estrechamente relacionados con los maestros. Sin embargo, lo encontrado en esta investigación, respecto al uso de dx por parte de la "profesora (P)" para representar la derivada de la función, como ha sido ampliamente discutido en el análisis, hace emerger una nueva categoría que podríamos ubicar en la mitad entre lo cognitivo y lo epistémico, que no es exactamente cognitivo ni epistémico pero que a la vez tiene dimensiones cognitivas y epistémicas.

No es cognitivo como lo considera el EOS pues es una práctica que hace la "profesora (P)" y no el estudiante. No es epistémico como lo considera el EOS pues este uso de dx no está institucionalizado en el saber sabio: textos, generalidad de maestros. Es una práctica cognitiva de la maestra, es una apropiación del saber muy particular de ella; es como una transposición didáctica del saber sabio al saber de los textos, las instituciones; saber sabio por parte de la "profesora (P)", pero no epistémico porque no es compartido, en síntesis: es no epistémico porque no es compartido y es no cognitivo porque no es de los estudiantes. Es la apropiación de la "profesora (P)", que en el espacio de la clase se vuelve institucional por el rol que ella desempeña allí. Esto nos está diciendo que la clasificación cognitivo - epistémico tal como aparece en la teoría en estos momentos no da cuenta para casos como el aquí reportado en cuanto a la apropiación del conocimiento por parte de la "profesora (P)". Por un lado son dos polos que parecen ser disyuntos, y por otro lado se requieren como varios estadios grises entre un polo y el otro. Por ejemplo, el saber puesto en lo didáctico configura, si bien una institucionalidad, ésta es diferente a la llamada "matemática pura", y diferente también a la institucionalidad representada en los textos de pregrado.

En el EOS todo conflicto genera un obstáculo, pero un aporte específico de esta investigación es que se reportan unos obstáculos que no producen conflicto. Emerge un objeto que no es personal ni epistémico.

5.5 Observaciones finales.

Líneas Abiertas para futuras investigaciones

Se mencionan algunos elementos para una agenda de trabajo. En primer lugar, quedan 14 episodios de clase, a los que es posible realizarles el tratamiento que se le hizo a los episodios *fundamentales*, para analizar la emergencia de otros saberes u objetos análogos a la aparición de $\boldsymbol{dx}$.

En segundo lugar, se invita a elaborar propuestas que indaguen el grado en que los contenidos implementados o pretendidos están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

En tercer lugar, las herramientas metodológicas utilizadas, pueden convertirse en un complemento metodológico que utilicen las matrices Descriptivas y Categoriales y que contemplen el caso de dificultades y obstáculos epistemológicos, semióticos y didácticos que no producen conflicto.

Por último, se llama la atención, para que las investigaciones tengan en cuenta lo documentado acerca del caso de la tensión entre lo que es personal-cognitivo del profesor respecto al saber epistémico institucional, y los diferentes niveles de trasposición didáctica.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognoscitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática (pp. 97-135). Bogotá : Una empresa docente- Iberoamérica.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2-3), 241-286.

Bachelard, G. (2004). *La formación del espíritu científico*. México: Siglo XXI, vigésimo quinta edición en español. (Obra original publicada en francés en 1938).

Bergé, A. (2004). Un estudio de la evolución del pensamiento matemático: el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la completitud en la enseñanza universitaria. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Buenos Aires.

Brousseau, G. (2015). Fundamentos y métodos de la didáctica. En Serie "B" Trabajos de enseñanza N.º 5/2015. Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina.

Brousseau, G. (1998). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012) Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. Bolema, 26(42B), 667-690.

D'Amore, B. (2007). Epistemología, didattica de lla matemática e pratiche di insegnamento. *La matemática e la sua didattica*, 21(3), 347-369.

D'Amore, B. (2005) *Bases filosóficas, pedagógicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, Reverté.

De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., Verschaffel, L. (2007). The Illusion of Linearity: From Analysis to Improvement Series: Mathematics Education Library, Vol. 41 Berlin/New York: Springer-Verlag.

Díaz-Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife (Brasil).

Díaz-Godino, J. (2003). Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática. Granada: Universidad de Granada. Consultado en http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf

Díaz-Godino J., Batanero, C. y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Granada: Universidad de Granada

Díaz-Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiotico del conocimiento y la instrucción matemática. Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10, 7-37. pp. 6-10.

Díaz-Godino, J., Font V., D'Amore B., (2008) Documentos discusión Seminario DIE-UD. 2007-2008.

Díaz-Godino, J., Font V., (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies In mathematics.

Díaz-Godino, J., (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros (Parra, M., trad. Graphiques et équations L'Articulation de deux registres, 1988). En E. Sanchez (Ed.) *Antología de la Educación Matemática*. México: Cinvestav IPN. pp. 125-139.

Duval, R. (2006a). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la RSME., 9*(1), 143-168.

Fichant, M. y Pécheux, M. (1975). *Sobre la historia de las ciencias* (2ª ed.). México: Siglo XXI. (Obra original publicada en francés en 1969).

Font, V. (2000a), Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques Aplicacions a les derivades [Procedimientos para obtener expresiones simbólicas a partir de graficas: Aplicaciones a las derivadas]. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona.

Font, V., Planas, N & Godino, J. (2009). Modelo Para El Análisis Didáctico En Educación Matemática. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Moru, E. (2006). Epistemological Obstacles in Coming to Understand the Limit Concept at Undergraduate Level: A Case of the National University of Lesotho. Tesis doctoral inédita**.**

Neira, G. (2012). Del Algebra al Cálculo: ¿Transición o Ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En (Universidad Distrital Francisco José de Caldas): Pensamiento, Epistemología y Lenguaje Matemático. Libros de los énfasis del Doctorado Interinstitucional en Educación., n. 2, pp. 13-42.

Neira, G. (2000). El pasó del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Ingeniería* (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), n. 1, pp. 87-92.

Neira, G. (1998). El Analista de George Berkeley. Critica al cálculo de Newton y Leibniz. Bogotá. Ediciones FODUN.

Pino-Fan, L. (2013). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico – matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada (España).

Radford, L. D'Amore, B. y Bagni, G. (2007). Obstáculos epistemológicos y perspectiva sociocultural de la matemática. Cuadernos del seminario en educación, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Rico, L., Pino-Fan, R., Díaz-Godino, J., Font, V. (2014). Explorando aspectos relevantes del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational

Studies in Mathematics 22:1-36, 1991. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series. London, Falmer Press. London. Washington, D.C.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En D. Grouws (Ed.) *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 495-510). New York: MacMillan.

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. In D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West, & M. S. Wiske (Eds.), *Software goes to school: Teaching for understanding with new technologies* (pp. 54-69). New York-Oxford: Oxford University Press.

Vasco, C. E. (1991). ¿Hay revoluciones o rupturas epistemológicas en las matemáticas? *Revista de la Facultad de Ciencia*s Universidad Javeriana, *1*(4), 29-52.

Este libro se terminó de
imprimir en los talleres
de Imageprinting Ltda. En
Bogotá, D. C. Colombia,
en el mes de marzo de
2020.

El presente libro que el lector o lectora tiene en sus manos, constituye un trabajo denso y profundo sobre las formas de enseñanza inicial del Cálculo diferencial, estudiando las interacciones entre estudiantes y profesora sin juzgar los fenómenos como "buenos" o "malos", tratando de inferir los propósitos, métodos y técnicas de la profesora y buscando compararlos con lo que sus estudiantes aprenden o no aprenden bien, o entienden o no entienden bien, o al menos repiten bien después de un semestre o varios semestres de clases. Respecto a los aspectos epistemológicos, la autora logra penetrar la maraña de vocablos, definiciones e interpretaciones que circulan en la literatura de la educación matemática sobre los obstáculos, errores, conflictos, dificultades y concepciones o "misconcepciones" de los estudiantes. Poniendo de relieve que la investigación en el paso, transición o ruptura del álgebra escolar al cálculo diferencial, y las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en esa transición, constituyen puntos cruciales en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral en la educación media y en la educación superior.

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DISTRITAL

UD Editorial

E-ISBN:978-958-787-224-8
9 789587 872231