< 14

Énfasis

COMPRENSIÓN Y APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS: PERSPECTIVAS SEMIÓTICAS SELECCIONADAS

Autores

Raymond Duval
Adalira Sáenz-Ludlow

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle · Universidad Distrital Francisco José de Caldas · Universidad Pedagógica Nacional

Raymond Duval – Adalira Sáenz-Ludlow

Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas

Presentación y comentarios
Bruno D'Amore – Carlos Eduardo Vasco Uribe

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

DIE, Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis de Educación Matemática
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá
2016

UD Editorial

Duval, Raymond
Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas / Raymond Duval, Adalira Saénz-Ludlow. -- Bogotá : Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.
264 páginas ; 24 cm.
ISBN 978-958-8972-31-2
1. Matemáticas - Enseñanza 2. Geometría - Enseñanza 3. Semiología (Matemáticas) 4. Matemáticas - Problemas, ejercicios, etc. I. Saenz Ludlow, Adalira II. Tít.
510.7 cd 21 ed.
A1536850

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas

Raymond Duval – Adalira Sáenz-Ludlow

DIE, Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis de Educación Matemática

Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Bogotá, Colombia, 2016

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

UNIVERSIDAD DISTRITAL

FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

ISBN Impreso: 978-958-8972-31-2
ISBN Digital: 978-958-8972-32-9

Preparación Editorial
Doctorado Interinstitucional en Educación
Sede U. Distrital Francisco José de Caldas
http://die.udistrital.edu.co

Elban Gerardo Roa Díaz
Asistente editorial
eventosdie@udistrital.edu.co

Fondo de publicaciones
U. Distrital Francisco José de Caldas
Carrera 24 No. 34 - 37
PBX: (57+1) 3239300, ext.6201
publicaciones@udistrital.edu.co

Traducción de artículos:
Martín Acosta
Patricia Perry
Colaboración editorial:
Rodolfo Vergel
Corrección de estilo:
Humberto Beltrán Nova

Diseño, Diagramación e impresión
Fundación Común Presencia
Cra 11 No. 61 - 35 (401)
Tel: 249 5782. Bogotá.

Bogotá, Colombia, 2016

TABLA DE CONTENIDO

PRÓLOGO

Bruno D'Amore

En 2005, la revista *Relime* del Cinvestav, México, decidió ofrecer a sus lectores un panorama mundial lo más completo posible de las investigaciones sobre semiótica en Matemática Educativa. Al solicitarnos a Luis Radford y a mí fungir como editores (en Colombia, compiladores), elegimos de común acuerdo los autores que, en aquel periodo, consideramos los de mayor influencia y de mayor representación a nivel mundial (Radford, D'Amore, 2006). Con respecto a dos nombres, nos pusimos inmediatamente de acuerdo: Raymond Duval y Adalira Sáenz-Ludlow. Ambos aceptaron y enviaron inmediatamente sus importantes contribuciones.

Cuando el DIE (Doctorado Interinstitucional en Educación) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas le propuso a nuestro énfasis de Educación Matemática publicar un libro que concentrara lo más relevante de las investigaciones en nuestro campo, los docentes del doctorado elegimos sin dudarlo a los mismos, como autores de la primera publicación. Así que solicitamos a cada uno tres artículos fuertemente representativos tanto de sus propias investigaciones específicas como del panorama mundial. Al profesor Carlos Eduardo Vasco Uribe se le encomendó comentar los trabajos de Adalira Sáenz-Ludlow, y a mí los de Raymond Duval.

Fue así como nació este libro, destinado al estudio, investigación y preparación profesional tanto de los doctorandos de nuestro énfasis, como de los estudiosos de todo el mundo. Dados sus contenidos trascendentales y ricos, el libro podría incluso ser leído por estudiantes de maestría en Didáctica de la matemática, por los colegas profesores de otras universidades y profesores de todos los niveles escolares que deseen tener una mayor competencia en estos importantes temas. Este es el propósito de los autores de este complejo pero interesante e iluminador volumen. Un libro de base para quienes deseen dar los primeros pasos en el estudio de la semiótica en los procesos de comprensión de aquel maravilloso mundo que involucra la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Después de los primeros artículos de Raymond Duval de mediados de los años noventa, surgió una verdadera revolución en nuestro campo de estudio y de investigación, que en otras ocasiones he llamado en broma la "Duvalbomba". Su idea genial de *paradoja cognitiva* nos hizo abrir los ojos a todos, con la que culminaba toda una sucesión de estudios que van ininterrumpidamente desde Platón hasta hoy (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, Matteuzzi, 2015).

A partir de ese momento, los estudios de Didáctica de la matemática en el campo de la semiótica se han multiplicado hasta conformar uno de los dominios de investigación de mayor extensión en el mundo. Entre las múltiples contribuciones existentes, las de Raymond Duval y Adalira Sáenz-Ludlow constituyen un puente de gran importancia entre la semiótica clásica y nuestro campo de investigación.

Los docentes del énfasis de Educación Matemática del DIE esperamos que este libro sea leído con entusiasmo por muchos colegas y estudiantes de todo el mundo.

Referencias

D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M.I., Iori, M. *et al*. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177-212. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm DOI: 10.12802/relime.13.1822

Radford L., D'Amore B. (eds.). (2006). *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*. Número especial trilingüe (inglés, francés y español), revista *Relime,* Cinvestav, México.

LAS CONDICIONES COGNITIVAS DEL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA. DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN, DIFERENCIACIONES DE LOS RAZONAMIENTOS, COORDINACIÓN DE SUS FUNCIONAMIENTOS

Raymond Duval

No descuidar de manera alguna la geometría

República VII, 527c

Entre todos los campos de conocimiento en los que los estudiantes deben entrar, la geometría es el que exige la actividad cognitiva más completa, ya que apela al gesto, al lenguaje y a la mirada. Allí es necesario construir, razonar y ver, indisociablemente. Pero la geometría también es el campo más difícil de enseñar y uno de aquellos en los que, aun cuando los objetivos sean muy modestos, los resultados que se alcanzan son decepcionantes. Es suficiente consultar las evaluaciones nacionales al comienzo de la secundaria, sin necesidad de recordar las dificultades que conciernen a la demostración,[1] para constatar un estado de cosas bien conocido. ¿Qué es lo que en la actividad cognitiva necesaria para hacer geometría, resulta ser demasiado complejo o demasiado inalcanzable para los estudiantes: construir, razonar para justificar, o ver? Detengámonos un instante en las figuras que condensan de alguna manera todas las modalidades de la actividad cognitiva.

Ver una figura en geometría exige disociar lo que corresponde a la magnitud y, por lo tanto, lo que depende de la escala de magnitud con la que se efectúa el acto de ver, de lo que corresponde a las formas distinguidas, que son independientes de la escala de magnitud. La relación con las figuras, es decir, la manera de mirar lo que ellas dejan ver, concierne a la distinción de formas y no a la magnitud o a los cambios de escala de magnitud. El siguiente es el análisis que hacía Poincaré de "la intuición geométrica":

1 A través de comunicación personal con el autor, él aclara que, en francés, el término "démonstration" se usa específicamente en las matemáticas, mientras que "preuve" se usa en las otras ciencias. "Démonstration" se refiere al modelo lógico deductivo introducido por Euclides y Aristóteles, y en la actualidad, con frecuencia se está calificando de "preuve formelle". También en el ámbito educativo se están aceptando justificaciones más intuitivas, usándose entonces el término más extenso "preuve". Los términos "démontrer", "prouver" o "montrer" muy a menudo se usan indistintamente. En este artículo hemos traducido los términos "preuve" y "prouver" como "prueba" y "probar", respectivamente, y "démontrer" y "démonstration" como "demostración" y "demostrar". [N. T.]

> Cuando, en un teorema de geometría métrica, se requiere esta intuición, es porque es imposible estudiar las propiedades métricas de una figura haciendo abstracción de sus propiedades cualitativas, es decir, aquellas que son objeto propio del *Análisis Situs* (…) Para favorecer esta intuición, la geometría tiene que dibujar las figuras, o por lo menos representárselas mentalmente. Ahora bien, si se desprecian las propiedades métricas o proyectivas de esas figuras, si se retienen únicamente sus propiedades puramente cualitativas, es allí cuando interviene verdaderamente la intuición geométrica (Poincaré, 1963/1912, pp. 134-135).

La distinción de esas "propiedades puramente cualitativas" constituye el primer umbral crítico para el aprendizaje de la geometría. En la enseñanza, es quizá el umbral que con mayor dificultad se logra hacer pasar a los estudiantes, pero también el más decisivo para hacerles comprender en qué consisten las maneras de trabajar en geometría.

Esta afirmación puede sorprender. En efecto, el reconocimiento de las propiedades "puramente cualitativas" parece directamente arraigado en la percepción. Además, el corpus de las figuras cuyo conocimiento pueden exigir los programas escolares es muy restringido, y corresponde a formas que son perceptivamente notables y culturalmente familiares. En la enseñanza, esas figuras se encuentran en el cruce de caminos de una gran variedad de actividades: observación, reproducción, construcción, descripción, definición, etc. ¿Por qué la fuente profunda de las dificultades que enfrenta la enseñanza de la geometría se debería buscar primero en esta intuición geométrica que se apoya en la percepción, percepción que abarca tanto el espacio del mundo que nos rodea como los diferentes tipos de representación (fotografías, mapas, planos, esquemas, figuras) a los que da lugar?

La percepción es la que causa problemas. No solo funciona sin recurrir a disociación alguna entre magnitud y distinción visual de las formas (Coren, Porac y Ward, 1979), sino que sobre todo impone una manera común de ver que va en contra de dos maneras de ver las figuras que se requieren en la enseñanza de las matemáticas: una, centrada en la construibilidad de las figuras con ayuda de instrumentos, y la otra, centrada en su enriquecimiento heurístico para hacer aparecer formas que no son las que la mirada ve. Y se sabe cuán difícil puede ser, para muchos estudiantes, el paso del funcionamiento habitual de la percepción de las formas (Kaniza, 1998) a estas dos maneras de ver, especialmente a la segunda. Sin embargo, esas dos maneras de ver no son más que la manifestación superficial de una tercera, que constituye el mecanismo cognitivo de la visualización matemática: la deconstrucción dimensional de las formas.

La construcción de figuras o su utilización heurística solo tienen sentido en la medida en que se inscriben en este funcionamiento de la visualización matemática, pues con esta tercera manera de ver, el espacio ya no se aborda desde el aspecto de la magnitud y el cambio de escala de magnitud, ni desde el de las propiedades topológicas y afines que distinguen formas, sino desde el aspecto de sus dimensiones y del cambio del número de estas. El cambio del número de dimensiones está en el centro de la mirada geométrica sobre las figuras.

Pero volvamos a las figuras para las cuales Poincaré reconocía la necesidad cognitiva de "intuición geométrica". Su principal característica, en relación con otras representaciones del espacio que nos rodea, como planos, mapas o modelos, es no ser icónicas, es decir, no parecerse a un objeto visto y conocido en la realidad. Esto quiere decir que el reconocimiento de los objetos representados no depende principalmente de la distinción visual de las formas, sino de hipótesis que se dan y que van a ordenar *también* la mirada sobre las figuras. Y este es un tipo muy diferente de actividad movilizada: la producción discursiva de enunciados relacionados entre sí para justificar, explicar, demostrar. ¿Es necesario recordar que esto no se puede hacer por fuera del lenguaje, pero que, al igual que para la visualización, el lenguaje no se hace funcionar de la misma manera en que se utiliza fuera de las matemáticas?

Son esas condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría las que vamos a analizar en detalle en este artículo. Mostraremos, más particularmente, que la visualización y la producción de enunciados en geometría requieren funcionamientos cognitivos que son diferentes y más complejos que los que se aplican fuera de la geometría. Por eso, su desarrollo y su coordinación se deben considerar como objetivos de enseñanza tan esenciales como los contenidos matemáticos mismos. Porque aquí la comprensión de los contenidos solo se puede construir a partir de una sinergia entre visualización y lenguaje. Esas condiciones cognitivas son, en cierto modo, condiciones para aprender a aprender en geometría.

Comenzaremos explicitando la especificidad de las maneras de ver que se practican en matemáticas. Para eso vamos a partir de una idea muy simple: es la tarea propuesta la que determina la relación con las figuras. La manera de ver una figura depende de la actividad en la que sea movilizada. Esto nos permitirá plantear una pregunta esencial para la organización de los aprendizajes, y que raramente se tiene en cuenta: la manera de ver que un tipo de actividad favorece, ¿ayuda a entrar en las otras maneras de ver requeridas por los otros tipos de actividad? Abordaremos luego lo que constituye el proceso central de la visualización geométrica: la deconstrucción dimensional de las formas.

Ninguna de las actividades que se utilizan clásicamente para iniciar a los estudiantes en el estudio de la geometría permite verdaderamente desarrollar esta manera de ver. Sin embargo, es la única requerida para comprender las diferentes maneras de utilizar el lenguaje natural en geometría: enunciación de propiedades, definiciones, deducción de otras propiedades, teoremas… Iniciar en esto a los estudiantes exige un tipo de actividad muy diferente de las que habitualmente se utilizan. Pero, más allá de su aplicación didáctica, lo que examinaremos es el problema más global de la articulación entre visualización y discurso geométrico. En efecto, allí es donde se sitúan no solamente los retos educativos de la geometría, retos de formación general como Platón los evocaba ya, sino también los retos científicos, puesto que conciernen a las maneras matemáticas de probar.

Clasificación de las maneras de ver en función del papel de las figuras en las actividades geométricas propuestas a los estudiantes

El abanico de actividades que se pueden proponer a los estudiantes para que trabajen con figuras o sobre ellas es supremamente amplio. Las variaciones de actividad se refieren a la vez a la *tarea que se va a realizar* (reproducir una figura según un modelo, o construirla, o tomar medidas, o describirla para que otro estudiante la construya) y a la *modalidad de actividad pedida* (modalidad concreta utilizando material manipulable, modalidad de representación limitándose únicamente a las producciones gráficas, o modalidad técnica imponiendo ciertos instrumentos). Ahora bien, de ningún modo se pide que las maneras de ver sean las mismas de un tipo de actividad a otro, incluso si son las mismas formas nD (piezas materiales 3D para manipular físicamente, figuras 2D ya construidas o que se pide construir para modificarlas…) las que se dan perceptivamente para ser vistas. Tomando simplemente como criterios el tipo de operaciones sobre las formas dadas para ser vistas y la manera como las propiedades geométricas se movilizan en relación con ese tipo de operaciones, podemos distinguir cuatro maneras de ver. Estas cuatro maneras de ver son cuatro entradas muy diferentes a la geometría.

	BOTÁNICO	AGRIMENSOR geómetra	CONSTRUCTOR	INVENTOR artesano
1. Tipo de operación sobre las FORMAS VISUALES, requerida por la actividad propuesta	Reconocer formas a partir de cualidades visuales de un contorno: se privilegia UNA forma particular como TÍPICA	Medir los bordes de una superficie: sobre un TERRENO o sobre un DIBUJO (variación de escala de magnitud y, por tanto, de procedimiento de medición)	Descomponer una forma en trazos construibles con ayuda de un instrumento. Hay que pasar (a menudo) por TRAZADOS AUXILIARES que no pertenecen a la figura "final"	Transformar unas formas en otras. Hay que agregar TRAZOS REORGANIZADORES en la figura final para inicializar esas transformaciones
2. Cómo se movilizan las PROPIEDADES GEOMÉTRICAS con respecto al tipo de operación	No hay relaciones entre las diferentes propiedades (no hay definición matemática posible)	Las propiedades son criterios de selección para las mediciones que se deben hacer. Solo son útiles si remiten a una fórmula que permita un cálculo	Como restricciones de un orden de construcción. Ciertas propiedades se obtienen mediante una sola operación de trazado, las otras exigen varias operaciones	Implícitamente mediante remisión a una red más compleja (una trama de rectas para la geometría plana o una trama de intersecciones de planos…) que la figura de partida

Figura 1. Cuatro entradas clásicas a la geometría

El botánico. Es la entrada más evidente y más inmediata. Se trata de aprender a reconocer y a nombrar las formas elementales que se utilizan en geometría plana: tipos de triángulos y de cuadriláteros, configuraciones obtenidas por las diferentes posiciones relativas de dos rectas, eventualmente las formas circulares y las ovaladas, etc. Se trata de observar las diferencias entre dos formas que presentan ciertas semejanzas (un cuadrado y un rectángulo) y de notar semejanzas entre dos formas diferentes (un cuadrado y un paralelogramo). Aquí, las propiedades distinguidas son características visuales de contorno.

En realidad ese tipo de actividad no es en absoluto una actividad geométrica. Solo parece geométrica en la medida en que se refiere a formas llamadas "euclidianas". Pero el mismo trabajo de observación podría (y debería) hacerse sobre hojas de árboles. Entre todos los modelos de formas planas que Piaget (1972/1947, p. 70) pidió "copiar" a niños de dos a siete años, se habría podido igualmente introducir una hoja de plátano y una de castaño, la forma de un pino y la de un abeto del norte, o el dibujo esquemático de un automóvil. Recordemos que en las observaciones de Piaget se trataba de copiar "a mano alzada" sin utilizar ningún instrumento, ¡ni siquiera una regla!

El agrimensor geómetra. Esta es la entrada histórica. Se trata de aprender a medir longitudes en un *terreno*, del suelo, o las distancias entre dos puntos de referencia, y anotarlas sobre un *dibujo* que toma estatus de plano. *Nos situamos de entrada en dos escalas de magnitud que se van a poner en correspondencia*. Esta puesta en correspondencia no tiene nada de natural o evidente, pues no existe un procedimiento común para medir las distancias reales sobre el terreno y los segmentos trazados en un dibujo. Las tareas específicas de esta entrada consistirán en proponer actividades que exigen pasar de una escala de magnitud a otra. El problema del vidriero es un ejemplo típico (Berthelot y Salin, 1994, pp. 40-41): Para fabricar una ventana que se ajuste a un hueco cuya forma es la de un paralelogramo, ¿cuántas mediciones tomar y cuáles? La medición del radio de la tierra realizada por Eratóstenes es otro ejemplo célebre.

Este tipo de actividad muestra las dificultades que muchos estudiantes enfrentan para poner en correspondencia lo que ven en el terreno y lo que está dibujado en el papel. Esta puesta en correspondencia exige que se privilegien aspectos que son esenciales para la lectura de un plano o la de un mapa geográfico (Berthelot y Salin, 2000): la selección de objetos de referencia, la selección de puntos o ejes de referencia para representar la posición relativa de los objetos, el tomar en cuenta direcciones u orientaciones… Estos aspectos no siempre son pertinentes para la representación geométrica. Además, en ese tipo de actividad *las propiedades geométricas se movilizan con fines de medición*.

El constructor. Esta es la entrada necesaria. La particularidad de las figuras geométricas, por lo menos de aquellas que corresponden a formas euclidianas elementales y a configuraciones de formas elementales, es *ser construibles con ayuda de instrumentos*. Las figuras geométricas no se dibujan a mano alzada, se construyen con ayuda de un instrumento que guía el movimiento de la mano, o que la reemplaza. ¿Por qué? Un instrumento permite producir una forma visual que tiene una propiedad geométrica y esta forma visual constituye la primitiva del instrumento, a causa de la regularidad que impone al movimiento de trazado y, por lo tanto, *de la invariancia visual que introduce en el trazado*. Por ejemplo, el trazo recto o redondo regular, para los instrumentos clásicos como la regla (no graduada) y el compás. Sin utilizar instrumentos sería imposible verificar una propiedad sobre una figura.

Es mediante la utilización de un instrumento como los estudiantes pueden percatarse realmente de que las propiedades geométricas no son solo características perceptivas. En efecto, la utilización de un instrumento da la posibilidad de experimentar, de alguna manera, las propiedades geométricas como restricciones de construcción: cuando una forma visual no es producida directamente por un instrumento, son necesarias varias operaciones de trazado para obtenerla y hay un orden para esas operaciones. La construcción es imposible si no se tiene en cuenta esto. Por supuesto, todo cambio de instrumento implica un cambio en las propiedades geométricas que se deben movilizar explícitamente.

Es esta entrada la que ha producido innovaciones espectaculares para la enseñanza de la geometría en el curso de estos últimos veinte años (Laborde, 1994). Se han desarrollado los programas informáticos de construcción. Su ventaja, además de la considerable ejecución automática de las tareas de realización como en las calculadoras, consiste en suprimir completamente las aproximaciones compensadoras de la mano en la utilización de instrumentos. Dicho de otra manera, ya no es posible realizar una construcción "aceptable" sin tomar en cuenta las propiedades geométricas. Así, en Cabri Géomètre, una figura construida debe poder conservar su configuración al desplazar alguno de sus puntos.

El inventor artesano. Para presentar esta cuarta entrada es suficiente evocar los problemas clásicos del siguiente tipo:

1) ¿Cómo dividir, de un solo tijeretazo, un triángulo de manera que se pueda hacer un paralelogramo con los dos pedazos?

2) ¿Cómo construir, a partir de un cuadrado dado, otro cuadrado dos veces más grande (cuya área sea el doble)? (Este problema se puede dar sobre papel cuadriculado, lo que reduce las operaciones de medición a un simple conteo de cuadrados.)

Esos problemas tienen en común la exigencia de una deconstrucción visual de las formas perceptivas elementales que se imponen a primera vista, para poder obtener la reconfiguración, o la figura, pedida. Estos problemas tocan una capacidad fundamental que es la condición necesaria para toda utilización heurística de las figuras: añadir trazados suplementarios a una figura de partida (es decir, la que acompaña al enunciado de un problema o se puede construir a partir del enunciado de un problema) con el fin de descubrir sobre la figura un procedimiento de solución. Estos son trazados suplementarios que van a permitir una reorganización visual de la figura de partida. Aquí, es la investigación de ese trazado suplementario la que constituye el problema: “¿Cómo dividir, de un solo tijeretazo,…?”.

	BOTÁNICO	AGRIMENSOR geómetra	CONSTRUCTOR	INVENTOR artesano
ESTATUS EPISTEMOLÓGICO	CONSTATACIÓN perceptiva inmediata: “eso se ve sobre…”	CONSTATACIÓN que resulta de la lectura de un instrumento de medición	RESULTADO de un procedimiento de construcción	RESULTADO de una descomposición de la figura de partida en unidades figurales que se reconfiguran de manera diferente
FUENTE COGNITIVA DE LA CERTIDUMBRE	Superposición efectuada a ojo o utilizando una plantilla	Comparación de los valores numéricos obtenidos empíricamente	Necesidad interna en el encadenamiento de las operaciones del procedimiento de construcción	Invariancia de las unidades figurales que son los referentes de la transformación de la figura de partida

Figura 2. Modo de comprensión y de conocimiento relacionado con cada manera de ver

Pasar de una manera de ver a otra constituye un cambio profundo de mirada que, con mucha frecuencia, se desatiende en la enseñanza. El funcionamiento cognitivo implicado por cada una de esas cuatro maneras de ver no es el mismo, como lo mostraremos más adelante. Pero podemos subrayar que cada manera de ver induce un tipo particular y limitado de comprensión. El conocimiento desarrollado no es el mismo según la mirada que un estudiante esté o no en capacidad de movilizar en presencia de la misma figura.

La diversidad de esas maneras de ver plantea preguntas cruciales para la enseñanza de la geometría y para la organización de las situaciones de aprendizaje.

1) ¿La práctica de una actividad favorece la adquisición de maneras de ver relacionadas con los otros tipos de actividad? Por ejemplo, ¿privilegiar las actividades de construcción implica el desarrollo de la capacidad heurística para enriquecer y reorganizar las figuras?

   Esta pregunta de la transferencia, esencial en los aprendizajes, se puede ampliar:

1bis) ¿Habría un orden y, por lo tanto, una jerarquía que respetar, para introducir las actividades propias de esas cuatro entradas? Por ejemplo, ¿el enfoque botánico se puede considerar como la primera etapa necesaria para toda adquisición de conocimientos geométricos?

2) La utilización del lenguaje en geometría (para formular definiciones y teoremas, para aplicarlos en un razonamiento, para formular o explicar una conjetura…), ¿qué manera de ver requiere? ¿Una de las cuatro maneras de ver mencionadas antes, o una quinta totalmente diferente?

Esta pregunta nos remite a la pregunta fundamental tanto desde un punto de vista cognitivo como desde uno epistemológico:

2bis) ¿Cómo, y hasta dónde, "ver" y "enunciar" pueden converger en geometría?

Estas preguntas son cruciales porque tanto el predominio dado a una de las cuatro entradas, como el desconocimiento de la complejidad de la articulación entre ver y decir, pueden crear obstáculos que, a mediano o largo plazo, serán insuperables para el progreso de los estudiantes. Sin embargo, rara vez se plantean esas preguntas porque la respuesta "sí" se considera evidente para la primera, tomada en su formulación estricta o en su formulación amplia. En cuanto a la segunda pregunta, puede parecer muy extraña. No obstante, esta pregunta toca el nudo de todas las dificultades que enfrenta la enseñanza de la geometría de manera profunda y recurrente.

Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la visualización no icónica

Recordemos, ante todo, la complejidad de los procesos que están en juego en el acto de "ver". Ver abarca siempre dos niveles de operaciones que son diferentes y mutuamente independientes, incluso si a menudo se funden en la sinergia de un mismo acto. Esos dos niveles de operaciones son: el *reconocimiento distintivo de formas* y la *identificación de los objetos que corresponden a las formas reconocidas*. El mayor problema cognitivo es saber cómo se hace el paso de un reconocimiento distintivo de formas a la identificación de los objetos que se presentan a la vista.

En la percepción del mundo que nos rodea, esos dos niveles de operación no parecen disociables porque son simultáneos (por lo menos en la escala de nuestra conciencia), pues el objeto se da junto con la forma que permite distinguirlo. Esta fusión entre reconocimiento de una forma e identificación de un objeto, base de toda evidencia perceptiva, es la condición para respuestas rápidas y adaptadas a situaciones nuevas e imprevistas. En cambio, no sucede lo mismo para la percepción de las representaciones construidas por producción de trazados. No hay relación intrínseca alguna entre las formas reconocidas en un trazado y el objeto que ese trazado "quiere" representar. Entonces ¿cómo se puede efectuar el paso de uno al otro?

El paso descansa en un "parecido" entre la forma visual distinta y la forma típica del objeto representado. Este parecido se considera generalmente como constitutivo de la imagen. Por ejemplo, Peirce (1978) lo planteó como característico de todas las representaciones icónicas en oposición a los símbolos y a los índices. Por lo general, este parecido basta para reconocer directa e inmediatamente el objeto representado, como en la percepción del mundo circundante. Por ejemplo, no hay necesidad de saber leer para mirar historietas y seguir el relato.

Naturalmente, ese mecanismo cognitivo de iconicidad no siempre es suficiente. A veces es necesario recurrir a una **enunciación** implícita o explícita. En otros términos, a veces es necesario un aporte verbal de informaciones, integrado a la imagen como leyenda o como codificación de un elemento figurativo, para poder identificar lo que las formas distinguidas representan. *Pero ese papel auxiliar de la enunciación no debe hacernos olvidar la importancia del mecanismo de iconicidad.* Este mecanismo sigue imponiéndose de manera autónoma cada vez que algo (dibujo, figuras o formas de piezas que se manipulan) se presenta a la vista.

<table>
<tr><td colspan="2">VISUALIZACIÓN ICÓNICA
Se parece al perfil de un objeto real, o a un conjunto de itinerarios o de desplazamientos sobre un territorio o a un modelo tipo (patrón).
La figura sigue siendo un objeto independiente de las operaciones que se realicen sobre ella.</td><td colspan="2">VISUALIZACIÓN NO ICÓNICA
Es una secuencia de operaciones que permite reconocer propiedades geométricas, mediante la imposibilidad de obtener ciertas configuraciones, o por invariancia de las configuraciones obtenidas.
La figura es una configuración contextualmente destacada de una red o de una organización más compleja.</td></tr>
<tr><td>BOTÁNICO</td><td>AGRIMENSOR GEÓMETRA</td><td>CONSTRUCTOR</td><td>INVENTOR ARTESANO</td></tr>
</table>

Figura 3. Dos mecanismos de identificación de objetos a partir de formas visuales

Miremos ahora cómo se da ese paso para las diferentes maneras de ver que se piden en las actividades de geometría. Para las dos primeras, se hace mediante el mecanismo de iconicidad, como para cualquier representación visual fuera de la geometría. Las otras dos, por el contrario, requieren la neutralización de este mecanismo de iconicidad. Pero no hay que creer que el paso esté garantizado por un aporte verbal de informaciones. La identificación visual de los objetos se hace a partir de las imposibilidades y de las invariancias que una secuencia de transformaciones visuales, efectuadas con o sin instrumento, permite descubrir. Esto se da porque toda figura es generativa de otra, ya sea por extensión de su procedimiento de construcción o por reorganización visual de las formas inmediatamente reconocidas. Ese proceso es intrínsecamente autónomo, aunque al resolver un problema se puede controlar discursivamente para alcanzar un objetivo y, por tanto, se puede restringir considerablemente. Es la aprehensión operatoria fundada sobre este proceso la que produce la fecundidad intuitiva de las figuras.

Los obstáculos de la visualización icónica para el aprendizaje de la geometría

La visualización icónica descansa en un parecido entre la forma reconocida en un trazado y la forma característica del objeto que se va a identificar. Naturalmente, la situación no es la misma según si el referente es un objeto material en el espacio circundante[2] o una representación de su forma tipo. En el caso de la representación, la visualización icónica supone el conocimiento de una forma tipo para cada objeto geométrico que se ha de identificar. La comparación entre las formas a reconocer y las formas tipo tolera desvíos más o menos grandes. Por ejemplo, hay una forma tipo del rectángulo que excluye una desproporción demasiado grande entre largo y ancho. Asimismo, la forma tipo de un triángulo requiere que las alturas estén situadas en su interior. Cada forma tipo está asociada a un nombre que permite evocarla y que le confiere el estatus de objeto. Los obstáculos de la visualización icónica para el aprendizaje de la geometría son bien conocidos.

El reconocimiento está centrado sobre el contorno de una zona o de una superficie, *una forma es ante todo un perfil*. Eso quiere decir que todas las propiedades que no están directamente relacionadas con el contorno característico de una forma (por ejemplo, las propiedades relacionadas con las diagonales de los cuadriláteros notables) quedan fuera del campo y, por tanto, son menos fácilmente movilizables cuando los enunciados de problemas no las mencionan de manera explícita. Eso quiere decir también que hay una resistencia a salir del contorno cerrado de la figura, prolongando, por ejemplo, los lados para hacer aparecer las rectas subyacentes.

Las formas parecen ser *estables*. No se ven de una manera que permita transformarlas en otras formas parecidas; menos aún, en formas diferentes. Por

2 Cuando el referente es el espacio físico circundante o los objetos materiales, el establecimiento de las correspondencias entre las formas reconocidas en un trazado y el referente real implica la movilización del cuerpo de quien mira (su posición, su orientación, sus desplazamientos o sus gestos para manipular). Los mapas, los planos urbanos, los esquemas que acompañan instrucciones de montaje son un excelente ejemplo de esto (Duval, 2000a).

ejemplo, es difícil percibir una superposición de paralelogramos en una red de rectas en la que está destacada una yuxtaposición de triángulos. Esto podría ser más difícil cuando el reconocimiento de las formas se acompaña de la enunciación, implícita o explícita, del nombre de lo que se identifica.

La disociación entre las operaciones que constituyen el acto de ver es aún más necesaria cuando puede haber *conflicto entre el reconocimiento de las formas por simple parecido a un ejemplo tipo y la identificación del objeto al cual corresponde la forma reconocida*. Por ello, las relaciones constitutivas de los objetos no son propiedades cuya presencia se pueda decidir a simple ojo. Para las relaciones entre dos unidades figurales, la visión solo permite una estimación perceptiva sujeta a ilusión y con umbrales estrechos de discernibilidad.

Esas tendencias obstaculizantes de la visualización icónica van en contra del desarrollo de lo que se debería convertir en el gesto reflejo para poder hacer geometría: descomponer toda forma, que se reconoce de entrada en un conjunto de trazados o en cualquier figura de partida, en una configuración de otras unidades figurales del mismo número de dimensiones o de uno inferior.

La visualización no icónica o la deconstrucción de formas

La descomposición de formas distinguidas, comenzando por las que parecen ser visualmente simples, en unidades figurales es el paso previo a la entrada en el funcionamiento propio de la visualización no icónica. El punto esencial es que existen por lo menos dos maneras radicalmente diferentes de descomponer una figura de partida en unidades figurales. Para distinguirlas es suficiente tomar como criterio la práctica, específicamente matemática, de introducir trazados suplementarios como parte de la manera de utilizar una figura de partida (dada con el enunciado o construible a partir de él). Encontramos tal práctica en los dos modos de visualización no icónica que hemos distinguido, pero ella interviene de manera radicalmente diferente. En un caso está impuesta y producida por los instrumentos usados para construir una figura. En el otro, por el contrario, quien mira debe "imaginársela", pues la elección del trazado suplementario permite ver un procedimiento de resolución del problema planteado. Esto remite a dos tipos de funcionamiento cognitivo que no tienen nada en común.

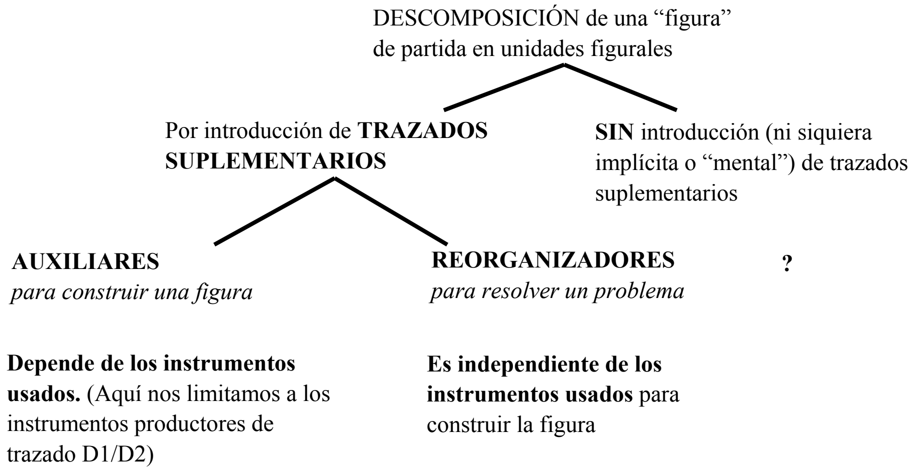


Figura 4. ¿Dos o tres modos de visualización no icónica?

La característica de las figuras geométricas, con respecto a todos los otros tipos de figura, consiste en que se pueden construir con ayuda de instrumentos y principalmente de instrumentos productores de trazados D1/D2.[3] La producción de cada trazado corresponde a la vez a una instrucción formulable (las “figuras telefoneadas”) o formulada (en el menú de un programa) y a la movilización de una propiedad geométrica en relación con el instrumento usado (compás, regla no graduada, regla graduada…). Dicho de otra manera, la actividad de construcción de figuras, casi siempre de configuraciones de formas 2D/2D o 3D/2D, se basa en su deconstrucción en trazados 1D/2D y 0D/2D. Pero en esta actividad de deconstrucción toda la atención se centra en la reconstrucción, pues el instrumento realiza de manera automática la deconstrucción de las formas 2D/2D, mientras que la reconstrucción exige que uno se focalice en el orden de las instrucciones que hay que dar para las operaciones de trazado.

Ahora bien, esta actividad conduce a la producción de trazados que no pertenecen a la figura que se va a construir, ya sea porque se trata de trazos

3 El “denominador” corresponde a tener en cuenta el espacio en el que se producen las representaciones:

El de los objetos físicos que se pueden manipular físicamente (nD/3D): maquetas de poliedros (3D/3D), hoja de papel que se puede doblar o cortar (2D/3D), cuerdas que se pueden estirar (1D/3D) como en un geoplano. Yo denominaría a estos objetos “objetos maqueta” para distinguirlos de los instrumentos que producen un trazo o un trazado.

El de un soporte de proyección (nD/2D) para la representación que se va a producir por trazados o por impresiones: arena, papel, pantalla electrónica.

Esto permite distinguir las actividades geométricas que se realizan *materialmente* de las que se realizan *representativamente*. Con frecuencia, los objetos maqueta se utilizan para una interpretación icónica de las representaciones gráficas. Esto aparece también en las definiciones: la recta como una cuerda tensa… Y eso esteriliza la apertura de la representación.

intermediarios o de trazos que van a salir del contorno de las formas trazadas: por ejemplo, las rectas que son soporte de los lados del cuadrado o del triángulo a construir. Llamaremos “trazos auxiliares” a los trazos intermediarios o de soporte. Además, en un entorno de papel y lápiz, con frecuencia se observa la costumbre desastrosa de borrar los trazos auxiliares tan pronto como se obtiene la figura que se iba a construir.

La situación es totalmente diferente cuando se trata de partir de una figura para resolver un problema. El problema de división de un triángulo de un solo tijeretazo de manera que puedan reunirse los dos pedazos en un paralelogramo es un ejemplo típico. Se trata de transformar un triángulo en un paralelogramo agregando un trazado suplementario. Se trata, pues, de la deconstrucción de una forma visual de base para obtener otra forma visual de base. Y la elección de ese trazado suplementario va a depender de la manera como las dos partes del triángulo obtenidas por ese trazado permitan reensamblarlas bajo la forma de un paralelogramo.

Se trata evidentemente de una deconstrucción que no tiene relación con la deconstrucción implicada en la construcción de las figuras. Esto se debe a que la elección de ese trazado es independiente de la manera de construir el triángulo y no hay nada en común entre este trazado suplementario que se debe encontrar y los trazados auxiliares. Llamaremos “trazados reorganizadores” a todos los trazados que permiten reorganizar una figura dada para hacer aparecer formas no reconocibles en ella. La utilización heurística de una figura depende evidentemente de la capacidad de “ver” los trazados reorganizadores posibles.

Hay que subrayar aquí un punto fundamental para comprender la importancia y la especificidad del acto de ver en el aprendizaje de la geometría: *la visualización no icónica es totalmente independiente de toda enunciación explícita o implícita.* En otros términos, no está en absoluto subordinada a un conocimiento de propiedades geométricas. Esto parece trivial para las actividades del tipo construcción de figuras, en la medida en que son los instrumentos utilizados los que dirigen o controlan la descomposición visual de las formas. Por el contrario, no es tan evidente para la utilización heurística de las figuras. Además, muy a menudo, se le asigna un papel director al conocimiento de las propiedades para la exploración de las figuras, como si ver no pudiera permitir el descubrir antes de saber.

Por ejemplo, ¿es necesario realmente conocer el teorema de los puntos medios para resolver el problema de la reconfiguración del triángulo en un paralelogramo o, por el contrario, una exploración de las reconfiguraciones podría ser una estrategia de solución? Y en ese caso, ¿no se necesitarían aprendizajes específicos para que los estudiantes fueran capaces de “ver” el trazado reorganizador, no solamente para este problema, sino para muchos otros problemas matemáticos muy diferentes?

Volveremos sobre esta pregunta que toca el papel heurístico de la visualización en la resolución de problemas de geometría elemental. Pero desde ya podemos hacer las siguientes observaciones: aunque se pueda modificar siempre el discurso sobre los objetos, no es posible modificar las formas que se reconocen de un solo golpe de vista en una figura. Esto se debe a que, a diferencia de la enunciación y, por lo tanto, de la producción de explicaciones o de justificaciones, el reconocimiento visual de formas escapa a todo control intencional.

Existen leyes de organización de los datos visuales, puestas en evidencia por la teoría de la Gestalt, que imponen el reconocimiento de ciertas formas frente al reconocimiento de otras formas, incluso si estas últimas se evocan verbalmente. Esta resistencia ha conducido a algunas investigaciones didácticas a deplorar que en la resolución de problemas de geometría ¡los estudiantes observados se enredan en la "percepción" de la figura! De hecho, un aprendizaje que procura que los estudiantes puedan "ver" uno o más trazados reorganizadores que es necesario añadir para encontrar la solución de un problema se debe hacer en el nivel del reconocimiento de las formas, y no en el de la identificación de los objetos representados, que seguirá siendo puramente verbal.

¿Las adquisiciones relativas a una manera de ver ayudan a entrar en las otras maneras de ver?

Esta pregunta sobre la transferencia de lo que se ha adquirido en un tipo de actividad propuesta en clase a otro tipo de actividad es la pregunta crucial para la enseñanza de la geometría en primaria y a comienzos de secundaria. Querer privilegiar una entrada como más accesible que las otras lleva a suponer la transferibilidad, más o menos espontánea, de una manera de ver a otras.

Pasar de la visualización icónica, que es común a todos los campos de conocimiento, a la visualización no icónica, que es específica de las matemáticas, exige un cambio completo del funcionamiento cognitivo del acto de "ver". Esto equivale a sustituir al circuito espontáneo representado por las flechas A1-A2 (Figura 5), ya sea por el circuito C1-C2, correspondiente a la exploración reorganizadora de las figuras, o por el circuito inverso representado por las flechas B1-B2-B3, considerado como proceso "de conceptualización".

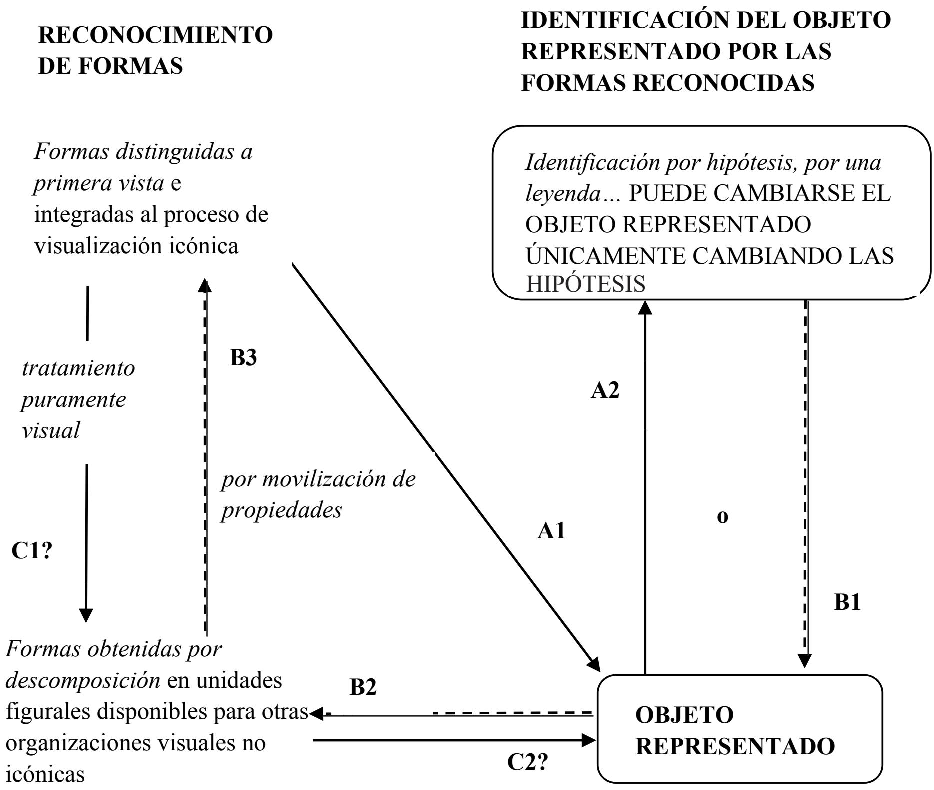


Figura 5. Dos modos de funcionamiento cognitivo para identificar los objetos representados

¿Se puede enseñar la geometría como si la gran mayoría de estudiantes de primaria y de secundaria fueran a descubrir y a realizar por sí mismos ese gran cambio, no solamente para pasar de una visualización icónica a una visualización no icónica, sino también para pasar, dentro de la visualización no icónica, de una deconstrucción instrumental de las formas a una deconstrucción heurística? De igual manera, ¿se puede considerar que las actividades de construcción, que imponen instrumentalmente una deconstrucción de las formas visualmente reconocidas, sean suficientes para una transferencia hacia competencias heurísticas? Parecería que es una opinión ampliamente compartida, por lo menos si se considera la importancia dada desde hace unos treinta años de las actividades de construcción, incluso si no parece ayudar a la mayoría de los estudiantes a superar la evidencia perceptiva inmediata y a desarrollar estrategias de exploración visual de las figuras para resolver problemas de geometría.

De hecho, para comprender la complejidad cognitiva del paso de la visualización icónica a la visualización no icónica se requiere olvidar la gama muy rica de todas las actividades propuestas a los estudiantes para establecer un puente entre lo que sería práctico y lo que sería teórico, o entre lo que sería concreto y lo que sería formal, o entre lo que sería espacial y lo que sería propiamente geométrico, o incluso entre lo que sería material y lo que sería "mental". Es necesario plantearse la pregunta que viene antes de todas esas oposiciones demasiado globalizantes: ¿cuál es la manera matemática de ver exigida por la utilización del lenguaje natural en geometría (enunciación de propiedades, definiciones, teoremas, deducción de otras propiedades, etc.)? ¿Es acaso una de las cuatro maneras de ver, o solo uno de los dos modos de visualización no icónica, o hay que buscar otra? Aquí reencontramos la pregunta que habíamos dejado en suspenso (Figura 4): ¿existen dos o tres maneras no icónicas de descomponer las formas? Si hay una tercera, ¿qué tipo de actividad la promueve?

La manera de ver requerida en geometría: la deconstrucción dimensional de las formas

La manera matemática de ver las figuras consiste en descomponer cualquier forma distinguida, es decir, reconocida como una forma nD/2D, en unidades figurales de un número de dimensiones inferior al de esta forma. Por ejemplo, la figura de un cubo o de una pirámide (3D/2D) se descompone en una configuración de cuadrados, de triángulos, etc. (unidades figurales 2D/2D), y los polígonos se descomponen a su vez en segmentos de recta (unidades figurales 1D/2D). Las rectas o los segmentos se pueden descomponer en "puntos" (unidades 0D/2D) (véase Figura 20). Nótese que con los puntos salimos de toda visualización. En efecto, los puntos solo son visibles cuando aparecen como la intersección de unidades 1D/2D (trazos secantes o trazos que forman esquina —"vértices", "ángulos", etc.). Dicho de otra forma, la marca de un punto sobre un trazo o fuera de él (por ejemplo para fijar los extremos de un segmento o su punto medio) corresponde a una codificación simbólica. ¡Es además a esta codificación simbólica a la que se le asocian generalmente letras!

Para poner en evidencia el carácter irreductible de esta manera de ver a las maneras analizadas antes, y para mostrar que constituye el primer umbral decisivo para el aprendizaje de la geometría, es suficiente compararla con la descomposición heurística de las formas.

La descomposición heurística por división mereológica de las formas reconocidas

La utilización heurística de una figura exige con frecuencia que se la mire como si se tratara de las piezas de un rompecabezas, pero eso supone que se la descomponga en unidades figurales del mismo número de dimensiones que la figura de partida. Por ejemplo, un triángulo (2D/2D) se puede descomponer en otros triángulos (2D/2D). Pero también, un cubo material (3D/3D) o cualquier otro sólido, se puede dividir en bloques que también serán poliedros (3D/3D). Esta división, que llamaremos una división mereológica (división de un todo en partes que se pueden yuxtaponer o superponer), se hace siempre para reconstruir, con las partes obtenidas, una figura a menudo muy diferente visualmente.

Esta descomposición se inscribe entonces en un proceso más general de *metamorfosis* (para no decir de *anamorfosis*, que es una transformación por un proceso de deformación continua). La descomposición mereológica de las figuras es uno de los procedimientos más antiguos en la historia de la geometría (Edwards, 1979). Además, las primeras "demostraciones" de la relación pitagórica se basaban en operaciones de descomposición para lograr una reconfiguración mereológica (Padilla, 1992). Esta descomposición puede ser:

Estrictamente homogénea: la descomposición se hace en unidades de la misma forma que la figura de partida. Las cuadrículas constituyen figuras de fondo (¡los "soportes" de representación!) que a menudo guían las primeras operaciones de descomposición mereológica.

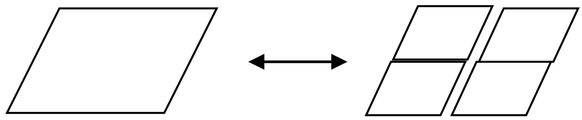


Figura 6

Homogénea: la descomposición se hace en unidades figurales diferentes de la forma de la figura de partida, pero todas de la misma forma.

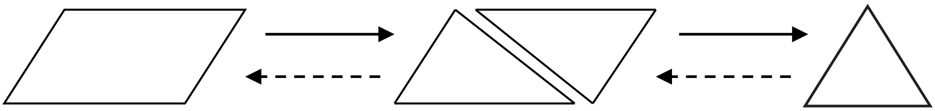


Figura 7

Heterogénea: la descomposición se hace en unidades figurales de formas diferentes entre ellas. El problema de la división de un rectángulo en dos partes, una de las cuales es un triángulo, para formar un paralelogramo implica una descomposición heterogénea de ese tipo.

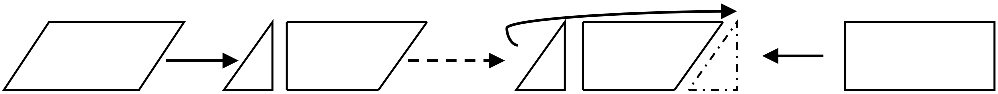


Figura 8

Las descomposiciones homogéneas son transformaciones visualmente reversibles que pueden ensamblarse espontáneamente al ver la figura. Por el contrario, las descomposiciones heterogéneas no son visualmente reversibles.

Para una figura de partida determinada por el enunciado de un problema hay evidentemente varias descomposiciones mereológicas posibles, pero no todas conducen a la solución del problema. Sucede incluso a veces que las que conducen a la solución no son directamente visibles en la figura. Dicho de otra manera, hay situaciones en las que la figura ayuda a ver y otras en las que impide ver. Podemos determinar los factores que favorecen o inhiben esos procesos de división mereológica y de reorganización de las formas reconocidas (Duval, 1995b). Y esos factores pueden ser variables didácticas para actividades que procuran llevar a los estudiantes a la utilización heurística de las figuras.

La descomposición mereológica presenta una doble particularidad:

- Se puede operar materialmente (por recorte y reorganización de las piezas tomadas como en un rompecabezas), gráficamente (agregando lo que llamamos anteriormente trazados reorganizadores) o incluso a simple vista (y no "mentalmente"). Esas tres modalidades son casi equivalentes, salvo una diferencia: cuando una parte debe intervenir de manera simultánea en dos reconfiguraciones parciales diferentes, es necesario disponer materialmente de dos piezas para esta misma parte.

- La descomposición por división mereológica con mucha frecuencia no tiene relación directa con el discurso matemático, y por eso permite la exploración puramente visual de una figura de partida para detectar las propiedades geométricas que se van a utilizar para resolver un problema planteado.

La descomposición por deconstrucción dimensional de las formas

La deconstrucción dimensional presenta dos características que la oponen no solamente a la descomposición mereológica sino también a la deconstrucción instrumental.

- Se hace necesariamente en articulación con una actividad discursiva. Podríamos incluso decir que es en esencia de orden discursivo. Para representarla gráficamente, hay que transformar de alguna manera las figuras geométricas en esquemas. Por ejemplo, la sola enunciación de las propiedades características de un paralelogramo implica que se deconstruya dimensionalmente una figura simple 2D/2D en una configuración de unidades figurales 1D o 0D/2D, pues las propiedades de un objeto 2D/2D (por ejemplo, el paralelogramo representado por la Figura 9) son relaciones entre objetos representados por unidades figurales 1D/2D (las configuraciones B y C de la Figura 9) o 0D/2D.

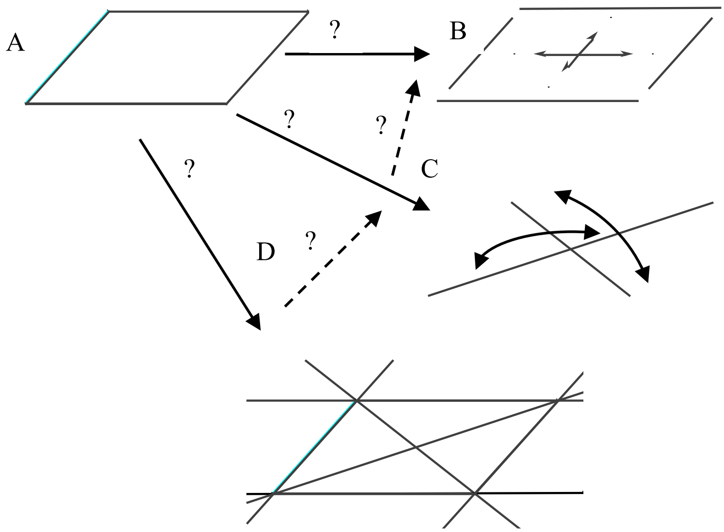


Figura 9. Descomposición en unidades figurales por deconstrucción dimensional de una forma

Esta deconstrucción dimensional representa una revolución cognitiva para el funcionamiento espontáneo de la visualización icónica o no icónica. La deconstrucción dimensional de las formas es un cambio repentino de mirada que va en contra de todos los procesos de organización y de reconocimiento perceptivo de las formas. Ese no es el caso de la descomposición del tipo rompecabezas: en esta, por el contrario, se moviliza ese proceso tratando de superar las limitaciones o las restricciones inmediatas.

La primera ley de la organización y del reconocimiento perceptivo de las formas es la prioridad inmediata y estable de las unidades figurales 2D sobre las unidades figurales 1D. Eso quiere decir no solamente que primero se ve un paralelogramo antes de ver cuatro lados, sino también que todos los trazados que se perciben de entrada como formando el contorno de la superficie, permanecen, de cierta manera, inseparables de este reconocimiento visual elemental. Los lados de un polígono siguen siendo los bordes no separables de la superficie que delimitan. Esto hace inconcebible e invisible el proceso de deconstrucción dimensional de las formas. Incluso las actividades de construcción de figuras, en las que esta es impuesta *de facto* por los instrumentos, permanecen prácticamente sin efecto sobre el funcionamiento cognitivo que impone la primacía visual de las formas 2D sobre las formas 1D o las unidades 0D.

La razón es que en las actividades de construcción de figuras, la atención se centra precisamente en la reconstrucción de unidades figurales 2D a partir de unidades figurales 1D producidas automáticamente por el instrumento. Por eso la deconstrucción dimensional, es decir, el paso de las superficies a las líneas (que no son visualmente bordes), representa una revolución cognitiva con respecto a los otros tipos de visualización. Es aun más difícil de realizar que el paso de los sólidos a las figuras planas que se puede obtener con un plano de intersección.

Mientras que la descomposición mereológica se puede realizar o simular materialmente con objetos físicos que se separan y se reúnen de otra manera, la deconstrucción dimensional no se puede materializar. Ni siquiera se puede mostrar gráficamente, a menos que se introduzca una pareja de figuras relacionadas entre sí, según la estructura proporcional de una equivalencia o de una implicación. En la Figura 9, el esquema fusiona tres proposiciones a las que corresponden respectivamente las relaciones A→B, A→C, A→D, que no es la manera habitual de visualizar practicada en la enseñanza y en los libros de texto, ¡lo que a su vez corresponde a menudo a la manera de ver del botánico!

Podemos entonces ver a la vez la similitud y sobre todo la oposición entre división mereológica de las formas 3D o 2D y la descomposición dimensional de las formas nD en formas (n-1)D. Mientras que la división mereológica se hace para lograr una reconfiguración que haga aparecer nuevas formas que no eran reconocibles en la figura de partida, la deconstrucción dimensional se hace para una (re)construcción deductiva de los objetos representados. Dicho de otra manera, la división mereológica permanece puramente visual, mientras que la deconstrucción dimensional está completamente subordinada a un discurso axiomático o axiomatizable.

La descomposición por deconstrucción dimensional de las formas percibidas corresponde al funcionamiento profundo de la visualización en geometría

Cuando decimos "funcionamiento profundo", queremos significar que las otras maneras de ver se quedan en la superficie. Esto conduce a modificar la noción de "figura", ya sea que se entienda esta palabra en su sentido clásico o que se la entienda según la oposición entre dibujo y figura, oposición que en realidad es entre el carácter particular de toda visualización realizada y el carácter general de las propiedades del objeto representado. Para que una figura dé lugar a una visualización geométrica, debe surgir de lo que hemos llamado un "circuito de visualización" organizado alrededor de una trama de trazados 1D/2D, pues a partir de una red de rectas se puede hacer aparecer una gran diversidad de formas 2D/2D. La solución del siguiente problema (Figura 10), en el que se pide reproducir una figura con una regla no graduada, permite poner en evidencia este proceso.

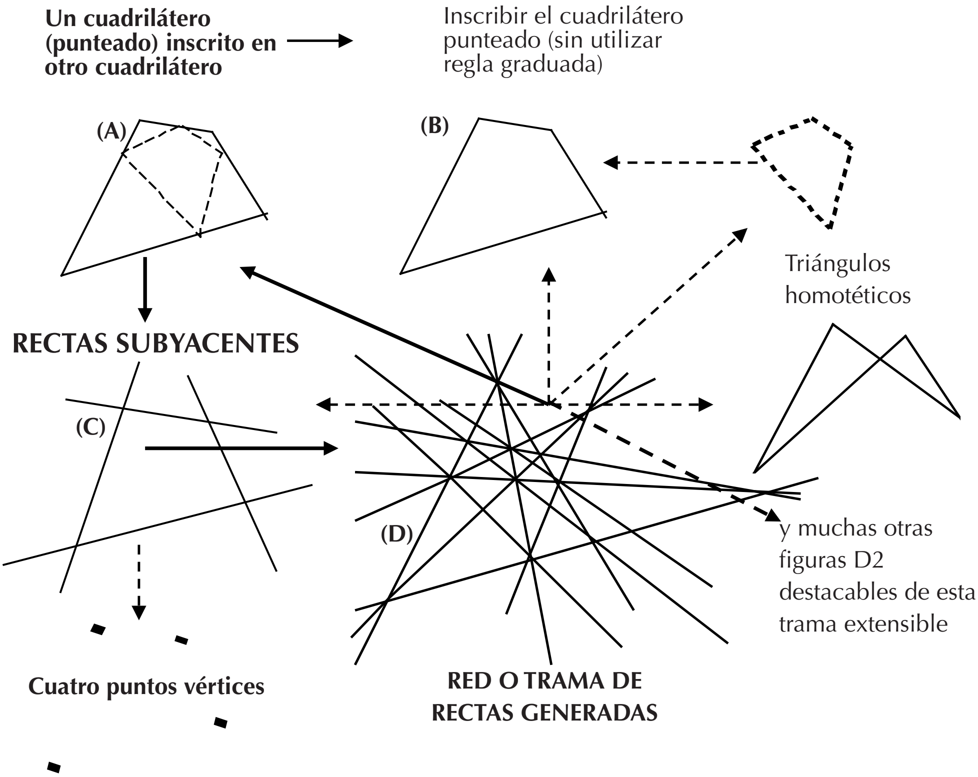


Figura 10. Cambio entre figuras (D2) a partir de una trama de rectas (D1)

Para reproducir dentro del cuadrilátero (B) el cuadrilátero punteado que está inscrito en el cuadrilátero (A), es necesario comenzar trazando las rectas soporte del cuadrilátero (B). Se obtiene así la primera red de rectas que se puede desarrollar prolongándolas para hacer aparecer nuevos puntos de intersección y construir así nuevas rectas que pasan por dichos puntos. Sobre la red de rectas (D) generada de esta manera, se puede distinguir una gran variedad de polígonos, algunos de los cuales corresponden a la configuración inicial (A). Es esta trama subyacente la que permite pasar de una figura a otra y, por lo tanto, reproducir la figura pedida. Por supuesto, para pensar en esta solución, se tiene que reconocer en esta red una gran variedad de polígonos.

En la visualización icónica, toda figura tiende a ser una representación estable o no modificable, porque es imagen por representación de un objeto. Con la deconstrucción dimensional, la figura solo es una configuración particular y transitoria, contextualmente destacada de una red o de una organización más compleja; el enunciado del problema determina la figura particular que se destaca. Dicho de otra manera, en geometría plana, toda figura es una configuración transformable en otras, cada una de las cuales se destaca dentro de una misma trama, según las propiedades o los objetos que se nombren.

Así que hay dos puntos esenciales para comprender el funcionamiento en profundidad de la deconstrucción dimensional de las formas.

1. El campo real del trabajo sobre las figuras está constituido por la trama de las unidades figurales 1D/2D, y ya no por las unidades figurales 2D/2D que a menudo se introducen como las figuras de base. A partir de la red de rectas se puede hacer aparecer una gran diversidad de formas 2D/2D. Pero eso requiere también el reconocimiento de formas no visibles inmediatamente, del tipo de la que se requiere en la descomposición mereológica.

2. Esta deconstrucción dimensional de las formas es el requisito para una comprensión eficaz de toda enunciación de las propiedades geométricas y, por lo tanto, para su movilización efectiva por parte de los estudiantes en la resolución de problemas.

Para ilustrar estos dos puntos, volvamos al problema del reformateo de un triángulo en paralelogramo. La justificación de la solución, pero no su descubrimiento, que se puede obtener al final de *n* intentos de varias reconfiguraciones, recurre al teorema de los puntos medios y a las propiedades del paralelogramo. Pero, por el contrario, ¿basta con conocer ese teorema para encontrar la solución? Es decir, ¿existe una estrategia visual para pasar de la figura de un triángulo a la reconfiguración IV (Figura 11)? Es necesario ver el triángulo que se desea dividir sobre el fondo de la red de rectas que soportan los lados, o tener el reflejo de generar esa red de rectas (III) subyacentes a esta figura. Esta red contiene, entre otras figuras posibles, al triángulo que se va a dividir y al paralelogramo obtenido por reconfiguración. Además, como contiene las figuras de partida y de llegada (el paralelogramo), esta red se articula de manera pertinente y congruente con la justificación matemática.

Una red de rectas soporte, construida a partir de una figura de partida, contiene potencialmente una gran variedad de figuras 2D que se pueden hacer aparecer mediante la formulación de preguntas. Tal red permite ver el paso matemático de unas a otras, es decir, las propiedades que lo hacen posible. En el ejemplo que acabamos de examinar, la única figura que permite ver es III, todas las otras no son más que subfiguras visualmente destacables de la configuración III, como en el ejemplo dado anteriormente (Figura 10).

Desde un punto de vista cognitivo, eso quiere decir que los estudiantes deben desarrollar paralelamente dos tipos de capacidades para entrar en la manera matemática de ver las figuras:

- Por una parte, la deconstrucción dimensional de formas 2D que saltan a la vista, incluyendo la de las figuras consideradas como de base, para la construcción de la red de rectas cuyas formas 2D no son más que subfiguras. La adquisición de tal capacidad es un proceso largo y necesita la organización de secuencias de actividades específicas (Godin, 2004).

- Por otra parte, el reconocimiento de todas las configuraciones 2D que potencialmente se pueden reconocer en una red de rectas en la que no son visibles a primera vista.

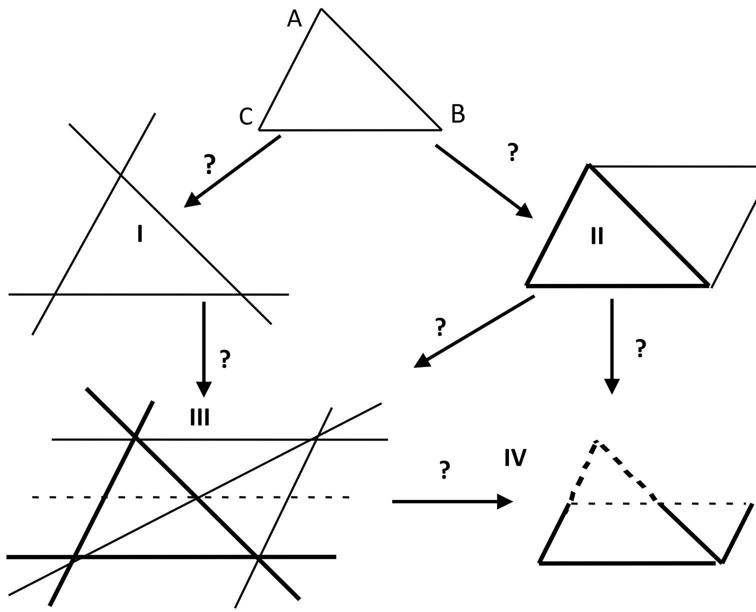


Figura 11. Deconstrucción dimensional del triángulo de partida

"Ver" y decir: ¿Cómo y hasta dónde se pueden reunir en geometría?

Lo que se denomina "figura" en geometría es un todo en el que se combinan hipótesis relativas a propiedades con una representación visual. Concretamente, esto se traduce en el hecho de que la codificación (letras que codifican puntos de intersección u otros puntos, marcas que codifican las propiedades dadas en las hipótesis) hace parte de la figura. ¡Un análisis en términos de registro de representación conduce a ver únicamente una asociación superficial! En realidad, las figuras geométricas dependen de dos registros de representación que son cognitivamente heterogéneos, pues conservan sus propias posibilidades de tratamiento, lo que quiere decir que funcionan en paralelo y de manera independiente. Para darse cuenta de esto, basta con recordar la doble variación siguiente:

- Para una misma representación visual, se pueden tener varios enunciados diferentes y, por lo tanto, “figuras geométricas” que son diferentes desde el punto de vista matemático.
- Para un mismo enunciado, se pueden tener diferentes representaciones visuales posibles, es decir, “imágenes” diferentes para mantener el punto de vista psicodidáctico corriente y natural.

Los problemas específicos que plantea el aprendizaje de la geometría no provienen únicamente de la complejidad de la visualización no icónica y la deconstrucción dimensional de formas que la sustenta, sino también de la manera como puede articularse un discurso geométrico con esta visualización. La razón es que la actividad geométrica presupone siempre la sinergia entre los funcionamientos propios a esos dos registros de representación. Esta articulación es cognitivamente más compleja que la articulación espontánea entre lenguaje e imagen, incluso si se tiene en cuenta la diversidad de las maneras de ver que hemos analizado (Figura 1).

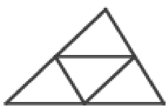
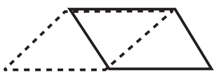
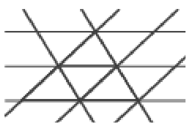
Registro de la visualización Un juego de reorganizaciones visuales según la forma o según el número de dimensiones	**ARTICULACIÓN**	**Registro del discurso** Aplicación, en toda formulación, de tres tipos de operaciones discursivas
Figura de partida 1  Figura de partida 2  Figura de partida 3 	¿Cuáles elementos de los enunciados permiten un anclaje en la visualización? ¿Qué función tiene la figura con respecto al enunciado y a la resolución del problema: —ilustración, —heurística, —objeto soporte para mediciones?	**Enunciado 1.** A’C’ y AC son paralelas A’B’ y AB son paralelas B’C’ y BC son paralelas Probar que A es el punto medio de B’C’. **Enunciado 2.** ABED y BCED son paralelogramos. Probar que B es el punto medio de AC. **Enunciado 3.** … Enunciados de propiedades para aplicar… (por ejemplo, el teorema de los puntos medios).
¿QUÉ SE VE? H1 ¿Cuáles son las posibilidades de transformación de la figura tomada como figura de partida que son visualmente accesibles? H2 ¿Cuáles son las organizaciones que pueden hacer ver lo que se busca?	¿La doble codificación basta para que haya comunicación y sinergia de funcionamiento entre los dos registros?	**¿QUÉ HAY QUE VER?** ¿A qué corresponden visualmente: L1. los términos empleados en los enunciados (cuando se plantea un problema, cuando se formula una conjetura, cuando se dan instrucciones…)? L2. las proposiciones (definiciones, teoremas, …)? L3. los razonamientos para justificar o probar (deducción o refutación)?

Figura 12. Las dos preguntas del problema cognitivo de la articulación entre visualización y discurso

Para introducir el análisis, partiremos de un estudio que puede parecer muy antiguo, pero que aún hoy en día tiene la ventaja de aplicar a la vez variaciones de enunciados y variaciones de figuras en el estudio de los problemas dados a los estudiantes (Dupuis, Pluvinage y Duval, 1978). En la Figura 12 hemos separado la figura y su doble codificación: la codificación por letras que tiene como función designar en la figura los objetos nombrados en el enunciado, y la codificación por rótulos y numerales que tiene como función plantear en la figura las hipótesis dadas en el enunciado.

En este ejemplo, los dos enunciados de problema son como dos descripciones análogas que se pueden hacer a partir de una de las tres figuras de partida, pues dan las mismas hipótesis. No obstante, no se acoplan de la misma manera a cada una de esas tres figuras. Los resultados muestran que, de una página a la siguiente, los estudiantes pueden no reconocer en absoluto el mismo problema presentado según dos combinaciones diferentes, como si por ejemplo no hubiera absolutamente nada en común entre la figura de partida 1 y la figura de partida 2 (Dupuis, Pluvinage y Duval, 1978, pp. 75-79).

Sin embargo, el interés de ese trabajo no está ahí. Al margen de la “competencia” requerida para reorganizar visualmente una figura de partida, la variación misma de los dos enunciados permite plantear una pregunta mucho más vasta: ¿cuáles son los elementos discursivos que, en un enunciado, permiten pasar de la formulación de las hipótesis a la figura y que, por lo tanto, permiten articular los trámites discursivos del pensamiento con la movilidad de reorganización visual de lo que se ve? Naturalmente, cuando interviene el lenguaje (y ¿puede acaso haber hipótesis sin lenguaje?), es absolutamente necesario tener en cuenta por lo menos tres niveles de operaciones discursivas (Duval, 1995a): nombrar aquello de lo que se habla, enunciar algo y poner en relación lo que uno dice con lo que se acaba de enunciar para completar, explicar, justificar lo propuesto. Esos tres niveles de operaciones discursivas subyacen a la producción, oral o escrita, de toda formulación.

¿Cuáles palabras usar para expresar lo que se necesita discernir visualmente en una figura?

La geometría requiere la utilización de un vocabulario técnico un tanto pesado. Podemos encontrar muy rápidamente en el currículo la introducción de por lo menos cuarenta términos, y si hacemos la suma de lo que se introduce hasta tercer grado de secundaria, ¡se supera ampliamente la centena de términos! Sin embargo, lo más importante no es eso, sino la heterogeneidad semántica de esta terminología. Toda formulación en geometría recurre a un vocabulario que cubre por lo menos cuatro tipos de términos denominativos.[4] Para hacerlo aparecer, basta con examinar la manera como el sentido de esos términos se puede poner en correspondencia con unidades figurales en el registro de la visualización.

Tal empresa no tiene nada de arbitraria: está en el centro de las exigencias que han contribuido al desarrollo de la geometría en la historia. Las veintitrés definiciones que abren los *Elementos*, y que preceden a los postulados y a las nociones comunes, constituyen el inventario del corpus semántico necesario para toda empresa de Euclides (Euclides, trad. 1990). En ese sentido, esas definiciones son tanto definiciones semánticas como definiciones matemáticas. Su función es fundamentar la articulación del discurso matemático con la organización de la percepción visual de las formas.

En los ejemplos hemos tomado en cuenta el vocabulario referente a las formas en función de la variación dimensional, y no el referente a las magnitudes (longitud, área, perímetro…). Esto se debe a que las magnitudes escapan en gran parte a la visualización debido a que imponen umbrales estrechos de estimación y solo se pueden aprehender mediante operaciones de medición y números. Recordemos, además, que Poincaré las separaba en su descripción de la intuición geométrica.

1.**Términos analítico-descriptivos** que dan un estatus de "elemento" a un trazado en la organización visual de varios trazados: *Directamente asociados a un solo trazado visual*	2.**Términos denominativos de objetos de estudio**: *asociados a una organización visual de varios trazados en una forma típica*	3. **Términos de propiedad característica** que permite clasificar los objetos de estudio: *Asociados a la comparación de trazados como elementos de la organización visual de una forma típica*	4.**Términos de relación entre (elementos) trazado**s **fuera de toda pertenencia a una organización visual**: *no decidibles visualmente*
Elementos D1: lado, diagonal, cuerda, radio… **Elementos D2:** vértice, punto de intersección, ángulo **Elemento D3**: cara, plano de corte (?)	**Objetos D1**: recta, segmento, curva **Objetos D2**: triángulo, cuadrado, paralelogramo, polígono, circunferencia… **Objetos D3**: pirámide, tetraedro, cubo, prisma, poliedro, esfera…	**Relacionados con un tipo de objetos:** • punto medio, centro • isósceles, equilátero, rectángulo, cualquiera • regular, convexo	paralela perpendicular simétrico igual
(Euclides, Libro I) Definiciones: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 13, 14, 17	Definiciones: 4, 7, 9, 15, 16, 18, 19, 22	Definiciones: 11, 12, 20, 21	Definiciones: 10, 23

Figura 13. Clasificación de términos geométricos en función de su valor descriptivo de un dato visual

4 Esta clasificación se puede afinar al distinguir términos de relación entre objetos. Por ejemplo, "tangente" es un término de relación entre un objeto D2 y un objeto D1 o un objeto D2. "Secante" también pertenece a esta categoría. Esos términos están asociados a configuraciones particulares. La relación designada es entonces visualmente constatable, pero solo en el campo restringido de la hoja de papel o de la pantalla. Más allá, en el campo perceptivo, se vuelve indiscernible. ¡Los rieles del ferrocarril no parecen paralelos! La expresión "punto en el infinito" se refiere a ese salto. El aporte esencial de tal clasificación es poner en evidencia las diferentes maneras como los términos geométricos se pueden poner en correspondencia con unidades figurales y permitir así un anclaje visual para la descripción verbal de una situación.

Lo importante en el análisis del vocabulario utilizado en geometría no es la cantidad de términos técnicos, sino la extensión del espectro semántico que recubren. En efecto, para describir lo que hay que ver, las matemáticas recurren a dos categorías de términos que no se encuentran en el vocabulario común empleado fuera de las matemáticas para describir lo que se ve: los términos analíticos descriptivos y los términos de relaciones entre trazados considerados independientemente de su pertenencia a la organización visual de la forma de un objeto (columnas 1 y 4 de la Figura 13). Este hecho se debe relacionar con la característica de la visualización geométrica, la deconstrucción dimensional de formas.

Por otra parte, se puede anotar que seis de las veintitrés definiciones de Euclides son únicamente explicitaciones de la deconstrucción dimensional de formas (definiciones 1, 2, 3, 5, 13, 14). La deconstrucción dimensional de formas se convierte en la etapa intermediaria necesaria entre el reconocimiento perceptivo inmediato de las formas y la identificación correspondiente de los objetos matemáticos, como lo muestra el simple examen de las definiciones que se pueden dar de los objetos de estudio (columna 2 de la Figura 13) o de las propiedades características (columna 3 de la Figura 13). Dicho de otra manera, la aplicación de un término de denominación de objeto (columna 2 de la Figura 13) a una figura, o a una subfigura, implica tener en cuenta términos analíticos descriptivos y términos de relaciones entre elementos.

Pero el problema para el aprendizaje es que esas categorías de términos específicos a las matemáticas entran en competencia con un vocabulario no matemático que, por su parte, no implica ninguna deconstrucción dimensional de formas: *trazo, línea, vertical, horizontal, corte*… Ese vocabulario corriente, esencialmente relacionado con una práctica gráfica y con la práctica de desplazamiento en espacios de juego (tablero) o en planos dibujados, tiene un valor descriptivo más inmediato, en la medida en que corresponde, ya sea a lo que se produce por una acción de trazado (*trazo, línea*),o a las referencias físicas del sujeto (*horizontal, vertical*) o incluso a relaciones percibidas directamente y expresables por oposiciones cualitativas (*cortarse / no cortarse, tocarse /no tocarse*).

Consideremos ahora los términos denominativos de objetos (columna 2 de la Figura 13). Ciertos términos presentan la ventaja aparente de pertenecer a la vez al vocabulario matemático y al vocabulario corriente para nombrar o describir objetos o formas (arquitectónicas, por ejemplo) del entorno. La selección y la comprensión de esos términos dependerán de la manera de ver, icónica o no icónica, de quien mira los objetos del entorno o su representación (sección titulada “Dos modos opuestos de funcionamiento cognitivo: la visualización icónica y la no icónica”). Para un sujeto que funciona en modalidad icónica de visualización, los términos analítico-descriptivos y los de relación no tienen utilidad ni sentido alguno para expresar lo que ve. Por el contrario, son esenciales para funcionar en modalidad no icónica de visualización.

¿Cómo se pueden poner las proposiciones[5] en correspondencia con una figura o convertirse en una figura?

El papel del lenguaje no es "poner en palabras" lo que ya estaría pensado claramente o vivido, sino ponerlo en proposiciones para construir el pensamiento de los objetos de conocimiento, por lo menos en los campos de las ciencias y las matemáticas. Lo que las proposiciones enuncian constituye un sentido que es irreductible al de las palabras que ellas articulan. Esta irreductibilidad aparece con los problemas específicos que plantean tanto la producción, oral y sobre todo escrita, como la comprensión de las proposiciones, escuchadas o leídas; por ejemplo, la distinción entre una proposición y su recíproca aunque emplean las mismas palabras, o la modificación del sentido relacionada con la cuantificación y la negación, o incluso el cambio de sentido de una proposición en función del estatus que se le da en el desarrollo de un discurso. La cuestión de la articulación entre visualización y discurso se plantea entonces de una manera más precisa. Se trata de saber si esta articulación se limita a los anclajes que los términos empleados permiten establecer en la representación visual, o si, por el contrario, moviliza interacciones más complejas.

La articulación cognitiva entre el registro de la visualización y el del lenguaje no se hace en el nivel de las palabras sino en el de las proposiciones. En efecto, la producción de una representación no es la misma según si se hace o no se hace, en función de la producción previa de otra representación en otro registro. Por ejemplo, una figura se puede producir para ilustrar un enunciado, pero inversamente un enunciado se puede producir para describir o para explicar una figura. Esas dos situaciones desde el punto de vista cognitivo son totalmente diferentes y no conducen necesariamente a las mismas producciones.

5 Tomamos el término "proposición" a la vez en su sentido gramatical amplio, que abarca toda composición sintáctica que contenga un verbo conjugado, y en su sentido lógico más restringido (excluyendo, por ejemplo, las preguntas y la mayor parte de los actos de habla como las promesas, las órdenes, las solicitudes…). En matemáticas, es necesario agregar la restricción del empleo de ese término a cierto estatus en la organización teórica del discurso: el de teorema. Aquí no podemos hacer más que recordar ese fenómeno importante para los aprendizajes y también para la comunicación. Las proposiciones son poco discernibles en el acto auditivo. Lo que se impone a la escucha son las palabras e incluso lo que llamamos palabras clave, que varían de un individuo a otro según su base de conocimientos. Por eso la expresión escrita cumple un papel específico, irreductible a toda expresión oral, por la toma de conciencia de los razonamientos (Duval, 2001, pp. 190-195).

Volvamos al ejemplo precedente (Figura 12) y tomemos el enunciado 1. A partir de este enunciado se puede construir la Figura 3, luego la Figura 1, borrando los trazos que sobran para obtener un contorno cerrado. No se construye la Figura 2: esta figura supone una reorganización visual de las formas reconocidas en las Figuras 1 o 3. Esta reorganización visual es la condición para ver la Figura 2 como una subfigura de la Figura 1. Tomemos ahora la Figura 1. El enunciado 1 se puede ver como una descripción de la Figura 1, pero no el enunciado 2, a menos que se pueda hacer espontáneamente la reorganización visual requerida y pensar en el teorema que se quiere encontrar para resolver el problema. Este es el punto de vista del redactor del enunciado del problema y no el de un estudiante para quien la articulación cognitiva entre visualización y lenguaje todavía no es operante.

Podemos entonces verificar que una figura y un enunciado (lingüístico o simbólico) no tienen uno con respecto al otro las mismas funciones y, por lo tanto, no tienen el mismo estatus. Por eso, cuando se movilizan simultáneamente dos representaciones en dos registros diferentes, es esencial distinguir el estatus de representación autosuficiente para una y el estatus de representación auxiliar para la otra (Seminario IUFM, 1999). De esta manera, en el nivel de las proposiciones, la articulación entre figuras y proposiciones está subordinada a la función que desempeña lo que se produce como representación auxiliar con respecto a lo que se considera como representación principal. La formulación de un enunciado y la selección de una figura dependen de la función que aquello que, en un contexto dado, se considera una representación auxiliar debe tener con relación a lo que se considera matemáticamente una representación autosuficiente. La tabla de la Figura 14 nos da una primera idea.

Funciones que las figuras pueden cumplir con respecto a las proposiciones (consideradas como representaciones autosuficientes)	**Funciones que las proposiciones pueden cumplir con respecto a las figuras (consideradas como representaciones autosuficientes)**
Ilustración o ejemplo, como soporte “intuitivo”	Descripción (de un estado, de una operación, de una relación)
CONTRAEJEMPLO	DEFINICIÓN DE UN OBJETO
	Explicitación por el aporte de una información o de un dato (las hipótesis)
Objeto cuasimaterial	Comparación de magnitudes discretas o continuas

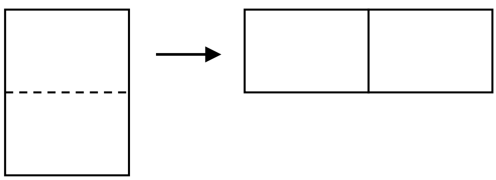
Figura 14. Análisis funcional de la relación entre una proposición enunciada y una figura

Basta, pues, con cambiar el estatus o la función de un enunciado para cambiar su tipo de formulación. Veamos ahora, a manera de ejemplo, dos consecuencias de este análisis funcional de la articulación entre figura y enunciado, es decir, la articulación entre visualización y lenguaje en el nivel de las proposiciones enunciadas: la producción de una figura que sea un contraejemplo y las diferentes definiciones posibles de una recta.

La producción de una figura como contraejemplo de una proposición propuesta como conjetura

Desde un punto de vista matemático, la producción de un contraejemplo constituye la situación en la que la articulación entre visualización y formulación es más significativa, ya que la figura es un ejemplo que toma valor matemático de prueba. Pero quizá no se le ha prestado suficiente atención al hecho de que, desde un punto de vista cognitivo, esta articulación se hace en el nivel de una proposición enunciada y no en el de un razonamiento. Una figura toma valor matemático de prueba cuando es un ejemplo que refuta una proposición propuesta como conjetura. La capacidad de los estudiantes para producir un contraejemplo presupone a la vez el desarrollo de "competencias" relativas a la cuarta manera de ver, la del inventor artesano y una coordinación fuerte entre el registro de la visualización y el de los diferentes niveles de operación discursiva.

El estudio de caso hecho a propósito de la relación entre área y perímetro (Balacheff, 1988) ilustra bien ese funcionamiento cognitivo complejo subyacente a la producción de una figura como contraejemplo. Se trataba de discutir la proposición "dos rectángulos que tienen la misma área, tienen el mismo perímetro". Para rechazar esta proposición, "el esquema siguiente 'muestra' bien esta transformación que se apoya en la invariancia del área por corte y reensamblado:



El área (o el producto) se conserva trivialmente, cuando el aumento del perímetro resulta de la desigualdad: $2L+\frac{l}{2}>L+\frac{l}{2}+\frac{l}{2}$, ya que L > l" (Balacheff, 1988, p. 289). La producción de este contraejemplo, que depende de la operación visual de reconfiguración, pareció no estar "al alcance de los estudiantes", o su producción tomó tanto tiempo que perdió todo efecto de contradicción para que el valor epistémico relacionado con la comprensión inmediata de esta proposición, por estar asociado a una evocación visual icónica, se pudiera cuestionar (p. 299). De manera más general, podríamos mostrar que la capacidad para producir una figura como contraejemplo requiere una práctica espontánea de esta manera de ver propia del inventor artesano. Correlativamente, podríamos mostrar que la visualización más congruente con las proposiciones (enunciados de teorema o definición) es una secuencia de dos figuras.

Figura y definición: el caso de la recta

Puede no parecer pertinente tomar el caso de la recta para analizar la articulación entre figura y definición, dado que la visualización de una recta parece primitiva y evidente: sería el trazo "recto" trazado con la ayuda de un instrumento que, para el caso, es una regla. Además, desde un punto de vista matemático, no es *una* recta lo que es interesante sino la relación entre *dos* rectas, que pueden ser paralelas, secantes, ortogonales, coplanares o no coplanares, etc. Pero volvamos a esos trazados destinados a servir de soporte inmediatamente visible para los términos de esas diferentes relaciones matemáticas. ¿Cómo explicar el sentido de la palabra "recta" aunque fuera para poder distinguir un trazado "recto" y un trazado "curvo" o, más sutilmente, una recta y un segmento (no orientado)? Abreviando, ¿cómo no confundir la recta y cualquier otra línea o cualquier otro trazado gráfico? Lo más común, cuando no se tiene la evidencia del uso empírico de la regla, es conformarse con uno de los cuatro tipos de definición, o de descripción siguientes:

a) "puede hacerse una idea clara mirando
   - un hilo muy delgado, corto (¿?) y bien tenso
   - un rayo de sol que penetra por un orificio muy pequeño en una cámara oscura.

b) La línea recta es el camino más corto de un punto a otro. Ese camino más corto se llama la distancia entre dos puntos…" (Lepoivre y Poirson, 1920, p. 2).

c) "No podemos pensar una línea (recta) sin trazarla con el pensamiento… El trazado de esta línea es un movimiento" (Kant, 1976/1781, p. 167).

d) "Dos puntos distintos A y B son elementos de una y solo una recta. Se dice 'la recta AB'". (IREM de Strasbourg, 1979, p. 164).

La formulación (a) es icónica. Evoca un objeto físico que sirve en cierta manera de modelo para lo que se va a llamar "recta". La formulación (b) es métrica. Pero esta formulación es ciega visualmente, pues no se asocia en manera alguna a una de las imágenes de la formulación (a) ni al uso de la regla, pues esto conduciría a una paradoja en el caso de estar sobre una esfera en la que las rectas se vuelven circunferencias. En realidad, esta formulación métrica implica, sin precisarlo, el tipo de superficie sobre la que se define "el camino más corto". La formulación (c) es dinámica e icónica. Se refiere al movimiento que la produce, movimiento que le confiere por lo menos dos propiedades: el hecho de que la recta puede prolongarse siempre más allá de su trazado y el hecho de que es continua. La formulación (d) es afín. Se opone radicalmente a las tres precedentes, ya que, según el principio de búsqueda de economía máxima que rige la formulación de las definiciones matemáticas, caracteriza a una recta solamente con dos puntos sin siquiera recurrir a cualquier cosa que los conecte como en las formulaciones (b) o (c).

No obstante, la dificultad de esta formulación no proviene de la supresión del valor visual del trazo, pues los dos puntos sirven necesariamente de base para trazar una recta; se debe al hecho de que los puntos escapan a toda visualización. Un punto no tiene existencia visual propia, es decir, no puede constituir una unidad figural identificable**.** Un punto es siempre un efecto de marca, de codificación, ya sea con una letra, o por un número (graduación de una recta) para fijar un extremo o una separación y, por lo tanto, se refiere solo al discurso.

La visualización se detiene en los trazados de segmentos que son las unidades figurales más pequeñas o, si se prefiere, una formulación más física, que son los pixeles de toda representación geométrica. Por supuesto, existen puntos "notables" que aparecen con dos rectas secantes, o con los vértices de los polígonos o de los poliedros. Pero visualmente la unidad figural es una configuración de dos trazos, prolongados o no y, por lo tanto, están intrínsecamente relacionados con el elemento visual D2 que es un ángulo (columna 1 de la Figura 13). Además, esos puntos notables no pueden ser muy numerosos.

¿Qué retener del análisis de esos cuatro tipos de formulación? Las tres primeras definiciones son de alguna manera descripciones de una característica óptica inmediata (a), o de un procedimiento de medida físico de una distancia entre dos puntos de referencia fijados materialmente (b), o de un gesto que utiliza o no un instrumento de trazado (c). Esas definiciones-descripciones son representaciones auxiliares con respecto a representaciones visuales, o "perceptivo-gestuales" para retomar la expresión propuesta por G. Vergnaud, que son aquí las representaciones autosuficientes. Ellas constituyen un obstáculo intuitivo a la cuarta definición, que rompe con toda visualización. ¿Cómo sorprenderse entonces de que los estudiantes se desconcierten ante todos los problemas en los que se pide mostrar la colinealidad de tres puntos, cuando en la figura parecen estar sobre el mismo trazo? De manera más general, las tres primeras definiciones son pragmáticas, por lo cual se oponen radicalmente a las definiciones matemáticas, al menos si nos atenemos al funcionamiento cognitivo subyacente a la producción y la comprensión de esas definiciones. En efecto, hay dos exigencias que conducen a una inversión de las gestiones cognitivas cuando se pasa de definiciones pragmáticas a definiciones matemáticas.

- *Tener en cuenta los casos posibles y no solamente los datos observables*. Todas las definiciones pragmáticas se hacen a partir de un corpus de datos observables e incluso, en muchas ocasiones, a partir de datos que son los más frecuentemente observados. Pero, en matemáticas, para aceptar o refutar una proposición propuesta como conjetura o incluso solo como definición, un individuo no se puede atener a la base de conocimientos de que dispone o que la experiencia concreta le proporciona; tiene que explorar los diferentes casos posibles. Por eso la producción de un contraejemplo puede parecer el resultado de una "invención" con respecto a los conocimientos de los que disponía el individuo.

- *Búsqueda de una economía máxima*. Cuando se trata de definir los objetos cuyo conocimiento depende de la observación y ello da lugar a una visualización icónica, hay una exigencia inversa de exhaustividad que se impone en la definición de un objeto. Se trata de enumerar todas las propiedades como se enumeran todos los detalles importantes. Las definiciones matemáticas resultan, por el contrario, de una actividad de reducción para obtener la descripción mínima: de una lista de propiedades que pueden atribuirse a un objeto, se trata de retener solo las que bastan para encontrar, por deducción, todas las otras. Naturalmente, esto abre el camino a varias definiciones posibles de un mismo objeto. Por ejemplo, se pueden tener por lo menos tres definiciones diferentes de paralelogramo.

¿Qué solapamientos hay entre visualización y razonamientos para justificar o para probar?

En efecto, nadie confunde la enunciación de proposiciones y el progreso discursivo a través del cual se conduce y desarrolla un razonamiento. Pero las cosas se vuelven más delicadas, más difíciles de distinguir, cuando se trata de explicar en qué se diferencia un razonamiento de una descripción o de una explicación y, sobre todo, en qué es diferente un razonamiento que justifica, como por ejemplo en el marco de un debate sobre un asunto de sociedad o para tomar una decisión, de un razonamiento que demuestra, como en matemáticas.

Resulta ingenuo invocar la lógica, o la "derivabilidad lógica", cuando se trata de razonamientos que se hacen en lenguaje natural y con sus recursos, pues esto no permite comprender por qué las deducciones válidas no tienen de ninguna manera fuerza de prueba a los ojos de los estudiantes y cómo se inscriben ellas en el lenguaje natural. Es inútil recordar ese muro invisible al que se enfrenta la enseñanza de la geometría a partir de la secundaria. La utilización de definiciones y de teoremas para demostrar la verdad de nuevas proposiciones no genera ninguna conciencia de necesidad en el espíritu de los estudiantes. En efecto, para que se pueda producir esta conciencia de necesidad, es necesario haber comprendido primero el mecanismo discursivo, muy específico, por el que una proposición nueva se produce deductivamente como conclusión de otras proposiciones (hipótesis y teorema). Y solo con base en esta comprensión se puede hacer la transferencia del grado de convicción ligado a una proposición (su valor epistémico[6]) a otra proposición, por lo menos para quien realiza la operación discursiva del paso de deducción. Esto se debe a que los teoremas no se utilizan y no funcionan en absoluto como argumentos.

Los teoremas movilizan un mecanismo de expansión discursiva que consiste en una sustitución de unas proposiciones por otras, mientras que los argumentos proceden por composición acumulativa de unas proposiciones con otras, como sucede al tratar de convencer a alguien, y este mecanismo es común a todas las otras formas de discurso y a toda práctica de habla (Duval, 1995a, pp. 123-131, 255-266). ¿Es necesario recordarlo? Nadie habla basándose en el mecanismo discursivo de sustitución, ¡ni siquiera el matemático fuera de las matemáticas! Este mecanismo de expansión discursiva por sustitución conviene mejor a los registros simbólicos que al del lenguaje natural, pero es en el registro del lenguaje natural en el que los estudiantes pueden de mejor manera tomar conciencia de su especificidad tan particular y de su fuerza, no solamente de prueba sino de invención.

Vemos entonces que no hay que confundir los razonamientos argumentativos que apoyan una proposición planteada como elección, como hipótesis (fuera de las matemáticas), o como conjetura… y los razonamientos válidos que permiten demostrarla. No puede haber transferencia de aprendizaje de uno a otro porque sus funcionamientos respectivos son de alguna manera opuestos, además de que la práctica de los unos está comúnmente difundida, mientras que la práctica de los otros es excepcional, y se encuentra casi reducida al campo de las matemáticas. También vemos que desde un punto de vista didáctico, no hay que confundir razonamiento y prueba, pues los contraejemplos no movilizan en absoluto las mismas operaciones discursivas que las deducciones válidas o que el razonamiento por el absurdo. Además, las posibilidades y la selección de los trámites para probar no son las mismas según que la conjetura resulte verdadera o falsa, lo que no se puede saber *a priori*.

6 Recordemos que el sentido de las proposiciones enunciadas no es unívoco. Comprende tres dimensiones, según si se considera el contenido, su valor con respecto a una base de conocimientos, o su papel en la organización de un discurso o en un acto de comunicación (Duval, 2001, p. 198). Todo razonamiento obliga a tomar simultáneamente en cuenta esas tres dimensiones, lo que no sucede para los relatos, las descripciones o las explicaciones.

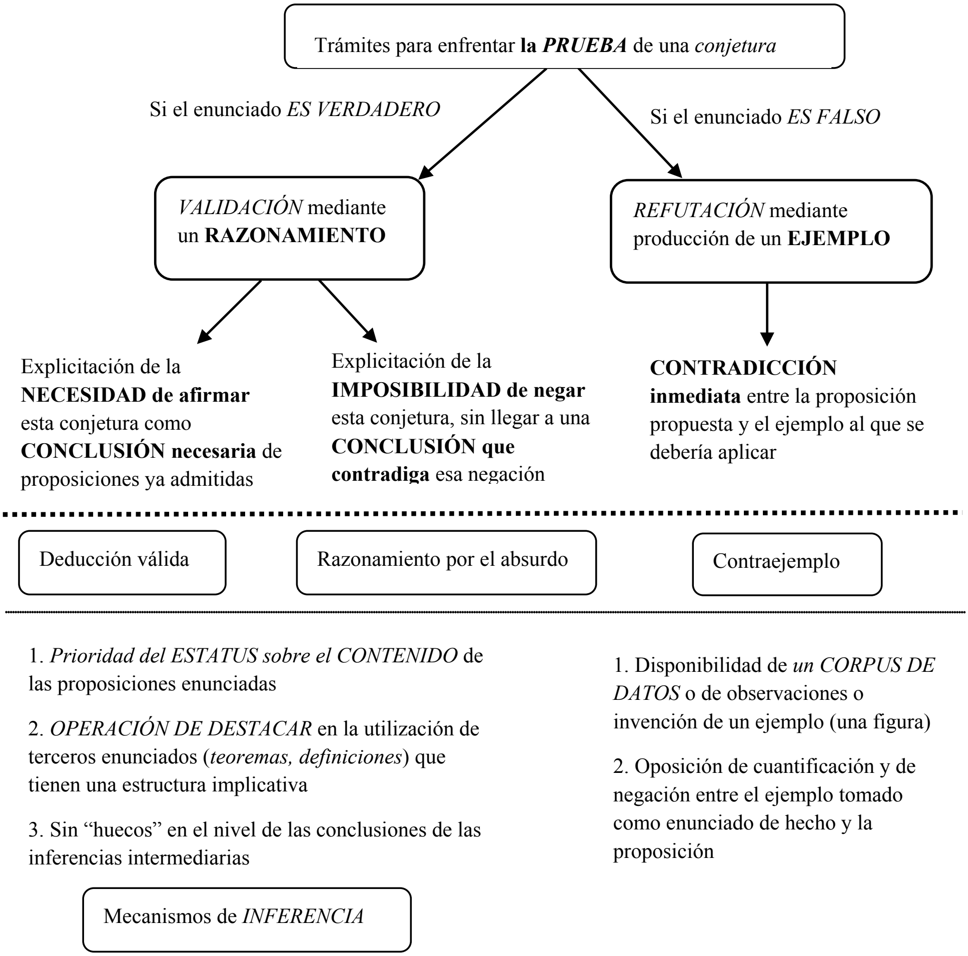


Figura 15. Clasificación de los trámites para probar, en función de los procesos cognitivos movilizados

Era indispensable recordar esto para plantear bien la pregunta de las relaciones entre visualización y razonamiento (y no globalmente, la prueba): ¿qué tipo de visualización puede corresponder al desarrollo de un razonamiento y cumplir, bien sea la función heurística que se espera de las figuras para la resolución de problemas, bien sea la función de justificación propia de la argumentación? Para responder a esta pregunta, debemos distinguir tres situaciones muy diferentes. Hay, en efecto, razonamientos que siguen la visualización, hay los que compensan el defecto de visualización, como en el caso de problemas de geometría del espacio y no de geometría plana, y hay los que por el contrario son independientes de toda visualización.

Los razonamientos que siguen la visualización, o la visualización como argumento que justifica

Nos limitaremos aquí a un ejemplo muchas veces citado: la visualización que justifica la relación de Pitágoras. En general, se limita a una secuencia de dos figuras, una que presenta el estado inicial y la otra el estado final de la reconfiguración interna de un cuadrado en otro cuadrado.

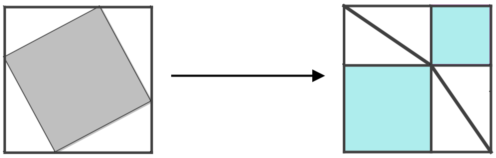


Figura 16. Estado inicial y estado final de la reconfiguración global que justifica la relación de Pitágoras

Evidentemente, se trata de una visualización truncada que no muestra gran cosa y no puede, por tanto, tener en sí misma un poder de prueba. Primero que todo, se supone que uno debe ver que el cuadrado rotado en el estado inicial representa el cuadrado de la hipotenusa y que los dos cuadrados sombreados en el estado final representan la suma de los cuadrados de los otros dos lados. Esta suposición nos remite a la articulación del nivel precedente, entre una proposición (aquí una conjetura) y una figura. Pero aquí la cuestión se plantea a otro nivel: ¿cómo ver, o hacer ver, la igualdad que se quiere probar, dado que la región rotada y las regiones sombreadas del estado final no se pueden superponer? La visualización está en la transformación representada por la flecha. Es necesario entonces efectuarla de una manera u otra para poder ver.

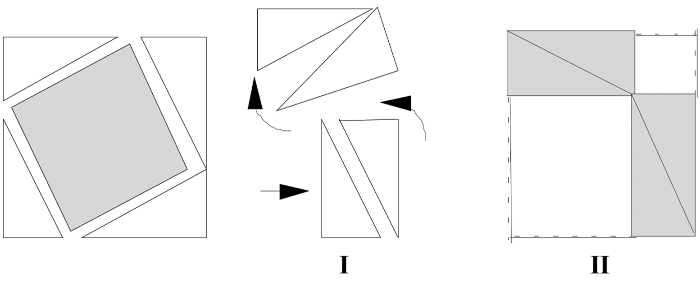


Figura 17. Transformación que combina dos reconfiguraciones

Los cuatro triángulos deben reconfigurarse en dos rectángulos, luego estos rectángulos se deben disponer en el marco del cuadrado inicial de manera que aparezcan dos cuadrados. La invariancia de esta transformación está garantizada por el hecho de que las unidades figurales que se desplazan en el curso de esas dos reconfiguraciones siguen siendo las mismas (argumento característico de las operaciones concretas para justificar una conservación, en el modelo piagetiano del desarrollo intelectual). Esta invariancia va a permitir realizar un cálculo cualitativo. En efecto, para poner en evidencia esta igualdad que no se puede ver, ya que las partes involucradas no se pueden superponer, es necesario un cálculo que explicite lo que se ha conservado en esas dos reconfiguraciones (Figura 18). Naturalmente, en lugar de realizar este cálculo, uno puede contentarse con una descripción verbal que tomará entonces el valor de argumento o explicación.

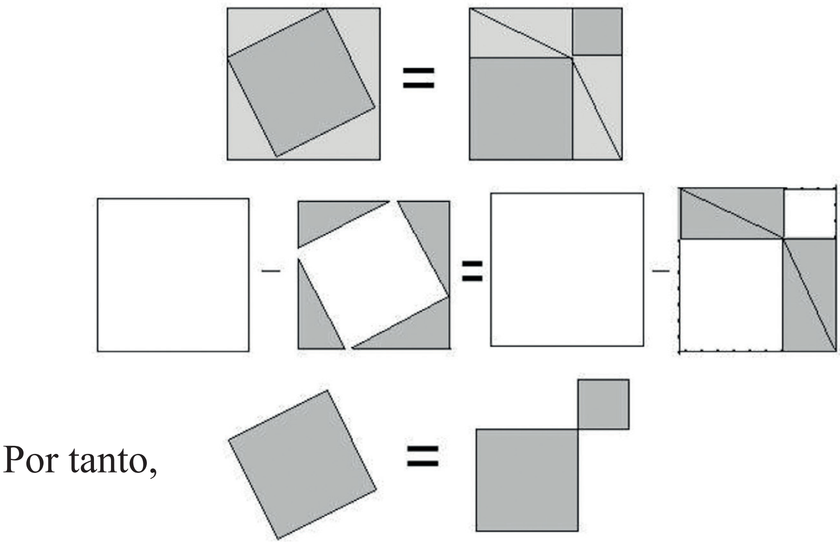


Figura 18. Explicitación de la igualdad entre las áreas para un cálculo cualitativo

Se pueden hacer tres observaciones que permiten generalizar este análisis:

1. En el nivel de la articulación entre visualización y razonamiento, la visualización consiste no en una figura sino en una secuencia de por lo menos tres figuras. Y esta secuencia debe corresponder a operaciones visuales realizables sobre unidades figurales 2D,[7] o si se trata de geometría en el espacio, sobre unidades figurales 3D/2D o 3D/3D. Pero esta visualización excluye operaciones sobre unidades figurales 1D (y, *a fortiori,* la referencia a puntos).

7 Esas operaciones se pueden realizar mediante un simple barrido visual (si se hace muy rápidamente ¡podríamos estar tentados a hablar de actividad mental!) o mediante manipulaciones de piezas de rompecabezas (lo que supone que se pueda disponer de muchas piezas para cada unidad figural, pero así se introduce subrepticiamente un problema de representación semiótica en lo que pretende ser una manipulación puramente material).

2. La secuencia de figuras constituye una representación autosuficiente. La explicación verbal o simbólica de operaciones constituye una representación auxiliar.

3. Ningún teorema, ningún conocimiento de propiedad matemática se moviliza en esta secuencia y, si hay razonamiento, este no se distingue de una simple actividad descriptiva. Podríamos también presentar esta descripción bajo la forma de un silogismo, pero tal presentación no aportaría nada más, ya que no supera la descripción de operaciones que se pueden realizar mediante un barrido visual o incluso materialmente con piezas de rompecabezas. De todas maneras, sin importar la forma de explicación adoptada, simbólica, descriptiva o silogística, esta aparece como secundaria con respecto a la secuencia visual y ¡cae entonces bajo el adagio "una imagen vale más que mil palabras"!

Para comprender mejor la importancia de estas observaciones, miremos otra demostración del teorema de Pitágoras, la de Euclides (Euclides, trad. 1990, pp. 282-284; IREM de Strasbourg, 1986, pp. 245-247), que parece apoyarse también en una visualización. Desde un punto de vista cognitivo, funciona completamente a la inversa del ejemplo que acabamos de analizar. Con respecto a nuestra observación (1), ella implica tomar en cuenta operaciones figurales con unidades 1D y se limita a una sola figura. Con respecto a la observación (2), hay inversión de los estatus: es el discurso el que constituye la representación autosuficiente, mientras que la figura es una representación auxiliar que cumple dos funciones diferentes, soporte descriptivo para ciertas partes del discurso y soporte ilustrativo para ayudar a no confundir los objetos de anclaje de las diferentes proposiciones. Con respecto a la observación (3), ella supone la movilización y utilización de teoremas. Las observaciones (2) y (3) muestran que la comprensión del razonamiento de Euclides supone la comprensión del mecanismo discursivo de sustitución, sin el cual la aplicación de un teorema, es decir, un paso de deducción válida,[8] no podría generar la conciencia de necesidad para la conclusión así obtenida.

Se podría también mostrar que en el caso de la demostración de Euclides, la relación con la figura no se hace en el nivel del razonamiento, sino en el de las operaciones discursivas inferiores: por una parte, el vocabulario para anclar en ciertas unidades figurales y, por otra, las proposiciones enunciadas para focalizar sobre la relación existente entre dos unidades figurales identificadas. En el nivel del razonamiento (y, por lo tanto, de la organización que permite derivar unas proposiciones de otras) no hay correspondencia alguna con la figura.

8 Recordemos aquí que no hay que confundir la validez de un paso de deducción, que se basa en el mecanismo de sustitución, con la validez de un encadenamiento de pasos válidos, que se basa en el hecho de que no haya "hueco" en el encadenamiento de los pasos (que no es un encadenamiento de proposiciones) porque cada conclusión intermediaria se transforma en premisa de un nuevo paso. Esos dos niveles de organización discursiva rara vez se distinguen en los trabajos didácticos consagrados a la iniciación en las pruebas que ¡*validan* un resultado mediante un razonamiento válido! ¿Alcanzan los estudiantes, en alguna medida, a sospechar la existencia de este doble juego, tan extraño a toda práctica del habla, incluso en los debates?

Los razonamientos independientes de toda visualización

Un razonamiento que funciona utilizando definiciones y teoremas (que en ocasiones se denominan, de manera impropia y menos teórica, "propiedades") es independiente de toda visualización e incluso se puede realizar contra toda visualización. Esto se debe a lo que ya indicamos: ese tipo de razonamiento, a diferencia de la argumentación, depende de un mecanismo discursivo de sustitución de unas proposiciones por otras, y no del mecanismo general y espontáneo de composición acumulativa de proposiciones.

Es verdad que siempre es posible proponer problemas en los que las figuras constituyen el campo aparente del trabajo de investigación y que servirán de apoyo para los razonamientos. Pero en ese caso nos limitamos al tipo de situación que acabamos de analizar, el de la demostración de Euclides en donde la figura solo puede ser una representación auxiliar, y donde las correspondencias no se hacen en el nivel del razonamiento sino en el de los términos que designan unidades figurales y en el de las proposiciones.

Esto conduce a que la pregunta sobre la prueba, tal como fue planteada en didáctica entre los años ochenta y noventa, siga vigente: "¿cómo hacer para que la demostración funcione como prueba para los estudiantes, es decir, para que queden convencidos de un resultado matemático?". Esta pregunta ha sido poco entendida, pues se la ha reducido con frecuencia a esta otra pregunta totalmente diferente: "¿cuáles propiedades o teoremas utilizar para demostrar tal conjetura?". Enfocar la atención de los estudiantes en la búsqueda de los teoremas pertinentes para un problema relativo a un contenido particular no basta para lograr el nacimiento de la conciencia dinámica de necesidad que se desarrolla con la utilización discursiva tanto de definiciones como de teoremas, y sin la cual no puede haber experiencia de las pruebas matemáticas.

Para encontrar una respuesta didáctica a la pregunta sobre la demostración, la gran mayoría de caminos explorados se redujo a la visualización o a la argumentación, dejando intacta la pregunta sobre cómo se entra a la comprensión y la producción de razonamientos válidos. Por otra parte, estos últimos suelen ser descalificados recurriendo al adjetivo "formal" que tiene connotaciones muy negativas desde un punto de vista educativo.

Por el contrario, nosotros hemos intentado lograr que los estudiantes descubran cómo y por qué la utilización de un teorema hace necesaria la afirmación de la proposición que se obtiene como conclusión, y cómo se podría construir e imponer una prueba a partir de varias utilizaciones sucesivas de teoremas. Para lograrlo, tuvimos que hacer el desvío por una visualización que no tenía nada de geométrica, pero que permitía a los estudiantes explorar por sí mismos los dos niveles de organización deductiva que constituyen los razonamientos válidos (Duval y Egret, 1989).

Ese tipo de visualización no geométrica se presentaba a los estudiantes como representación autosuficiente, y luego, en un segundo momento, debían describirla libremente. El discurso se introducía primero como una representación auxiliar con respecto a la visualización de la organización deductiva que habían descubierto. Entonces pudimos observar rápidamente esta evolución: la transformación rápida y radical de los discursos producidos con respecto a los procedimientos matemáticos esperados. La toma de conciencia del acceso a un nuevo campo de operaciones discursivas se había producido en los estudiantes, dándoles a la vez la iniciativa y el control en la utilización de teoremas y en la conducción de razonamientos.

Poco importan aquí los resultados obtenidos o no obtenidos hasta ahora en cada una de las vías exploradas, para responder a la pregunta: "¿cómo hacer para que la demostración matemática funcione verdaderamente como una prueba para los estudiantes?". La diversidad de esos resultados permite llamar la atención sobre una observación trivial, pero que poco se tiene en cuenta. Existen varias fuentes de convicción para cada individuo, y los tipos de control posibles para cada una no son los mismos. Ya hemos podido mostrarlo, a propósito de diferentes maneras de ver (Figura 2). Pero este dato esencial para todo análisis de pruebas no se limita a las diferentes maneras de ver.

Asimismo, existe una fuente de certidumbre que viene del consenso que se establece en un grupo al término de discusiones. También hay una convicción que viene de un razonamiento válido, realizado en el contexto de un corpus de conocimientos ya probados, corpus que también debe estar bien asimilado por quien realiza el razonamiento válido. El tipo de respuesta didáctica que se da a esta pregunta de la comprensión de las pruebas en matemáticas siempre privilegia a una de esas fuentes de convicción con respecto a las otras.

En la actualidad, hay una tendencia creciente a considerar la "demostración" como una prueba puramente formal y a limitarse a las pruebas que se apoyan en manipulaciones de figuras o en argumentaciones que se dan en el marco de una discusión de aula. Parecería, entonces, que no es necesario procurar que los estudiantes comprendan el funcionamiento de los razonamientos válidos. En realidad, esto es privarlos de los medios de probar cuando la visualización resulta imposible o demasiado compleja, como en el caso de la geometría del espacio. También, privarlos de los medios de discernir entre figuras pertinentes y figuras engañosas –como las que pueden aparecer en la geometría plana–; y, más bien, llevarlos a recurrir al consenso que se impone a través de una discusión en grupo. Esta elección puede parecer legítima desde el punto de vista de una educación matemática común, pero es una elección dañina para la formación general de los individuos.

En el corazón de la articulación entre visualización y discurso (*definición, teorema, prueba, explicación*) en geometría: el hiato dimensional

Acabamos de barrer el espectro muy amplio de las operaciones discursivas que se movilizan en toda formulación hecha en lenguaje natural, ya se trate de contar, describir, explicar, argumentar en un debate, razonar de manera válida… La complejidad del lenguaje no es ante todo la del vocabulario, sino la de la diversidad de todas las operaciones discursivas que se movilizan en la expresión. En geometría, lo mismo que en todos los dominios científicos, expresar no consiste en poner en palabras, a la manera en que se ponen en palabras las emociones y las "vivencias", sino en articular proposiciones cuya riqueza de sentido es irreductible a las palabras empleadas.

También hemos visto que, según el nivel de las operaciones discursivas que se privilegie, la relación entre decir y "ver" varía considerablemente. Detrás de esta variación, cuya complejidad es más grande en geometría que en todos los otros campos, hay un fenómeno cognitivo fundamental: el hiato entre el número de dimensiones que se toma en cuenta para identificar una unidad figural en lo que se visualiza y el número de dimensiones que se tiene en cuenta para nombrar los objetos y las relaciones que se identifican.

Habíamos mencionado ya este fenómeno del cambio realizado en el número de dimensiones; se aumenta cuando se pasa del decir al ver, y se disminuye cuando se pasa del ver al decir (Duval, 1995a, p. 192). En la Figura 19 se presenta un análisis más detallado. Se puede ver que la articulación entre visualización y discurso está representada por las flechas dobles en gris. Pero podemos también ver que esta articulación presupone la capacidad de efectuar la deconstrucción dimensional de formas en lo que concierne a la visualización (flechas negras gruesas punteadas).

Se notará, por una parte, la oposición entre las flechas ascendentes y descendentes en cada uno de los dos registros de representación y, por otra parte, la existencia de flechas oblicuas que corresponden a la articulación de las representaciones producidas en cada uno de los dos registros.

Miremos primero las flechas continuas en cada uno de los dos registros. Las flechas negras gruesas ascendentes representan el movimiento espontáneo de la visualización que tiende a fusionar las unidades figurales de rango inferior, en una sola unidad figural de rango superior. Además, es eso lo que constituye la potencia cognitiva de la visualización. Las flechas negras sutiles descendentes representan los procedimientos de análisis y de razonamiento propios de la geometría para establecer las definiciones o los teoremas. La articulación entre visualización y discurso geométrico supone ir en contra del movimiento ascendente de la visualización, es decir, contra esta prioridad visual de las unidades figurales de dimensión superior sobre las unidades figurales de dimensión inferior.

NÚMERO DE DIMENSIONES	VISUALIZACIÓN	DISCURSO GEOMÉTRICO
Para los objetos estudiados: • por las proposiciones que se enuncian • para las unidades figurales correspondientes que las representan en la “figura”	Las formas de unidades superiores (flechas continuas) absorben las de unidades inferiores que las “componen”, haciéndolas inseparables del todo visual inmediatamente identificado	Con sus tres niveles de operaciones discursivas en relación con • objetos designados • relaciones entre objetos • derivaciones “deductivas” de proposiciones
3D/2D		
2D/2D		
1D/2D		
0D/2D		

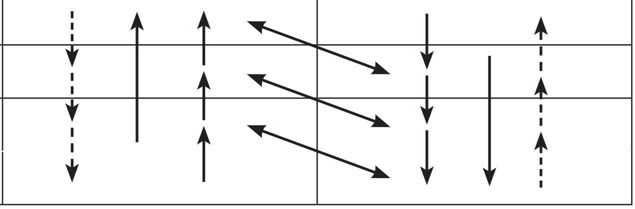


Figura 19. Articulación entre visualización y discurso en geometría

Miremos ahora las flechas punteadas. Las flechas negras gruesas descendentes representan la deconstrucción dimensional de formas, que ya hemos visto que constituye el agujero negro didáctico de todas las actividades hechas con figuras o a partir de ellas. Las flechas negras sutiles ascendentes representan, por el contrario, el orden didáctico de exposición en la introducción escolar de conocimientos. Todas las progresiones de conocimiento parecen organizadas según el mismo orden “conceptual”:

((((puntos → rectas) → segmentos de rectas) → polígonos) → poliedros)

La razón es que el conocimiento de propiedades relativas a las diferentes configuraciones posibles que se pueden formar a partir de las relaciones entre rectas y de propiedades relativas a la comparación de dos segmentos deben formar las piezas elementales con las que se pueden construir los conocimientos relativos a los polígonos y a toda la geometría plana (integrando bien el uso del compás y la figura de la circunferencia). Esto va en sentido contrario al del trabajo largo y necesario de deconstrucción dimensional para entrar en la comprensión de los conocimientos geométricos. Privilegiar este orden significa considerar que la deconstrucción dimensional es evidente, cuando en realidad es contraria al funcionamiento normal e intuitivo de la visualización (flechas negras gruesas ascendentes). En la Figura 20 tratamos de representar esta contradicción cognitivamente paralizante.

En ninguna parte, fuera de la geometría, se encuentra ese hiato dimensional entre imagen y lenguaje, entre visualización y verbalización. Este hiato dimensional toma, en la enseñanza de la geometría, dos formas de alguna manera inversas: el hiato dimensional que es intrínseco a la manera matemática de mirar (las figuras) y el hiato dimensional didáctico que resulta de la organización de

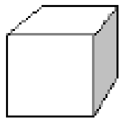
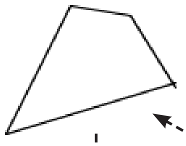
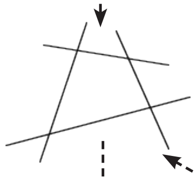
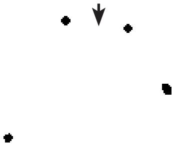
NÚMERO DE DIMENSIONES	VISUALIZACIÓN	DISCURSO "FORMAL" DE EXPOSICIÓN
3D/2D		Un **poliedro**
2D/2D		Un **polígono** que puede ser una cara de un poliedro o la figura obtenida por un plano de corte con otro poliedro
1D/2D		**Rectas** que tienen entre sí relaciones (perpendiculares, paralelas, concurrentes) que permiten distinguir las propiedades del polígono Y las rectas se reducen a **segmentos**. De ahí la posibilidad de compararlos y utilizar la noción de punto medio
0D/2D		Los **puntos** que pueden ser de intersección de rectas, o vértices de un polígono y que no son puntos arbitrarios que se marcan sobre una recta o sobre

Figura 20. Contradicción cognitiva subyacente a la introducción de los conocimientos geométricos

la adquisición de conocimientos, tal como se puede observar en los libros de texto o en los programas curriculares.

Las razones profundas de la segunda forma del hiato dimensional son, por una parte, la deconstrucción dimensional de las formas, que se cree garantizada por el uso de los instrumentos que producen trazos rectos y, por otra, la orientación del discurso geométrico y, por lo tanto, la polarización de todas las operaciones discursivas hacia la producción de pruebas que implican razonamientos válidos, pero reteniendo del lenguaje únicamente el primer nivel de las operaciones discursivas, el que se traduce por el empleo de términos para designar los objetos. Los funcionamientos cognitivos esenciales que se deben construir se desconocen ingenuamente o se rechazan deliberadamente. ¿Cómo sorprenderse de la reticencia de muchos estudiantes ante la enseñanza de la geometría, e incluso de muchos profesores, y de la marginación de la geometría?

Conclusión

Visualización y discurso constituyen dos tipos de funcionamiento cognitivo que a menudo se han opuesto, tanto desde un punto de vista pedagógico como psicológico o matemático. Sin embargo, su articulación es absolutamente decisiva para el aprendizaje de la geometría, pues la actividad geométrica descansa en la sinergia cognitiva de esos dos registros de representación. El problema, particular y recurrente, al que se enfrenta cualquier profesor de geometría, es el hecho de que la articulación entre visualización y discurso es más compleja en la geometría que en todos los otros campos de conocimiento, debido al hiato dimensional inherente a la manera misma de mirar en matemáticas. ¿Cómo analizar el mecanismo cognitivo?

Hay que tomar en cuenta dos puntos de vista: el funcional y el estructural. Dado que la articulación entre ver y decir moviliza simultáneamente dos representaciones, es necesario mirar qué función puede tener la representación tomada como auxiliar en relación con la representación tomada como autosuficiente desde el punto de vista matemático. Esta última puede ser, según los casos, la representación visual o el enunciado. Pero como esta articulación implica que se puedan establecer correspondencias de contenido entre las dos representaciones, independientemente de su estatus de representación auxiliar o autosuficiente, también es necesario mirar la manera como se pueden discernir y organizar las unidades de sentido y las unidades figurales en cada una de las representaciones puestas en sinergia cognitiva. Allí el análisis debe llegar a ser más preciso en la medida en que todo discurso pone en acción tres niveles de operaciones discursivas: el análisis estructural que pone en correspondencia las dos representaciones se debe conducir en cada uno de esos niveles. Aparece entonces una gran variación, a la vez funcional y estructural, según el nivel en el que se esté.

- El anclaje cognitivo de un enunciado sobre una figura se hace, en el nivel de la designación de unidades figurales, mediante el empleo de términos que implican la deconstrucción dimensional de las formas visualmente reconocidas.

- La interacción cognitiva entre visualización y discurso solo comienza verdaderamente en el nivel de las proposiciones que se enuncian, al margen de su estatus (constatación, definición, conjetura) en el discurso producido, pues solo en ese nivel una figura puede tener una función (ilustración, contraejemplo) con respecto a un enunciado y viceversa. Desde un punto de vista estructural, esto se traduce en el hecho de que la visualización requiere un encadenamiento de dos figuras que pueden ser subfiguras de la figura de partida, o el encadenamiento de la figura de partida y de una de sus transformaciones visuales. Desde hace mucho tiempo se ha destacado el hecho de que la conversión visual de un teorema conduce a un encadenamiento de dos figuras.

- Una articulación cognitivamente productiva entre visualización y discurso solo comienza en el nivel de las transformaciones de representación que se pueden realizar de manera independiente en cada uno de dos registros. Pero aquí todo dependerá del registro que se va a privilegiar por las peticiones de justificación o de prueba.

O bien se privilegia la visualización con los invariantes de operaciones (mereológicas u otras) que se ponen en práctica, y entonces el razonamiento se puede asimilar a una explicación descriptiva de estas transformaciones visuales realmente hechas o verbalmente evocadas. La fuente de la convicción proviene entonces de la visualización, y esta descansa no en una figura sino en una secuencia de por lo menos tres figuras en la que las operaciones se refieren a unidades figurales 2D o 3D.

O bien se privilegia el discurso con sus mecanismos propios de deducción válida y entonces la visualización tiene una función heurística para "encontrar" los teoremas que se deben aplicar, lo que implica que la mirada se focaliza esencialmente en unidades figurales 1D. La fuente de convicción ya no proviene de la visualización, sino de la comprensión y del control de los razonamientos deductivos desarrollados.

No obstante, esas dos vías no se pueden poner de manera alguna en el mismo plano. La primera, muy rápidamente, se revela limitada, pues hay muchas situaciones en las que los razonamientos deben compensar un defecto de visualización o se deben hacer contra la visualización. La única situación en la que visualización y discurso se unen para producir una prueba es cuando se produce un contraejemplo (¡siempre y cuando su invención no requiera meses o años de trabajo!).

Pero allí volvemos a bajar del nivel de los razonamientos al de las proposiciones enunciadas, y ese tipo de producción depende, sobre todo, de las capacidades de los estudiantes para realizar transformaciones visuales de figuras. En otras palabras, según el tipo de prueba que se pida a los estudiantes, puede haber convergencia local o divergencia radical entre los procesos de visualización y los de razonamiento.

Los conocimientos geométricos se pueden construir precisamente en el campo de esta actividad cognitiva que es, a la vez, muy diversificada y compleja. La simplicidad de los contenidos matemáticos que se seleccionan y se introducen como base de la enseñanza de la geometría presupone, de hecho, maneras de ver y modos de razonamiento que se apartan de los practicados fuera de las matemáticas o que incluso se les oponen.

Definir organizaciones curriculares para la adquisición de los "saberes" en geometría sin tomar en cuenta las variables correspondientes a los diferentes funcionamientos cognitivos que acabamos de analizar solo puede conducir, a mediano o largo plazo, a un callejón sin salida. La simplicidad de los trámites geométricos está al final de esas diferentes tomas de conciencia que los estudiantes deben hacer tanto para la visualización como para la producción y la comprensión del discurso geométrico.

No podemos esperar que ellos se percaten de sus funcionamientos cognitivos específicos y que además pongan en práctica las coordinaciones complejas necesarias para su sinergia, únicamente haciéndolos trabajar sobre contenidos matemáticos.

Aquí basta con recordar un hecho importante: si se les pide una producción discursiva, se obtienen textos radicalmente diferentes según el tipo de representación visual que les sirve de apoyo. No podemos esperar que los estudiantes, que se limitan legítimamente a los funcionamientos cognitivos propios de la visualización icónica, puedan entrar en la comprensión de enunciados y de trámites discursivos que se apoyen sobre una visualización no icónica y que requieran el reflejo óptico de la deconstrucción dimensional de las formas. Por eso la importancia de un trabajo extenso y específico para hacer entrar en esas maneras tan particulares de ver que son propias de la geometría.

Pero tampoco podemos esperar que los estudiantes, entrenados esencialmente en las maneras de ver del constructor o del inventor artesano, es decir, en una construcción instrumentada de las figuras o las justificaciones por transformaciones figurales, entren en la comprensión del funcionamiento de las deducciones válidas sin las que no puede haber pruebas basadas en definiciones o teoremas. Esto porque el funcionamiento discursivo de los razonamientos matemáticos es, por así decirlo, un funcionamiento "antipalabra".

El desconocimiento de la complejidad cognitiva implicada en toda actividad geométrica no solo es dañino para la enseñanza, también lo es para las investigaciones sobre los aprendizajes de geometría. Por ejemplo, podemos preguntarnos sobre la metodología utilizada en el análisis de las producciones "de lenguaje" de los estudiantes, cuando se realiza esencialmente, si no exclusivamente, en función de los contenidos matemáticos. Si se hace caso omiso de la complejidad de los funcionamientos discursivos, ¿la interpretación del discurso de los estudiantes se reduce a un comentario libre, propio de cada investigador, más que a una explicitación controlable (y, por lo tanto, comparable a otros corpus de producciones "de lenguaje") de las observaciones o de las conclusiones que se sacan?

Podríamos también de la misma manera preguntarnos por el análisis de las tareas propuestas en relación con la visualización, ya sean las que se encuentran en el marco de un libro de texto, de una ficha o de un programa informático. Un gran progreso se hará en la enseñanza de la geometría, para darle un lugar eminente en la formación general del individuo, cuando los contenidos matemáticos se miren con relación a la actividad cognitiva que solicitan, y el desarrollo de esta actividad llegue a ser un objetivo indisociable de los objetivos matemáticos.

Referencias

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. (Tesis de doctorado). Université Joseph Fourrier, Grenoble, Francia. Disponible en http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/en/

Berthelot, R. y Salin, M-H. (1994). *L'enseignement de la géométrie à l'école primaire*. Grand N, *53*, 39-56.

Berthelot, R. y Salin, M-H. (2000). *L'enseignement de l'espace à l'école primaire*. Grand N, *65*, 37-59.

Dupuis, C., Pluvinage, F. y Duval, R. (1978). Étude sur la géométrie en fin de troisième. En *Géométrie au Premier Cycle,* II (pp. 65-101). París: APMEP.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Maison (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (2000a). Basic issues for research in mathematics education. En T. Nakahara y M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-69). Hiroshima: Nishiki Print Co. Ltd.

Duval, R. (2000b). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(2), 135-170.

Duval, R. (2001). Écriture et compréhension: pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? En E. Barbin, R. Duval, I. Giogutti, J. Houdebine y C. Laborde (eds.), *Produire et lire des textes de démonstration*. París: Ellipses.

Duval, R. y Egret, M.A. (1989). L'organisation déductive du discours: interactions entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *2*, 41-65.

Edwards, C.H. (1979). *The historical development of calculus*. Berlín: Springer.

Euclides (1990). *Les Éléments* (Libros I a IV, trad. de B. Vitrac). París: PUF.

Godin, M. (2004). De trois regards possibles sur une figure au regard «géométrique», à paraître. En *Actes du séminaire national de didactique* des mathématiques. ADIREM et IREM de Paris 7, pp. 39-70.

IREM de Strasbourg, (1979). *Mathématiques 4ème*. París: Istra

IREM de Strasbourg, (1986). *Mathématiques 2ème*. París: Istra.

Kant, E. (1976). *Critique de la raison pure* (trad. J. Barni en 1869). París: G. Baillière.

Laborde, C. (1994). Enseigner la géométrie: permanences et révolutions. *Bulletin APMEP, 396*, 523-548.

Lepoivre, G. y Poirson, A. (1920). *Cours de géométrie théorique et pratique* I. Lille: Janny.

Padilla, V. (1992). L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques. Université Louis Pasteur, Institut de Recherche Mathématique Avancée. Estrasburgo, Francia.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Piaget, J. (1972). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. París: P.U.F.

Poincaré, H. (1963). Pourquoi l'espace a trois dimensions. En *Dernières pensées*. París: Flammarion. Séminaire IUFM (1999). *Conversion et articulation des représentations analogiques* (editado por R. Duval). París: IUFM Nord-Pas-de-Calais.

Este artículo se publicó en 2005 en francés con el título *Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement*, en la revista *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *18*(10), pp. 5-53. Se agradece al director de la revista y a la editorial por el permiso de traducir y publicar en esta ocasión.

UN ANÁLISIS COGNITIVO DE PROBLEMAS DE COMPRENSIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS[9]

Raymond Duval

¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen con la comprensión de las matemáticas? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas? Estas preguntas han cobrado una magnitud y una importancia particular con la reciente presión para lograr más educación matemática inicial para todos los estudiantes, que los prepare para enfrentar un entorno tecnológico y orientado hacia la computación, de una complejidad que se incrementa ilimitadamente. Hay un desafío educativo en las aulas y un desafío teórico para investigar sobre el desarrollo y el aprendizaje del conocimiento matemático. Los procesos de adquisición del conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques. Los más predominantes, y a veces opuestos, son el enfoque epistemológico y el educativo. Pero ellos tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren en cualquier proceso de conocimiento o que lo constituyen.

Esta noción básica de representación es muy antigua y precisa. Una representación es algo que se pone en lugar de otro algo. Pero al mismo tiempo esta noción puede ser elusiva o demasiado formal. ¿Cuál es la naturaleza de este "algo que se pone en lugar de…"? Se puede tener un abanico amplio de respuestas, dependiendo de si se consideran las representaciones con respecto a un individuo concreto y sus experiencias, a las estructuras mentales o, por el contrario, a los objetos de conocimiento con sus requisitos epistemológicos específicos (Hitt, 2002). Así, las representaciones pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales a las que cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas. Esta respuesta, desarrollada inicialmente en dos estudios importantes de Piaget (1923, 1926), es ahora uno de los marcos metodológicos y teóricos más importantes para investigar y explicar la adquisición del conocimiento matemático.

Pero las representaciones también pueden ser signos y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas y que permiten la descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos. Allí las representaciones

9 Un primer esbozo de este artículo se publicó en 2002 en *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16. Aquí presentamos una versión más desarrollada del modelo cognitivo de la actividad y el pensamiento matemático.

semióticas, incluido cualquier lenguaje, aparecen como herramientas comunes para producir nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental particular. Esta respuesta, desarrollada progresivamente desde Frege y Hilbert con respecto a los requisitos epistemológicos y metamatemáticos, también ha cobrado una gran importancia en la investigación sobre cognición (Duval, 1998a). Cualquier investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas involucra alguna elección teórica sobre la posible relación y el respectivo papel de estos tipos de representación bastante opuestos, que están "en lugar de otro algo", es decir, representan objetos de conocimiento.

Parece obvio que la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas y sus dificultades se deba basar en lo que los estudiantes hacen realmente por sí mismos, en sus producciones, en sus voces. Pero, ¿cómo podemos analizar los procesos de adquisición de conocimiento a partir de las concepciones de los estudiantes y encontrar las fuentes de sus dificultades? Las representaciones son solamente los resultados superficiales del funcionamiento de estructuras mentales profundas, que no dependen de la conciencia real de los individuos (Piaget, 1967a, pp. 78-79). Subyacente a los dos tipos bien opuestos de representación, existe una organización de estructuras cognitivas que hace a los individuos capaces de realizar los varios tipos de actividad de conocimiento (Duval, 1996a). Así, el rasgo característico de un enfoque cognitivo procura determinar primero el funcionamiento cognitivo subyacente a los varios procesos matemáticos. Para determinar el origen de la incomprensión de los estudiantes, primero debemos determinar las condiciones cognitivas que hacen posible la comprensión. Para ello, debemos formular la pregunta:

1. ¿Qué sistemas cognitivos se requieren y se movilizan para acceder a los objetos matemáticos y al mismo tiempo hacer posible la realización de las múltiples transformaciones que constituyen los procesos matemáticos?

En términos generales, se supone que la manera de pensar es básicamente la misma en las diferentes áreas de conocimiento, aunque el conocimiento matemático es más abstracto, e incluso si en matemáticas se utilizan lenguaje o codificaciones específicos. Observaciones que he realizado en las aulas y fuera de ellas durante muchos años, me conducen no solo a cambiar de un enfoque centrado en las concepciones de los estudiantes (Duval, 1983) a un enfoque cognitivo, sino también y, sobre todo, a formular la pregunta:

2. ¿La manera de pensar en matemáticas es la misma que en otras áreas de conocimiento? En otras palabras, ¿la actividad matemática requiere solamente los procesos cognitivos comunes o, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas muy específicas cuyo desarrollo se debe tener en cuenta en la enseñanza?

Este asunto sobre el aprendizaje de las matemáticas tiene una gran importancia si la meta de su enseñanza, en los niveles de primaria y secundaria, no es formar a futuros matemáticos ni tampoco dar herramientas a los estudiantes, que solo posiblemente les serán útiles muchos años más tarde, sino más bien contribuir al desarrollo general de sus capacidades de razonamiento, análisis y visualización. En todo caso, se hace necesario considerar las representaciones semióticas en el nivel de la estructura mental y no solamente con respecto al requerimiento epistemológico para tener acceso a los objetos de conocimiento (Duval, 1995b, pp. 3-8, 15-35). Y desde este enfoque cognitivo parece que la oposición entre representaciones mentales y representaciones semióticas ya no es pertinente, porque descansa en la confusión entre el modo fenomenológico de producción y el tipo de sistema movilizado para producir cualquier representación (Duval, 2000b, pp. 59-60).

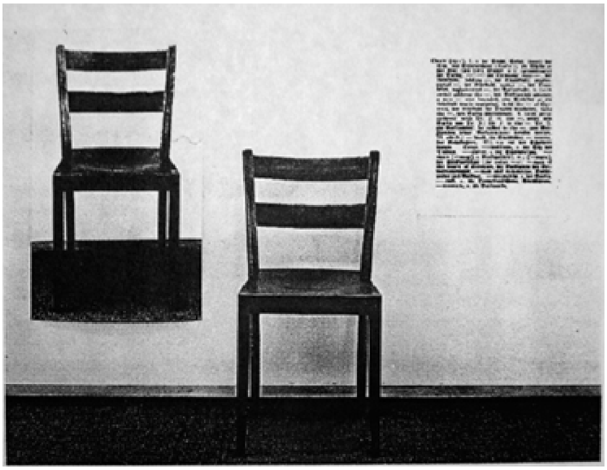
Aquí presentaré algunos de los resultados principales que he obtenido. Están relacionados, por una parte, con el papel predominante que juegan las transformaciones de representaciones semióticas en cualquier actividad matemática y, por otra, con el tipo de sistema semiótico utilizado para estas transformaciones. La complejidad cognitiva subyacente a los procesos de pensamiento en matemáticas reside en el hecho de que hay dos formas bien diferentes de transformaciones que nunca se toman en cuenta explícitamente en la enseñanza. Y desde el punto de vista matemático, una de ellas requiere la mayor atención, mientras que la otra es la que causa las mayores dificultades a los estudiantes. Después de una descripción de los varios procesos cognitivos requeridos por el pensamiento matemático, presentaré algunos datos empíricos para mostrar cómo estos dos tipos de transformaciones son fuentes específicas e independientes de incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas.

¿Qué caracteriza la actividad matemática desde un punto de vista cognitivo?

La situación epistemológica particular de las matemáticas con respecto a los otros campos de conocimiento conduce a conferir a las representaciones semióticas un rol primordial. En primer lugar, constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos; lo cual plantea el problema cognitivo del paso de la representación de un objeto a otra representación de ese mismo objeto. Luego, y ante todo, las estrategias matemáticas implican de manera intrínseca la transformación de representaciones semióticas. Basta con revisar la historia del desarrollo de las matemáticas para ver que el desarrollo de las representaciones semióticas fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático. Para comenzar, está el hecho de que la posibilidad del tratamiento matemático, por ejemplo el cálculo, depende del sistema de representación; esto porque el papel principal de los signos no es ponerse en lugar de objetos matemáticos, sino de proporcionar la capacidad de sustituir algunos signos por otros.

1.1 *¿Por qué las representaciones semióticas son necesarias en toda estrategia matemática?*

Para ilustrar la complejidad del problema de la representación, partiré de una fotografía tomada por Kosuth en 1965, titulada “Una y tres sillas”. Para realizarla, Kosuth yuxtapuso tres elementos en el montaje que fotografió:



Elementos yuxtapuestos	Naturaleza de los elementos yuxtapuestos
1. Una SILLA contra un muro.	(1) EL OBJETO mismo.
2. La fotografía de esa silla contra el muro.	(2) Una imagen de ese objeto, producida físicamente (por un aparato).
3. Una página de diccionario abierto en la palabra “silla” y pegada al muro.	(3) Una descripción verbal.
Este montaje podría completarse con:	
4. El dibujo de una silla que permita fabricarla, como en una nota de montaje.	(4) Otro tipo de imagen, producido por un procedimiento “semiótico” de trazado.
5. Flechas sobre el muro para marcar la relación (parecido, referencia o equivalencia) entre todos esos tipos diferentes de presentación de una silla.	(5) Un esquema (de tipo “red conceptual”) *“UNA y CINCO sillas”*

Figura 1. Yuxtaposición de un objeto y varias de sus representaciones posibles

La originalidad del montaje realizado por Kosuth radica en una doble yuxtaposición. Primero que todo la yuxtaposición de un objeto O y de una de sus representaciones {O, R(O)}. El objeto mismo es evidentemente la silla en la que uno puede sentarse. Luego hay la yuxtaposición de varias representaciones de un mismo objeto {Ra(O), Rb(O)}. Kosuth se limitó a dos representaciones, pero habría podido realizar un montaje “una y cinco sillas” o, en general, “una y *n* sillas”.

Esta doble yuxtaposición pone en evidencia las dos características esenciales para analizar las representaciones y para comprender su rol en el funcionamiento cognitivo del pensamiento y en la adquisición de conocimientos.

1. dos representaciones son diferentes cuando sus contenidos son de naturaleza diferente, es decir, no presentan el mismo tipo de unidades (palabras, contornos, densidad de puntos, flechas…), aunque representen el mismo objeto.

2. existen tantos tipos de representación diferentes como medios o sistemas para producir una representación: aparatos físicos, sistemas semióticos. No es posible clasificar, ni analizar las representaciones sin referirse a los diferentes sistemas que permiten construirlas. Eso quiere decir que las representaciones no dependen en primer lugar de los individuos sino de los sistemas productores de representaciones.

Esas dos características están relacionadas en la medida en que el contenido de una representación depende tanto del sistema movilizado para producir la representación de un objeto, como del objeto representado.

1.2 La doble yuxtaposición y los dos problemas cruciales para el aprendizaje y para la adquisición de conocimientos

La doble yuxtaposición puesta en escena por Kosuth no tiene nada de fantástico o excepcional. Reproduce una práctica cultural que se ha vuelto dominante en la enseñanza y en el mundo de la comunicación. Basta con remplazar la silla por cualquier otro objeto para constatar que la presentación en paralelo de representaciones diferentes (la segunda yuxtaposición) está presente en cualquier página de libro de texto, de revista, de noticia, de ficha de trabajo y, por supuesto, en una pantalla de computador donde es posible multiplicar como se quiera las representaciones de un mismo objeto. La actividad cognitiva necesaria es el reconocimiento de los objetos representados a través de representaciones variadas (imágenes, esquemas, explicaciones verbales…), que deben aclararse mutuamente.

Por lo general, se supone que esta actividad cognitiva es trivial. En realidad, es una de las más complejas que existen, y más en matemáticas que en los otros campos del saber. Y esta complejidad está en el corazón de todos los problemas de aprendizaje y de adquisición de conocimientos. La doble yuxtaposición puesta en evidencia por Kosuth permite plantear los dos siguientes problemas cruciales:

Problema 1. Existen muchas situaciones en las que se da solamente una representación sin ningún otro acceso al objeto estudiado: {R(O)}. ¿Cómo adquirir el conocimiento de objetos o fenómenos a partir de representaciones, si no se tiene acceso a una «experiencia» más o menos directa o personal? En otras palabras, ¿las representaciones pueden funcionar como sustitutos del objeto para quienes no hayan adquirido ya una experiencia más o menos directa?

En efecto, existe una solución que se encuentra en el desarrollo de todas las pedagogías: hacer entrar a la clase muestras o especímenes de la realidad estudiada, o al contrario, salir de la clase para ir al terreno, para permitir precisamente un acceso más directo a los objetos y a los fenómenos estudiados. Eso es evidente, en particular para las ciencias de la vida y de la tierra y, en general, para las ciencias experimentales. El video y las posibilidades de simulación en computador se inscriben también en esta preocupación pedagógica fundamental: ¡no limitarse a la presentación de representaciones en la adquisición de conocimientos!

Problema 2. Cuando ponemos lado a lado varias representaciones de un mismo objeto, para compararlas {Ra(O_1), Rb(O_1), Rc(O_1)... }, podemos constatar que sus contenidos no tienen casi nunca nada en común. Por ejemplo, ante una fotografía de un objeto O_1 y una descripción verbal de O_1, ¿cómo reconocer que es el mismo objeto representado en dos representaciones cuyos contenidos no presentan ningún parecido, si no se tiene (o no se ha tenido) un acceso a ese objeto que no sea a través de representaciones?

Este es el problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas. Basta con tomar el ejemplo de la representación de los números para verlo. Podemos realizar fácilmente una yuxtaposición de diferentes tipos de representaciones posibles de un número entero (Figura 2). ¿Pero podemos realizar un montaje a la Kosuth, es decir, yuxtaponer los números mismos y sus múltiples representaciones?

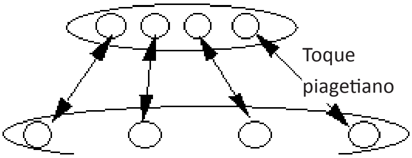
Representaciones ICÓNICAS **Representaciones «propias».**	**Representaciones SIMBÓLICAS** **(cifras o palabras)**
IIII ¿Dedos o cerillas? Ilación colectiva o o o o Configuración poligonal ((((I) I) I) I) Iteración  Toque piagetiano	**4 SISTEMA** decimal **100 SISTEMA** binario. Estos sistemas de posición en base *n* implican EL SIGNO POR EXCELENCIA, «0», *que no se escucha en la oralización de la escritura simbólica* y abren extensiones. **64/16** escritura fraccionaria. **Cuatro** denominación verbal cuyo sentido se deriva de su posición en una serie de denominaciones.

Figura 2. Yuxtaposición de varias representaciones de un número

Nótese que aquí solo podemos tener una yuxtaposición de representaciones y no una doble yuxtaposición como en montaje fotografiado por Kosuth, aunque las representaciones de los números pueden clasificarse en dos categorías: representaciones icónicas, es decir, las que presentan un parecido con colecciones de elementos materiales, y las representaciones simbólicas, es decir, las que dependen de un sistema de reglas de composición y que implican signos que no remiten a ninguna «intuición» sensible o concreta, como el símbolo «0».

Esta imposibilidad de una doble yuxtaposición no tiene nada de accidental, sino que marca el paso entre dos situaciones epistemológicas fundamentales para el desarrollo de los conocimientos. Existe la situación en la que se puede tener acceso a los objetos mismos:

- ya sea directamente por una percepción no instrumentada, o recogiendo datos por medio de muestras, etc.
- ya sea por instrumentos que aumentan el campo de percepción (telescopio, microscopio) o que permiten recoger datos inaccesibles (espectrómetros).

Y existe la situación en la que los objetos estudiados son inaccesibles fuera de representaciones que relevan de una actividad semiótica, como en matemáticas. En otras palabras, el rol de las representaciones semióticas cambia totalmente según la situación en la que uno se encuentre, entre esas dos situaciones epistemológicas. El desafío del problema 2 para la enseñanza es saber si los aprendizajes movilizan los mismos procesos cognitivos en la primera situación que en la segunda, o si, por el contrario, requieren procesos más complejos cuando los objetos de estudio son inaccesibles perceptiva o instrumentalmente.

1.3 El problema cognitivo del paso de una representación a otra en las dos situaciones epistemológicas fundamentales

Los procesos cognitivos que permiten reconocer un mismo objeto en representaciones diferentes no pueden ser los mismos en las dos situaciones.

En la situación de posibilidad de un acceso directo o instrumental a los objetos estudiados, el reconocimiento de un mismo objeto en dos representaciones diferentes y, por lo tanto, la capacidad de pasar de una representación a otra (flechas 3 y 5 en la siguiente figura), se adquieren por asociación directa con la experiencia del objeto (flechas 1, 2, 4). Es la experiencia del objeto mismo la que garantiza la mediación entre dos representaciones de contenidos diferentes. En esta situación, el rol de las representaciones semióticas en la adquisición de conocimientos es secundario, ya que siempre es posible volver a la experiencia para controlar la pertinencia y el sentido de esas representaciones.

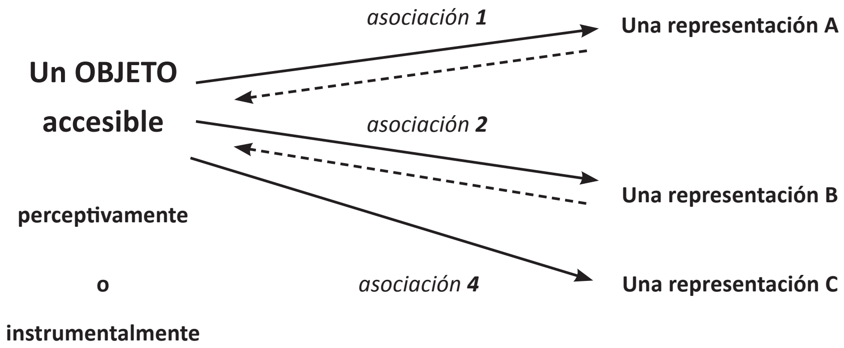


Figura 3. Procedimiento asociativo en situación de accesibilidad directa o instrumental a los objetos de estudio

No sucede lo mismo para el estudio de objetos inaccesibles perceptiva o instrumentalmente, y para los que solo tenemos como medio de aprehensión o de utilización, la producción de representaciones semióticas. Dejemos por el momento la pregunta sobre qué permite pensar que, en esta situación, las representaciones producidas representan algo «real» y racionalmente explorable, y centrémonos en el paso de una representación a otra, es decir, en el reconocimiento de una misma denotación. Vemos entonces que toda posibilidad de asociación de una representación con el objeto representado es imposible. En estas condiciones, ¿cómo establecer que dos representaciones diferentes A y B son representaciones del mismo objeto, cuando sus contenidos son radicalmente diferentes?

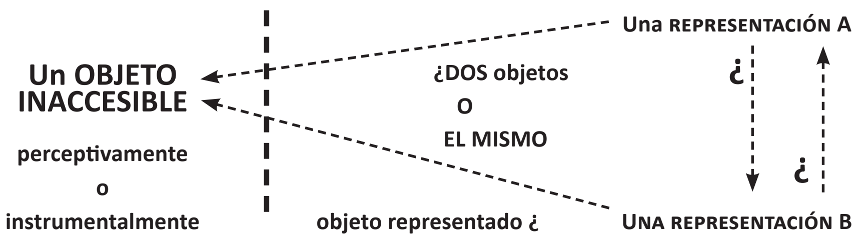


Figura 4. ¿Qué reconocimiento en situación de inaccesibilidad no semiótica?

La yuxtaposición de ocho representaciones posibles de un número, presentada anteriormente (Figura 2), ilustra la complejidad de ese problema ¡nada más que en el plano didáctico! Cuando un niño utiliza una, o incluso dos, de estas representaciones, ¿es capaz de reconocer los números en una tercera o una cuarta representación? Tal vez hemos olvidado hoy en día la distancia cognitiva que separa la representación asociada a la tarea piagetiana y las otras representaciones icónicas, y los debates y dificultades que suscitó en los años 60 a

80 su valorización institucional contra otras representaciones. Hemos opuesto entonces la construcción del concepto de número por las operaciones de clasificación y seriación, a la enumeración verbal de una sucesión de números, que entonces no se dudaba en calificar de «simple recitación de una cuenta». Fueron necesarios, entre otros, los trabajos de Gelman para recordar los principios subyacentes a todo conteo, es decir, a toda enumeración que implica necesariamente medios de denominación.

La conquista de los números por los niños pequeños no se hace por medio de acciones con base en representaciones icónicas o materiales equivalentes, sino por la coordinación de acciones concretas sobre representaciones icónicas con operaciones semióticas que relevan de sistemas sin relación con las representaciones icónicas movilizadas. El desafío esencial de la enseñanza es el paso de las representaciones icónicas, cualesquiera que sean, a los sistemas de representación simbólicos, donde las enumeraciones verbales familiares constituyen una zona de transición indispensable, aun cuando solo sea por su espontaneidad oral. Pero sucede, como lo observamos en una clase de grado octavo, que la mayoría de los alumnos no puede resolver este ejercicio de hueco:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/5 + \ldots = 2.$$

Los profesores lo propusieron con el fin de hacer pasar a los alumnos por la representación decimal 1 + 0,50 + 0, 25 + 0, 20 + ... = 2, lo que, evidentemente, no se les pasó por la cabeza.

¿Cómo analizar los procesos de pensamiento involucrados en la actividad matemática?

El papel de las representaciones semióticas no se reduce a designar objetos, a ponerse en lugar de algo, o a ser ellas mismas consideradas como objetos. Su uso está determinado por la posibilidad del procesamiento matemático que permiten. Cualesquiera sean las representaciones semióticas usadas, se pueden cambiar por otras representaciones semióticas sin el apoyo de nuevos datos u observaciones empíricas. De otra manera, la operación cognitiva básica de sustituir alguna representación semiótica por otra no sería posible. Pero eso depende del sistema semiótico dentro del cual se producen las representaciones semióticas. Cada sistema semiótico proporciona posibilidades muy específicas.

La variación de "capacidad" que fue mencionada por Peirce (1931-1966, CP: 2.228) para el *representamen*, no está en el nivel de las representaciones particulares, sino en el nivel del sistema semiótico dentro del cual se producen. Así, para analizar los procesos de pensamiento complejos y específicos que subyacen a la actividad matemática, debemos tener en cuenta las diferencias entre los varios sistemas de representación semiótica usados. ¿Son importantes estas diferencias en los procesos matemáticos? Siempre que analizamos las dificultades y los bloqueos del estudiante en el aprendizaje de las matemáticas nos enfrentamos con este asunto.

¿Cómo describir los varios procesos matemáticos?

Dada la paradoja cognitiva del acceso a los objetos de conocimiento en matemáticas, una tal descripción debe apoyarse en la variedad de sistemas de representación semiótica que se usan y en la "capacidad" específica de cada una para realizar procesos matemáticos.

La manera más difundida de clasificar es oponer el lenguaje, natural o simbólico, y la imagen. Sin embargo, esto es general y sobre todo está lejos de ser suficiente. También hay otra diferencia esencial que muy frecuentemente se omite. Algunos sistemas semióticos se pueden usar para una sola función cognitiva: el procesamiento matemático. De otra parte, otros sistemas semióticos pueden satisfacer una amplia gama de funciones cognitivas: comunicación, procesamiento de información, conciencia, imaginación, etc. (Duval, 1995a, pp. 89-90).

Esta diferencia funcional entre los varios sistemas de representación semiótica usados en matemáticas es esencial porque está intrínsecamente conectada con la manera en que los procesos matemáticos transcurren: dentro de un sistema semiótico monofuncional, la mayoría de procesos toman la forma de algoritmos, en tanto que dentro de un sistema semiótico multifuncional los procesos nunca se pueden convertir en algoritmos. Por ejemplo, en geometría elemental no hay algoritmo para utilizar figuras de una manera heurística (Duval, 1995b) y la manera como transcurre una prueba matemática en lenguaje natural no se puede formalizar sino usando sistemas simbólicos. La mayoría de estudiantes no entiende las pruebas que usan lenguaje natural (Duval, 1991).

A partir de estas observaciones, podemos obtener un esbozo rápido de las varias formas de procesos matemáticos, como lo muestra la superposición de una gráfica en la tabla de clasificación (Figura 5).

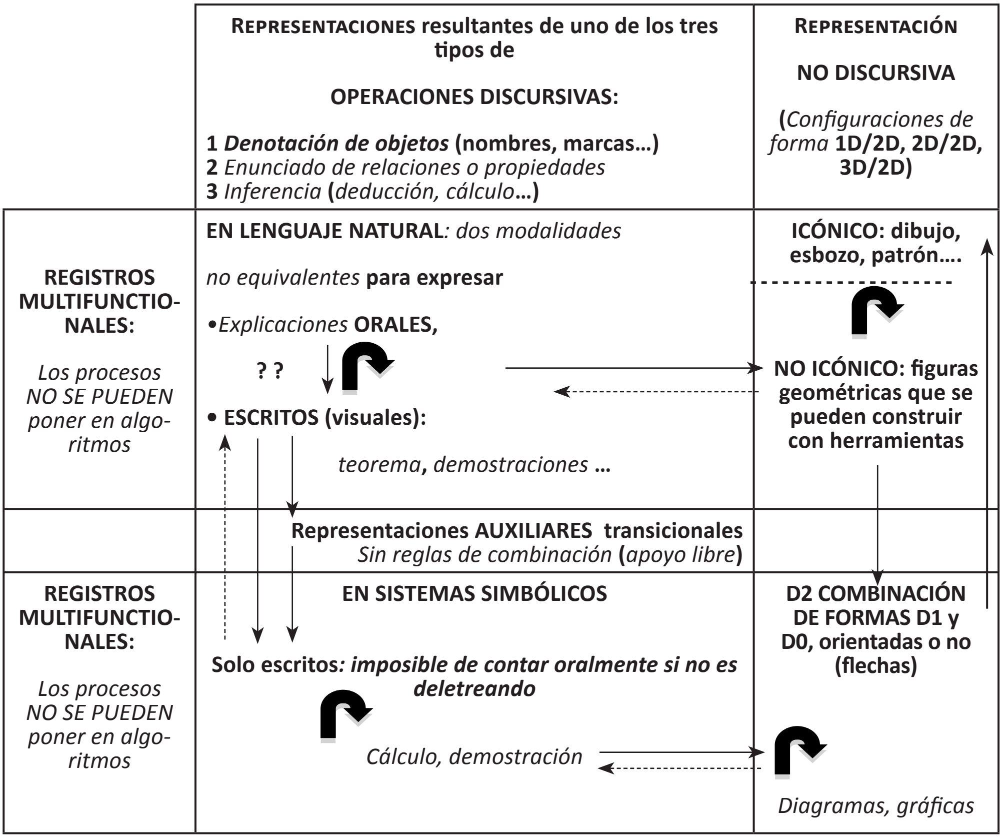


Figura 5. Clasificación de los registros que se pueden movilizar en procesos matemáticos

Lo que interesa para comprender los procesos de pensamiento involucrados en cualquier actividad matemática es enfocarse en el nivel de los sistemas de representación semiótica y no en la representación particular producida. Y son esenciales los siguientes dos puntos. En primer lugar, la propiedad básica de la representación semiótica y su importancia para las matemáticas solo se puede capturar en este nivel: el hecho de que se pueda intercambiar una por otra, mientras se mantiene la misma denotación (Frege, 1971/1892). En segundo lugar, una marca no puede funcionar como un signo fuera del sistema semiótico en el que su significado toma valor en oposición a otros signos dentro de ese sistema (posteriormente se da un ejemplo en la Figura 19).

Esta idea fue la principal contribución de Saussure (1973/1916, pp. 158-168) al análisis del lenguaje como un sistema semiótico. Eso quiere decir, también, que existen reglas para producir representaciones semióticas pertinentes. Así, todos los sistemas semióticos monofuncionales que son característicos de las matemáticas se basan en reglas de formación de representación. Eso se puede revisar fácilmente para cualquier sistema de notación numérica o para las gráficas cartesianas.

Desde luego, algunas representaciones que no dependen de un sistema semiótico se usan en la actividad matemática. El mejor ejemplo es el uso de palitos para representar números enteros pequeños. No tienen ni reglas de formación ni posibilidades específicas de transformación. Se usan como material para manipulaciones libres. En ese sentido, se ajustan perfectamente a la tercera determinación de *representamen* dada por Peirce: "algo que *para alguien* se pone en lugar de…" (1931, p. 2.228). Su uso depende solamente del *interpretante*. Aparecen más frecuentemente como representaciones auxiliares transicionales (Hitt, 2003).

Así, con respecto a la propiedad de las representaciones semióticas, básica para la actividad matemática, podemos distinguir cuatro tipos muy diferentes de sistemas semióticos. Retomando la palabra ya usada por Descartes en *La Géométrie* (Descartes, 1954/1637, p. 8 (p. 300)), y manteniendo también sus significados modernos, las denominamos "registros de representación" (Duval, 1995a, p. 21). No todos los sistemas semióticos son registros, solo los que permiten una transformación de representaciones. Hemos destacado el caso muy genuino del lenguaje natural. Allí, la producción de representaciones semióticas se puede lograr según dos modalidades muy fenomenológicas. De una a la otra existe una gran brecha, que muy a menudo se desestima (Duval, 2000b).

Esta clasificación proporciona las herramientas para analizar la actividad matemática y para identificar la raíz de los problemas con la comprensión matemática y no solo sobre la comprensión de tal y tal concepto que muchos estudiantes tienen.

Los dos tipos de transformación de representaciones semióticas

En la medida en que la actividad matemática consiste intrínsecamente en la transformación de representaciones, se hace evidente que hay dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas que son radicalmente diferentes: tratamientos y conversiones.

Los tratamientos (flechas curvadas en la Figura 5) son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro; por ejemplo, realizar un cálculo mientras se permanece estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números, resolver una ecuación o sistema de ecuaciones, completar una figura usando criterios perceptuales de conectividad o simetría, etc. Eso da prominencia al papel intrínseco de los sistemas semióticos en los procesos matemáticos. Los tratamientos que se pueden realizar dependen principalmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicas para el registro utilizado. Dos ejemplos son suficientes para mostrar esto.

Los procedimientos para realizar una operación numérica dependen lo mismo del sistema de representación usado para los números como de las propiedades matemáticas de las operaciones. Así, los algoritmos son diferentes para una notación decimal y para una notación fraccionaria de los mismos números:

12+13=...

0,20+0,25=... 1/5+1/4=...

0,20÷0,25=... 1/5÷1/4=...

Esto significa que los procesos de cálculo nunca son puramente matemáticos; dependen del tipo de funcionamiento representativo que el sistema en uso permite. Uno puede estar motivado, por razones de economía o de visibilidad, a cambiar sistemas de notación para realizar el tratamiento.

Con frecuencia se recurre al registro de transformaciones figurales de orden *gestáltico* para resolver y justificar heurísticamente muchos problemas de geometría elemental. Estas transformaciones, que son puramente visuales, se pueden efectuar cambiando el punto de vista desde el cual se observan, o materialmente como sucede en un rompecabezas. A continuación se presentan tres ejemplos clásicos en los que las transformaciones visuales consisten en una operación de reconfiguración de la figura original (Figura 6).

En estos ejemplos, las unidades figurales de una figura original se pueden reconfigurar visualmente sin recurrir en manera alguna a una propiedad matemática. Esta operación puramente visual de reconfigurar una figura original subyace a la mayoría de los ejemplos de evidencia visual que se utilizan en la enseñanza para dar explicaciones "intuitivas" de ciertos resultados matemáticos. Pero en la mayoría de casos no funciona porque los procesos visuales de reconocimiento *gestalt* no suceden de la misma manera como se requiere y se espera desde un punto de vista matemático (Duval, 1995b).

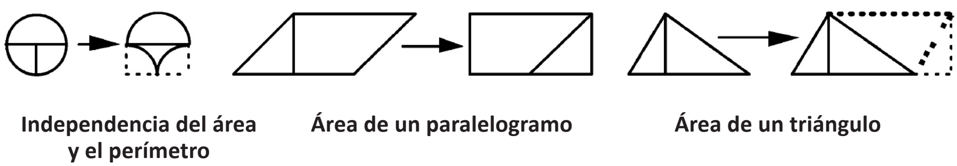


Figura 6. Transformaciones visuales de formas

Las conversiones (flechas rectas en la Figura 5) son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar de la notación algebraica para una ecuación a su representación gráfica, pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando letras, etc. La conversión, que es una transformación en la representación, es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado. Hay como una brecha que depende del registro de partida y el registro de llegada (flechas rectas en la Figura 5). Muy a menudo, la conversión se clasifica como traducción o codificación. Se presentan ejemplos como los siguientes (Figura 7).

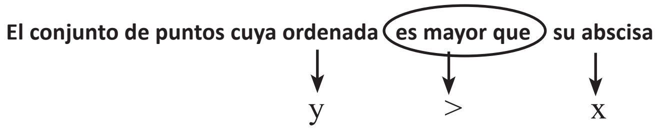


Figura 7. Conversión congruente (y > x)

Pero eso es engañoso porque una pequeña modificación puede causar el fracaso de reglas de codificación o traducción (Figura 8).

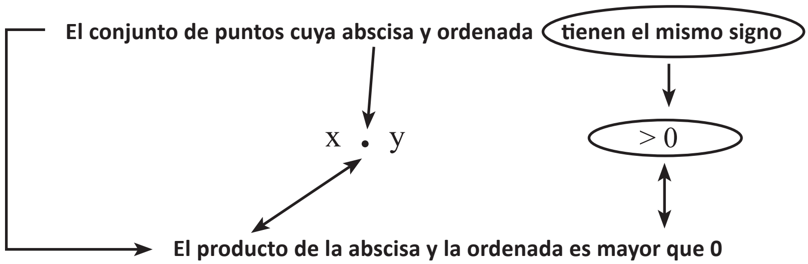


Figura 8. Conversión no congruente (> 0)

Miremos ahora un registro para el cual se puede dar explícitamente una regla de conversión. Para construir una gráfica, basta tener la siguiente regla: para cada par ordenado de números se puede asociar un punto en un plano coordenado con incrementos dados en los dos ejes. Y la construcción de gráficas que corresponden a funciones lineales parece no generar dificultades en los estudiantes. Pero solo se tiene que invertir el sentido del cambio de registro para ver que estas reglas dejan de ser operacionales y suficientes (Figura 9).

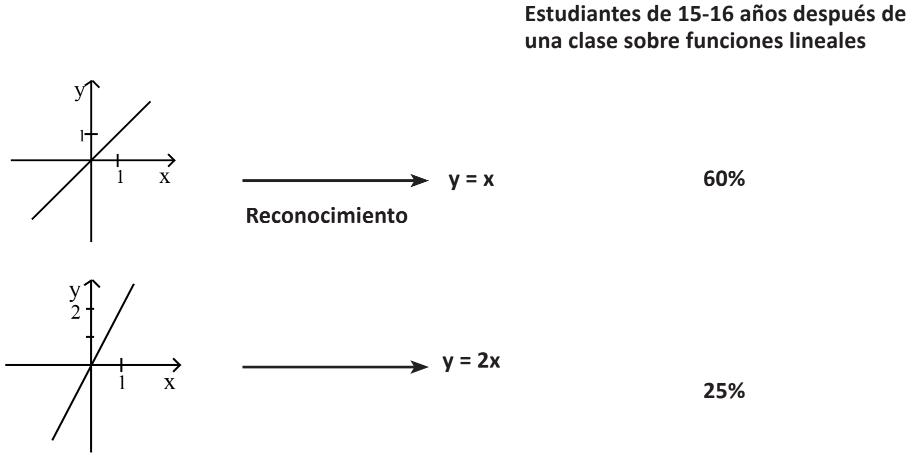


Figura 9. Una tarea de reconocimiento

La tarea propuesta fue de simple reconocimiento, no de construcción o de lectura de coordenadas de puntos: elegir entre muchas posibles expresiones (por ejemplo, entre y=x, y=-x, y=x+1), la que corresponde a la gráfica (Duval, 1988). Naturalmente, si se hubiera pedido construir las dos gráficas, el éxito habría excedido al 90% en ambos casos. En la enseñanza estándar, las tareas ofrecidas nunca son de reconocimiento, sino simplemente de lectura, lo que requiere solamente un proceso de ubicar puntos guiado por la comprensión local y no un proceso de interpretación global guiado por la comprensión de variables visuales cualitativas (Figura 19). Convertir una representación semiótica en otra no se puede considerar ni como codificación ni como tratamiento.

En estos dos ejemplos, la conversión se requiere explícitamente y parece ser que se puede reducir a situaciones transitorias para resolver algún problema particular. Pero muy a menudo, la conversión se requiere implícitamente siempre que se deban usar juntos, de manera interactiva, dos registros o incluso tres. Ya hemos mencionado el caso de la geometría. Allí, estamos enfrentando algo así como una brecha oculta entre el proceso visual del tratamiento y los varios procesos discursivos que se pueden utilizar. Y en el aula tenemos una práctica muy específica de usar simultáneamente dos registros. Se habla en lenguaje natural mientras que se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones verbales pudieran volver transparente cualquier tratamiento simbólico (Duval, 2000b, pp. 150-155).

A través de los varios tipos de conversiones, más que a través de tratamientos, tocamos la complejidad cognitiva de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas y en los procesos de pensamiento específicos requeridos por la actividad matemática.

¿Cómo reconocer el mismo objeto matemático a través de dos representaciones cuyos contenidos son heterogéneos?

Al hacer una distinción entre sentido y referencia para los signos matemáticos, Frege (1971/1892, pp. 89, 102-103) enfatizó la diferencia entre el contenido de una representación y aquello a lo que esta se refiere. Entre el contenido de una representación y el objeto representado no hay otra relación que la denotación. Ahora, y esta es la consecuencia decisiva que rara vez se tiene en cuenta, el contenido de una representación depende más del registro de representación que del objeto representado (Duval, 1999b, pp. 40-46). Esa es la razón por la cual pasar de un registro a otro cambia no solo los medios de tratamiento, sino también las propiedades que se pueden hacer explícitas. Por otra parte, para las representaciones no semióticas producidas por dispositivos físicos (espejo, cámara, microscopio, etc.) o por organizaciones sensoriales y cerebrales, tenemos algo como una relación de causalidad. El contenido de una representación es el efecto indirecto del objeto, de ahí su valor "intuitivo" o más empírico (Figura 10).

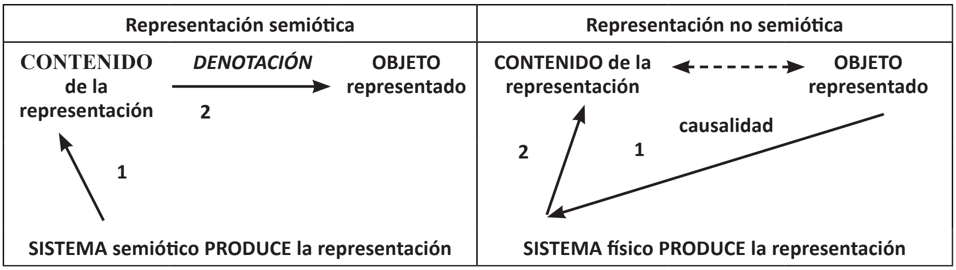


Figura 10. Los dos tipos de relación entre el contenido de la representación y el objeto representado

La relación entre el contenido de una representación y el objeto representado depende del sistema que se moviliza para producir la representación. Podemos obtener iconicidad o no iconicidad para una representación semiótica lo mismo que para una representación no semiótica. Y eso nos devuelve a la paradoja cognitiva de la comprensión en matemáticas. ¿Cómo puede el objeto representado distinguirse de la representación semiótica utilizada cuando no hay acceso al objeto matemático independiente de las representaciones semióticas? El primer problema de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas es un problema tanto de reconocimiento como de distinción.

Cuando nos enfrentamos a dos representaciones desde dos registros distintos, ¿cómo puede uno reconocer al mismo objeto representado dentro de su respectivo contenido? En otras palabras, ¿cómo puede un estudiante distinguir en cualquier representación semiótica lo que es matemáticamente importante y lo que no lo es? Ese asunto es evidente y crucial para todas las representaciones producidas dentro de registros multifuncionales. ¿También lo es para las representaciones que son producidas dentro de registros monofuncionales? En todo caso, estos problemas de reconocimiento y distinción son intrínsecos a la construcción de conexiones entre registros.

Esta paradoja cognitiva permite plantear la siguiente hipótesis (en términos matemáticos, "conjetura"): la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. Y desde ya se puede plantear una primera pregunta: ¿esa coordinación de registros llega naturalmente a los estudiantes en el contexto de la enseñanza matemática?

Las dos fuentes de incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas

Los dos tipos de transformación de representaciones semióticas son fuentes bien diferentes de dificultades recurrentes en el aprendizaje de las matemáticas. No son, en principio, dificultades particulares relativas a este o a aquel concepto matemático, sino dificultades más globales que se pueden encontrar en cualquier nivel de enseñanza y en cualquier dominio de las matemáticas. Durante cerca de veinte años se ha recogido información empírica sobre las relaciones entre procesos de pensamiento involucrados en la actividad matemática y problemas de comprensión o incluso bloqueos de la mayoría de aprendices. Y cualquiera puede obtener evidencia empírica sobre la condición de que el tratamiento y la conversión se separan metodológicamente en las tareas propuestas a los estudiantes, lo que rara vez o nunca se hace en la mayoría de estudios de investigación.

Nos limitaremos a dar algunos ejemplos con el propósito de mostrar el profundo malentendido de estos dos tipos de transformación en diferentes niveles de la enseñanza y en varias áreas de la actividad matemática.

Una primera fuente de incomprensión: la complejidad y la especificidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional

Hay una fuente enorme de malentendidos entre profesores y estudiantes, en particular con respecto a procesos de pensamiento básicos y complementarios, como el razonamiento y la visualización. A diferencia de los registros monofuncionales, los registros multifuncionales parecen ser común y directamente accesibles a cada estudiante. Pero esto es muy engañoso. De hecho, la manera matemática de usar los registros multifuncionales va en contra de la práctica común que se inicia con la práctica del lenguaje natural (Duval, 1995a, pp. 87-136).

Nos enfocaremos aquí más bien en las figuras de la geometría en la medida en que recurren explícitamente a la visualización y no solo al conocimiento discursivo (propiedades, definiciones, teoremas). Recuérdese que una figura en geometría siempre está arraigada en el funcionamiento de dos registros. Y si queremos captar su complejidad cognitiva, debemos analizar por separado la manera en la que los tratamientos se llevan a cabo respectivamente en el registro discursivo y en el registro visual, aunque surjan en el mismo proceso matemático. Cuando nos enfocamos en la visualización, estamos enfrentando una fuerte discrepancia entre la manera común de ver las figuras, casi siempre de una manera icónica, y la manera matemática con la que se supone deben mirarse. Si bien existen muchas maneras de "ver" (Duval, 1995b), ¿cuál es la requerida por el uso heurístico de las figuras?

Dimos antes tres ejemplos elementales del uso de las figuras en geometría (Figura 6). En estos ejemplos, "ver" consistía en discernir en la figura original las transformaciones que permiten reconfigurarla en otra: el paso de la figura original a la que es la meta hace posible comprender una relación, una fórmula de cálculo, etc. Suponiendo que se conoce el cálculo del área de un rectángulo, es posible ver cómo calcular el área de un paralelogramo y, por tanto, la de un triángulo (Figura 11).

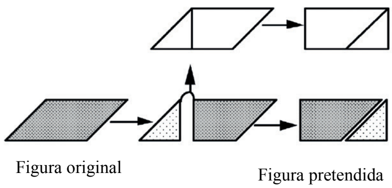


Figura que ilustra una redacción de propiedades geométricas que se refieren a ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES de la figura (los lados y la perpendicular a la base desde un vértice)

Proceso visual subyacente de reconfiguración que requiere enfocar LA ATENCIÓN EN ELEMENTOS BIDIMENSIONALES

Figura 11. ¿La ilustración de la figura es cognitivamente congruente con la transformación visual?

¿En qué consiste el hecho de "ver" en geometría? Aunque el discurso matemático necesita ver los elementos unidimensionales de la figura, su fuerza heurística requiere que la atención se centre en los elementos de dos dimensiones. Este ejemplo se cita siempre como una demostración de una actividad espontánea, que debería ser común a los estudiantes que comienzan y a los matemáticos confirmados. En realidad, los factores que aquí dan a la figura su claridad heurística y explicativa pueden, en situaciones matemáticamente similares, impedir ver, como se puede verificar en el siguiente ejemplo (Figura 12).

Compare las áreas
de los dos triángulos
sombreados en el trapecio
de la derecha

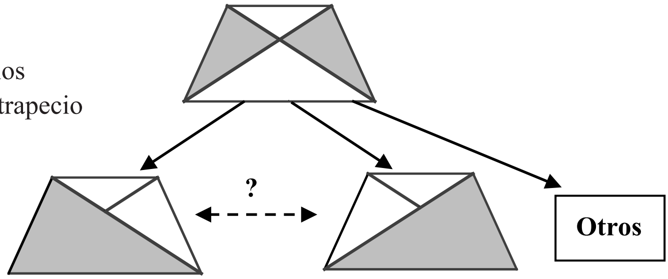
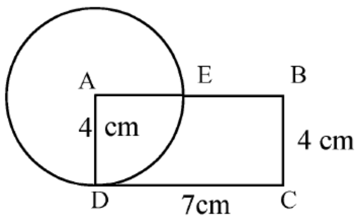


Figura 12. Primer paso de un tratamiento visual: subfiguras que se deben distinguir

La solución de ciertos problemas requiere una comparación de determinadas subfiguras posibles, obtenidas mediante reconfiguración y, por tanto, la capacidad de discernirlas rápidamente en la figura original. Existen factores que en algunos casos facilitan el reconocimiento de subfiguras relevantes y las inhiben en otros (Duval, 1995b, pp. 144, 149-150). Pero hay otras situaciones, posiblemente más interesantes, que muestran la complejidad y la dificultad de las figuras: las que involucran una circunferencia y algunas líneas rectas. Con respecto a ello, tenemos observaciones confiables disponibles en diferentes niveles de enseñanza.

En la figura que aquí se esboza a mano alzada (las verdaderas medidas de longitud están en centímetros), se representan un rectángulo ABCD y una circunferencia de centro A, que pasa por D.

Encuentre la medida de longitud del segmento [EB]



Septiembre de 1997	Una muestra de 2.604 estudiantes	Septiembre 1998	2.590 estudiantes
Respuestas matemáticas		Respuestas matemáticas	
[AE visto como un radio de 4 cm]	**9%**	**[AE visto como un radio de 4 cm]**	**22,2%**
Respuestas midiendo el segmento (alrededor de 2 cm en el segmento presentado)	16%	Respuestas midiendo el segmento (alrededor de 3.5 cm en el segmento presentado)	39,6%
Respuestas por estimación visual (E alrededor del punto medio de AB, alrededor de 3.5)	26%		
Otras respuestas	30%	Otras respuestas	24,4%
No responde	16%		

Figura 13. Evaluación nacional en Francia (MEN, 1998, 1999)

Al final de la escuela primaria se propuso a todos los estudiantes franceses que entraban a la escuela media el problema que se muestra en la Figura 13. En ella también se incluye información sobre los resultados que al respecto se obtuvieron en las pruebas de 1997 y 1998. Durante varios años siguientes se propuso el mismo tipo de problema.

En realidad, para encontrar la respuesta matemática, los estudiantes tenían que ver dentro de la figura las dos subfiguras B (véase Figura 14) y no las dos subfiguras A. Porque es solo en las dos subfiguras B como uno ve los dos radios como un lado y una parte del otro lado del rectángulo. Ahora son las subfiguras A las que saltan a la vista y, por tanto, se tiende a descartar las subfiguras B.

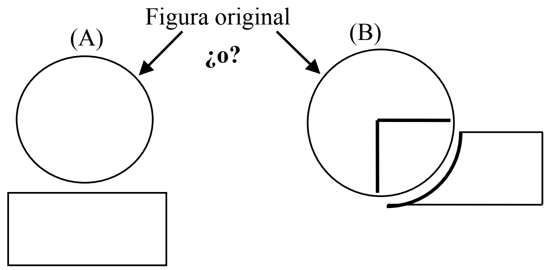


Figura 14. Dos maneras de identificar subfiguras dentro de la figura original

¿Cómo "ve" uno la figura original en la afirmación que acompaña al enunciado del problema (Figura 13)? La mayoría de estudiantes no puede distinguir la organización visual (B).

La segunda encuesta se realizó cerca del final de la escuela media. Se propuso el siguiente problema (Figura 15).

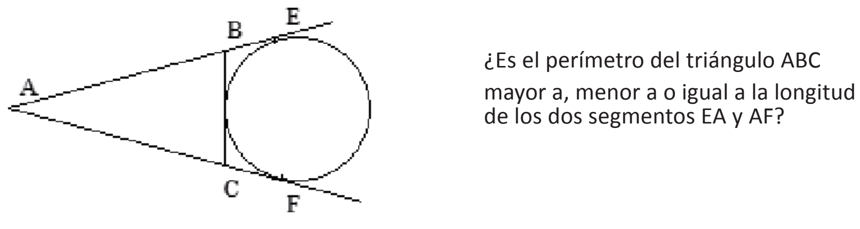
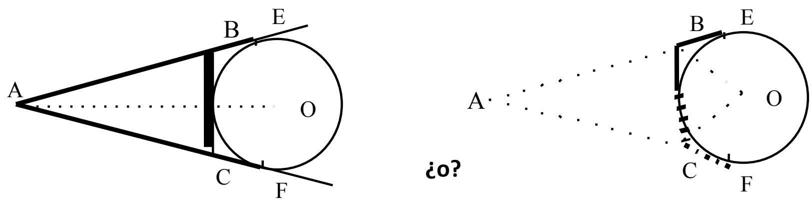


Figura 15. Problema presentado a estudiantes de catorce años (Mesquita, 1989)

Existen dos maneras de ver la figura en el enunciado del problema, pero solo una muestra la respuesta y proporciona la razón (véase Figura 16).

De la organización figural (I) a la organización figural (II) hay un salto que depende de factores visuales. La visión espontánea que se produce tiene un solo eje de simetría (organización I), mientras que la solución requiere que uno dé mayor importancia a otros dos ejes de simetría (organización II). Ahora, pasar de (I) a (II) constituye un salto que más de la mitad de los estudiantes no dio. En realidad, para poder ver que la figura tiene dos rectas de simetría OB y OC, se debe romper el elemento de la figura simple (organización I) consistente en el segmento BC en dos segmentos (organización II). Y para que la mayoría de estudiantes llegara a ver la organización (II) en la figura del enunciado, se requirió modificarlo describiendo la división del segmento BC: "Sea I el punto de intersección de AO y BC; compare BI y IC" (Pluvinage, 1990, p. 27).



Organización (I) de los elementos de la figura usando **solo la recta de simetría (AO)**

Organización (II) de los elementos de la figura usando **las dos rectas de simetría (BO y CO)**

Figura 16. Dos organizaciones figurales

Estos pocos ejemplos ilustran bien la complejidad del uso matemático de las figuras y del carácter no natural para la mayoría de estudiantes del acto de ver en geometría. ¿Cómo se debería analizar el acto de ver en geometría? ¿Cómo se debería introducir a los estudiantes a ello? En lo que concierne a las observaciones que se pueden realizar en todos los dominios de geometría, hay dos posiciones posibles.

La primera consiste en explicar las dificultades persistentes que los estudiantes encuentran con las figuras como malentendidos de las matemáticas representadas. Dicho de otra manera, sería la comprensión de las propiedades matemáticas la que debería guiar la lectura y la exploración de las figuras hacia la solución de un problema. Una buena comprensión conceptual debería conducir a ver en una figura lo que se debe ver para encontrar ahí los elementos para resolver un problema.

La segunda posición consiste en considerar que las figuras surgen en un sistema de representación que es independiente de los enunciados y de las propiedades matemáticas a las que se refieren. Eso significaría que lo que uno ve en una figura depende de factores de la organización visual: son estos factores los que determinan la distinción, es decir, el reconocimiento de ciertas formas de una, dos y tres dimensiones en una figura, y excluyen la distinción de otras posibles configuraciones y subfiguras en la misma figura.

Ahora, "ver" en geometría frecuentemente requiere que uno sea capaz de reconocer una u otra de estas otras posibles configuraciones y subconfiguraciones. Lo que tiene que ser reconocido en una figura original es una función del enunciado del problema, pero su "visibilidad", es decir, el carácter más o menos espontáneo de su reconocimiento, depende de operaciones visuales de reorganización. Existen muchos factores que pueden inhibir o favorecer esta distinción de estas operaciones visuales. Se pueden estudiar experimentalmente (Duval, 1995b, 1998c; Rommevaux, 1998).

Otra observación hecha por Schoenfeld con estudiantes mayores, después de un semestre de trabajo en geometría, muestra la independencia de las figuras con respecto al conocimiento conceptual y a las capacidades adquiridas para probar. Se les propuso el problema de construcción que se muestra en la Figura 17. Los estudiantes trabajaron en su resolución sin mucha dificultad, pero procediendo completamente de manera empírica. Sin embargo, para ellos no hubo conexión alguna con todas las propiedades matemáticas que conocían sobre el asunto (Schoenfeld, 1986, pp. 243-244, 256).

Nótese la diferencia entre este problema de construcción y el problema precedente de comparación de longitudes (Figura 15). El éxito en este problema de construcción solo requiere tener en cuenta un eje de simetría, como en la organización (I) de la Figura 15. El éxito en el problema de comparación requiere que uno reconozca los otros dos ejes de simetría BO y CO, que están "ocultos" por el predominio visual de AO. El reconocimiento visual no depende principalmente del conocimiento conceptual de las propiedades.

Tome dos rectas que se intersequen. Sea E un punto en una de ellas. Construya una circunferencia tangente a las dos rectas, de tal manera que E sea un punto de tangencia con una de las rectas.

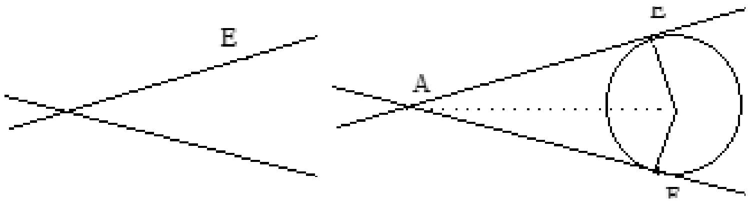


Figura 17. Problema de construcción propuesto por Schoenfeld (1986)

Ahora solo podemos mencionar el caso importante del lenguaje en geometría. Podemos observar una gran brecha entre un razonamiento deductivo válido que usa teoremas y el uso común de argumentos. Los dos son tratamientos bien opuestos, aun cuando en el nivel superficial las formulaciones lingüísticas parezcan muy similares. Un razonamiento deductivo válido funciona como un cálculo verbal de proposiciones, mientras que el uso de argumentos para convencer a otras personas funciona como la descripción progresiva de un conjunto de creencias, hechos y contradicciones. Los estudiantes solo pueden comprender lo que es una demostración cuando comienzan a diferenciar estos dos tipos de razonamiento en el lenguaje natural. Para lograr que ellos alcancen este nivel, se requiere el uso de actividad de representación transicional tal como la construcción de gráficos proposicionales (Duval, 1991, 1995a, 1998b).

Esta primera fuente de dificultad es bien conocida. Origina las observaciones recurrentes que los profesores pueden hacer sin importar en qué nivel enseñan. Más aún, es la razón de que en la enseñanza se tienda a marginar, tanto como sea posible, el recurso a registros multifuncionales y a permanecer dentro de los registros monofuncionales, en donde los tratamientos pueden tomar la forma de algoritmos. Sin embargo, no se puede evitar el uso del lenguaje natural (Duval, 2000b, 2003) y ello origina el asunto de la articulación con las representaciones producidas dentro de los registros monofuncionales. Esto requiere conversión explícita o implícita de representaciones.

Una segunda fuente de incomprensión: conversión de representaciones o cambio de registro

El segundo tipo de dificultad, a diferencia del primero, rara vez se ha notado como tal debido a que tan pronto como aparecen las dificultades de conversión, se consideran un signo de incomprensión conceptual. Más aún, para poder ver genuinamente el tamaño de las dificultades vinculadas a la conversión de representaciones, se debe desplegar un mecanismo de observación que les permita manifestarse, lo que supone, para comenzar, ¡que uno se ha hecho consciente de la diferencia entre tratamiento y conversión en un proceso matemático!

En cualquier caso, es la dificultad del segundo tipo la que limita en forma considerable la capacidad de los estudiantes para usar el conocimiento adquirido, lo mismo que su capacidad de adquirir nuevo conocimiento en matemáticas. Esto conduce muy rápidamente a un límite en el progreso de comprensión y aprendizaje para muchos estudiantes.

Las dificultades insuperables generadas por la conversión se pueden observar para los diferentes tipos de conversión, lo cual sucede para cada pareja de registros que se usen conjuntamente (flecha recta en la Figura 5). También son bien conocidos los obstáculos que surgen por la simple “traducción” de los términos de un problema que se enuncia en palabras, al convertirlo en expresiones simbólicas. Es una brecha que muchos estudiantes no pueden sobrepasar con éxito, cualquiera sea el contenido matemático (operaciones aditivas o multiplicativas sobre números relativos, enunciados para expresar en ecuaciones, etc.). Esa es la razón por la cual la mayor parte de la investigación se ha enfocado en la reorganización de representaciones auxiliares transicionales, las que los aprendices desarrollan espontáneamente o las que se introducen en la enseñanza.

En estudios anteriores (Duval, 1988, 1996b) presenté evidencia de un gran fracaso en la tarea de convertir una gráfica cartesiana en la ecuación correspondiente. Y ese fracaso es totalmente independiente de la comprensión del concepto de función. La Figura 9 presenta un ejemplo de la tarea de reconocimiento que se usó. Por tanto, podemos incrementar las observaciones sobre los problemas de conversión para cada tipo de conversión y en todas las áreas de la enseñanza de las matemáticas. La metodología para eso no requiere solo poner a los estudiantes en una situación de resolución de problemas o en una actividad de aplicación. Requiere asignarles tareas que varíen sistemáticamente, no solo como una función del registro original, sino también como una función de variaciones internas dentro de cada registro.

Se puede ver, por tanto, que no es suficiente con enfocarse en errores que se pueden observar directamente y que vuelven a ocurrir de un año al siguiente, sino que es necesario cavar más hondo en las dificultades para poder analizar problemas de comprensión de los estudiantes de matemáticas. Cuando se hace eso, se enfrentan fenómenos muy profundos y sorprendentes sobre la complejidad cognitiva de la conversión en cualquier área de la educación matemática.

Cuando, dentro de un registro fuente, se varía sistemáticamente una representación para convertirla en una representación en el registro de llegada, se puede observar una variación sistemática de desempeños. Eso ocurre como si el éxito o los errores sistemáticos dependieran de la distancia cognitiva entre el contenido de la representación fuente y el contenido de la representación de llegada. En algunos casos, es como si hubiera una correspondencia uno a uno y la representación fuente fuera transparente para la representación de llegada. En estos casos, la conversión no parece ser más que una simple codificación (Figura 7), pero en otros casos no sucede así (Figura 8). En otras palabras, puede o no haber congruencia entre una representación fuente y su representación convertida dentro de un registro de llegada. Un análisis más detallado nos permite identificar tres factores para describir este fenómeno (Duval, 1995a, pp. 49-57):

- Es posible o no una correspondencia uno a uno entre todos los constituyentes significativos (símbolos, palabras, o rasgos visuales) de los contenidos de la representación fuente y de la representación de llegada.

- La elección para cada constituyente significativo de la representación de llegada es unívoca o no lo es.

- Para los constituyentes significativos que se pueden poner en correspondencia, el orden de organización dentro de la representación fuente se mantiene o se cambia dentro de la representación de llegada.

El segundo fenómeno es el sentido en el que se hace la conversión. Cuando los roles del registro fuente y del registro de llegada se invierten dentro de una tarea de conversión de representación semiótica, el problema cambia radicalmente para los estudiantes. Puede ser evidente en un caso, mientras que en la tarea invertida, la mayoría de estudiantes fracasan sistemáticamente. Es suficiente referirnos al ejemplo dado en la Figura 9, recordando que si hubiéramos solicitado la construcción de las gráficas de las funciones $y=x$ y $y=2x$ o incluso $y=(1/2)x$, no habría habido una diferencia significativa en sus desempeños.

Pero la siguiente observación dentro de un dominio que parece dar muchas dificultades a los estudiantes, el álgebra lineal, proporciona un ejemplo que plantea algunas preguntas (Figura 18). ¿La comprensión en álgebra lineal no presupone que los estudiantes sean capaces de cambiar registros rápidamente de una manera implícita o explícita? ¿Su dificultad en la conversión no sería uno de los principales obstáculos que tendrían que superar? En cualquier caso, es aquí donde se puede ver la magnitud de este tipo de dificultad.

Podemos observar la magnitud de las variaciones en el éxito cada vez que se invierte el sentido en el que se hace la conversión. Más aún, ningún registro considerado aisladamente parece manejarse mejor que otro: los desempeños varían según los pares de registro fuente y registro de llegada. Aquí llegamos a la raíz del problema en el aprendizaje de las matemáticas: la capacidad de comprender y de hacer por sí mismo cualquier cambio de registro de representación. Los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático residen en la especificidad matemática y en la complejidad cognitiva de la conversión y en el cambio de representación. No es ni un asunto de codificación ni un asunto de conceptos matemáticos exclusivamente.

Esta complejidad aparece a través de dos fenómenos cuya variación depende de la naturaleza de los dos registros movilizados para una transformación de representación: la variabilidad de congruencia/no congruencia para representaciones del mismo objeto de conocimiento y la no reversibilidad. En efecto, en cualquier nivel y en cualquier área, las conversiones no congruentes son para muchos estudiantes una barrera infranqueable en su comprensión de las matemáticas y, por tanto, para su aprendizaje.

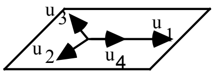
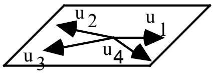
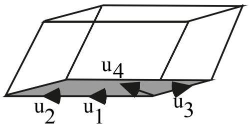
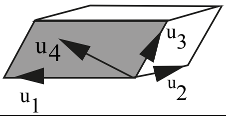
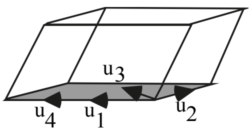
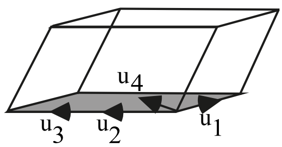
Preguntas (marzo de 1993)			*Niveles de éxito*
	Registro original	**Registro de destino**	**Tamaño muestra: 144**
T2→ G	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$		**.83**
G → T2		$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & a & c \\ \hline 0 & 1 & b & d \\ \hline \end{array}$	**.34**
T3→G	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & k & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$		**.68**
G → T3		$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & a \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array}$	**.35**
T → S	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = k\,u_1 + m\,u_2$ $u_4 = p\,u_1 + 0\,u_2$	**.07**
S → T	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_3$ $u_2 = k\,u_1 + 0\,u_3 ; k \in R$ $u_3 = 0\,u_1 + 1\,u_3$ $u_4 = a\,u_1 + b\,u_3 ; a \in R, b \in R$	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & k & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & 1 & b \\ \hline \end{array}$	**.72**
G → S		$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = k\,u_1 + m\,u_2 ; k \in R, m \in R$ $u_4 = n\,u_1 + 0\,u_2 ; n \in R$	**.05**
S → G	$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = 0\,u_1 + k\,u_2 ; k \in R$ $u_4 = a\,u_1 + b\,u_2 ; a \in R, b \in R$		**.40**

Figura 18. Una tarea de reconocimiento (Pavlopoulou, 1993)

Al enfrentar la conversión de representaciones no congruentes, los aprendices quedan atrapados en un conflicto entre el requerimiento del conocimiento matemático y la imposibilidad cognitiva:

- La conversión de representación requiere la *disociación* cognitiva del objeto representado y el contenido de la representación semiótica particular a través de la cual fue inicialmente introducida y utilizada en la enseñanza.
- Pero hay una *imposibilidad* cognitiva de *disociar* cualquier contenido de una representación semiótica y su objeto inicialmente representado, cuando el único acceso posible al objeto matemático es el semiótico.
- Ese conflicto conduce a la consideración de dos representaciones del mismo objeto como si fueran dos objetos matemáticos. La consecuencia es entonces la incapacidad de cambiar el registro y utilizar el conocimiento fuera de los contextos estrechos de aprendizaje. Los registros de las representaciones permanecen compartimentados, y solo es posible una comprensión fragmentaria y de registro único. ¿Bajo qué condiciones pueden los aprendices ser capaces de hacer tal disociación?

¿Cómo distinguir en cualquier contenido de una representación, cualquiera sea el registro usado, lo que es matemáticamente relevante y lo que no lo es?

Aquí, evidentemente, reside el asunto más crucial para el aprendizaje de las matemáticas. Tomemos el ejemplo elemental que hemos dado, relacionado con las funciones lineales (Figura 9). Observar su expresión algebraica junto con su gráfico, o saber cómo representar el gráfico a partir de la expresión algebraica, no es suficiente para reconocer la misma función a través de estos dos tipos de representación.

Se requiere una condición cognitiva más profunda: ser capaz de discernir cómo dos gráficos que visualmente son parecidos, son matemáticamente diferentes. Cuando se toman de a dos, contrastan visualmente en una o varias características. Cuando contrastan en dos (o más) características visuales, estas se funden como si fueran una sola. La distinción visual de los gráficos no es en manera alguna obvia, en particular cuando se ven muy similares en la forma y el contenido. De hecho, la capacidad de distinguir a lo que es relevante matemáticamente en cada uno, depende de la construcción implícita de una red cognitiva como en la Figura 19.

En esta red, cada característica visual corresponde a una categoría símbolo de la expresión algebraica $y = ax + b$. Por "categoría símbolo" se quiere significar una oposición cualitativa ($a>1$, $a<1$, $a=1$, o $a=+1$) y no solamente una variación numérica ($a=1{,}65$ o $a=2{,}3$). Una tal red se puede extender a todos los tipos de representación de funciones y a las representaciones de relaciones que no son funciones (Duval, 1993a, p. 46).

¿Cómo se puede ayudar a los estudiantes a darse cuenta de todas estas distinciones de representación dentro del mismo registro? Aquí debemos prestar atención a un hecho muy importante. Tenemos tantas representaciones visuales como queramos, pero no todas ellas son relevantes desde un punto de vista matemático. Más aún, no todas las variaciones en el valor numérico (aquí, de funciones lineales) son significativas para darse cuenta de esta red cognitiva.

Para hacer que los estudiantes noten las características visuales básicas de oposiciones que son matemáticamente relevantes y cognitivamente significativas, cualquier tarea de distinción de representación tiene que integrarse a una tarea de conversión. Es solo investigando variaciones de representación en el registro fuente y las variaciones de representación en el registro de llegada como los estudiantes pueden, al mismo tiempo, darse cuenta de lo que es relevante matemáticamente en una representación, lograr su conversión en otro registro y disociar el objeto representado del contenido de estas representaciones.

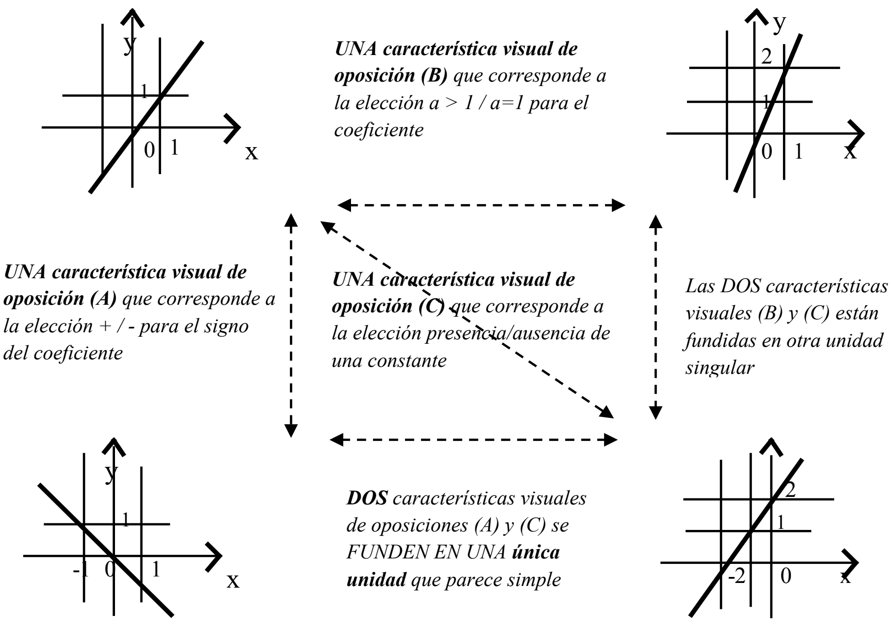


Figura 19. Primeras conexiones de una red cognitiva para la distinción de una representación gráfica

Hemos tomado un ejemplo muy elemental que es muy simple de analizar porque ahí la conversión ocurre entre dos registros monofuncionales, el no discursivo (gráficos) y el otro discursivo (escritura algebraica de relaciones). Pero el método de análisis utilizado en este ejemplo particular sirve para cualquier tipo de conversión (Figura 5), incluso para las más complejas cuando la distancia cognitiva se hace más grande, como entre un registro multifuncional (lengua materna, lenguaje natural) y registros monofuncionales (sistema simbólico). Y al menos en su modalidad implícita, este tipo de conversión se requiere continuamente en la enseñanza donde siempre tenemos una doble producción semiótica: discurso oral para dar explicaciones en el lenguaje común y escritura simbólica o diagramática para el tratamiento matemático (Duval, 2000b, pp. 152-155). Lo más sorprendente es que las representaciones auxiliares transicionales, incluso las más icónicas o concretas, ¡también requieran ser integradas con tareas sistemáticas de covariación si queremos que sean eficientes!

A partir del ejemplo podemos dar una ojeada a los procesos de pensamiento específicos que se requieren en matemáticas. Estos no solo usan sistemas de representación semiótica sino que también, y sobre todo, requieren coordinación cognitiva. Por una razón obvia, un acceso semiótico doble debe compensar la limitación cognitiva de la carencia de un acceso real doble. Esto quiere decir que la disociación entre contenido de una representación y objeto representado involucra necesariamente la coordinación entre diferentes registros de representación.

La comprensión matemática comienza cuando comienza la coordinación de registros. El reconocimiento de los mismos objetos matemáticos a través de representaciones provenientes de dos registros diferentes no es una operación local u ocasional, sino el resultado de una coordinación global de registro. Los procesos de pensamiento matemático dependen de una sinergia cognitiva de registros de representación. La coordinación de registros de representación semiótica proporciona algo así como una extensión de la capacidad mental. En esta perspectiva, parece ser una oposición engañosa la que se plantea, con frecuencia, entre la comprensión como algo conceptual o puramente mental y las representaciones semióticas como externas. De hecho, las representaciones mentales que son útiles o pertinentes en matemáticas siempre son representaciones semióticas interiorizadas.

Conclusión

Cuando analizamos la actividad matemática desde un punto de vista cognitivo, se deben tener en cuenta tres características específicas estrechamente conectadas:

1. Transcurre a través de una transformación de representaciones semióticas que involucra el uso de algún sistema semiótico.
2. Para llevar a cabo esta transformación, se pueden usar registros bien diferentes de representaciones semióticas.
3. Los objetos matemáticos nunca se deben confundir con las representaciones semióticas utilizadas, aun si no hay acceso a ellos, diferente del uso de una representación semiótica.

Por tanto, parece ser que los procesos de pensamiento en matemáticas se basan en dos tipos bien diferentes de transformaciones de representaciones. Incluso si un solo registro de representación es suficiente desde un punto de vista matemático, desde un punto de vista cognitivo, la actividad matemática involucra la movilización simultánea de por lo menos dos registros de representación, o la posibilidad de cambiar en cualquier momento de un registro al otro. En otras palabras, la comprensión conceptual en matemáticas incluye sinergia de dos registros y algunas veces sinergia de tres registros. Esa es la razón por la cual, lo que es matemáticamente simple y ocurre en la etapa inicial de la construcción de conocimiento matemático, puede ser cognitivamente complejo y requiere un desarrollo de una conciencia específica sobre esta coordinación de registros.

La distinción entre cuatro tipos de registros de representación destaca la variedad y la brecha cognitiva de la conversión de representación según el registro fuente y el registro de llegada. También hace posible definir algunas variables para analizar la complejidad cognitiva subyacente a toda actividad matemática, ya sea con un propósito de investigación o un propósito educativo. La distinción entre registro multifuncional y monofuncional muestra cómo, para todas las transformaciones que son tratamientos, la visualización y el lenguaje se pueden usar de maneras bien distintas a las usuales dentro de las otras áreas del conocimiento y de la vida cotidiana.

Las prácticas de estos registros que los estudiantes pueden tener fuera de las matemáticas parecen a menudo descartar la manera en que ellos deberían movilizarse en las matemáticas. Esto origina ambigüedad profunda en la enseñanza: por una parte, estos registros se evitan porque los estudiantes tienen gran dificultad de llevar a cabo procesos matemáticos allí y, por otra parte, se usan para dar "significado" a los procesos matemáticos que se realizan dentro de registros monofuncionales. En la enseñanza podemos observar prácticas bien opuestas de estos registros multifuncionales.

Es dentro del marco de un tal modelo cognitivo de procesos de pensamiento matemático donde podemos analizar en profundidad los obstáculos a la comprensión en matemáticas. Los tratamientos, principalmente dentro de los registros multifuncionales, y las conversiones son fuentes muy independientes de incomprensión. Pero la raíz de los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático reside en la especificidad matemática y la complejidad cognitiva de la conversión y del cambio de representación. No podemos analizar profundamente y comprender el problema de la comprensión en matemáticas para la mayoría de estudiantes si no comenzamos por separar los dos tipos de transformación de representaciones. Esto se hace rara vez, si es que se hace, ya sea porque la conversión se juzga como un tipo de tratamiento o porque se cree que depende de la comprensión conceptual, es decir, una actividad puramente "mental", asemiótica. Y siempre hay buenas razones para eso.

En primer lugar, desde un punto de vista matemático, la conversión se aísla con el propósito de elegir el registro en el que los tratamientos necesarios se pueden realizar de la manera más económica o más poderosa, o de proporcionar un segundo registro que sirva como apoyo o guía para los tratamientos que se realizan en otro registro. En otros términos, la conversión no juega un papel intrínseco en los procesos matemáticos de justificación o demostración. La razón es que estos se logran sobre la base de un tratamiento que se lleva a cabo dentro de un solo registro, principalmente uno discursivo y con mayor frecuencia algún registro monofuncional. De hecho, la conversión no se puede separar del tratamiento porque es la elección del tratamiento lo que hace pertinente la elección del registro.

En segundo lugar, la investigación en educación matemática casi siempre se enfoca en las maneras de enseñar contenidos y procedimientos conceptuales particulares para cada nivel del currículo. Lo que concierne a la actividad matemática se relega a un segundo plano o se explica bien sea mediante la comprensión conceptual (o no comprensión) o mediante un marco pedagógico común sobre la importancia de la actividad del estudiante y del papel de sus representaciones mentales para la comprensión. Esto conduce a eliminar la importancia de la diversidad de registros de representación y a actuar como si todas las representaciones del mismo objeto matemático tuvieran el mismo contenido o como si el contenido de uno se pudiera ver desde otro de manera transparente.

En otras palabras, se supone algún isomorfismo entre representaciones de dos sistemas semióticos diferentes o entre procesos realizados dentro de dos sistemas semióticos. Recuérdese que Piaget hizo de esta búsqueda de isomorfismos uno de sus principios clave de un análisis del desarrollo del conocimiento en los niños, aun cuando, posteriormente, se limitó a la búsqueda de "isomorfismos" parciales (Piaget, 1967a, pp. 73-74, 262-266), y del gran uso teórico que se hizo de ellos tanto en el análisis de la epistemología genética como en ciertos estudios didácticos. Pero, ¿el isomorfismo matemático incluye al isomorfismo cognitivo entre las representaciones semióticas utilizadas? Regresando a lo del segundo plano, las tres características específicas mencionadas antes confinan a la mayoría de los estudiantes a lo que se ha descrito como "compartimentación" del conocimiento matemático.

Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios registros de representación y es solo en las matemáticas donde se requiere fuertemente la coordinación de registros. ¿Realmente se tiene en cuenta este requerimiento básico? Muy a menudo, las investigaciones se enfocan en cuáles son las representaciones correctas o cuál sería el registro más accesible para lograr que los estudiantes comprendan verdaderamente y usen algún conocimiento matemático particular. Con esa clase de preocupación, la enseñanza no va más allá de un nivel superficial. ¿Qué harán los estudiantes cuando estén enfrentados a otras representaciones bien diferentes o a situaciones diferentes? Incluso las representaciones auxiliares e individuales, las más icónicas o concretas, tienen que ser articuladas con las representaciones semióticas producidas dentro de sistemas semióticos. El verdadero reto de la educación matemática consiste en desarrollar primero la capacidad de cambiar el registro de representación.

Referencias

Descartes, R. (1954). *The geometry of René Descartes* (trads. D.E. Smith y M.L. Lantham en 1925). New York: Dover.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 14*(4), 385-414.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Duval, R. (1993a). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1993b). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Maison (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (1996a). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (1996b). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. En A. Antibi (ed.), *Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM* (pp. 3-15). Toulouse: Université Paul Sabatier.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences*

Cognitives, *6*, 139-163.

Duval, R. (1998b). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999a). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (trad. M. Vega Restrepo). Cali: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (ed.) (1999b). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. Séminaire I.U.F.M., D.R.E.D., Villeneuve d'Ascq.

Duval, R. (2000a). Basic issues for research in mathematics education. En T. Nakahara y M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-69). Hiroshima: Nishiki Print Co. Ltd.

Duval, R. (2000b). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(2), 135-170.

Duval, R. (2003). Langage(s) et représentation(s) dans l'enseignement des mathématiques: deux pratiques et une troisième. En M. Kourkoulos, G. Toulis y C. Tzanakis (eds.), *Proceedings of 3rd Colloquium on the Didactics of Mathematics* (pp. 13-33). Rethymnon: University of Crete.

Frege, G. (1971). Sens et dénotation. En *Écrits logiques et philosophiques* (trad. al francés de Claude Imbert). París: Seuil. (Obra original publicada en alemán: *Sinn und Bedeutung* en 1892).

Hitt, F. (ed.) (2002). *Representations and mathematics visualization*. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter. México: Cinvestav-IPN.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8*, 255-271.

Mesquita, A.M. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Tesis de doctorado. Estrasburgo: IREM.

Pavlopoulou. K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 67-93.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers, II, Elements of Logic*. Hartshorne y P. Weiss (eds.). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Piaget, J. (1923). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1926). *La représentation du monde chez l'enfant*. París: Alcan.

Piaget, J. (1967a). *Biologie et connaissance*. París: Gallimard.

Piaget, J. (1967b). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Pluvinage, F. (1990). Didactique de la résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *3*, 7-34.

Rommevaux, M.P. (1998). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. *6*, 27-65.

Saussure, F. de (1973). *Cours de linguistique générale*. París: Payot. (Obra original publicada póstumamente por C. Bally y A. Sechehaye en 1916, sobre los cursos de 1906 a 1911).

Schoenfeld, A.H. (1986). On having and using geometric knowledge. En J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

EL FUNCIONAMIENTO COGNITIVO Y LA COMPRENSIÓN DE LOS PROCESOS MATEMÁTICOS DE LA PRUEBA

Raymond Duval

La prueba[10] constituye un umbral crucial en el aprendizaje de las matemáticas. ¿Por qué hay tantos estudiantes que no tienen éxito en atravesarlo verdaderamente? Aunque probar no se puede reducir a razonar, este grave problema didáctico tiene que ver con la variedad de enfoques de lo que comúnmente se designa por "razonamiento", en particular cuando el razonamiento se requiere en el marco de una actividad científica o matemática. Poco a poco han surgido tres grandes tendencias en la investigación sobre el desarrollo del razonamiento del estudiante.

- La corriente psicológica en la que los modelos de razonamiento son formas lógicas de razonamiento válido, como los silogismos aristotélicos o la implicación material con el uso de conectores para las funciones de verdad (Piaget e Inhelder, 1955; Johnson-Laird, 1983; Rips, 1988).
- La tendencia didáctica en la que los modelos de razonamiento son los que se usan para investigar-explicar, principalmente en situaciones geométricas que requieren una interacción entre la exploración visual de figuras y la aplicación de unos pocos teoremas y definiciones que se deben usar como "herramientas" de "justificación". La meta es determinar la verdad de un enunciado propuesto inicialmente como conjetura y convencer a otros. En esta corriente se presta considerable atención a los sucesivos intentos y explicaciones de los estudiantes y, por tanto, a sus producciones discursivas (Lakatos, 1976; Balacheff, 1987).
- La corriente de la Inteligencia Artificial en la que los modelos de razonamiento son reglas de condición-acción que funcionan como "máquinas de inferencia". Esta tendencia se debe subdividir en un modelo cognitivo de la prueba para diseñar tutores computarizados (Anderson, Boyle, Farell y Reiser, 1987), y la construcción de micromundos para las interacciones dialécticas con los estudiantes (Luengo, 1997).

Lo que es común a estos diferentes enfoques es que parten de algunas características externas del razonamiento –ya sean lógicas o matemáticas– y las toman como referencias para modelar la actividad de razonar. En consecuencia, se olvida por completo la comprensión real de cómo funciona esta actividad, y en qué puede ser diferente del razonamiento espontáneo en la vida cotidiana o en áreas diferentes a las matemáticas. El funcionamiento cognitivo del razonamiento no es la imagen o la reproducción de patrones matemáticos o

10 He traducido los términos "proof" y "proving" como "prueba" y "probar", respectivamente, y no como "demostración" y "demostrar", para poder usar estos últimos cuando el autor se refiere a la deducción a partir de axiomas. [N. T.]

lógicos. Por ello, Schoenfeld, después de realizar en 1984 un experimento de aula durante un semestre, señaló con acierto: "quizá lo que se necesita, y lo que ha estado faltando, es una comprensión de cómo funciona realmente la prueba" (Schoenfeld, 1986, p. 253).

Tal comprensión se basa en la percepción del significado de las proposiciones en cualquier prueba: la dificultad de esta percepción se debe a la multidimensionalidad del significado de las proposiciones. Los estudiantes se deben percatar de los diferentes componentes del significado de las proposiciones. Y esta multidimensionalidad está conectada estrechamente con las diferentes maneras de organizar las proposiciones en un discurso que puede ser una argumentación ordinaria o una prueba o un razonamiento formal, aunque la redacción sea algunas veces similar. Por eso se requiere una suerte de doble conciencia, que haga posible que los estudiantes comprendan "cómo funciona en realidad la prueba" y se convenzan verdaderamente con las pruebas. En este capítulo expondremos las características principales del funcionamiento cognitivo del acto de razonar. Luego examinaremos las consecuencias para el problema didáctico de aprender a probar. Por último, abordaremos las variables que deben usarse para generar la doble conciencia.

Visión panorámica de la complejidad cognitiva del funcionamiento del razonamiento

Para analizar la complejidad cognitiva de la actividad de razonar matemáticamente, primero se requiere hacer unas distinciones. Algunas son bien conocidas, como por ejemplo la distinción del estatus operativo de una proposición en la deducción (hipótesis, teorema, etc.), pero las principales, que se pueden ver como innecesarias, tal como la distinción entre valor de verdad y valor epistémico, han salido a la superficie al observar a estudiantes durante experimentos de enseñanza de la prueba. Las explicaciones de los estudiantes, el cambio repentino de sus producciones textuales, mostraron que la brecha que tienen que atravesar consiste en percatarse de la complejidad implícita del significado de una proposición dentro de las diferentes organizaciones posibles de proposiciones, subyacentes a los varios tipos de razonamiento (Duval, 1991, pp. 247-253).

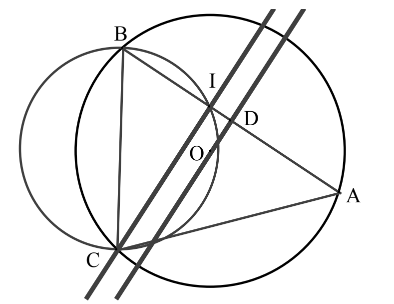
Características del razonamiento: un espacio de significado para la organización discursiva de proposiciones

En cualquier acto de razonar, implícita o explícitamente se trabaja con proposiciones, es decir, con enunciados que tienen un valor por sí mismos y un estatus en relación con otras proposiciones. El valor y el estatus son componentes específicos del significado de cualquier proposición.

Componentes internos del significado de una proposición

Ante todo, el significado de cualquier proposición es más complejo que el significado de cualquier palabra. El significado de una proposición está determinado con respecto a varias dimensiones: una dimensión semántica a través de su contenido, una dimensión de conocimiento a través de su valor epistémico (obvio, probable, absurdo, irreal, posible, necesario, etc.) y una dimensión lógica a través de su valor de verdad (verdadero, falso, indecidible, etc.). El valor epistémico está conectado estrechamente a la manera en que alguien comprende el contenido de una proposición: depende de la base de conocimiento del sujeto.

Por ejemplo, la manera de comprender puede ser “teórica”, es decir, tiene un trasfondo de definiciones, teoremas y práctica deductiva, si el sujeto es un matemático experto, o puede ser solo “semántica”, es decir, refleja una comprensión del lenguaje ordinario, si el sujeto es un aprendiz joven. Así, una proposición cuyo contenido se enfoque en propiedades matemáticas que se pueden ver de manera inmediata en una figura (paralelismo, perpendicularidad, etc.) puede tener valores epistémicos bien diferentes: puede ser visualmente obvia para un estudiante pero solo posible o, quizá, imposible desde un punto de vista matemático. Una propiedad matemática incluye la necesidad de su enunciado. ¿Cómo percatarse de tal necesidad y cómo hacer para que los estudiantes se percaten de ella?



En una circunferencia de centro O, marque tres puntos A, B, C. La circunferencia de diámetro [BC] interseca a (AB) en I. Sea D el punto medio de [AB]. Pruebe que las rectas (OD) y (CI) son paralelas.

Figura 1. Problema propuesto a estudiantes de entre trece y catorce años

El contenido de la proposición “las rectas (OD) y (CI) son paralelas” se puede verificar en la figura. Comprender lo que significa esta proposición es solo un asunto de ver algo obvio. ¿Qué más podemos querer para saber que es verdadera?

La distinción entre valor epistémico y valor de verdad es importante. Nos permite explicar lo que se logra al razonar. El resultado de cualquier acto de razonar no solo es producir nueva información sino también, y sobre todo, cambiar el valor epistémico de una proposición cuya verdad queremos probar o con respecto a la cual queremos convencer a alguien más. Si la verdad de una proposición parece posible, el acto de razonar muestra que la proposición es necesaria o, por el contrario, imposible; si se cree que una proposición es absurda, el acto de razonar hace que su declaración sea probable o necesaria, y así sucesivamente. El punto clave para probar y para comprender cómo funciona una prueba en matemáticas es la conexión entre los varios valores epistémicos y el valor lógico "verdadero". Aquí debemos tener en cuenta dos características específicas.

La primera es epistemológica. Si bien en otros campos como la botánica, la historia, etc., el valor lógico "verdadero" puede estar conectado con diferentes valores epistémicos en relación con los datos provenientes de la percepción o de algunos dispositivos técnicos o de testimonios, ¡en matemáticas la única conexión acordada es la que hay entre el valor lógico "verdadero" y el valor epistemológico "necesario"! La segunda es cognitiva. Si bien usualmente los valores epistémicos están asociados de manera directa a la comprensión del contenido de la proposición, en matemáticas es muy diferente: los valores epistémicos dependen del estatus de las proposiciones y no, ante todo, de su contenido. Eso significa que no podemos cambiar un valor epistémico espontáneo de una proposición por el valor "necesario" por medio del razonamiento si no hay una comprensión del estatus como uno de los componentes del significado de la proposición.

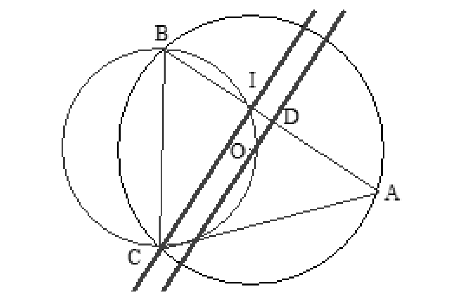
Estatus de las proposiciones y diferencias funcionales entre ellas en un desarrollo discursivo (razonamiento, argumentación, prueba, etc.)

Por lo anterior, el acto de razonar se puede describir como dar pasos de unas proposiciones a otras, como "conectar de manera lógica" proposiciones, como presentar proposiciones para justificar una afirmación, etc. Para entender la actividad de razonar, tenemos que percibir las diferencias funcionales de las varias proposiciones que se movilizan en ella. No hay razonamiento sin una organización discursiva regulada por diferencias funcionales entre las proposiciones que lo constituyen. Llamaremos "estatus" a la función específica, al papel particular de cada proposición dentro del conjunto de las otras proposiciones que son requeridas o declaradas para obtener una prueba o para producir una argumentación. Por ejemplo, los términos "hipótesis", "premisa", "conclusión", "afirmación", "argumento", etc., hacen referencia al posible estatus de una proposición en un razonamiento.

El estatus es el tercer componente del significado de una proposición con respecto a la organización discursiva de proposiciones (Figura 4). Por tanto, debemos distinguir el estatus que es intrínseco a cualquier organización del razonamiento (premisa, hipótesis, conclusión, etc.) del que es intrínseco a una estructura teórica (axioma, definición, teorema, conjetura, principio, regla, etc.). Denominamos al primero, estatus "operativo", y al segundo, estatus "teórico".

El estatus operativo hace referencia al nivel de una prueba local, es decir, a una organización de proposiciones. El estatus teórico hace referencia a un nivel más alto de organización, como una conexión axiomática de pruebas locales, como la del primer libro de Euclides o la del *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert. Por supuesto, hay interacciones entre estos dos niveles. Pero quien no comprende cómo funciona una prueba local, no puede comprender por qué una prueba prueba, de la misma manera que alguien que no puede comprender una página o un episodio de un libro no puede comprender todo el libro (Duval, 2001). En el aula, los estudiantes fueron entrenados para escribir pruebas en las que ellos mismos explicitaban el estatus de cada proposición mediante el uso de tres términos: hipótesis, propiedad, conclusión (Figura 2).

El verdadero problema para la enseñanza es que sigue faltando la distinción entre los diferentes estatus operativos de las proposiciones, aun cuando ya no haya confusión superficial o circularidad en las expresiones. Muchos estudiantes, sin cometer errores evidentes, no captan exactamente cómo operan en una prueba las diferencias funcionales entre las proposiciones de un discurso o de una "explicación". No ven por qué y cómo el estatus operativo, y no solo el estatus teórico (definiciones, teoremas), son herramientas para desarrollar el razonamiento de una manera bien diferente a la de la argumentación en el lenguaje natural. Se ha observado la misma incomprensión en estudiantes de entre quince y dieciséis años.



Hipótesis: (OD) es perpendicular a [AB]

Propiedad: Si una recta es perpendicular a un segmento en su punto medio, entonces es la mediatriz de este segmento

Conclusión: (OD) es perpendicular a [AB]

Figura 2. Producción de un estudiante de trece años

Funcionamiento cognitivo específico de una prueba matemática

Hay diferentes maneras de pasar de una o varias proposiciones a otra. Pero no todas ellas permiten la construcción de una prueba legítima. Una prueba requiere un razonamiento válido. Eso quiere decir que la conclusión de cada paso debe ser necesaria y entre dos pasos no debe haber baches. Es este tipo de razonamiento, a menudo denominado "deductivo", es el que se usa en cualquier prueba en geometría. De manera que, a partir de las distinciones previas, debemos hacer dos preguntas: el razonamiento válido, ¿qué tipo de organización de proposiciones requiere? y tal organización, ¿qué componente del significado de las proposiciones trae a primer plano?

Cualquier razonamiento deductivo involucra dos niveles bien diferentes de organización discursiva: el nivel de organización de varias proposiciones en un paso de deducción y el nivel de organización de varios pasos en una prueba.

En el nivel de un paso de deducción, cada proposición toma una de las siguientes tres categorías del estatus operativo: premisa, conclusión, tercer enunciado. Con frecuencia, los profesores solían decir "propiedad" en vez de "tercer enunciado". Pero ese es un término engañoso porque lo que se denomina "propiedad" es en realidad un teorema, es decir, un enunciado que tiene la organización bipartita de cualquier regla *si…entonces*: una o varias condiciones por verificar y siempre que se cumplan se debe realizar una acción o se debe presentar una proposición.

Por consiguiente, al contrario de la mayoría de modelos psicológicos (Johnson-Laird, 1983; Rips, 1988), un paso de deducción opera en forma diferente a los silogismos clásicos o a las explicaciones en el habla ordinaria con el trasfondo de redes semánticas. Y esta asimilación frecuente corresponde a uno de los puntos oscuros para muchos estudiantes. Para ellos, usar un teorema significa solamente referirse a un simple argumento, no consiste en usar un enunciado partido en dos para verificar las premisas requeridas y afirmar la conclusión (Bourreau-Billerait, Dewitte y Lion, 1998, p. 13, 25). La falta de distinción entre un teorema y su recíproco es un síntoma de este punto oscuro (Duval, 1991, pp. 237-239).

Esta manera operativa de usar teoremas, definiciones o axiomas involucra una consecuencia semántica crucial. Las conexiones entre las proposiciones dentro de cualquier paso dependen solamente de su estatus operativo, lo que significa que no se requieren los conectores (si…entonces, por tanto, etc.) entre premisa y conclusión. Cuando se usan los conectores, son solo claves lingüísticas del estatus operativo, que está previamente determinado por el estatus teórico.

En el nivel de organización de pasos, los pasos están conectados por proposiciones que se superponen: algunas conclusiones del último paso se toman como premisas para el nuevo paso. A esto se debe que no haya brecha entre dos pasos. En este nivel, el uso de los conectores no es relevante. Esta manera específica de hacer conexiones produce una expansión discursiva en forma de árbol y no una organización secuencial lineal.

Podemos visualizar la articulación de estos dos niveles bien diferentes de organización deductiva, con sus tipos específicos de conexiones, mediante el gráfico proposicional que se presenta en la Figura 3.

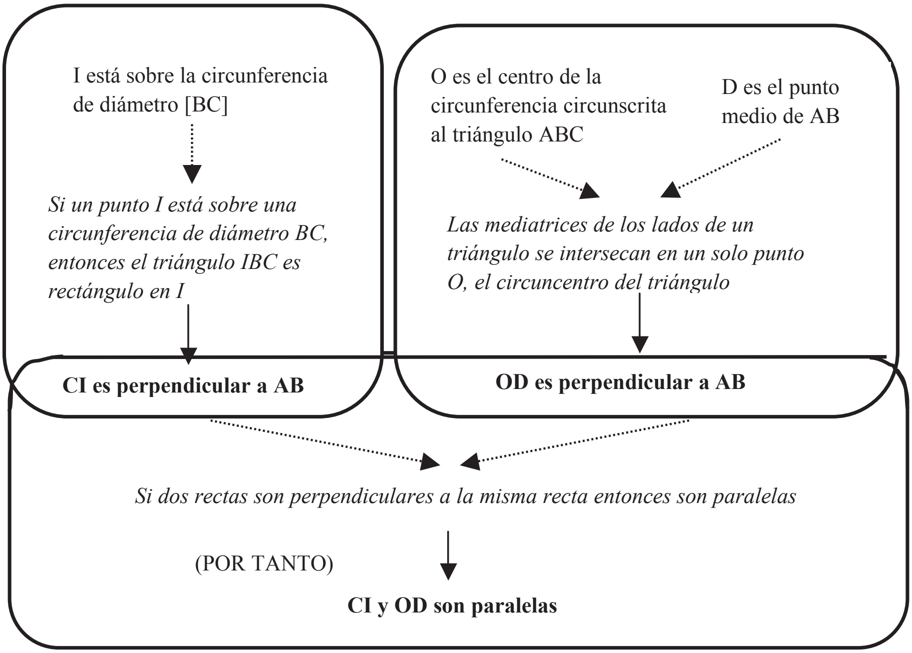


Figura 3. Los dos niveles de organización deductiva en cualquier razonamiento válido

Una verdadera comprensión de la prueba matemática requiere el entendimiento de la manera operativa de usar los teoremas dentro de cada paso (los estilos de letra, plana, cursiva y negrilla de la Figura 3 corresponden a las tres categorías de estatus operativo), y el entendimiento de la conexión de pasos mediante la superposición. La construcción de una prueba incluye enfocarse de manera continua en los dos niveles, yendo de abajo hacia arriba y viceversa, lo que obviamente presupone una conciencia previa de la organización particular de los niveles.

Sin embargo, desde un punto de vista epistemológico, con frecuencia se consideran las pruebas desde un tercer nivel: el nivel teórico. Este nivel involucra un cambio de escala: se pasa de la deducción local de una proposición a la deducción global dentro de un conjunto de proposiciones. Así, por ejemplo, saltamos de la comprensión de la prueba de cualquier proposición en los *Elementos* de Euclides a la evaluación de la derivación deductiva, sin brechas o apoyos externos, de todas las proposiciones del primer libro de los *Elementos*. En esta escala podemos encontrar alguna brecha en la cadena de las pruebas locales. Pero este tercer nivel está más allá de las capacidades de los aprendices, porque requiere, al mismo tiempo, que ya hayan comprendido cómo fluye una organización deductiva de proposiciones y que puedan tener en cuenta un conjunto de pruebas locales. Este requerimiento epistemológico se tropieza con el problema didáctico clásicamente conocido como "círculo hermenéutico".

Cambiar el foco dentro del espacio del significado

Comprender este funcionamiento específico de una prueba matemática requiere un cambio de foco en el componente predominante del significado de una proposición. Según el tipo de discurso (conversación ordinaria o debate, descripción, explicación, argumento o deducción válida, etc.), para los distintos componentes del significado de una proposición no son las mismas características las que se tienen en cuenta. Por ejemplo, los valores epistémicos no interesan en una descripción o una explicación, pero están en primer plano cuando se trata de cualquier tipo de razonamiento. Y entre el argumento y la deducción válida, la diferencia está en el papel que se asigna al estatus.

Así, en cualquier debate podemos obtener un argumento convincente sin probar, es decir, sin estar obligados a aseverar proposición alguna, sin que sea necesario hacerlo. Para que tal necesidad exista, el estatus debe predominar, pues así las diferencias funcionales entre proposiciones con respecto a su estatus en la organización de un paso de deducción se convierten en el proceso operante, como ya lo hemos señalado. Por lo general, siempre que cambiamos el tipo de discurso, cambiamos tanto la dimensión predominante del significado en cada proposición como la manera en que se organizan las proposiciones dentro de un proceso de pensamiento intencionado.

En el habla ordinaria y las interacciones sociales, las únicas características del significado que se activan para cualquier proposición expresada son su contenido (informativo) y su valor pragmático de comunicación. De otra parte, en el razonamiento, los valores epistémicos llegan a ser las características predominantes del significado, porque el razonamiento juega con las diferencias de los valores epistémicos de las proposiciones. Y surge entonces la pregunta: ¿de dónde provienen los diferentes valores epistémicos? ¿Del contenido? ¿De los valores lógicos? ¿Del estatus? Las maneras cognitivas de funcionar para razonar son tantas como los componentes y las características en el espacio de significados de una proposición. Por tanto, podemos describir fácilmente la brecha entre el razonamiento como argumento y el razonamiento como deducción válida.

En la organización deductiva, el componente del significado que predomina es el estatus de las proposiciones y no su contenido. El estatus operativo de cada proposición está fijado por su estatus teórico y, por tanto, su valor epistémico se hace dependiente de su valor teórico y no de su contenido. Es casi lo opuesto de lo que ocurre en una argumentación o en una explicación en el habla ordinaria.

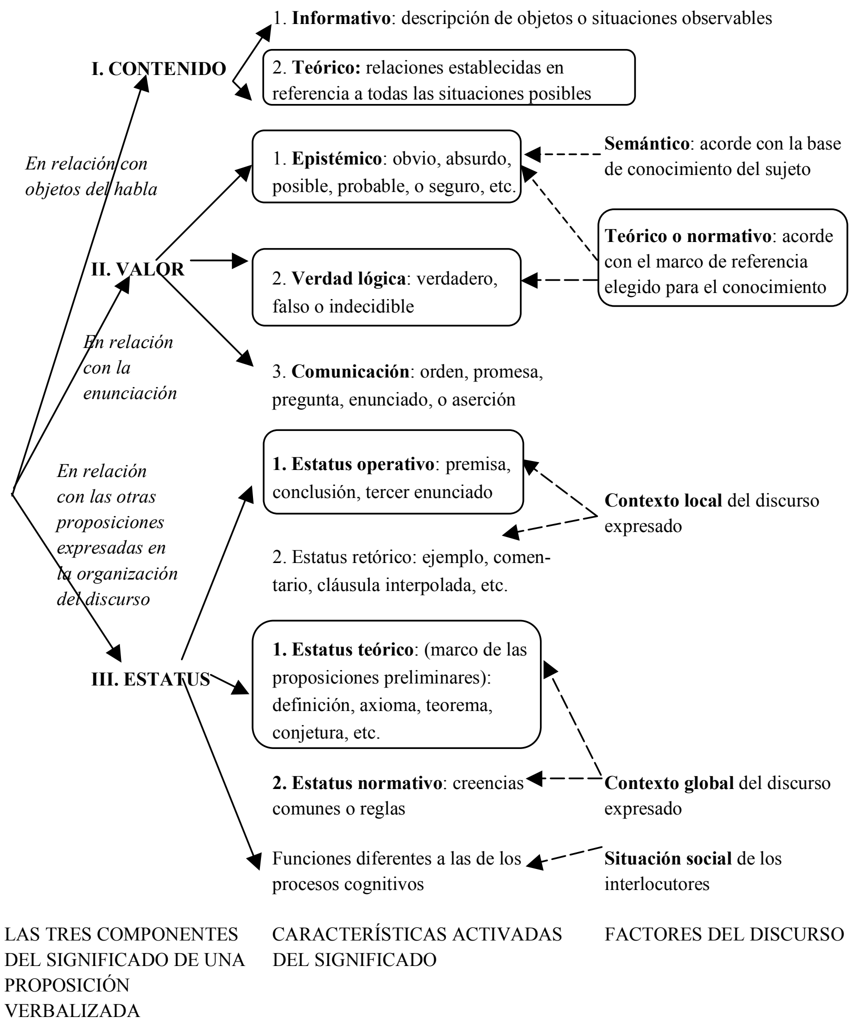


Figura 4 . Posibles variaciones dentro de un espacio de significado de una proposición

A diferencia del habla ordinaria, el razonamiento moviliza los tres componentes posibles del significado de cada proposición, pero están combinados de maneras bien específicas para el argumento y para la prueba matemática. El argumento no fluye como una deducción válida porque el contenido se impone sobre los otros componentes, como lo hace en el habla ordinaria. En un argumento o en el habla ordinaria, la 'garantía' no opera como lo hace cualquier tercer enunciado matemático. No se requiere operación específica alguna para verificar primero si se dan las diferentes cláusulas de la parte del SI de un teorema para luego desprender la parte del ENTONCES como conclusión.

Una inclusión semántica o una asociación verbal es suficiente para "obtener una conclusión o hacer una afirmación" (Toulmin, 1958, p. 98). Más aún, "las condiciones de excepción o refutación" también son posibles y se incluyen en el paso para obtener la conclusión (p. 101). De hecho, en el modelo de Toulmin para el uso de argumentos no se hace distinción entre dos niveles de organización de la deducción. Entre todas las características del significado, solo las que están dentro de rectángulos redondeados en la Figura 4 son relevantes para cualquier razonamiento. La Figura 5 muestra los papeles contrastantes que aquellas características juegan en un argumento y en una prueba matemática. Por tanto, podemos ver por qué el proceso cognitivo subyacente a la comprensión del razonamiento válido que se requiere en la prueba matemática no es principalmente un asunto de lógica o de lenguaje formal, como se supone en algunos modelos mentales o en algunas investigaciones de corte cognitivista.

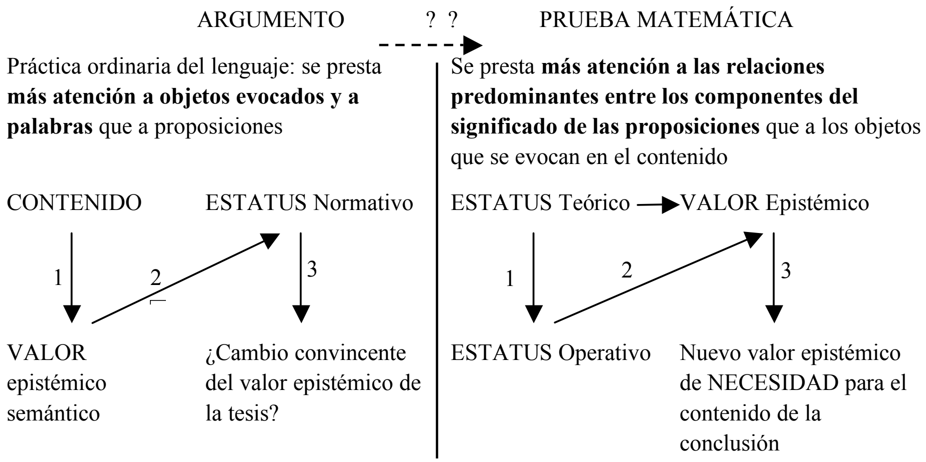


Figura 5. Se requiere cambiar el foco sobre los componentes del significado para comprender el razonamiento deductivo

Esto plantea inmediatamente el problema crucial desde un punto de vista cognitivo y, por tanto, para la enseñanza: ¿el paso de una manera de operar a la otra ocurre naturalmente? ¿Es fácil para los estudiantes darse cuenta de ello o se requiere un enfoque específico para el aprendizaje (Duval, 1993b)? Con mucha frecuencia los profesores creen que este paso es fácil porque sienten que la dificultad principal consiste en descubrir qué "propiedades" usar, o tener las ideas correctas (las imágenes sugerentes) para proporcionar una prueba. Y creen que luego solo es necesario explicar o escribir en tan pocas palabras como sea posible. Pero en realidad las cosas pasan de manera distinta.

Razonamiento y lenguaje: dos tipos de variación

Este es el tema más controversial en la educación matemática. Tenemos dos afirmaciones opuestas: "las matemáticas son independientes de todo lenguaje", "las matemáticas necesitan intrínsecamente algún dispositivo simbólico o representacional para procesar objetos (cálculo, visualización, razonamiento, etc.) y no solo para la comunicación". Para apoyar la primera afirmación, se hace referencia a la introspección matemática o a la teoría conceptual piagetiana; para la segunda afirmación, se destacan las dificultades que la mayoría de los estudiantes encuentran sistemáticamente con la variedad de dispositivos representacionales y simbólicos usados en matemáticas. Este debate subyace a las elecciones hechas en la enseñanza de la prueba matemática.

Por ejemplo, si se cree que las matemáticas son independientes de todo lenguaje, se puede considerar que aprender a probar reside en resolver problemas. Entonces, la actividad básica es la heurística: después de encontrar una respuesta, nada importante queda por hacer, solo comunicar la respuesta. Pero si se tiene en cuenta que el pensamiento matemático involucra, incluso en su representación mental, alguna actividad semiótica, se debe considerar que aprender a probar también requiere un trabajo específico para descubrir los cambios en el significado de la proposición y en la organización discursiva requerida para moverse de una argumentación estándar a una prueba (Figuras 3, 5).

De un modo u otro, no hay razonamiento válido sin lenguaje, porque solo las proposiciones pueden ser verdaderas y porque no hay proposición sin enunciado. Por tanto, el problema de la relación entre razonamiento y redacción explícita no se puede desconocer, especialmente en la educación matemática. ¿Cuáles son las interacciones entre el razonamiento como organización específica de proposiciones y la redacción, o expresión, como expresión explícita en un lenguaje particular? Dos tipos de variación caracterizan estas interacciones:

1. Para expresar en la lengua materna las proposiciones que conforman un paso

de deducción y para expresar el estatus de ellas se tienen muchos grados de libertad. En primer lugar, no es necesario que cada proposición de un paso se exprese explícitamente en una oración, o incluso en una cláusula. Muy a menudo, por razones de economía, se deja implícita alguna proposición, sea una premisa o un tercer enunciado. O todas las proposiciones de un paso se pueden expresar en una oración (Duval y Egret, 1993, pp. 127-129). Debemos expresar rápidamente para captar la organización de todo el paso y para no perdernos en los detalles de cada uno. También hay muchas maneras de expresar el estatus de cada proposición. Podemos usar conectores lógicos, actitudes proposicionales o incluso el mero orden de sucesión de las proposiciones. Estas claves lingüísticas también se usan en la argumentación ordinaria y en la explicación. Algunas veces el conector "si… entonces…" se usa para señalar las premisas y la conclusión. Pero este conector también expresa la relación de implicación, que es una organización intrínseca a una proposición y no a la organización del paso.

Así, estas variaciones libres pueden generar textos muy diferentes para la misma organización de la proposición y pueden ser una fuente de confusión para los aprendices. Y, aún más, es posible observar grandes variaciones de un profesor a otro. De ahí, este problema de comprensión: ¿cómo puede un aprendiz distinguir entre el razonamiento válido y el no válido si la expresión de ambos tiene una estructura superficial similar?

2. También se usan otros tipos de registros de representación para expresarse en matemáticas: lenguaje formal o simbólico, redes, configuraciones, etc. Desde un punto de vista técnico, los lenguajes formales y los símbolos algebraicos son más poderosos y rigurosos que la lengua materna, y en algunas áreas son esenciales. En estos registros, la prueba se realiza mediante cálculo y se pueden describir los métodos de prueba. Esa es la razón por la cual probar en estos registros más técnicos puede parecer menos complicado que el razonamiento deductivo en una lengua materna. Pero con frecuencia se ha notado que los estudiantes pierden el significado de los procesos y las operaciones que están realizando dentro de tales registros porque, para ellos, a menudo no hay coordinación entre estos diferentes registros de representación (Duval, 1995a; 1996a).

Es mediante la lengua materna como los aprendices se pueden percatar de lo que se requiere para una prueba matemática y lo que ella produce. Por una simple razón. ¡Razonar en lengua materna requiere tomar en cuenta el estatus y el valor epistémico de cada proposición al mismo tiempo! Solo así el razonamiento puede funcionar como un verdadero razonamiento para un sujeto, es decir, como un razonamiento convincente. En contraste con esto, en el cálculo lo importante es enfocarse en las reglas de uso y la sustitución para cada símbolo (variables, cuantificadores, operadores, relaciones, etc.). El estatus y el valor epistémico de las expresiones simbólicas no interesan. Desde un punto de vista cognitivo, esta es la diferencia profunda: el cálculo es más fácil que el razonamiento. Y esa es la razón por la que la afirmación de que el razonamiento es "nada más que procesos de cálculo" (Johnson-Laird, 1983, p. 12) es falsa desde un punto de vista cognitivo e inútil desde un punto de vista educativo.

¿Cómo se puede formular el problema de aprender a probar?

Los procesos cognitivos que ponen al estudiante en capacidad de comprender cómo funciona una prueba matemática y de probar dependen de una doble conciencia: una concierne a la distinción entre diferentes causas para el sentimiento de necesidad que puede ser experimentado y la otra concierne a la distinción entre diferentes procesos de organización en un desarrollo discursivo. Pero esta doble conciencia va en contra de dos prácticas comunes y familiares.

Percatarse de la discrepancia entre un razonamiento válido y uno no válido: un cambio en la práctica epistemológica común

Todos sabemos que el sentimiento de necesidad ha sido la línea principal de investigación de Piaget con respecto al desarrollo cognitivo del niño. Es un cambio en la sensibilidad a nuevos tipos de causas en la experiencia de necesidad del niño lo que indica las etapas de las operaciones concretas y formales. Pero también se sabe que el logro de la etapa de las operaciones formales es inducido por la actividad experimental espontánea (disociación o combinación de parámetros en la aplicación del principio del control de variables: hacer variar una variable mientras las demás se mantienen constantes; véase Piaget e Inhelder, 1955), y que eso está lejos de ser suficiente para comprender la prueba matemática. Y, puesto que la meta de la prueba no es solo lograr más información sino también cambiar el valor epistémico de la información declarada en una proposición, no podemos evitar la pregunta: ¿qué es lo que genera la necesidad de afirmar una proposición?

Esa pregunta no es un asunto de lógica, sino un asunto de las estructuras cognitivas del sujeto: ¿cuáles son las condiciones previas para la sensibilidad hacia lo que genera una prueba matemática? Para encontrar tales condiciones, debemos comenzar a partir de estos dos requerimientos:

1. solo un razonamiento válido puede producir la necesidad de la verbalización de una proposición;

2. en matemáticas, la verdad solo puede estar conectada a una derivación discursiva intrínseca de este valor epistémico.

Pero, y aquí está la dificultad, tenemos diferentes causas posibles que conducen a una persona a reconocer la necesidad de una verbalización, y por tanto diferentes tipos de significado de necesidad.

Tres experiencias bien diferentes que conducen a la conciencia de necesidad

La primera experiencia que conduce a la conciencia de la necesidad de alguna proposición es que su contenido corresponde a datos sensoriales, percibidos con o sin instrumentos. Ahí podemos verificar lo que se dice examinando lo que se puede percibir. Esa es la práctica epistemológica común. De esa manera, la mejor prueba común es la observación directa. "¡Mire, eso se ve en la figura!". No se necesita nada más. Para todo el mundo esta práctica es la más natural y es difícil comprender por qué no se puede usar en geometría como, por ejemplo, en botánica, geología, etc. Aquí, las raíces cognitivas de la necesidad son extrínsecas y no intrínsecas al razonamiento. Aquí, las raíces de la necesidad y la convicción están en la experiencia, y el razonamiento debe funcionar como una descripción precisa de las relaciones observadas. Es lo que Leibniz denominó la "necesidad física" como opuesta a la "necesidad lógica o geométrica" (Leibniz, 1969/1710, p. 51; Piaget, 1967b, p. 60, 188).

La segunda experiencia que conduce a la afirmación de la necesidad de alguna proposición reside en el hecho de que otros están de acuerdo en que es verdad. Esta causa puede ser suficientemente fuerte para cambiar el juicio individual en un grupo como lo han mostrado algunos experimentos: cada sujeto cambia su apreciación de la ilusión autocinética cuando se informa de la apreciación de los otros. Aquí las raíces del sentimiento de necesidad están en la regulación normativa de las interacciones entre los miembros de cualquier grupo: cada quien debe reducir divergencias y conflictos para mantener la cohesión del grupo o su propia integración individual. Lo que es así reconocido se convierte en una necesidad, en una necesidad consensual.

La tercera experiencia ocurre siempre que se ve que expresar una determinada proposición es la única conclusión posible de lo que se ha afirmado previamente, aunque vaya en contra de la evidencia perceptual o de un acuerdo general. Pero aquí la enseñanza puede descarriar a los estudiantes. Cuando los profesores hacen énfasis en la resolución de problemas, lo que se destaca es la búsqueda de teoremas apropiados para usar en la prueba. En este caso, el significado de necesidad puede estar atado al uso de tal o cual teorema para resolver un problema dado: en este problema, uno "debe" usar estos teoremas como herramientas. Aquí hay solo una "necesidad metodológica" porque podemos encontrar otras maneras matemáticas de resolver un problema: tal necesidad concierne solamente a lo que es pertinente para obtener la solución cuando se adopta algún marco teórico. No concierne a la manera en que un teorema conduce a expresar necesariamente una proposición como conclusión.

Aquí obtenemos una necesidad discursiva intrínseca: cualquiera sea el teorema empleado, de lo que ya se ha dicho y acordado, no hay elección distinta a expresar esta proposición. En vez de "necesidad lógica", preferimos denominarla "necesidad discursiva operante". Sobre una tal necesidad inmanente en el pensar es como se puede desarrollar o derivar una explicación teórica. Pero este tipo de necesidad puede permanecer oculta para los estudiantes, incluso cuando ellos citan los teoremas pertinentes, si nunca han tenido la oportunidad de comprometerse en una actividad específica para darse cuenta de ella.

Una clasificación funcional de las pruebas

En la primera investigación sistemática de la prueba matemática desde un punto de vista educativo, Nicolas Balacheff distinguió cuatro tipos de pruebas (1987, pp. 163-166; 1988, p. 55): empirismo ingenuo, experimento crucial, experimento genérico y experimento mental. Los dos primeros tipos corresponden a pruebas pragmáticas porque se enfocan en la observación: "funciona". Los dos últimos corresponden a pruebas intelectuales porque apuntan al "carácter necesario" de la afirmación. Entre las pruebas pragmáticas y las intelectuales hay un "rompimiento" (Balacheff, 1988, p. 55).

A la distinción entre cuatro tipos de pruebas se debe agregar una distinción entre dos tipos de explicación (Balacheff, 1987, pp. 147-148; 1988, pp. 28-30) atendiendo al hecho de que las pruebas intelectuales requieren "herramientas de lenguaje" y del control de posibles contradicciones. Por tanto, adoptamos la distinción entre "prueba" como "una explicación reconocida por una comunidad […] en relación con un sistema de validación común a los interlocutores" y "demostración" (*apodeixis*) como "una secuencia de enunciados organizados de acuerdo con reglas específicas".

Esta clasificación corresponde a los diferentes tipos de necesidad que cada quien puede experimentar. Si de esta clasificación excluimos el empirismo ingenuo porque está confinado a la obviedad de cualquier percepción inmediata, podemos notar que el "experimento crucial" descansa sobre la "necesidad física", "la prueba como una explicación reconocida" descansa sobre la "necesidad consensual", y la "demostración" descansa sobre la "necesidad discursiva operante". Esta clasificación es principalmente funcional y deja al margen los medios y el proceso de probar. Sin embargo, estos medios y procesos no solo dependen del tipo de prueba, sino que también cambian de acuerdo con el área de conocimiento.

En el marco de tal clasificación funcional, el punto es el paso cognitivo de un tipo de prueba al otro. En una vía piagetiana, se propone la hipótesis de una "jerarquía y línea directa" cognitiva entre los tipos de prueba (Balacheff, 1988, pp. 565-566). Pero el paso esperado del "experimento mental" a "demostración" (prueba matemática), o de interacción social a demostración, genera dificultades (Balacheff, 1987, p. 166; 1988, p. 451, 461). ¿Por qué?

Percatarse de lo que es específico en la organización válida y creativa de las proposiciones: un cambio en la práctica discursiva del habla

En cualquier debate, en cualquier discusión y, de manera más general, cuando quiera que las interacciones sociales sean orales, nunca argumentamos de la manera como se requiere en una prueba matemática. Las interacciones sociales orales fluyen siguiendo una organización de proposiciones muy diferente a la de una secuencia de enunciados acorde con reglas del razonamiento válido (Duval, 1993b; 2001).

Hemos destacado antes que el razonamiento deductivo reúne dos niveles de organización discursiva y, en particular, que la manera de funcionar es diferente para cada nivel. En el primer nivel, hay una inversión en la predominancia usual entre el contenido y el estatus de las proposiciones (Duval, 1993b, pp. 44-45). Pero es difícil darse cuenta de esta inversión porque ella incluye una sustitución implícita: ¡el valor epistémico teórico debe reprimir al valor semántico del que está cargado! Para un aprendiz, el uso correcto y significativo de cualquier teorema depende, en primer lugar, de la conciencia de esta inversión. De otra manera, los pasos se entienden como organizaciones binarias en las que no se requiere verificar las premisas para aplicar los teoremas. Por tanto, entre otros errores importantes, está el riesgo de producir argumentos circulares sin notarlos o de confundir un teorema y su recíproco (Figura 6).

En el segundo nivel, la conexión entre dos pasos se basa en volver a usar implícita o explícitamente proposiciones que ya se han sido expresado como conclusiones o como hipótesis dadas, pero con un cambio de estatus de un paso al siguiente, lo que hemos denominado "reciclar". En consecuencia, el razonamiento avanza de una conclusión a otra conclusión sin saltos. Se tiene entonces otro fracaso muy diferente: la prueba no es realmente una prueba porque hay un salto que no se ha notado.

	Funcionamiento del razonamiento válido	Tipos de malentendidos
I. Organizar PROPOSICIONES DENTRO DE UN PASO DEDUCTIVO teniendo en cuenta tres tipos de estatus.	(1) Cambiar el foco sobre lo que se considera el primer componente del significado de una proposición: ESTATUS EN LUGAR DE CONTENIDO. (2) Hacer funcionar el teorema: separar su parte "entonces". *Un teorema no es un argumento.*	DISFUNCIONAL: • Confundir hipótesis (dada) con conclusión. • Confundir un enunciado con su recíproco o su contrario. • No revisar las condiciones de aplicación de teoremas.
II. Organizar PASOS DEDUCTIVOS DENTRO DE UNA PRUEBA DE …	Traslapar pasos deductivos. Dos condiciones: (1) La conclusión de un paso debe ser la premisa de otro. Hipótesis y premisa no se refieren al mismo nivel. (2) Se usan todas las propiedades matemáticas pertinentes al problema.	• NO DISTINGUIR EL MECANISMO DE SUSTITUCIÓN • Avanzar dejando "BACHES" EN LA PRUEBA: No se perciben todas las condiciones del problema que se va a resolver.

Figura 6. Indicadores de incomprensión de la organización de la "demostración"

En la tabla que se presenta en la Figura 6, todo lo que concierne a las condiciones cognitivas de comprensión está en letra negrilla (columna de la derecha). Todos estos tipos de malentendidos están conectados con la organización específica de una prueba matemática y su manera de fluir.

En el nivel superficial del lenguaje natural, la deducción válida no se puede distinguir del argumento espontáneo. La organización deductiva de una prueba y su modo específico de funcionar no son visibles a través de la explicación en lenguaje natural. Por ejemplo, los dos niveles de organización deductiva están evidentemente confundidos en las expresiones superficiales de tipo lineal. Pero el modo espontáneo de redactar oscurece esto. Hay dos características de la manera espontánea de redactar. Primera, el hablante describe lo que ha visto o lo que ha hecho, explicitando solo lo que estaba planeando con respecto a su acción o a lo que observó. Y el hablante se guía por asociaciones, que con frecuencia están activadas y guiadas por redes semánticas.

En esta manera espontánea, el hablante se enfoca solamente en los resultados de sus operaciones, mientras que la prueba matemática requiere enfocarse sobre operaciones discursivas que el hablante está realizando. Estas operaciones discursivas no pueden ser confundidas con la redacción, aunque esto se hace a menudo en el campo de la educación matemática a través de oposiciones entre conceptos, o representaciones mentales, y lenguaje. Las operaciones discursivas son operaciones que no se dirigen hacia los objetos sino hacia las diferentes posibilidades de nombrar objetos, para afirmar proposiciones acerca de objetos y, principalmente, acerca del espacio multidimensional del significado abierto por las proposiciones. En esta forma espontánea de redactar, tener en cuenta el estatus de las proposiciones solo puede carecer de importancia.

Podemos ver, entonces, por qué redactar una explicación matemática no depende de los mismos procesos cognitivos y no corresponde a atajos similares en un matemático y en un joven aprendiz. Cuando quien redacta es un profesor o un matemático está presente la preocupación de hacer tan fluido como sea posible el enfoque de arriba a abajo y viceversa, teniendo en cuenta también el nivel teórico. En estas circunstancias, hay poca posibilidad de que un joven estudiante descubra qué es una producción discursiva intrínsecamente válida. Aunque se pida a los estudiantes que enuncien explícitamente el estatus de las proposiciones, nombrándolo (hipótesis, propiedad, etc.) o usando conectores, esto podría ser solamente una pantalla. La organización específica de un paso de deducción solo puede captarse a través de la articulación de las dos organizaciones diferentes de proposiciones.

En síntesis, fuera de las matemáticas, la única organización de proposiciones para un paso, que realmente se concibe, es una binaria y no una ternaria. Tenemos o bien un enunciado y su justificación como la presentación de algo que se puede exhibir, o bien la palabra correspondiente a una propiedad y su derivación natural como una inferencia semántica. Pero no hay distinción entre diferentes tipos de organización de proposiciones; esto es, entre diferentes tipos de estructuras para los procesos de razonar y de probar. Así que es sorprendente ver que los modelos mentales del pensamiento se refieran a los silogismos clásicos tomados como patrones de deducción (Johnson-Laird, 1983), mientras que estos silogismos tienen una organización binaria y trabajan como inferencias semánticas, sin teorema alguno u otro tercer enunciado (Duval, 1995a, pp. 238-241, 251-255).

El punto clave: un cambio total del componente que predomina en el significado de las proposiciones

Hemos destacado previamente que el tipo de organización del discurso depende del componente predominante y de las características de los significados de las proposiciones expresadas en el discurso. Ser capaz de distinguir entre una prueba matemática y un argumento, que tienen redacciones similares o las mismas marcas verbales (conectores gramaticales y lógicos), incluye cambiar de foco con respecto a lo que se considera como el primer componente de los significados de las proposiciones: su estatus en lugar de su contenido. Percatarse de este cambio es la condición para comprender cómo fluye una prueba matemática y qué cambios aporta al conocimiento.

Ahora podemos recordar que los diferentes tipos de pruebas se pueden clasificar de acuerdo con las varias experiencias de necesidad en las que están basadas. Debemos agregar que tales experiencias requieren medios y procesos específicos y no se pueden disociar de ellos. En otras palabras, el salto desde una experiencia de necesidad física y/o desde una experiencia de necesidad consensual, a una experiencia de “necesidad lógica o geométrica”, es un cambio en el tipo de prueba. Este cambio involucra un rompimiento estructural en el modo de razonar debido a que la “necesidad lógica o geométrica”, que es de hecho una necesidad discursiva operante, se puede experimentar solamente en la comprensión de una deducción válida. Para darse cuenta de que un razonamiento válido produce la necesidad de la expresión de proposiciones como conclusión, se requiere un cambio en el foco de atención, pero tal cambio va en contra de la práctica epistemológica común: la necesidad de afirmar alguna proposición no puede provenir de la experiencia como es usual sino de una producción discursiva intrínsecamente válida, que no es lo que ocurre en otros campos del conocimiento.

Todo este análisis da lugar a un asunto educativo de carácter crucial: ¿cuál es la implicación de este cambio estructural para la introducción de la prueba en el currículo y en la enseñanza de las matemáticas? Tenemos alternativas muy opuestas. N. Balacheff enfatizó la importancia de que los profesores mismos se encarguen de todo lo relacionado con el estatus de las proposiciones verbalizadas durante un debate (Balacheff, 1988 p. 450, 462, 531). En la misma tónica, Anderson, Boyle, Farell y Reiser (1987) propusieron un tutor geométrico en el que los estudiantes no necesitaran tomar en cuenta el estatus de las proposiciones, y donde la construcción de una prueba gráfica se enfocara principalmente en "submetas" (Anderson, Boyle, Farell y Reiser, 1987, pp. 113-117). De esta manera, los estudiantes no se pueden enfrentar con la posibilidad de malentendidos disfuncionales (véase Figura 6). En la alternativa opuesta, hacer a los estudiantes conscientes del papel decisivo del estatus se convierte en un objetivo de incuestionable importancia para la enseñanza. De ahí que Luengo (1997) haya integrado esto al intercambio entre los estudiantes y el tutor Cabri-Géomètre.

La distinción entre los diferentes tipos de prueba da lugar al asunto educativo del paso cognitivo de un tipo de prueba a otro, y principalmente de un argumento dentro de una interacción social a una prueba matemática. Es un cambio profundo en el tipo de prueba, porque la prueba matemática requiere la experiencia de un tipo muy diferente de necesidad. Tal experiencia no puede tener lugar o descubrirse dentro de interacciones orales. Y es inútil pedir que se escriba acerca de lo que se ha explicado en cualquier debate, para hacer explícito el estatus de las proposiciones expresadas (Figura 2). Ahora podemos formular el problema del aprendizaje de la prueba: ¿Qué factores se deben poner en juego para lograr que los estudiantes experimenten un cambio tanto en su práctica discursiva del habla como en su práctica epistemológica común y, por tanto, hacer que logren la doble conciencia? Es decir, esta doble conciencia que es la fuente intrínseca de convicción y la guía heurística efectiva. Los factores deben depender de la arquitectura cognitiva del sujeto y se deben corresponder con las condiciones básicas para el aprendizaje de las matemáticas.

¿Cómo inducir a los estudiantes en el funcionamiento cognitivo del razonamiento deductivo?

Esta manera de formular los requisitos para aprender a probar nos aleja de las concepciones clásicas sobre este tema. Así, para aprender a probar, muchos profesores creen que es necesario y suficiente aprender varios métodos de prueba (*reductio ad absurdum*, división de casos posibles, etc.) o varios modos matemáticos de probar una proposición (geométrica, vectorial, analítica, etc.). Y si esto no es suficiente del todo, ellos creen que es lo que más importa. No discutimos eso. Pero necesita la adquisición de varias habilidades. Por ejemplo, producir diferentes pruebas matemáticas de una proposición requiere distintos marcos matemáticos de referencia y cambiar el marco, con mucha frecuencia, involucra un cambio de registro de representación.

Pero aquí nos enfrentamos a una dificultad bien conocida: los diferentes registros de representación permanecen, para muchos estudiantes, aislados entre sí. Además, esto no resuelve el problema básico inicial de distinguir un razonamiento deductivo válido de uno que no lo es, principalmente en la lengua materna. Otra concepción clásica hace énfasis en la actividad de investigar sobre problemas estimulantes. Aquí, puede ser difícil distinguir entre las maneras de producir una conjetura y las de probarla o refutarla. Estas concepciones clásicas, que se niegan a alejarse siquiera un poco de los procesos matemáticos, subyacen a los problemas reales de aprender a probar.

La necesidad de un rodeo para respetar las dos condiciones básicas para aprender matemáticas: la diferenciación y la coordinación entre registros de representación semiótica

Al examinar de cerca el aprendizaje de las matemáticas por parte de estudiantes de entre diez y dieciséis años, siempre hay un hecho apremiante: muchos estudiantes no piensan para realizar o no comprenden cómo realizar las diferentes acciones requeridas para resolver un problema, o para aplicar algún conocimiento adquirido, ¡aunque las tareas asignadas puedan parecer sencillas, obvias, naturales para los profesores y los matemáticos! Lo que parece sencillo o natural en la realización de cualquier actividad matemática involucra de hecho diferenciación y coordinación implícitas y complejas de registros de representación semiótica en un modo que por lo general no se requiere en otros campos de actividad mental (Duval, 1996a).

El aprendizaje de las matemáticas tiene lugar a través de la construcción de una arquitectura cognitiva del sujeto, arquitectura que nunca o con muy poca frecuencia se obtiene como el resultado de aprender tal o cual contenido (conceptos, algoritmos, o incluso modos de representación como gráficas, sistemas numéricos, etc.). En otras palabras, la comprensión no sigue el orden de la construcción matemática del conocimiento, sino que supone el desarrollo de algunas habilidades específicas que son fructíferas también para otros campos. No se puede enseñar matemáticas en un nivel inferior, sin tener en cuenta los requisitos básicos para desarrollar la arquitectura cognitiva del sujeto. Y esto es particularmente cierto para la prueba matemática.

Según el campo matemático y según su carácter elemental o complejo, una prueba se puede construir en lengua materna o puede requerir notaciones específicas del lenguaje formal, por ejemplo el uso de cuantificadores. Este es uno de los dos grandes tipos de variaciones en las interacciones entre el razonamiento y el lenguaje, como se mencionó antes. En primer lugar, si nos limitamos a la lengua materna, hemos visto que dos procesos muy diferentes de expansión discursiva generan organizaciones de proposiciones con diferencias profundas. Y esto no siempre es visible a través de su expresión superficial. No es posible imaginar una enseñanza confiable de la prueba que no propicie en los estudiantes la diferenciación de estos dos usos de la lengua materna.

Sin embargo, en algunos casos, el razonamiento depende del uso de un sistema de símbolos para hacer explícito el aspecto extensional de las oraciones: conectores de negación, de implicación material para proposiciones, cuantificadores universal y existencial para variables y predicados (Carnap, 1958). Aquí cambiamos los registros de representación semiótica para los procesos discursivos: algo más llega a ser necesario además de la comprensión de cómo usar las reglas del si…entonces… para una operación de separación. Pero si una prueba matemática puede jugar con diferentes registros semióticos, queda por descubrir el modo específico en que trabaja la expansión discursiva. Y para los sistemas simbólicos o el lenguaje formal, la comprensión de cómo funciona una prueba requiere también una coordinación con la lengua materna (Duval, 1995a, pp. 151-155).

Para inducir a los estudiantes a la comprensión de la manera en que funciona una prueba, se deben organizar actividades matemáticas divididas en tres etapas: una primera etapa de exploración libre, una segunda etapa de investigación específica de la organización deductiva de proposiciones en un registro no discursivo, y una tercera etapa de descripción o explicación verbal de la organización deductiva que se ha descubierto. Esto viene a ser lo mismo que separar primero en lo que se considera ordinariamente como actividad heurística, o asunto de intuición, y luego en lo que se considera bien sea como actividad lógica o una actividad de comunicación. ¿Por qué hay esa separación doble y qué conciencia puede producir tanto en los estudiantes como en los profesores?

La variable que dispara esta doble separación: cambiar el registro de representación en el que se trabaja

Reunir las propiedades o los teoremas pertinentes para la construcción de una prueba

La primera etapa de exploración libre es la usual. Con frecuencia, esta exploración tiene lugar en pequeños grupos. Esto puede ayudar a numerosos estudiantes que no tienen éxito en distinguir las "propiedades" y los teoremas pertinentes que se podrían usar, o incluso en darse cuenta de por qué algún teorema es pertinente y otro no lo es. Pero esto no siempre es suficiente y se requiere una confrontación general para hacer que las ideas clave surjan de las variadas producciones de cada grupo pequeño.

Entonces, todo parece casi completo, ya que no se ha omitido nada, excepto producir un registro escrito de la prueba. Eso puede ser cierto desde la perspectiva matemática, pero es engañoso desde la perspectiva del aprendiz. Conocer todos los teoremas que se van a usar en una prueba no ayuda al aprendiz a comprender por qué ellos prueban y, por tanto, a ganar perspicacia con respecto a por qué una proposición es verdadera y a convencerse realmente. La verdadera utilidad de esta etapa es lograr que los estudiantes se adentren en el problema y proporcionarles las "propiedades" pertinentes como datos para una investigación específica en la organización deductiva de las proposiciones. Estamos en el punto de partida.

Investigar dentro de la organización deductiva y su funcionamiento

Si nos limitamos al campo de la geometría elemental, la actividad matemática en esta primera etapa se lleva a cabo en la mezcla de dos registros: el registro de la figura geométrica para "ver" y el registro del lenguaje natural para "explicar" (la mayor parte de las veces en forma oral). Debemos recordar que los teoremas y las definiciones, que se expresan o formulan en lenguaje natural, no funcionan como los enunciados de la práctica ordinaria. Esta mezcla es con mucha frecuencia intrincada y confusa para muchos estudiantes. Así que parece indispensable un tercer registro para hacer visibles las operaciones discursivas involucradas al organizar las proposiciones en una deducción.

Podría parecer que el registro de representación más natural es el gráfico. Por lo menos se lo ha destacado en la investigación psicológica o didáctica bajo varios nombres. Pero este registro no tiene más valor que los otros: es una vía cerrada. Lo que realmente importa es para qué se usa este registro y qué hacen los estudiantes con él.

Brevemente, la construcción de una gráfica proposicional se puede emprender desde una perspectiva heurística: la gráfica de proposiciones se usa para disparar procesos que van hacia adelante y hacia atrás (Anderson, Boyle, Farell y Reiser, 1987; Rips, 1988), y lo que los estudiantes tienen que hacer es solamente hallar el "camino" entre la hipótesis y la conclusión, escogiendo los teoremas pertinentes. En este caso, el marco del gráfico de proposiciones está ya fijado, puesto que las hipótesis y la conclusión se han ubicado ya al comienzo y al final de la pantalla, respectivamente; la tarea se enfoca en la elección de los teoremas pertinentes para hallar las conexiones. Esto significa que la tarea de tener en cuenta el estatus de las proposiciones llega a ser una actividad latente que desaparece de la vista; el estudiante tiene solamente que elegir los teoremas pertinentes, es decir, no va más allá del contenido de las proposiciones.

Pero la construcción de una gráfica proposicional también se puede pedir en una perspectiva de organización deductiva: la construcción de una representación gráfica se usa para distinguir entre el estatus y el contenido de las proposiciones y también para diferenciar el uso de los teoremas del uso de las justificaciones argumentativas naturales o del de las explicaciones físicas. En este caso, ningún marco se ha fijado de antemano. Entonces, lo que el estudiante debe hacer es escoger las proposiciones de acuerdo con su estatus para construir la totalidad de la gráfica, ya que los teoremas pertinentes se conocen desde la primera etapa. Solo tiene que habérselas con tres reglas de construcción que tienen que ver solamente con la distinción del estatus. Estas reglas de construcción se enfocan exclusivamente en la representación del estatus de una proposición:

1. Desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha.
2. Una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él.
3. Una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella.

Para construir una gráfica que represente cómo el uso de teoremas resuelve el problema, los estudiantes solo tienen que usar flechas para conectar dos enunciados de acuerdo con su estatus. A través de esta tarea, que descansa en un cambio de registro de representación, el proceso de conciencia ha comenzado (Duval y Egret, 1989).

En cada experimento de enseñanza, uno encuentra la misma evolución en el comportamiento de los estudiantes y la misma transformación profunda en su producción al cabo de varias secuencias didácticas. En primera instancia, pueden estar desconcertados por este tipo de tarea y, sobre todo, pocas veces tienen éxito. Todos los malentendidos latentes con respecto a la deducción matemática, con frecuencia ocultos por las formulaciones lingüísticas que no son ni falsas ni precisas o explícitas, aparecen: confusión entre hipótesis y conclusión, entre un teorema y su recíproco o, más sutil y profunda, confusión entre inclusión de clases (relación natural parte-todo) y la implicación proposicional, despreocupación por las condiciones que aplican a un teorema, reducción del razonar a la mera conexión lineal de las oraciones mediante conectores, despreocupación por la posibilidad de baches, etc. Por ejemplo, entre las primeras producciones de los estudiantes hemos encontrado gráficas de este tipo, que corresponden a una comprensión incorrecta acerca de la organización matemática de la prueba:

Hipótesis 1 $\rightarrow$ Hipótesis 2 $\rightarrow$ Hipótesis N $\rightarrow$ Teorema A $\rightarrow$ Teorema B $\rightarrow$ Conclusión

Las reglas de construcción proporcionan a los estudiantes los medios para construir el gráfico proposicional y también para verificar por sí mismos la validez de su construcción pero, sobre todo, les ayuda a percatarse de dónde y por qué se equivocaron (Egret y Duval, 1989). Todos esos malentendidos aparecen a través de los gráficos construidos y se hacen evidentes fácilmente para estudiantes y profesores. Y es en este momento cuando se percatan de la especificidad del razonamiento deductivo y, a través de nuevas construcciones gráficas, pueden comenzar una verdadera investigación de cómo trabaja una organización deductiva de proposiciones. Y para la elección de pruebas, el profesor puede usar, a través de construcciones de gráficas, variaciones en la complejidad de la organización: la prueba es más o menos arborescente, las condiciones dadas son, o no, necesarias solamente para los pasos iniciales, etc. (Bourreau-Billerait, Dewitte y Lion, 1998).

Una nueva situación representacional para la redacción

La tercera etapa solo puede comenzar cuando los estudiantes organicen todo un gráfico de proposiciones, es decir, verifiquen por sí mismos la validez de las conexiones, de acuerdo con el estatus de cada proposición, y darse cuenta de qué es un bache en el razonamiento de una prueba. Entonces el profesor puede pedir un segundo cambio de registro: describir o explicar el gráfico proposicional que han construido. Para la redacción, la situación cognitiva es bien diferente. En la redacción hay un cambio en la referencia de los datos: ya no es la figura geométrica, como sucede en la primera etapa, sino la organización discursiva lo que está representado por un diagrama. Así que mediante esta representación transicional se crea un retroceso con respecto a la obviedad visual de la figura geométrica.

Ahora la redacción hace que los estudiantes se percaten del valor epistémico de las proposiciones y, sobre todo, de la transformación del valor epistémico que ocurre a través del razonamiento deductivo: lo que era obvio solo visualmente, o lo que parecía no ser posible, llega a ser teóricamente necesario. Sin embargo, acá no se hablará sobre los procesos de esta nueva conciencia (Duval, 1995a, pp. 223-231). Lo que importa es quizá la pregunta siguiente: ¿por qué recurrir al lenguaje natural para eso? Por dos razones bien conocidas. En primer lugar, los valores epistémicos solo pueden ser expresados en el lenguaje natural. En segundo lugar, el sujeto se puede percatar de lo que está involucrado en su actividad –en este caso, la construcción de la gráfica de proposiciones– solo en el lenguaje natural, tal como lo explicó Piaget (1967b). La comprensión en el aprendizaje de las matemáticas no se puede alcanzar verdaderamente al excluir el lenguaje natural.

Para esta tercera etapa, uno encuentra también una evolución. Cuando se confrontan con la visión intimidante de la organización deductiva que han encontrado, los estudiantes pueden escribir más de lo necesario y de esta manera los textos de sus pruebas parecen una palabrería. Pero, gradualmente, su expresión se vuelve más concisa y no sienten la necesidad de construir una gráfica de proposiciones. Entonces han alcanzado la capacidad para dominar un razonamiento deductivo válido que es más complejo que cualquier simple silogismo (además, la mayor parte de los silogismos no constituyen razonamiento válido, ¡como lo explicó Aristóteles (trad. 1964) extensamente!).

Lo que se pretende a través de esta doble separación: una coordinación de registro

Las operaciones que parecen simples desde un punto de vista matemático son con mucha frecuencia cúspides sumergidas. Debajo tenemos la sinergia entre varios sistemas cognitivos heterogéneos, algunos de los cuales requieren una práctica específica transicional. En otras palabras, lo que es sencillo no está en el comienzo de las secuencias de aprendizaje sino al final. De ahí lo que hemos denominado el rodeo cognitivo requerido.

En el campo de la geometría elemental, la prueba requiere la coordinación entre dos registros de representación: el registro de la figura geométrica para "ver" y el registro del lenguaje natural para "explicar" (¡con mayor frecuencia oralmente!). La introducción de un tercer registro, para un rodeo temporal, parece destacar la presentación discursiva de la prueba en detrimento de su exploración y construcción que con frecuencia se reducen a la primera etapa. Pero nada de ello sucede; más bien, lo opuesto. De esta manera, los estudiantes llegan a distinguir verdaderamente la aprehensión discursiva de una figura geométrica (a través de hipótesis dadas, definiciones, etc.) de su aprehensión meramente perceptiva y se dan cuenta de la prioridad de la aprehensión discursiva sobre la perceptiva. En otras palabras, obtienen un marco para guiar sus investigaciones en el campo de la geometría: no hay una verdadera intuición figural sin alguna base deductiva.

Con esa perspectiva, la introducción de un tercer registro respalda el desarrollo de una coordinación entre el registro de la figura geométrica y el lenguaje natural. Cuando tal coordinación explícita comienza, los estudiantes se sienten liberados del mutismo mental que puede acarrear una irreversible falta de interés en la resolución de problemas matemáticos o incluso un desinterés total en muchos estudiantes jóvenes.

Pero si queremos también desarrollar una habilidad de intuición, principalmente para la primera etapa, cuando lo que se pretende es hallar las propiedades o los teoremas pertinentes para construir una prueba, o incluso para resolver un problema, se requiere también un entrenamiento específico en el registro de la figura geométrica. Por ejemplo, ¿cómo encuentra uno los teoremas pertinentes para resolver el problema dado antes (Figura 1)? Quizá nos hallamos aquí ante algún "círculo hermenéutico" con respecto al papel de la figura en el hallazgo de los teoremas pertinentes.

Cada una de las tres subfiguras que se presentan en la Figura 7 corresponde a uno de los tres teoremas que se usan para construir una prueba. Si estas subfiguras se requieren para evocar propiedades, ¿cómo pueden los estudiantes distinguirlas y reconocerlas en la figura inicial? Si, por otra parte, se necesitan los teoremas para ver las subfiguras, entonces ¿para qué se usan las subfiguras? Esto da lugar al asunto más global acerca de las interacciones cognitivas entre visualización, construcción y razonamiento, que están involucradas en toda actividad geométrica (Duval, 1998b; 2005). Y desde este punto de vista más global, probar en geometría requiere la capacidad para activar de manera fluida los enunciados o sus representaciones figurales. Pero la mayoría de los estudiantes es incapaz de desenredar esta compleja y escondida interacción, ¡que es completamente inconsciente o automática para los matemáticos!

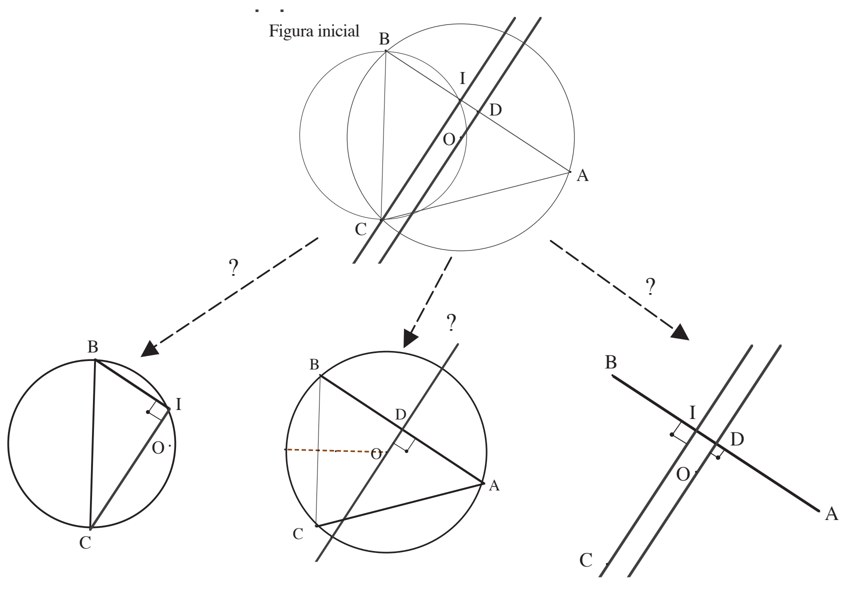


Figura 7. ¿Cuáles son las condiciones cognitivas para un papel heurístico de la figura?

Cualquiera sea la tarea geométrica (analizar figuras, probar, construir, etc.) que se asigne comúnmente a los estudiantes, en ella se traslapan procesos heterogéneos de una gama muy amplia. El aprendizaje en geometría requiere tareas diseñadas para hacer que los estudiantes distingan y practiquen cada uno de esos procesos heterogéneos. Así que esto vale para figuras geométricas lo mismo que para el lenguaje natural: la manera matemática de observar una figura, o de describir su construcción, difiere de la manera perceptual de observar e interpretarla. En una figura que pertenece a una tarea dada, hay factores diferentes que disparan o inhiben la visibilidad de las subfiguras pertinentes que muestran las ideas clave para resolver el problema. Los estudiantes se deben percatar del papel de estos factores en cualquier visualización geométrica también (Duval, 1995b).

Desde luego, la cuestión es si hay un orden de adquisición o alguna jerarquía en las "habilidades". A diferencia de otros modelos que suponen esto, podemos ver que no hay un orden de adquisición entre visualización y razonamiento, pues la actividad geométrica se basa en una sinergia entre varios sistemas cognitivos que deben fluir paralelamente. Y sería una ilusión y un callejón sin salida en la educación matemática promover un registro como más fácil que los otros. La comprensión de la actividad geométrica moviliza, implícita o explícitamente, varios registros de representación y surge al mismo tiempo que su sinergia.

Conclusión

En la educación matemática, la comprensión, lo mismo que el aprendizaje, se debe examinar, no solamente desde el punto de vista matemático, sino también desde un punto de vista cognitivo, porque puede haber una discrepancia en las condiciones de la comprensión entre un punto de vista y el otro: lo que puede parecer simple desde un punto de vista, puede ocultar una verdadera complejidad evidente desde el otro punto de vista. En este artículo hemos destacado la complejidad subyacente a los procesos cognitivos para los pasos involucrados en el aprendizaje de la prueba, incluso para situaciones matemáticas que parecen fáciles porque parecen cercanas a situaciones naturales de percepción y no requieren herramientas técnicas o un registro específico de representación (notaciones de lógica simbólica, escritura algebraica, etc.). Puede parecer como un rodeo complicado, pero la naturaleza de los errores recurrentes y los fracasos de los estudiantes ponen de manifiesto la necesidad de tal rodeo. Hemos distinguido dos tipos de fracasos:

1. Disfunciones en el razonamiento válido, como confusión del estatus, no distinción entre un enunciado y su recíproco, etc. Pueden ser explícitos o permanecer implícitos, escondidos por omisiones o por explicaciones torpemente expresadas o, incluso, por una torpe presentación formal de las pruebas.

2. Baches o deficiencias en el progreso de una prueba; algunos pueden ser obvios y fáciles de detectar mientras que otros requieren un examen cuidadoso.

Debemos agregar a estos fracasos este comportamiento bien conocido y extendido:

3. Bloqueo mental y mutismo mental en respuesta al pedido de construir una prueba, lo que puede llevar a los estudiantes a abandonar cualquier actividad de prueba o desarrollar una aversión a ella más o menos considerable.

Los matemáticos y los profesores se enfocan principalmente en el segundo tipo de fracaso porque refleja la complejidad de las propiedades matemáticas y de los objetos. Desde este punto de vista, las dificultades pueden cambiar con cada situación matemática; también parece posible hallar situaciones o problemas en los que las pruebas están al alcance de cualquiera. Y desde ese punto de vista, uno trata de sobreponerse a los bloqueos mentales (tercer tipo de fracaso) sugiriendo ideas clave.

En contraste con esto, nos hemos enfocado en el primer tipo de fracasos porque ellos son persistentes, cualquiera sea el problema matemático que se dé a los estudiantes. En la medida en que permanecen sin ser conscientes de la manera específica en que marcha el razonamiento deductivo, no pueden ir más allá de la disfunción latente y como resultado está la profunda razón de los bloqueos mentales. Más aún, una prueba no puede funcionar como tal mientras no haya comprensión de la organización deductiva específica del discurso que determina incluso el modo matemático de definir.

La primera ventaja de la doble separación y del cambio de registro es hacer visibles las disfunciones y los bloqueos a los ojos de estudiantes y profesores. La segunda ventaja es proporcionar una herramienta para revelar lo que hay detrás de maneras aparentemente naturales de redactar y visualizar.

La cuestión aquí no es oponer los puntos de vista matemático y cognitivo en educación matemática, sino articularlos. Uno puede aprender a probar solamente en situaciones matemáticas, pero no puede hacerlo si las situaciones de aprendizaje no están organizadas de acuerdo con las variables cognitivas. Cada vez que se han tenido en cuenta esas variables, los estudiantes han experimentado un adelanto en su práctica de razonar e investigar.

La importancia de la geometría elemental para descubrir lo que es una prueba matemática se debe al hecho de que moviliza dos registros multifuncionales: el del lenguaje natural y el de las configuraciones *gestalt*. De esta manera, lo que está en juego primero que todo en el aprendizaje de la prueba es hacer descubrir que el razonamiento en matemáticas no funciona de la misma manera que el razonamiento dentro de una discusión que pretende convencer a otras personas, fuera de las matemáticas.

Además, percatarse del funcionamiento del razonamiento válido es absolutamente esencial, siempre que la deducción tenga que compensar las limitaciones de visión y visualización. Este es el caso, por ejemplo, para el razonamiento *ad absurdum* (y para la geometría tridimensional, donde el respaldo de las figuras se muestra más complejo y limitado que en la geometría del plano). Dentro de su práctica de organizar la conversación es donde los estudiantes pueden experimentar verdaderamente un cambio original y fortalecer su habilidad para hacer prueba matemática.

El uso de los cuantificadores es distintivo de los registros discursivos y no se puede considerar separadamente del uso de la negación. Omnipresentes en el lenguaje natural, pero con frecuencia de manera implícita, estos elementos se hacen explícitos en el lenguaje formal. Pero las dificultades de razonamiento con cuantificadores en relación con la negación (no hay lenguaje sin negación) surgen dentro del registro monofuncional en el que los tratamientos son los del cálculo de predicados.

Aquí estamos frente a un problema específico de aprendizaje para hacer que los estudiantes conecten y desconecten las maneras de referirse a objetos y cuantifiquen tanto en lenguaje natural como formal. Y esto es especialmente necesario puesto que los enunciados del cálculo (para definiciones y teoremas) emplean una mezcla de lenguaje natural y lenguaje formal. Pero el aprendizaje de la cuantificación puede carecer de significado para los estudiantes que no se hayan dado cuenta de lo que es el razonamiento válido y de cómo funciona.

Es obvio que las pruebas en la mayoría de los campos de las matemáticas no están fundamentadas y desarrolladas como en la geometría elemental, porque uno no trabaja con los mismos registros de representación, es decir, con figuras geométricas y lenguaje natural. Así que, ¿cuál puede ser la contribución de este aprendizaje para la educación matemática general de los estudiantes? Dos experiencias parecen básicas para el aprendizaje posterior. Primera, el descubrimiento de lo que es el razonamiento válido, que es tan importante como lo es la precisión en los cálculos. Segunda, la conciencia de maneras diferentes de trabajar con el lenguaje natural y con configuraciones de *gestalts*. El lenguaje natural y la representación *gestalt* no son registros de representación técnica en matemáticas. Pero ningún registro de representación técnica se puede introducir en la educación matemática sin una coordinación con uno u otro de esos registros primitivos, para destacar semejanzas y diferencias, congruencia y no congruencia, en las maneras de referirse a los objetos y de procesar la información.

Anderson, J.R., Boyle, C.F., Farell, R. *et al.* (1987). Cognitive principles in the design of computer tutors. En P. Morris (Ed.), *Cognition modeling* (pp. 93-133). Nueva York: John Wiley & Sons Ltd.

Aristóteles (1964). *Aristotelis analytica priora et posteriora* (trad. W.D. Ross). Nueva York: Oxford University Press.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situation de validation. *Educational Studies in Mathematics*, *18*(2), 147-176.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. Tesis de doctorado, Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Disponible en http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00326426/en/

Bourreau-Billerait, S., Dewitte, M.C. y Lion, I. (1998). *Comment les réseaux peuvent-ils aider les élèves à mieux appréhender la démonstration en géométrie?* Lille: IUFM Collection Mémoires Professionnels.

Carnap, R. (1958). *Meaning and necessity. A study in semantics and modal logic* (2ª ed.). Chicago: University of Chicago Press.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Duval, R. (1993a). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1993b). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Maison (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (1996a). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (1996b). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. En A. Antibi (ed.), *Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM* (pp. 3-15). Toulouse: Université Paul Sabatier.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*, 139-163.

Duval, R. (1998b). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (2001). Écriture et compréhension: pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves? En E. Barbin, R. Duval, I. Giogutti *et al.* (eds.), *Produire et lire des textes de démonstration*. París: Ellipses.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *10*, 5-53.

Duval, R. (2015). Figures et visualisation géométrique: «voir» en géométrie. Dans J. Baillé (dir.), *Du mot au concept. Figur*, p.147-182. Grenoble: Presses universitaires de Grenoble.

Duval, R. y Egret, M.A. (1989). L'organisation déductive du discours: interactions entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *2*, 41- 65.

Egret, M.A. y Duval, R. (1989). Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *A nnales de Didactique et de Sciences Cognitives, 2,* 65-89.

Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental models*. Nueva York: Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1976) *Proof and refutations*: *The logic of mathematical discovery*. Nueva York: Cambridge University Press.

Leibniz, G.W. (1969). *Essais de théodicée*. París: Garnier-Flammarion. (Obra original publicada en francés en 1710).

Luengo, V. (1997). Cabri-Euclide: un micro-monde de preuve intégrant la réfutation. Principes didactiques et informatiques. Réalisation. Grenoble: Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

Piaget, J. (1967a). *Biologie et connaissance*. París: Gallimard.

Piaget, J. (1967b). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. París: P.U.F.

Rips, L.J. (1988). Deduction. En R.J. Sternberg y E.E. Smith (eds.), *The psychology of human thought* (pp. 116-152). Nueva York: Cambridge University Press.

Schoenfeld, A.H. (1986). On having and using geometric knowledge. En J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Toulmin, S.E. (1958). *The use of arguments*. Nueva York: Cambridge University Press.

METÁFORA Y DIAGRAMAS NUMÉRICOS EN LA ACTIVIDAD ARITMÉTICA DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO

Adalira Sáenz-Ludlow

En este artículo se presenta un análisis de la actividad aritmética y semiótica en la que participó todo un grupo de estudiantes de cuarto grado en el marco de un experimento[11] de enseñanza a lo largo de un año escolar. El análisis indica que una metáfora, conceptualizada colectivamente por ellos, medió sus reconceptualizaciones del número natural en términos de unidades y el surgimiento de estrategias numéricas para operar con ellas. Los diagramas numéricos, los argumentos numéricos verbales y otra notación idiosincrática fueron *signos* que usaron para presentar al grupo estrategias de solución.

Al comienzo del año escolar, los estudiantes tenían una *comprensión instrumental*, como la definió Skemp (1987), de la notación de valor posicional y, por tanto, las palabras numéricas y los numerales no tenían una significación cuantitativa para ellos. Como resultado, no tenían la flexibilidad para operar mentalmente con números. Además, su comprensión de los algoritmos también era instrumental; es decir, cuando usaban algoritmos, solo tenían un *reflejo simbólico,* como lo definió Wilder (1968). Para facilitar la comprensión relacional de los estudiantes con respecto a la notación del valor posicional y los algoritmos convencionales, el equipo de investigación preparó tareas aritméticas con anterioridad a la enseñanza. Al comienzo, la profesora del grupo planteó verbalmente estas tareas y las resolvieron mentalmente.

A medida que el año escolar avanzaba, las tareas aritméticas se presentaban en formatos escritos y no convencionales. Esto, junto a la presentación oral, facilitó el surgimiento de una interacción dialógica dinámica entre la profesora/investigadora y los estudiantes, y entre ellos mismos. En esta interacción verbal, llegaron a usar la palabra *partir* en contextos numéricos. Aunque esta palabra tiene connotaciones específicas dentro de la educación matemática debido a su uso por Confrey (1988, 1994), los estudiantes de este grupo usaron espontáneamente la palabra *partir* para significar la separación de un número en unidades, asemejándola a la separación de un objeto en partes. Después

11 Esta investigación fue financiada por la *National Science Foundation* a través de las becas RED 9155734 y RED 9596106 y por la *University of North Carolina* en Charlotte. Los puntos de vista y las conclusiones que se expresan aquí son de la autora y no necesariamente de las instituciones. La autora agradece a la profesora de cuarto grado Cathy Walgamuth. Sin su dedicación y colaboración, el experimento de enseñanza habría sido imposible. La autora también agradece a los revisores anónimos por sus valiosos comentarios a las primeras versiones de este manuscrito.

de que un estudiante usara la palabra *partir* en un contexto numérico, su uso permeó el discurso del grupo para expresar la descomposición de números en unidades. El uso frecuente de dicha palabra indicó que estaban viendo un parecido entre la acción física de separar un objeto en partes y la acción mental de separar un número en unidades.

No es sorprendente ver a estudiantes muy jóvenes que separan números en unidades. La noción de unidad es inherente a la conceptualización del número, y ha sido enfatizada una y otra vez por perspectivas tanto matemáticas como cognitivas. La idea del número como una "multitud de unidades compuestas" se registró primero en el Libro VII de los *Elementos* (Heath, 1956, p. 277). Posteriormente, el matemático Stevin del siglo XVI analizó la función fundamental de la unidad en la constitución del número:

> La parte es del "mismo material" que el todo. La unidad es una parte de una multitud de unidades. Por tanto, la unidad es del 'mismo material' que la multitud de unidades; pero el material de una multitud de unidades es el número. Por tanto, el material de una unidad es el número (citado en Moreno-Armella y Waldegg, 2000, p. 187).

Desde una perspectiva psicológica, McLellan y Dewey (1908) hicieron un análisis de la idea de unidad y su aplicación a métodos para enseñar aritmética. Posteriormente, Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb (1983) y Steffe y Cobb (1988) investigaron la conceptualización del número natural en términos de unidades hecha por los estudiantes.

La teoría peirceana de *signos* parece ser la más útil para el propósito de explicar la metáfora de partir, hecha por los estudiantes, como un signo que medió su descomposición del número en unidades y su construcción de otros signos, como diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales. Puesto que los estudiantes usaron consistentemente la palabra *partir* para expresar el parecido entre la acción física de separar un objeto en partes y la acción mental de separar un número en unidades, esto se puede denotar como la *metáfora de partir*. El propósito de este artículo es enfocarse en la formación, el uso y el papel mediador de esta metáfora en la actividad aritmética y semiótica de los estudiantes.

Consideraciones teóricas

En el proceso de enseñar hay dos asuntos diferentes pero relacionados que tienen que ver con el hecho de trabajar con un grupo. El primero es la planeación de la enseñanza que el profesor va a realizar; el segundo es la planeación más indirecta de la organización social del escenario del aula, de manera que los pares puedan contribuirse mutuamente en el aprendizaje (Forman y Cazden, 1985). El profesor puede planear con anterioridad la coherencia general de las tareas aritméticas propuestas a los estudiantes, pero la organización social del escenario del aula solo se puede anticipar en cierta medida.

Las construcciones espontáneas de signos hechas por los estudiantes para comunicar su actividad mental y el papel de esos signos en la mediación de su actividad aritmética difícilmente pueden ser planeados o anticipados por el profesor. En consecuencia, si la interacción entre pares ha de influir en la actividad de aprender en el aula, los profesores tienen que modificar su propia agenda de enseñanza para acomodarse a la actividad sígnica que realizan los estudiantes. Para hacer esto, el profesor tiene que reconocer y valorar los avances conceptuales de los estudiantes indicados por sus maneras de hablar y sus iniciativas simbólicas.

Los estudiantes crean signos para representar objetos, ideas, eventos y relaciones. Wilder (1968) llamó *iniciativa simbólica* a la capacidad de crear espontáneamente signos y usarlos, en contraste con el *reflejo simbólico,* que es la mera capacidad de manipular y reaccionar a signos. También sostuvo que la evolución de conceptos matemáticos y la invención de algoritmos eran, de hecho, el resultado de una iniciativa simbólica. Wilder afirmó que memorizar algoritmos y manipular signos y representaciones matemáticas, sin comprender profundamente sus significados, degrada la actividad cognitiva del individuo al nivel de reflejo simbólico. En consecuencia, el individuo parece ser capaz de desempeñarse a lo largo de un continuo simbólico que va desde el nivel más bajo de reflejo simbólico (manipular y reaccionar a signos) al nivel más alto de iniciativa simbólica (crear y usar signos, lo mismo que construir relaciones entre ellos).

La iniciativa simbólica parece requerir una conciencia de: a) el objeto, la idea o el evento que se ha de representar; b) el medio (o signo) elegido para representar el objeto, y c) el efecto de ese signo sobre el propio comportamiento o el de otros. Estos tres elementos también son componentes esenciales de los signos en el sistema semiótico de Peirce.

Uno de sus logros originales estuvo en caracterizar la cognición como un proceso semiótico (Otte, 2001). Sostuvo que "el pensamiento siempre se desarrolla en forma de diálogo, –un diálogo entre diferentes fases del *ego*– de manera que, al ser dialógico, está esencialmente compuesto de signos"[12] (CP 4.6).[13] Aunque Peirce construyó una teoría sistemática de signos, no ha sido

12 El texto original es: "thinking always proceeds in the form of a dialogue—a dialogue between different phases of the ego—so that, being dialogical, [thinking] is essentially composed of signs". Agradezco a Roberto Perry, miembro del Centro de Sistemática Peirceana de Bogotá (Colombia), sus valiosas sugerencias en la traducción de las citas de la obra de Peirce. [N. T.]

13 En este artículo, las citas a los escritos de Peirce siguen esta forma estandarizada: CP 4.7 se refiere al volumen 4, parágrafo 7 de la obra *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, editado por Hartshorne, Weiss y Burks (1931-1966).

el único en reconocer su mediación cognitiva. Vygotsky consideró los signos como herramientas psicológicas dirigidas internamente y con el potencial de influir tanto en la actividad y el comportamiento interno como en el comportamiento de otro (Wertsch, 1985). Piaget (1970) definió la función semiótica de la inteligencia como "la capacidad de representar algo mediante un signo o un símbolo u otro objeto" (p. 45) y consideró que el lenguaje, los gestos, la imitación en diferido y la imaginería mental tienen funciones semióticas. También consideró a las imágenes mentales como el primer paso hacia la simbolización puesto que surgen mediadas por algún tipo de interpretación de los objetos a los que llegan a instanciar. En general, Piaget sostuvo que cualquier signo que represente a un objeto, media el paso del individuo "desde la inteligencia *actuada* hasta la inteligencia *pensada*" (p. 45, énfasis añadido).

Debido a la función que tienen los signos de mediar la actividad cognitiva del individuo, el marco teórico de Peirce parece ser muy útil en este estudio para explicar la iniciativa simbólica que surge en un escenario de aula donde los estudiantes tuvieron la libertad de experimentar con su propio pensamiento. Es decir, este marco nos permite dar cuenta, no solo de los signos creados y usados por los estudiantes de cuarto grado, sino también del papel mediador de estos signos en su actividad aritmética.

En palabras de Peirce, un Signo es "una cosa sea la que sea, real o figurada, que es capaz de adoptar una forma sensorial, es aplicable a una cosa que no sea ella, que es conocida de antemano, y que es capaz de ser interpretada en otro signo que llamo su Interpretante, de manera tal que sobre su Objeto comunica algo que puede no haberse sabido antes. Hay, por lo tanto, una relación triádica entre un Signo, un Objeto y un Interpretante",[14] [15] (MS 654.7, 1910,[16] citada en Parmentier, 1985, p. 26). Es decir, un signo no es un signo en sí mismo a menos que alguien lo interprete. Más aún, cada signo establece un Intérprete al producir en esa persona un Interpretante.

Como lo dijo metafóricamente Wiley (1994), "el Signo y el Interpretante sostienen una relación dialógica en una discusión sobre el Objeto" (p. 14). En otras palabras, para Peirce, la esencia de un Signo reside en su relación de encajamiento con su Objeto y su Interpretante. ¿Esta relación íntima entre Sig-

14 Debido a que Peirce utilizó intencionalmente letras iniciales mayúsculas para las palabras Signo, Objeto e Interpretante para darles prominencia, he conservado esa convención en este artículo.

15 El texto original es: "anything whatever, real or fictile which is capable of a sensible form, is applicable to something other than itself, that is already known, and that is capable of being interpreted in another sign which I call its Interpretant as to communicate something that may have not been previously known about its Object. There is thus a triadic relation between any Sign, an Object, and an Interpretant". [N. T.]

16 En este artículo, las citas a los escritos de Peirce en forma manuscrita siguen esta forma estandarizada: MS 654.7, 1910 se refiere al manuscrito 654, página 7, datado en 1910. La colección manuscrita reside en la *Harvard University* y está organizada en el *Annotated catalogue of the papers of Charles S. Peirce*, editado por R.S. Robin (1967).

no, Objeto e Interpretante permanece estática o evoluciona? Un Interpretante es simplemente una representación interna del signo inicial, que ya es en sí mismo una representación de su Objeto. Así que, un Interpretante es una representación de una representación en la mente del Intérprete que le permite ver el Objeto inicial de una manera nueva. Cuanto más refinada sea la secuencia de los Interpretantes, el Objeto se hará menos contextualizado y más abstracto para el Intérprete.

Sin embargo, los Signos no producen el mismo Interpretante o la misma secuencia de Interpretantes en todos los Intérpretes. Si ese fuera el caso, la comunicación, en general, y la enseñanza de las matemáticas, en particular, sería una empresa directa que no ofrecería desafíos para el profesor y los estudiantes, quienes serían capaces de interpretar los mismos significados para el mismo signo de una vez. Thom (1973) señaló que una expresión que tiene sentido para X podría ser incomprensible para Y debido a la diversidad fundamental de sus universos semánticos. Así que, el desafío en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas parece residir en esta secuencia en curso de Interpretantes, a medida que los signos fluyen en las mentes de los Intérpretes en un continuo que va desde el reflejo simbólico hasta la iniciativa simbólica (usando expresiones de Wilder, 1968).

De manera inherente, los Signos son procesos de representación y significación (Otte, 2001; Sáenz-Ludlow, 2002) en los que Signos e Interpretantes futuros surgirán potencialmente a partir de los existentes que en el proceso se hacen más abstractos para el Intérprete. La potencialidad y la fluidez de los Interpretantes dan cuenta del proceso de *abstracción hipostática* en términos de Peirce, o de *abstracción reflexiva* en términos de Piaget, y de *internalización* en términos de Vygotsky. La interrelación evolutiva entre Objetos, Signos e Interpretantes constituye el proceso de semiosis.

Morris (1938) define la semiosis como un "tener-en-cuenta-mediado" en el que los *mediadores* son Signos, los *tener-en-cuenta-mediados* son Interpretantes, y aquello que se *está teniendo en cuenta* es el Objeto o Clase de Objetos que el Signo puede denotar. En la semiosis, los Intérpretes son los agentes del proceso de representación y significación. Puesto que la misma idea o noción se puede representar a través de signos en diferentes sistemas semióticos, la semiosis también da cuenta de la transformación de signos de un sistema semiótico a otro. Estas transformaciones indican la flexibilidad del proceso de significación (o semiosis) del Intérprete y, por tanto, la flexibilidad de la comprensión resultante.

En consecuencia, la actividad de enseñanza-aprendizaje se puede ver como un proceso de semiosis en el que profesor y estudiantes juntos se convierten en agentes activos (i.e., intérpretes y contribuyentes).

En nuestro caso, las tareas aritméticas que se debían resolver fueron el Objeto de los signos. Los Interpretantes fueron las estrategias de solución generadas por los estudiantes, las cuales fueron mediadas y realizadas por los Signos creados espontáneamente por ellos (metáfora, diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales); y los Intérpretes fueron los estudiantes y la profesora. Concomitante con el proceso de significación de los estudiantes, surgió el proceso de significación de la profesora/investigadora para interpretar la actividad aritmética de los estudiantes; estos dos procesos dependieron uno del otro de manera sinérgica.

Los Signos, según Peirce, son de diferentes clases, dependiendo del tipo de relación que tienen con los objetos a los que representan. Algunos signos se asemejan mucho a sus objetos (*Íconos*), otros tienen solamente un parecido arbitrario y atribuido (*Símbolos*), y otros más tienen alguna suerte de asociación con sus objetos dependiendo del contexto o de algún tipo de conexión (*Índices*). Como lo explica Peirce (1893-1913):

> Los *Íconos* sirven para representar a sus objetos solamente en la medida en que, de suyo, se asemejan a ellos; los Índices representan a sus objetos en independencia de cualquier semejanza con ellos, solo en virtud de conexiones reales con ellos; los *Símbolos* representan a sus objetos en independencia tanto de cualquier semejanza como de cualquier conexión real, solo gracias a que disposiciones o hábitos hechizos de sus intérpretes aseguran que se los entenderá en forma tal (pp. 461-462).17

Peirce caracterizó al signo como un ícono cuando este representa alguna cosa o alguna idea meramente debido a su parecido. Sostuvo que muchos de estos íconos no se basan en la semejanza en el sentido ordinario de la palabra; por ejemplo, los diagramas se parecen a sus objetos, no en la apariencia, sino con respecto a las relaciones de sus partes (Peirce, 1976). Es decir, la iconicidad incluye no solo semejanzas físicas sino también semejanzas de relaciones abstractas. Él distinguió tres tipos de íconos con grados decrecientes de iconicidad: imágenes, diagramas y metáforas. Las imágenes son icónicas inmediatamente y representan a sus objetos por medio de una simple semejanza cualitativa; los diagramas son íconos esquemáticos de relaciones lógicas posibles pero también tienen funciones indéxicas y simbólicas; y las metáforas se consideran como íconos más sofisticados (metaíconos) cuya iconicidad se basa en la semejanza de dos relaciones abstractas (Peirce, 1906a).

Los índices se consideran signos con una función indicativa (señalamiento, ostensión, *deixis*), que es un modo de significación indispensable para la co-

17 El texto original es: "Icons serve to represent their objects only in so far as they resemble them in themselves; Indices represent their objects independently of any resemblance to them, only by virtue of real connections with them; Symbols represent their objects independently alike of any resemblance or any real connection only because dispositions or factitious habits of their interpreters ensure their being so understood". [N. T]

municación, porque ellos llaman la atención sobre objetos particulares pretendidos sin describirlos (Sebeok, 1995; Wertsch, 1981, 1985). Peirce no ha sido el único en dar importancia prominente a los signos indéxicos (Sebeok, 1995). Vygotsky, quien analizó la función indicativa del discurso, consideró que estos signos juegan un papel importante en la cognición, puesto que le permiten al oyente compartir la experiencia del hablante, y median la transición desde el funcionamiento interpsicológico al funcionamiento intrapsicológico, promoviendo en el individuo la descontextualización de situaciones particulares para lograr la generalización (Wertsch, 1985).

Finalmente, un símbolo es diferente de un ícono y de un índice. Un símbolo es un nombre general o una descripción general que significa a su objeto por medio de una asociación de ideas o una conexión atribuida entre el símbolo y el carácter significado. "Los Símbolos nos proporcionan el medio de pensar sobre los pensamientos en formas en las que de otro modo no nos los podríamos imaginar. Nos permiten, por ejemplo, crear Abstracciones, sin las cuales careceríamos de un gran motor de descubrimiento"[18] (CP 4.531).

Cualquier argumento numérico verbal es un ejemplo de símbolo porque sirve funcionalmente para establecer un cierto tren de pensamiento o un hábito para lidiar con números. Cualquier argumento verbal está constituido por términos y proposiciones. Los términos (este, aquel o cualquier palabra suelta) usualmente sirven para evocar una idea, y se consideran Íconos. Las proposiciones se usan para establecer hechos y, por tanto, se consideran Índices. Un argumento, una línea de razonamiento transmitida por términos y proposiciones, es en sí misma un símbolo que transmite una regla de acción o evoca reglas generales (Corrington, 1993; Otte, 2001). En general, se puede decir que los signos no son puramente icónicos, indéxicos o simbólicos, sino que pueden compartir más de una función.

Metodología

Experimento de enseñanza

La metodología conocida como experimento de enseñanza, tal como fue inicialmente conceptualizada por Steffe y sus colegas (Cobb y Steffe, 1983; Steffe, 1983), abarca la interacción social entre estudiante e investigador, aunque en perspectiva se enfoca solamente en el análisis de la actividad aritmética del estudiante. Cuando esta metodología se extiende al aula y cuando se considera el factor social al unísono con la actividad aritmética de los estudiantes (Cobb

18 El texto original es: "Symbols afford the means of thinking about thoughts in ways in which we could not otherwise think of them. They enable us, for example, to create Abstractions, without which we should lack a great engine of discovery". [N. T.]

y Yackel, 1995), el análisis del razonamiento aritmético de los estudiantes ya no se enfoca en especificar los comportamientos cognitivos sino en caracterizar la calidad de sus experiencias aritméticas (Cobb, 2000a) al tener en cuenta los aspectos sociales y culturales de su actividad (Bauersfeld, 1995; Steffe y Thompson, 2000; Van Oers, 2001).

Los patrones de uso de signos y de construcción de signos propios de los estudiantes son inherentes a su experiencia matemática (Ernest, 2002; Godino y Batanero, 2003; O'Halloran, 2003; Sáenz-Ludlow, 1997; Sáenz-Ludlow y Walgamuth, 2001). Esta metodología mantiene su dinámica en la formulación continuada de hipótesis sobre las maneras de entender de los estudiantes, sobre sus acciones matemáticas y sobre sus patrones de uso y creación de signos. Es así, sin importar que el profesor/investigador interactúe con un estudiante, con grupos pequeños o grandes. La esencia de la metodología es facilitar e impulsar la interacción entre estudiante y profesor y entre estudiantes y, en consecuencia, proporcionar muchas oportunidades para que los estudiantes construyan, simbolicen y expliquen sus estrategias numéricas.

Siguiendo la metodología de experimento de enseñanza en el aula, similar a la de Cobb y colegas (Cobb y Steffe, 1983; Cobb, 2000a), condujimos un experimento de enseñanza durante un año con todo un grupo de estudiantes de cuarto grado: seis niñas y ocho niños, que iban a una escuela elemental, considerada de bajo rendimiento académico, en la que la mayoría provenía de un estrato socioeconómico bajo. Más aún, el desarrollo numérico de estos catorce estudiantes estaba por debajo de lo prescrito por los lineamientos curriculares de tercer grado y su clasificación en la prueba estandarizada que presentaron en tercer grado fue muy baja.

El experimento de enseñanza en el que participaron los estudiantes de cuarto grado consistió en episodios diarios de enseñanza en el aula y en entrevistas semanales en pequeños grupos. La profesora de cuarto grado y el equipo investigador formado por la profesora y la investigadora enseñaron la clase de aritmética, y la investigadora condujo las entrevistas semanales en grupos pequeños. Las interacciones dialógicas entre profesora y estudiante y entre estudiantes caracterizaron cada episodio de enseñanza. En cada episodio de enseñanza se prestó especial atención al cambio de los estudiantes al pasar del reflejo simbólico (la reacción pasiva a signos) a la iniciativa simbólica (la creación de signos dinámicos y el uso de signos); también se atendió a la mediación de signos idiosincráticos y convencionales en la reconceptualización que los estudiantes hicieron de número, palabras numéricas, estructura del valor posicional de los numerales y operaciones con números.

Además, en cada episodio de enseñanza, la profesora/investigadora hizo un esfuerzo para ver las estrategias de solución de los estudiantes desde las perspectivas de ellos. Este esfuerzo hizo posible que la profesora/investigadora planteara preguntas que los estudiantes pudieran interpretar de acuerdo con sus propias experiencias numéricas, y que los animara a formular preguntas por su cuenta y a plantearlas al grupo. Esta estrategia pedagógica está apoyada por la afirmación de Vygotsky (1986/1934) según la cual "el marco del niño es puramente situacional, con la palabra vinculada a algo concreto, mientras que el marco del adulto es conceptual" (p. 133). En consecuencia, para comprender las conceptualizaciones que los estudiantes hacían de las tareas aritméticas, la profesora tuvo que interpretar en paralelo sus propias acciones aritméticas y las de los estudiantes para "ver" la solución de ellos desde la perspectiva de ellos y sostener una interacción dialógica significativa con los estudiantes.

Como parte del proyecto de investigación, la profesora colaboradora participó en un intensivo campo de verano para profesores y niños en el que se usó la metodología de experimento de enseñanza. Durante el año escolar, la profesora colaboradora participó también en cursos enseñados por la investigadora con miras a comprender las bases socioconstructivistas de la metodología. Diariamente, la investigadora y la profesora se involucraron en conversaciones sobre la naturaleza y el propósito de las tareas aritméticas que se propondrían a los estudiantes, las estrategias numéricas de ellos, su uso de los signos y su creación de signos, lo mismo que el papel mediador de esos signos en sus conceptualizaciones.

Actividad matemática en el aula

La enseñanza de la aritmética que estos estudiantes recibieron en los años escolares anteriores se podría caracterizar como tradicional en el sentido de que se esperaba que realizaran cálculos aritméticos usando solo los algoritmos convencionales explicados y modelados por la profesora. Al comienzo del año escolar, tendían a esperar instrucciones específicas o buscaban la aprobación de la profesora, pero cuando ella no les daba tales instrucciones, comenzaron a confiar en su propio razonamiento. Una práctica común en el experimento de enseñanza fue la presentación oral y escrita de tareas aritméticas para que los estudiantes las resolvieran individualmente.

Después de darles tiempo adecuado, la profesora procedía a la discusión con todo el grupo y explicaban y justificaban sus estrategias de solución lo mismo que las maneras que les habían permitido llegar a sus respuestas. Se esperaba que cada estudiante escuchara cuidadosamente la solución de los demás y expresara su acuerdo o desacuerdo con la correspondiente justificación. Pronto los estudiantes comenzaron a asumir la responsabilidad de su pensamiento, y también comenzaron a cambiar las normas sociales y sociomatemáticas del aula (Yackel y Cobb, 1996).

La interacción dialógica mejoraba a medida que los estudiantes percibían que sus contribuciones se tenían en cuenta y sus soluciones eran aceptadas y validadas por los demás. La satisfacción de los estudiantes con el nuevo entorno de enseñanza-aprendizaje en el aula se manifestó en su voluntad de plantear al grupo problemas aritméticos generados por ellos, interpretar estrategias de solución de otros, e incluso imitar algunas de esas estrategias.

Tareas de enseñanza y recolección de información

El equipo de investigación generó tareas de enseñanza con anterioridad al experimento de enseñanza. Sin embargo, algunas tareas se modificaron y se generaron unas nuevas para acomodarse a las necesidades cognitivas de los estudiantes. En general, la generación de tareas de enseñanza y la actividad investigativa evolucionaron conjuntamente de una manera sinérgica. El principio guía para la preparación de tareas de enseñanza fue facilitar a los estudiantes su conceptualización amplia de los números naturales en términos de unidades. Las tareas tenían la intención de ayudarles a construir una comprensión relacional entre la notación del valor posicional y las palabras numéricas, y a reconceptualizar los algoritmos convencionales que ya conocían, lo mismo que a construir, desde la perspectiva de sus propias estrategias numéricas, los que todavía no conocían.

Para analizar la actividad aritmética que evolucionaba en el aula, las estrategias de solución de los estudiantes, su uso de signos y creación de signos, día a día se registraron en video las clases y un observador tomó notas de campo. También se recogieron las hojas de tareas, de borrador y las copias de las transparencias usadas. Toda la información se organizó de manera cronológica.

Análisis

La metodología de experimento de enseñanza sustentó el surgimiento de estrategias numéricas de los estudiantes para resolver tareas aritméticas y animó a los estudiantes a presentar aquellas estrategias al grupo usando lenguaje natural y otros signos idiosincráticos. Las estrategias de los estudiantes fueron validadas cuando otros estudiantes y la profesora las interpretaron, y cuando se aceptaron sin cuestionamiento las explicaciones y representaciones dadas. Es decir, la metodología de experimento de enseñanza promovió y apoyó la actividad semiótica y cognitiva de los estudiantes para reconceptualizar los números y para cambiar su comprensión instrumental por una más relacional.

En los episodios que se analizaron, *P* representa a la profesora/investigadora y una letra mayúscula seguida por una minúscula es la abreviatura del seudónimo de un estudiante (e.g., *Am*), y aparece en letra cursiva en el cuerpo del artículo para evitar confusiones con otras palabras. Para seguir el orden cronológico de los episodios de enseñanza, es importante saber que el año escolar transcurrió desde la mitad de agosto hasta la mitad de junio del año siguiente.

Surgimiento de la metáfora de "partir"

Según el currículo escolar de matemáticas, se enseña a los estudiantes de tercer grado los algoritmos generalmente aceptados para la adición y la sustracción con dos y tres dígitos. En cuarto grado se espera que operen con números de varios dígitos comenzando con unidades de mil. En el estudio que se reporta aquí, era natural indagar sobre las habilidades de cálculo de los estudiantes, y su comprensión de número y de valor posicional. De acuerdo con esto, diseñamos actividades exploratorias como: 1) contar hacia adelante y hacia atrás de diez en diez y de cinco en cinco a partir de cualquier número; 2) aumentar y disminuir de diez en diez, números de dos y de tres dígitos; 3) calcular cuántos dieces, cincos o doses hay entre dos múltiplos de diez; 4) escribir y leer numerales, y 5) hacer cálculos mentales con números de dos y de tres dígitos.

A medida que los estudiantes participaban en estas actividades, llegó a ser evidente que aunque pudieran leer numerales de dos y tres dígitos, sumarlos y restarlos vía el algoritmo generalmente aceptado, y transformar algunas palabras numéricas en numerales, no habían desarrollado un sentido para números mayores a 150. De hecho, al aumentar un número de diez en diez como 23, muchos podían hacerlo hasta llegar a los noventas, en este caso a 93, pero no podían pasar de la centena para llegar a 103. Al agregar cada decena, muchos contaban de uno en uno con los dedos; muy pocos habían construido secuencias de palabras numéricas para apoyar su comprensión numérica.

También nos dimos cuenta de que podían escribir numerales de tres dígitos en cuanto pudieran identificar a partir de las palabras numéricas los dígitos que ocuparían los lugares de las centenas, las decenas y las unidades, como en el caso de doscientos treinta y nueve. Sin embargo, palabras numéricas como doscientos siete presentaban dificultades porque no escuchaban una palabra asociada con el dígito de las decenas. Por consiguiente, varios estudiantes escribían 2007 o 27, en vez de 207.

Nuestra primera meta era proporcionarles experiencias que les permitieran construir relaciones numéricas significativas. Para tal propósito, enfatizamos el conteo y el cálculo mental. También desarrollamos una secuencia de tareas de enseñanza relacionadas con dinero para apoyar las construcciones de unidades de diez y otras unidades. Estas tareas proporcionaron contextos de la vida real, como la descomposición de 247 dólares en 2 billetes de cien dólares, 4 de diez y 7 de un dólar, u otras combinaciones, como 24 billetes de diez dólares y 7 de un dólar, o 247 billetes de un dólar, o 49 billetes de cinco dólares y 2 de un dólar.

Al comienzo del año escolar se presentaron cálculos numéricos verbales o se usaron formatos escritos no familiares para evitar recuerdos instantáneos de algoritmos memorizados. Entre los formatos utilizados estaban los arreglos rectangulares de 2 por 2. Los números se ubicaban en tres de ellos, mientras que el cuarto rectángulo quedaba vacío para que escribieran la suma o para que encontraran un número faltante cuando se daba la suma.

Al mismo tiempo que los estudiantes se ajustaban a las nuevas expectativas del aula y establecían sus propias maneras de hablar e interactuar, el discurso del aula tomaba nuevos rumbos. La profesora esperaba pensamiento individual y los estudiantes esperaban que ella se interesara de manera auténtica en su pensamiento aritmético. Estas expectativas mutuas los impulsaban a verbalizar no solo sus propias estrategias de solución, sino también sus interpretaciones de las estrategias de solución de otros estudiantes. A la vez, esperaban preguntas de la profesora y de sus pares y las respondían de manera voluntaria.

Hacia la mitad de la tercera semana de clases se les pidió encontrar mentalmente la suma de los números 80, 5 y 15. Se presentaron estos números en un arreglo rectangular y se planteó la tarea usando el retroproyector. Después de darles tiempo de llegar a sus resultados, la profesora procedió a la discusión con todo el grupo. Mientras tanto, experimentaban con lo que pudiera aceptarse como explicación válida y se esforzaban en crear representaciones de sus estrategias de solución para comunicarlas al grupo. Aun cuando podrían haber utilizado el tablero para explicar sus soluciones usando algún tipo de simbolización convencional, decidieron usar solamente lenguaje natural. En el intermedio, la profesora/investigadora no estaba segura de si todos los estudiantes estaban dando sentido a los argumentos verbales presentados y decidió simbolizarlos usando notación convencional que conocían.

Episodio del 8 de septiembre

5	15
80	

P: Por favor, sumen mentalmente estos números. Cuando sientan que están listos para explicar su solución, levanten la mano.

Am: 80 más 5 es 81-82-83-84-85 [contando de uno en uno con los dedos hasta cinco], 85 más 15 es 100.

P: [Escribe 80 + 5 = 85, 85 + 15 = 100 mientras *Am* describe su solución]. ¿Cómo sumaste 85 y 15?

Am: 85 más 5, más 5, más 5. Eso da 15 [mostrando 3 dedos].

P: [Escribe 85 + 5 + 5 + 5 = 100, mientras *Am* describe su solución].

Ra: *Partes* el 15 en 5, 5 y 5.

St: 5 y 15 es 20. 80 y 20 es 100.

P: [Escribe 5 + 15 = 20, 80 + 20 = 100, mientras *St* describe su solución].

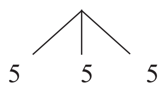
Pr: 80 y 15 es 95. 95 y 5 es 100.

P: [Escribe 80 + 15 = 95, 95 + 5 = 100, mientras *Pr* describe su solución].

P: [*Ra* levanta una mano] Bueno *Ra*, ¿qué hiciste?

Ra: 80 más 15 es igual a 95. Parto el 15 en 5, 5 y 5. Entonces 95 más 5 es igual a 100.

P: [Escribe la solución de *Ra* 80 + 15 = 95, 95 + 5 = 100].



Ra, la palabra *partir* es muy buena para hablar de números.

En este episodio vemos a los estudiantes generar sus propias estrategias para sumar números. Esto se debió, en parte, a la falta de instrucciones explícitas para seguir un orden particular para sumar números. El episodio ilustra dos eventos de aprendizaje y enseñanza interrelacionados. Las estrategias que aplicaron para sumar números mentalmente sin usar el algoritmo convencional para la suma indica el evento de aprendizaje. El evento de enseñanza está indicado por el esfuerzo intencional de la profesora para simbolizar argumentos verbales a través de igualdades numéricas convencionales conocidas por los estudiantes a partir de sus experiencias escolares anteriores y por el diagrama numérico espontáneo realizado por la profesora para simbolizar la interpretación que hizo *Ra* de la palabra *partir* en un contexto numérico. Es importante observar que las explicaciones verbales (creación de signos), el diagrama numérico (creación de signos) y la notación aritmética (uso de signos) son signos dentro de tres sistemas semióticos diferentes: el sistema del lenguaje natural, el sistema visual espacial y el sistema de notación matemática.

Una parte significativa del episodio es la interpretación dada por *Ra* al término *partir*. *Ra* interpretó la manera en que *Am* actuó sobre el número 15 como un partir a 15 en 5, 5 y 5. Luego usó la palabra *partir* en la descripción de su propia estrategia de solución. Finalmente, la profesora intentó espontáneamente simbolizar el "Partes el 15" de *Ra* a través de una suerte de simbolización visual. La profesora también reconoció la introducción que *Ra* hizo de la palabra *partir* en el discurso aritmético del aula. Para darle el crédito, la profesora no solo respetó la contribución de *Ra* sino que también, indirectamente, le hizo saber al grupo que su contribución era valiosa y apreciada.

En este punto es necesario hacer dos observaciones. En primer lugar, solamente en retrospectiva vimos el efecto duradero del uso de la palabra *partir* para generar, interpretar o describir estrategias numéricas y el establecimiento de *partir* como metáfora (metasigno icónico) que medió las maneras de pensar de los estudiantes sobre los números. En segundo lugar, el diagrama numérico simple utilizado por la profesora, en un esfuerzo para aclarar a todos los estudiantes la explicación de *Ra*, llegó a ser imitado por todos, e incluso superado por diagramas numéricos que realizaron de maneras no pretendidas ni imaginadas por la profesora.

A partir del episodio anterior vienen a la mente varias preguntas. ¿Verían otros estudiantes, incluso *Am*, la observación que hizo *Ra* de la semejanza entre el significado de la palabra *partir* en el mundo físico (separación de un objeto en partes) y en el mundo numérico (separación de un número en unidades)? ¿Generarían los estudiantes sus propios diagramas numéricos para representar y comunicar sus propias estrategias de solución?

Las siguientes secciones presentan un análisis de las estrategias de solución de los estudiantes para tareas de adición, división y multiplicación propuestas por la profesora y por ellos. Los episodios elegidos son representativos de la actividad aritmética y semiótica que evolucionaba en este grupo de cuarto grado. El análisis de estos episodios indica que los estudiantes: a) llegaron espontáneamente a usar la palabra *partir* para expresar la idea de separar un número en unidades; b) generaron sus propios diagramas numéricos, y c) muy pocas veces usaron otras palabras para expresar sus acciones mentales de separar un número en unidades. El análisis también indica que la observación de *Ra* sobre la semejanza entre separar objetos en partes y separar números en unidades llegó a ser una metáfora colectiva para mediar las estrategias numéricas de los estudiantes.

Metáfora, diagramas numéricos y adición de números

Tan pronto como la profesora reconoció el uso de la palabra *partir* en la corriente del discurso del aula y los estudiantes comenzaron a ver la semejanza planteada por *Ra* entre la acción física de separar en partes a un objeto y la acción mental de separar en unidades a un número, el uso de la palabra *partir* llegó a prevalecer, aunque algunos estudiantes esporádicamente utilizaron palabras como *quitar* o *romper*. Esto indica que utilizaron la semejanza planteada por *Ra* (i.e., metáfora de partir) como un recurso de mediación para actuar sobre números, lo mismo que un vehículo para comunicar sus estrategias de solución. Más aún, la metáfora de *partir* disparó el surgimiento de diagramas numéricos idiosincráticos como recurso para producir o comunicar sus estrategias de solución.

En la teoría peirceana de signos, la metáfora y los diagramas numéricos se consideran íconos de diferentes grados de iconicidad. La metáfora de *partir* que usaron los estudiantes fue un ícono para la relación intangible entre la acción física de separar un objeto en partes y la acción mental de separar un número en unidades. Los diagramas numéricos fueron íconos materiales que representaron relaciones numéricas hechas por los estudiantes, pero también tuvieron funciones indéxicas y simbólicas: funciones indéxicas porque indicaron en el mundo físico la lógica de esas relaciones numéricas, y funciones simbólicas porque acarrearon los significados atribuidos a ellos por sus creadores. En otras palabras, los diagramas numéricos se consideran como signos de naturaleza icónica, indéxica y simbólica que representan objetos conceptuales (e.g., relaciones numéricas que surgen de tareas aritméticas).

El siguiente episodio ilustra cómo la metáfora de *partir* medió las conceptualizaciones de los estudiantes acerca de unidades de diez, de veinte y de veinticinco para hallar la suma de 26 y 25 sin usar el algoritmo de adición. También podemos observar los primeros intentos de los estudiantes por transformar argumentos numéricos en diagramas numéricos.

Episodio del 20 de octubre

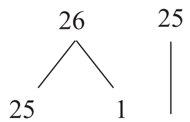
P: Si les pido sumar mentalmente 25 y 26, ¿qué harían?

[Varias manos se levantan inmediatamente].

Mi: 6 y 4 es 10 unos, se puede hacer un diez. 2 dieces y 2 dieces es 4 dieces, luego eso es 5 dieces; es decir 50. 50 y 1 es 51.

Pr: *Parto* 20 en 2 dieces y 20 en 2 dieces; 6 y 5 es 11. 5 dieces es 50 y 1 es 51.

Ra: 25 y 25 es 50 y 1 es 51. Voy a mostrarles [pasa al tablero y hace el siguiente diagrama numérico]



Li: 5 más 6 es 11. 2 dieces y 2 dieces es 4 dieces, otro 10 es 50. 1 más es 51.

St: Quito 6 de 26 y quito 5 de 25. 20 y 20 es 40. 6 y 4 es diez. 1 más es 51.

En el episodio anterior, algunos estudiantes separaron los números 26 y 25 en unidades de diez y uno; otros estudiantes conceptualizaron los mismos números en unidades de veinte, veinticinco y uno. Aunque no todos los estudiantes usaron la palabra *partir* para describir su separación de los números en unidades, la consistencia y la claridad de sus explicaciones y de sus énfasis orales sobre las unidades que usaron indican que la metáfora de *partir* estaba mediando sus acciones mentales. En otras palabras, dicha metáfora fue un recurso de conceptualización para los estudiantes.

Finalmente, en este episodio *Ra* transformó su argumento numérico verbal en un diagrama numérico para indicar la separación de 26 y la no separación de 25. Hasta este momento, *Ra* era el único estudiante que se estaba moviendo claramente a través de sistemas semióticos, es decir, el sistema del lenguaje natural y el sistema visual y espacial. También parece como si *Ra* estuviera tratando de imitar el diagrama numérico de la profesora. La transformación de un signo en otro es importante porque cuando los estudiantes lo hacen, esto indica no solo la flexibilidad de su comprensión sino también su capacidad intelectual de ver la misma estrategia de solución incorporada en dos sistemas diferentes de signos.

Para consolidar más las conceptualizaciones del número que tenían los estudiantes en términos de unidades, aumentamos el tamaño de los números en nuestra rutina diaria de cálculo mental. El siguiente episodio muestra diferentes maneras en las que sumaron mentalmente 260 y 60.

Episodio del 27 de octubre

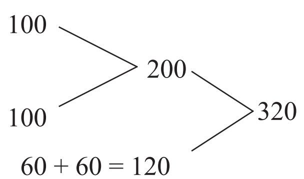
P: Así que, niños, doscientos sesenta y sesenta más, ¿cuánto es? Háganlo mentalmente. [Después de aproximadamente un minuto, se levantan varias manos para indicar que ya tienen sus resultados. La profesora se desplaza por el salón y los estudiantes le dicen en voz baja sus respuestas. Ella da de inmediato a cada uno algún tipo de retroalimentación verbal. Luego la profesora les pide que expliquen sus estrategias de solución al grupo].

Mi: Tomo 2 sesentas para tener ciento veinte. Sumo cien [de ciento veinte] con los 2 cientos [de doscientos sesenta] y se obtiene 3 cientos. Veinte más es trescientos veinte

Ra: Rompí a 260 en 60 y 200. 60 y 60 es 120. Sumo 120 y 200. 100 y 200 eso sería 300 y con el 20 sería 320

Ho: 260 es 200 y 60. *Parto* a 60 en 30 y 30 y el otro 60 en 30 y 30. 30 y 30 es 60 y 30 es 90 y 30 es 120. 200 y 120 es 320

Ri: *Parto* a 260 en 100 y 100 y 60. 60 y 60 es 120. 100 y 100 es 200. 200 y 120 es 320 [va al tablero y hace el siguiente diagrama numérico].



En este episodio, las acciones de partir y reunir que los estudiantes realizan parecen estar mediadas por la semejanza que han conceptualizado entre las acciones físicas de separar un objeto en partes y reunir esas partes para constituir un nuevo objeto y las acciones mentales de separar dos números en unidades y reunirlas para constituir su suma. De nuevo, en este episodio los estudiantes pusieron un énfasis oral en las unidades de diez, de cien, de sesenta y de treinta, indicando su flexibilidad para ver los mismos números 260, 120, 60 y 320 como constituidos por unidades en más de una manera. Esto indica que en las mentes de los estudiantes, las unidades no eran entidades estáticas que constituyeran números de alguna manera predeterminada sino que los números, por el contrario, se podían reconceptualizar una y otra vez en términos de diferentes unidades, de acuerdo con metas autogeneradas para construir estrategias particulares de solución.

Es interesante observar que el diagrama numérico de *Ri* representa no solo a sus acciones de partir sino también a sus acciones de partir y reunir. Los otros estudiantes también estaban partiendo y reuniendo de acuerdo con sus metas autogeneradas, pero no representaban estas acciones por medio de diagramas numéricos. *Ri* también tradujo su argumento numérico verbal en un diagrama numérico.

Una pregunta que surge es si la conceptualización del número en términos de unidades media o dificulta la conceptualización de otras operaciones como la división y la multiplicación. Las siguientes dos secciones indican que la metáfora de partir medió tales operaciones e incluso contribuyó a anticipar los algoritmos convencionales para la división y la multiplicación.

Metáfora, diagramas numéricos y división de números

Dada la familiaridad de los estudiantes con el sistema monetario del dólar, preparamos una variedad de materiales didácticos y tareas aritméticas usando el concepto de dinero, tanto para facilitar la conceptualización del número en términos de unidades, como para comprender mejor el sistema de notación del valor posicional y su relación con los algoritmos convencionales. Tan pronto como los estudiantes llegaron a confiar en sus propias estrategias numéricas y maneras de comunicar su pensamiento al grupo, no fue sorprenderte verlos proponiendo problemas.

En el siguiente episodio, *Pr* toma un facsímil de un billete de mil dólares de uno de los “bancos” (un banco es una caja plástica que contiene facsímiles de billetes organizados por denominación) y pide a sus compañeros encontrar el número de billetes de cincuenta dólares por los cuales se podría cambiar este billete. En realidad, a través de la noción de cambio, *Pr* pidió implícitamente que los demás reconstituyeran multiplicativamente a mil dólares en términos de unidades de cincuenta o que dividieran a mil por cincuenta. La pregunta de *Pr* indica una gran intuición numérica de parte suya, dado que la multiplicación y la división son operaciones inversas. Decimos intuición porque no creemos que él fuera consciente de este hecho.

Se animó a los estudiantes para que respondieran la pregunta de *Pr* usando lápiz y papel. Después de trabajar en sus puestos durante cinco minutos, presentaron sus soluciones. Estas soluciones fueron mediadas por el conteo doble usando billetes y dedos lo mismo que diagramas numéricos. A continuación, se describen algunas de dichas soluciones.

Episodio del 28 de octubre

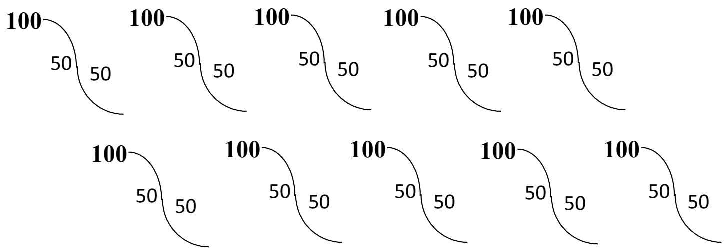
Pr: Señora W, tengo una pregunta para el grupo. Si uno va al banco y cambia un billete de mil dólares, ¿cuántos de cincuenta recibirá?

P: *Pr* ¡esa es una buena pregunta! ¿Qué tal si todos tratamos de resolverla? Usen lápiz y papel si quieren.

Am: 100 es 1, 200 es 2, 300 es 3, 400 es 4, 500 es 5, 600 es 6, 700 es 7, 800 es 8, 900 es 9, 1.000 es 10. 10 cientos es un mil [mostrando las dos manos extendidas]. Dos cincuentas hacen un ciento. Dos es 1 [levantando el dedo meñique de su mano izquierda], cuatro es 2 [levantando el dedo anular de su mano izquierda], seis es 3 [levantando el dedo del corazón de su mano izquierda], ocho es 4 [levantando el dedo índice de su mano izquierda], diez cincuentas es 5 cientos [levantando el dedo pulgar de su mano izquierda]. [Mira su mano derecha] lo duplicas hasta 20 cincuentas en 10 cientos. Así que hay 20.

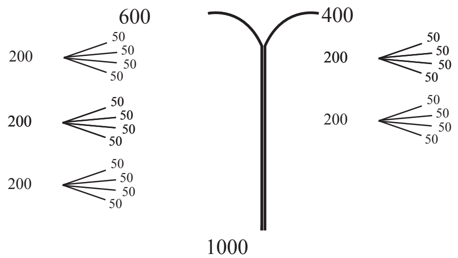
Js: Bueno, sé que puedo *partir* a mil en 10 cientos [toma 10 billetes de cien dólares de su "banco"]. 2 cincuentas [pone su primer billete de cien dólares], 4 [pone su segundo billete de cien dólares], 6 [pone su tercer billete de cien dólares], ..., 18 [pone su noveno billete de cien dólares], 20 [pone su décimo billete cien dólares]. 20 cincuentas es mil.

Ra: Voy a pasar al tablero [dibuja su diagrama]



Parto mil en 10 cientos [mostrando los cientos en los diagramas numéricos] y cada ciento en 2 cincuentas [mostrando los cincuentas en cada 100 del diagrama numérico]. Hay 2-4-6-8-10 cincuentas aquí [mostrando los cincuentas de la primera fila de su diagrama numérico] y 10 más aquí [mostrando los cincuentas de la segunda fila de su diagrama numérico], es decir, 20 cincuentas.

Ri: [Dibuja el siguiente diagrama en el tablero]



Parto 1 mil en 6 cientos y 4 cientos. 6 cientos es 2 cientos, 2 cientos y 2 cientos. 4 cientos es 2 cientos y 2 cientos. Hay 4 cincuentas en 2 cientos. 4-8-12 [mostrando los cincuentas en el lado izquierdo de su diagrama numérico]. 4-8 aquí [mostrando los cincuentas en el lado derecho de su diagrama numérico]. 12 y 8 es 20. 20 cincuentas.

Las estrategias de solución de los estudiantes indican que ellos parten secuencialmente o cambian mil dólares en 10 cientos o en 5 doscientos, cada ciento en 2 cincuentas, y cada doscientos en 4 cincuentas. Sin embargo, fueron diferentes los medios que usaron para presentar la acción de partir o cambiar un billete de mil dólares. *Am* indicó verbalmente la acción de partir un billete de mil dólares en billetes de cien y usó los dedos para conteo doble. Hizo conteo doble de los cincuentas hasta llegar a 500 (usando la mano izquierda) y luego duplicó su conteo doble cuando se dio cuenta de que los dedos de la mano derecha le servían para seguir contando los grupos de cien que hay en mil. Por su parte, *Js* indicó que podría partir un billete de mil dólares por medio de un cambio real en diez billetes de cien y también partir cada billete de cien en dos billetes de cincuenta mediante conteo doble, usando los billetes de cien para llevar la cuenta.

Las estrategias de solución de *Am* y *Js* fueron mediadas por la metáfora de *partir* y el uso de dedos o billetes. El *movimiento* real de dedos y billetes fueron signos indéxicos que asociaron los dedos y los billetes con los registros del conteo. Estas estrategias de solución se presentaron en la forma de argumentos numéricos verbales (signos de naturaleza simbólica) mediados por la metáfora de *partir*.

Aunque *Ra* usó un diagrama numérico para comunicar su estrategia de solución, esta es, en esencia, similar a las de *Am* y *Js*. La descomposición que hizo *Ra* de un billete de mil dólares en 10 cientos también estuvo mediada por la metáfora de *partir*, pero en vez de usar dedos o billetes, representó los 10 cientos haciendo un diagrama numérico con dos filas de 5 cientos cada una. En vez de conteo doble para contar los cincuentas, utilizó segmentos curvos que salían de cada ciento. Los dos espacios determinados por cada segmento se usaron para representar dos cincuentas. Finalmente, contó los cincuentas de una fila y duplicó ese número ya que la segunda fila tenía tantos cientos como la primera.

La estrategia de solución de *Ri* es un poco diferente de la solución de los demás. Utilizó recursivamente la metáfora de partir y creó un diagrama numérico. Primero, separó mil en una unidad de seis cientos y una unidad de cuatro cientos. Luego, partió de nuevo la unidad de seis cientos en 3 unidades de dos cientos y la unidad de cuatro cientos en 2 unidades de dos cientos; finalmente, partió cada unidad de dos cientos en 4 unidades de cincuenta. En los diagramas numéricos de *Ri* y *Ra*, los espacios, las líneas y los numerales jugaron papeles simbólicos y también indéxicos.

Ra y *Ri* presentaron primero sus estrategias de solución a través de diagramas numéricos; luego, tradujeron sus diagramas numéricos en argumentos numéricos verbales. Sus transformaciones de signos de un sistema semiótico a otro indican tanto su capacidad de coordinar dos representaciones diferentes de la misma estrategia de solución como la flexibilidad de su comprensión. En general, estas estrategias de solución no son más que la construcción de Interpretantes autodirigidos, arbitrados por su propia iniciativa simbólica, es decir, la metáfora de partir, diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales.

Metáfora, diagramas numéricos y multiplicación de números

Los problemas enunciados en palabras fueron un componente esencial de las tareas de enseñanza generadas para el experimento de enseñanza. En algunos casos, la profesora pidió a los estudiantes generar problemas enunciados en palabras, similares a los que se les propusieron. En otros casos, se les planteó un problema enunciado en palabras, y se les pidió formular preguntas usando la información dada. Por ejemplo, la profesora les dijo: “La guía telefónica de una aldea tiene 120 nombres en cada página”. Luego de una discusión, estuvieron de acuerdo en preguntar sobre “el número de nombres en 12 páginas”. La profesora escribió luego el siguiente problema en el retroproyector. “La guía telefónica de una aldea tiene 120 nombres en cada página. ¿Cuántos nombres hay en 12 páginas?”.

A continuación se analizan cuatro de las soluciones a este problema. Todos trabajaron por su propia cuenta usando papel y lápiz, y después usaron el tablero para presentar sus soluciones a todo el grupo. Las explicaciones de los estudiantes indican que sus estrategias de solución estuvieron mediadas por la metáfora de partir.

Episodio del 4 de mayo

Solución de *Ri:*

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times\ 12 \\ \hline \\ \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 120 \\ \times\ 10 \\ \hline 1.200 \end{array} \quad \begin{array}{r} 120 \\ +\ 120 \\ \hline 240 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 1.200 \\ +\ 240 \\ \hline 1.440 \end{array}$$

Sé que tengo que multiplicar a 120 por 12. Pero 12 es 10 y 2. Sé que 10 por 120 es 1.200. 2 por 120 es 120 y 120. Eso es 240. Luego sumé 1.200 y 240.

P: ¿Cómo sabes que 10 por ciento veinte es mil doscientos?

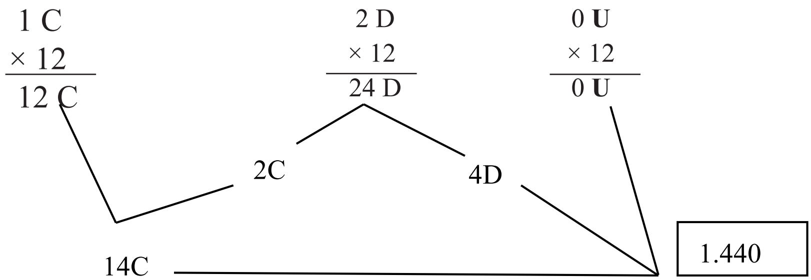
Ri: *Parto* a ciento veinte en cien y veinte. 10 cientos es mil. 5 veintes es 1 ciento y 10 veintes es 2 cientos. Es decir, mil doscientos.

P: ¿Cómo sumaste mil doscientos y doscientos cuarenta?

Ri: Mil doscientos y doscientos es mil cuatrocientos. Cuarenta más es mil cuatrocientos cuarenta.

Ri partió primero el multiplicador 12 en 10 y 2 y luego tomó diez veces a 120; también sumó 120 dos veces para encontrar dos por 120. Luego sumó los dos resultados anteriores. El acto de *Ri* de partir el multiplicador lo condujo a hallar el resultado en tres pasos representados en su diagrama numérico. También usó el acto de partir el multiplicando, 120, en 100 y 20 para describir su estrategia para encontrar el producto de 10 y 120. Al partir el multiplicador, anticipó la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y la usó para hallar su resultado final sumando los dos productos. Esta anticipación intuitiva de la propiedad distributiva también lo condujo a anticipar una versión inicial del algoritmo convencional para la multiplicación. *Ri* representó su estrategia de solución usando signos de dos sistemas semióticos diferentes. El primer signo fue su diagrama numérico y el segundo su argumento numérico verbal que fue expuesto posteriormente cuando interactuó con la profesora. Estos dos signos y la transformación del primero en el segundo indican la iniciativa simbólica de *Ri* para multiplicar dos números sin necesidad de una regla memorizada.

Solución de *Ho*:



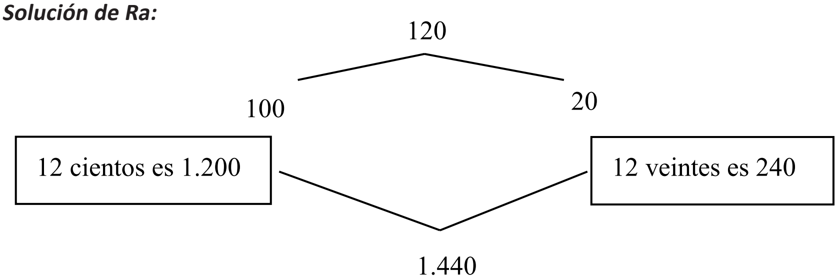
P: ¿Podrías explicarnos lo que hiciste?

Ho: *Partí* a ciento veinte en 1 ciento [1C], 2 dieces [2D] y 0 unos [0 U]. 12 por cien es 12 cientos. 12 por 2 dieces es 24 dieces [24D]. 12 por 0 unos es 0 unos [0 U]. Como ves, 24 dieces es 2 cientos [2C] y 4 dieces [4D] porque 10 dieces es 1 ciento. En total, tengo 14 cientos [14C], 4 dieces [4D] y 0 unos [0 U]. Diez cientos es mil. O sea, mil, cuatrocientos cuarenta unos.

A diferencia de *Ri*, *Ho* partió el multiplicando en vez de hacerlo con el multiplicador. Usó una notación acordada por los estudiantes en clases anteriores para referirse a unidades de cien como C, unidades de diez como D, y unidades de uno como U. *Ho* encontró tres productos y los sumó utilizando su conocimiento consolidado sobre unidades. Descompuso a 120 en 1 ciento (1C), 2 dieces (2D), y 0 unos (0U), multiplicó cada una de estas unidades por 12 y obtuvo 12C, 24D y 0U. Finalmente, partió 24 dieces (24D) en 2 cientos (2C) y 4 dieces (4D), y representó su acto de partir por medio de un diagrama numérico. También usó diagramas numéricos complementarios para representar la reunión de 12 cientos (12C) y 2 cientos (2C) en 14 cientos (14C), lo mismo que la reunión de 14 cientos (14C), 4 dieces (4D) y 0 unos (0U) en 1.440. Esos resultados indican que tenía una idea clara y básica de multiplicación que iba más allá de la simple memorización de las tablas de multiplicar.

Después de presentar su sofisticado diagrama numérico, él pudo transformarlo en un argumento numérico verbal mediado por la metáfora de partir. Su capacidad de transformar su diagrama numérico (signo de naturaleza icónica, indéxica y simbólica) en un argumento numérico verbal (signo simbólico) indica su profunda comprensión de número en términos de unidades, lo mismo que su iniciativa simbólica. *Ho* también pudo anticipar intuitivamente tanto la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición como una versión inicial del algoritmo convencional para la multiplicación.

Solución de Ra:



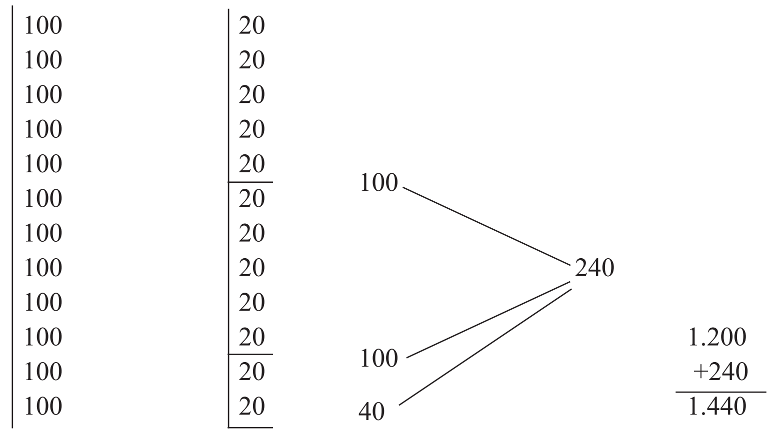
P: ¿Podrías explicarnos lo que hiciste?

Ra: *Partí* a 120 en 100 y 20. 12 cientos es mil doscientos porque 10 cientos es mil. 12 veintes es… (permanece en silencio durante varios segundos), 5 veintes es 100, 10 veintes es 200, 2 veintes es 40. Es 240. 1.200 y 240 es 1.400 y 40 más. Esto es 1.440.

La solución de *Ra* es similar a la de *Ho* porque él también partió el multiplicando. Tal acto de partir lo condujo a hallar el resultado final sumando dos productos. Esta estrategia también indica la noción intuitiva de *Ra* de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Su diagrama numérico fue más simplificado y abstracto que los de *Ri* o *Ho* porque él sabía tanto el resultado de iterar a 100 doce veces como el resultado de iterar a 20 doce veces. Su diagrama numérico y su argumento numérico verbal estuvieron mediados por su metáfora de partir. Su argumento numérico verbal (signo simbólico) transforma las relaciones numéricas sintetizadas en su diagrama numérico. La transformación de *Ra* de un signo en otro indica su iniciativa simbólica y su flexibilidad para expresar la misma estrategia de solución usando signos en dos sistemas semióticos.

Para resolver el mismo problema, *Js* separó a 120 en un 100 y un 20 e iteró estas unidades para sumar finalmente los dos resultados.

Solución de *Js:*



> *Partí* a 120 en 100 y 20. 12 por ciento veinte es 12 cientos y 12 veintes. [Él muestra la columna de doce cientos] … 100-200-300-…-1.000-1.100-1.200. [Muestra la columna de doce veintes]… 20-40-60-80-100; 20-40-60-80-100; 20-40. 100-200-240. Suma 1.200 más 240. 0 unos y 0 unos es 0 unos; 0 dieces y 4 dieces es 4 dieces; 2 cientos y 2 cientos es 4 cientos; 1 mil es 1 mil. Eso da mil cuatrocientos cuarenta.

Js presentó su diagrama numérico y su argumento numérico simultáneamente. Partió a 120 en unidades de un 100 y un 20 e iteró a 100 doce veces y a 20 doce veces por medio del conteo. Tan pronto como escribió los cientos y los veintes, su diagrama numérico medió su conteo. Más aún, su descripción de la adición de 1.200 y 240 indica que usó el algoritmo convencional haciendo énfasis en las unidades representadas por dígitos específicos. Parece ser que *Js* también tenía una conciencia intuitiva de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. El diagrama numérico y el argumento numérico verbal de *Js* se mediaron mutuamente de manera sinérgica para construir su estrategia de solución.

La iniciativa simbólica de *Js* parece ser algo menos sofisticada que la de *Ri*, *Ho* y *Ra*. Su estrategia de solución se basó en conteo y adición, y su diagrama numérico y argumento verbal no eran independientes entre sí. En contraste, los diagramas numéricos sofisticados de *Ri*, *Ho* y *Ra* no requerían argumento verbal alguno y llegaron a ser objeto de transformación en argumentos numéricos verbales.

En resumen, los diagramas numéricos de los estudiantes eran signos (con funciones icónicas, indéxicas y simbólicas) que representaban sus estrategias de solución. Estos signos eran icónicos porque representaban sus acciones de partir y reunir; eran indéxicos porque indicaban la lógica de las estrategias mentales de los estudiantes; y simbólicos porque representaban la síntesis del pensamiento numérico de los estudiantes. Sus argumentos numéricos verbales eran de naturaleza simbólica con componentes icónicos e indéxicos (i.e., términos y frases, respectivamente).

Aunque al comienzo del año escolar, los estudiantes expresaron sus estrategias de solución solo a través de argumentos numéricos verbales, más bien pronto comenzaron a construir diagramas numéricos. Al comienzo, estos diagramas tenían una relación simbiótica con los argumentos numéricos verbales, pero gradualmente se generaron independientes entre sí, y se convirtieron en objeto de transformación. La transformación de signos entre sistemas semióticos indicó la sofisticación de la actividad cognitiva y semiótica de los estudiantes. A través de su propia creación de signos, los estudiantes manifestaron su iniciativa simbólica (en el sentido de Wilder, 1968) y el papel de estos signos para mediar un cambio desde una comprensión instrumental de los números a una más relacional.

Discusión

Las expectativas de la profesora/investigadora con respecto a la responsabilidad del pensamiento individual y del trabajo individual fomentaron un cambio progresivo y positivo en el discurso del aula y en la actividad aritmética y semiótica de los estudiantes de cuarto grado. En medio de la interacción entre estudiantes y de la profesora con ellos, uno incorporó la palabra *partir* para describir la estrategia de solución de otro. El estudiante usó esta palabra, que evoca la acción física de separar un objeto en partes, para describir la acción mental de separar un número en unidades. Esta semejanza entre las acciones físicas y mentales se propagó en el grupo, y la noción de partir se convirtió en una metáfora (metasigno icónico) que medió la descomposición de números en unidades. Esta metáfora fundamentó las estrategias de solución de los estudiantes para las tareas aritméticas y medió la creación de diagramas numéricos (signos de naturaleza icónica, indéxica y simbólica) y los argumentos numéricos verbales (signos de naturaleza simbólica).

Vale la pena observar que al comienzo del año escolar la profesora/investigadora usó un diagrama numérico simple para facilitar la comprensión de los estudiantes de un argumento numérico verbal presentado por otro estudiante. Aunque el diagrama numérico de la profesora tenía un propósito explicativo más que de enseñanza, parece ser que influyó en los estudiantes, quienes llegaron a generar diagramas más sofisticados que superaron la simplicidad de aquél. Además, tradujeron diagramas numéricos en argumentos numéricos verbales. Esto indica su capacidad de presentar la misma estrategia de solución a través de signos en diferentes sistemas semióticos y al mismo tiempo el surgimiento de su comprensión relacional.

La creación de la metáfora de partir y de los signos subsiguientes por parte de los estudiantes constituye su iniciativa simbólica. La metáfora de partir medió la separación mental de números en unidades y el surgimiento de diversas y flexibles estrategias de solución que posteriormente se representaron a través de signos como diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales. Es decir, la iniciativa simbólica de los estudiantes fue en esencia el componente semiótico de su actividad aritmética.

Permitirles la libertad de conceptualizar y comunicar sus propias estrategias de solución usando su propia iniciativa simbólica fue productivo porque estimuló su actividad cognitiva en vez de aceptar soluciones prefabricadas, separadas de sus propias experiencias numéricas. Esto no quiere decir que el simbolismo convencional y los algoritmos no tengan lugar en el discurso del aula o que todos deban operar por medio de la metáfora de partir, diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales. Lo que el análisis indica es que cuando la profesora apoya la iniciativa simbólica de los estudiantes, ellos son capaces de cambiar su comprensión instrumental (mediada por un reflejo simbólico) por una comprensión relacional (mediada por su propia iniciativa simbólica).

El análisis también indica que cuando el discurso aritmético del aula está basado en el diálogo en vez del monólogo, el grupo construye signos (metáforas, diagramas numéricos y argumentos numéricos) espontáneamente que llegan a mediar sus conceptualizaciones. Por otra parte, cuando la profesora facilitó y tuvo en cuenta la iniciativa simbólica de ellos, se cambió la actividad de enseñanza de ella por una actividad colaborativa de enseñanza-aprendizaje que los involucró a todos. La transformación de los signos de un sistema semiótico a otro, realizada por los estudiantes, fue en esencia el nivel más sofisticado de su iniciativa simbólica y actividad aritmética.

En general, puede decirse que la iniciativa simbólica (i.e., actividad semiótica autogenerada) de este grupo de bajo rendimiento de estudiantes de cuarto grado puede tener lugar también en escenarios de aula en los que prevalezca la interacción dialógica entre estudiantes y profesor, y en los que el profesor reconozca, valore y apoye las metáforas y signos idiosincráticos que surjan como resultado de la participación y la colaboración activa de todos.

Referencias

Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in mathematics classrooms: Their function and their effect. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meanings* (pp. 271-291). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (2000a) Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (2000b). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematics learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17-36). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Steffe, L.P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 83-94.

Cobb, P. y Yackel, E. (1995). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. En D.T. Owens, M.K. Reed y G.M. Millsaps (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-29). Columbus, OH: ERIC/CSMEE.

Confrey, J. (1988). Multiplication and splitting: Their role in understanding exponential functions. En M. Behr, C. LaCampagne y M. Wheeler (eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 250-259). DeKalb, IL: Northern Illinois University.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. En G. Harel y J. Confrey (eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 291-330). Albany, NY: State University of New York Press.

Corrington, R.S. (1993). *An introduction to C.S. Peirce*. Boston: Rowman & Littlefield Publishers.

Ernest, P. (2002, julio). *A semiotic perspective of mathematical activity*. Ponencia presentada en el Grupo de Discusión "Semiotics in Mathematics Education Research" en 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK.

Forman, E.A. y Cazden, C. (1985). Exploring Vygotskian perspectives in education: The cognitive value of peer interaction. En J.V. Wertsch (ed.), *Culture communication and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 323-347). Nueva York: Cambridge University Press.

Godino, J. y Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 149-168). Ottawa, Ont.: Legas.

Heath, T.L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (traducción del texto de Heiberg, con introducción y comentario; 2ª ed. revisada). Nueva York: Dover Publications.

McLellan, J.A. y Dewey, J. (1908). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. Nueva York: D. Appleton and Company.

Moreno-Armella, L.E. y Waldegg, G.C. (2000). An epistemological history of number and variation. En V. Katz (ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 183-190). MAA Notes 51. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Morris, C.V. (1938). *Writings on the general theory of signs*. Chicago: Chicago University Press.

O'Halloran, K.L. (2003). Implications of mathematics as a multisemiotic discourse. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185-214). Ottawa, Ont.: Legas.

Otte, M. (2001, julio). *Mathematical epistemology from a semiotic point of view*.

Ponencia presentada en el Grupo de Discusión "Semiotics in Mathematics Education Research" en 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 11-38.

Parmentier, R.J. (1985). Signs' place in medias res: Peirce's concept of semiotic mediation. En E. Mertz y R.J. Parmentier (eds.), *Semiotic mediation: Sociocultural and psychological perspectives* (pp. 23-48). Orlando, FL: Academic Press.

Peirce, C.S. (1867). Questions concerning certain faculties claimed by man. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (1991, pp. 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Peirce, C. S. (1893-1913). *The essential Peirce: Selected philosophical writings* (vol. 2; editado por *Peirce Edition Project*). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1903). *The three normative sciences*. *The essential Peirce* (vol. 2, 1893-1913; editado por *Peirce Edition Project*, pp. 196-207). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1906a). Prolegomena to an apology for pragmaticism. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (pp. 249-252). Chapel Hill, North Carolina: The University of North Carolina Press.

Peirce, C.S. (1906b). Pragmatism in retrospect: A last formulation. En J. Buchler (ed.), *Philosophical writings of Peirce* (1955) (pp. 269-289). Nueva York: Dover Publications.

Peirce, C.S. (1908). Excerpts from letters to Lady Welby. En Peirce Edition Project (ed.), *The Essential Peirce* (vol. 2, pp. 478-491). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers*, *vol. II, Elements of Logic*. (editado por C. Hartshorne y P. Weiss). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1956). The essence of mathematics. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, (vol. 3, pp. 1773-1783). Nueva York: Simon and Schuster.

Peirce, C.S. (1976). The new elements of mathematics (NEM), (vol. 4, *Mathematical Philosophy*, editado por Carolyn Eisele). The Hague: Mouton and Co. B. V. Publishers.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Nueva York: Columbia University Press.

Sáenz-Ludlow, A. (1997). Iconic means in children's understanding of the division algorithm. En C.W. Spinks y J. Deely (eds.), *Semiotics* (pp. 118-130). Toronto, Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (2002). Sign as a process of representation: A Peircean perspective. En F. Hitt (ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 277-296). México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (2001). Question-and diagram-mediated mathematical activity: A case in a fourth-grade classroom. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *23*(4), 27-40.

Sebeok, T. (1995). Indexicality. En K.L. Ketner (ed.), *Peirce and contemporary thought* (pp. 222-242). Nueva York: Fordham University Press.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L.P. (1983). The teaching-experiment methodology in a constructivist research program. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 469-471). Boston, Massachusetts: Birkhäuser.

Steffe, L.P. y Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetic meanings and strategies*. Nueva York, New York: Springer-Verlag.

Steffe, L.P. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L.P., von Glasersfeld, E., Richards, J. y Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory and applications.* Nueva York: Praeger.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist? En G. Howson (ed.), *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 194-212). Cambridge: Cambridge University Press.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 59-85.

Vygotsky, L.S. (1986). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. (Obra original publicada póstumamente en ruso en 1934 y en inglés en 1962).

Wertsch, J.V. (1981). *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk, NY: Sharpe.

Wertsch, J.V. (1985). *Vygotsky and the social formation of the mind*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Wilder, R. (1968). *Evolution of mathematical concepts*. Milton Keynes, England: The Open University Press.

Wiley, N. (1994). *The semiotic self*. Chicago, Illinois: The University of Chicago Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Este artículo ha sido publicado en inglés con el título: *Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class*, en la revista *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(1), pp. 34-56, 2004. Se agradece el director de la revista y a la editorial por el permiso de traducir y publicar en esta ocasión.

JUEGOS DE INTERPRETACIÓN EN EL AULA: CONSTRUCCIÓN EVOLUTIVA DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS [19]

Adalira Sáenz-Ludlow

La naturaleza inmaterial de los objetos matemáticos requiere que se expresen a través de variadas representaciones físicas (i.e., signos matemáticos) para ser compartidos socialmente. Desde la antigüedad, la simbolización de las entidades matemáticas ha sido una experiencia tanto personal como social, influida por factores culturales, condicionada por requerimientos contemporáneos de la sociedad y orientada por estímulos de eventos no matemáticos (Cajori, 1974/1928; Wilder, 1968; Menninger, 1969). Por tanto, el aprendizaje de las matemáticas implica tanto la interpretación de signos matemáticos como la construcción de significados matemáticos a través de la comunicación con otros.

Estas interpretaciones y estos significados no se construyen de manera inmediata. Más bien, evolucionan de una manera continua, una manera que resulta de la exposición del individuo a una variedad de experiencias estrechamente interrelacionadas dentro de diferentes contextos matemáticos, sociales y físicos. En tales experiencias se combinan múltiples sistemas semióticos (e.g., lenguaje, signos matemáticos y gestos) para fundamentar una interpretación continua y evolutiva de los significados matemáticos. Puesto que la comunicación es posible solo a través de signos (Peirce, CP 4.7), los actos de comunicación son en sí mismos actos de interpretación.

Las interacciones en el aula entre profesor y estudiantes y entre estudiantes son actos de comunicación en dos niveles: actos de comunicación con *uno mismo* y actos de comunicación con *otros*. Aquí sostengo que los *juegos de interpretación* tienen en cuenta la interdependencia entre pensamiento y comunicación, a la vez que explican los procesos de construcción de significado desde una perspectiva semiótica, la perspectiva peirceana. Ilustraré esta noción de juegos de interpretación analizando como tal un episodio de enseñanza en el aula con estudiantes de tercer grado y una duración de cincuenta minutos.

19 Esta investigación fue apoyada por la University of North Carolina en Charlotte y por la National Science Foundation mediante las becas RED 9155734 y RED 9596106. Los puntos de vista y las conclusiones que aquí se expresan son de la autora y no necesariamente de la Fundación o de la Universidad.

Comunicación y lenguaje

La importancia de la comunicación en el aula a través de signos lingüísticos y no lingüísticos ha sido enfatizada en la investigación (Barnes, 1992/1976; Edwards y Mercer, 1987; Ellerton y Clements, 1991; Steinbring, Bartolini Bussi y Sierpinska, 1998; Sfard, 2001) lo mismo que en documentos curriculares. El documento *Principles and standards for school mathematics* (*National Council of Teachers of Mathematics*, 2000) afirma que "la comunicación puede apoyar a los estudiantes en el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos cuando ellos escenifican una situación, dibujan, usan objetos, hacen recuentos verbales y explicaciones, usan diagramas, escriben y usan símbolos matemáticos" (p. 61).

El documento también reconoce la comunicación como un proceso en el que las ideas se vuelven objetos de reflexión, discusión y correcciones, propiciando la construcción de significados matemáticos privados que en el proceso se vuelven públicos y se exponen a justificación y validación. Para que esto ocurra, el profesor tiene que construir gradualmente el aula como una comunidad en la que se aboga por la indagación, y los estudiantes se sienten libres de exponer su pensamiento y sus interpretaciones.

La importancia del lenguaje en la comunicación no se ha cuestionado. Los aspectos socioculturales y lingüísticos de la comunicación se han estudiado profusamente. Véanse los trabajos de Saussure (1959/1916), Wittgenstein (1991/1953), Foucault (1972), Habermas (1984), Vygotsky (1986/1934), Bakhtin (1986/1979) y Bourdieu (1999/1981), entre otros. La comunicación matemática en el aula conlleva más que aspectos puramente lingüísticos. Implica, entre otras cosas, notación matemática, gestos, lenguaje corporal y disposiciones que influyen en cómo los participantes del aula actúan y reaccionan.

El lenguaje natural como recurso para mediar la comunicación no es *neutral* (Kanes, 1998), pero tampoco lo es el sistema de notaciones matemáticas. Kanes comenta que el lenguaje natural "en el peor de los casos, distorsiona la formación de ideas" y "en el mejor de los casos, hace posible la construcción de conceptos y la comunicación" (p. 135). Por la misma razón, las notaciones matemáticas, en el peor de los casos, distorsionan los significados matemáticos si no son interpretadas en contexto y no se tienen en cuenta distinciones que no son familiares; y, en el mejor de los casos, nos permiten establecer explícitamente lo que queremos afirmar, eludiendo las ambigüedades que la estructura del lenguaje natural no tiene manera de evitar (Nagel, 1956).

La comunicación como actividad semiótica

La comunicación matemática involucra lenguaje natural, notación matemática, gestos y lenguaje corporal entre otros sistemas semióticos. Así que, la comunicación en el aula exhibe una naturaleza semiótica reconocida, directa o indirectamente, por matemáticos, educadores matemáticos y psicólogos (Wilder, 1968; Piaget, 1970; Vygotsky, 1978/1930; Skemp, 1987; Pimm, 1987; Walkerdine, 1988; Vile y Lerman, 1996; Vile, 1997; Whitson, 1997; Sáenz-Ludlow, 1997; Otte, 1998, 2006; Steinbring, 2006; Duval, 1999a, 2006; Cobb, 2000b; Dörfler, 2000; Van Oers, 2001; Ernest, 2003; Radford, 2003; Hoffmann, 2004, 2005).

Cualquier actividad semiótica del individuo supone la existencia de interacción social (Peirce, 1906b; Whitehead, 1985/1927; Vygotsky, 1986/1934; Dewey, 1963/1938), pero el debate continúa con respecto a si el papel de la interacción social en los procesos de pensamiento es primario o secundario. Para Piaget, la actividad cognitiva del individuo es primaria en la construcción del conocimiento, en tanto que la interacción social permanece en un lugar irremplazable aunque secundario (Piaget, 1970, 1973).

En contraste, para Vygotsky (1986/1934), la interacción social mediada por herramientas simbólicas- juega un primer papel fundamental en la actividad cognitiva del individuo. Para los interaccionistas simbólicos y los socioconstructivistas, el conocimiento es un producto social construido a medida que la gente interactúa (Blumer, 1995; Bauersfeld, 1995; Cobb y Yackel, 1995).

Desde una perspectiva semiótica, ni la actividad cognitiva del individuo ni su interacción social es primaria; ambas coexisten y coactúan de manera sinérgica para apoyar el proceso evolutivo de interpretación de signos y la construcción de significado.

Ambos, pensamiento y comunicación (tomada, en su sentido más amplio, como interacción social) parecen ser paralelos y estar interrelacionados simultáneamente. Coexisten como las dos caras de la misma moneda y aunque se puede hablar de cada cara de la moneda como una entidad por derecho propio, ellas no se pueden separar entre sí (cf. Sfard, 2001). Interpreto la comunicación en su sentido más amplio y la uso de manera intercambiable con la interacción social. Por una parte, ambas comprenden no solo comunicación de un mensaje, sino también un enunciador o proponente, un intérprete, y una pluralidad de sistemas semióticos. Por otra parte, ambas comprenden un contexto conceptual y social, un hacer (conceptual y social), observar, hablar, escuchar, leer, escribir, interpretar y pensar.

La semiótica de Peirce proporciona elementos únicos para comprender la interdependencia entre pensamiento y comunicación cuando los signos son interpretados y transformados en nuevos signos. El desarrollo de los significados matemáticos en el aula surge en la interpretación de signos (semiosis), cuando profesores y estudiantes cruzan el umbral de su propia individualidad en la interacción social. Por consiguiente, considero que la interpretación de signos y el uso de signos son en esencia *juegos de interpretación* continuos y evolutivos en los que profesor y estudiantes se constituyen como sujetos intencionales, capaces de interpretar signos lingüísticos, matemáticos y de otros tipos. Este proceso de interpretación da origen a significados privados sujetos a modificación y refinamiento a través de una sucesión de actos colaborativos de interpretación y comunicación, y aquí llamados *ciclos de interpretación*.

Dewey nota la relación de entrelazamiento entre individuos que se comprometen en la comunicación y el efecto positivo de la comunicación en el proceso de educación.

> No solo la vida social se identifica con la comunicación, sino que toda comunicación (y, por tanto, toda vida social genuina) es educativa. Ser receptor de una comunicación es tener una experiencia engrandecida y modificada. Uno *participa* en lo que otro ha pensado y sentido y hasta cierto punto modifica su actitud de una manera moderada o amplia. Quien comunica, tampoco deja de afectarse (1997/1916, p. 5; énfasis agregado).

A partir de trabajos de Peirce, Liszka sintetizó cómo los procesos de comunicación constituyen exactamente procesos de construcción de significado.

> Como proceso, el significado es *comunicación* (cf. LW 196 s.), bien sea entre agentes que interpretan signos (como la comunicación humana) o entre pensamientos dentro del mismo agente (comunicación intraagencial)… El *producto* de la comunicación es *información*; el *efecto* de la comunicación es *comprensión*, en el sentido de una comprensión común compartida, en el caso de la comunicación interhumana (cf. LW 197). (Liszka, 1996, p. 81; énfasis en el original).

Así que, para Peirce, pensamiento, signo, comunicación y construcción de significado están inherentemente correlacionados. El resultado de procesos individuales y colectivos de uso de signos e interpretación de signos (actividad semiótica o semiosis) arraigados en la interacción social es la construcción de significados privados. Estos significados privados se modificarán continuamente y, a la postre, se refinarán para converger hacia aquellos significados convencionales ya establecidos *en* la comunidad y *por* la comunidad. La constitución de estos significados privados y subjetivos y su convergencia hacia significados más objetivos es lo que los *juegos de interpretación* intentan abordar usando la relación triádica del signo de Peirce.

Los individuos interpretan los signos según sus propias redes conceptuales y su interpretación conlleva consecuencias epistemológicas que están latentes o manifiestas. Otte (1998) sostiene que "Un signo es un general, un *tipo*, cuyo modo de ser consiste en que tiene una gran variedad de *réplicas* o *copias*, que pueden influir o determinar al intérprete de tan diferentes maneras como para conducirlo a diferentes desarrollos" (p. 447). La construcción continua de significados matemáticos a través de la interpretación de signos matemáticos en actos de comunicación con uno mismo y con los demás parece ser la esencia de la enseñanza y el aprendizaje. Esta continuidad en la construcción de significado conduce hacia la abstracción y la generalización, características del pensamiento matemático que Peirce (1956) considera como las más importantes. La pregunta es cómo los individuos construyen estos significados de una manera continua a través de un proceso de interpretación. La semiótica de Peirce proporciona una respuesta en su *principio de continuidad* y su relación triádica del signo.

En la siguiente sección expondré la noción de signo, de significado, y el principio de continuidad según Peirce, hasta donde estas nociones se requieren para formular los *juegos de interpretación*. Es bien sabido que la conceptualización de signo debida a Peirce evolucionó durante años en una doctrina global. Él tiene un espectro de definiciones de signos que son complementarias y se clarifican una a otras. Estas definiciones ejemplifican una profunda sensación de la dificultad de expresar la naturaleza de los signos en una definición única y global.

La relación triádica del signo según Peirce

Peirce ubica la actividad sígnica dentro del yo y sus comunidades que, para él, están ubicados dentro de un universo que evoluciona y es profuso en signos. Él define su relación triádica de signo como constituida por *objeto*, *signo* e *interpretante*.

> Defino un *Signo* como cualquier cosa que por una parte está determinada por un *Objeto* y por otra parte determina una idea en la mente de una persona; estas determinaciones son tales que la última, a la que denomino el *Interpretante* del Signo, se ve determinada de manera mediata por el Objeto del Signo. Un Signo, por consiguiente, tiene una relación triádica con su Objeto y con su Interpretante.[20] (Peirce, 1906b, p. 276; énfasis en el original).

20 El texto original es: "I define a Sign as anything which on the one hand is so determined by an Object and on the other hand so determines an idea in a person's mind, this later determination, which I term the Interpretant of the Sign, is thereby mediately determined by that Object. A Sign, therefore, has a triadic relation to its Object and to its Interpretant". Agradezco a Roberto Perry, miembro del Centro de Sistemática Peirceana de Bogotá (Colombia), sus valiosas sugerencias en la traducción de las citas de la obra de Peirce. [N. T.]

Adicionalmente, Peirce considera que un signo no es un signo a menos que sea interpretado o transformado en otro signo que está más completamente desarrollado (CP 5.594). Los signos, en su relación triádica del signo, tienen la función epistemológica de representar *objetos* para un *interpretante* y mediar entre *objeto* e *interpretante* para hacer accesibles los objetos a la mente. Es decir, el signo es algo irreductible entre su objeto y su interpretante. En esta transformación, los signos se interpretan en nuevos signos y, de manera concomitante, en la mente del intérprete surgen interpretantes y objetos más sofisticados (véase Figura 1). Peirce también considera que el significado surge en una tal transformación: "el significado de un signo es aquel signo en el que el primero tiene que transformarse"[21] (CP 4. 132) y "el significado… [es] en su acepción primaria la transformación de un signo en otro sistema de signos"[22] (CP 4.132). Así que, el significado surge cuando los signos son transformados en nuevos signos.

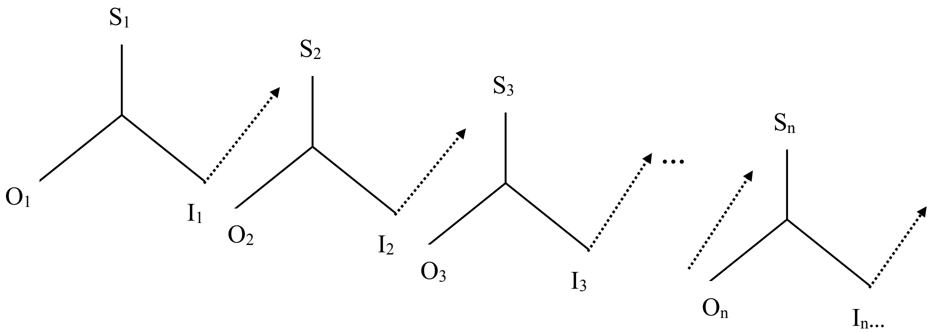


Figura 1. Significado que surge en la transformación de signos en nuevos signos

Puesto que para Peirce la relación triádica del signo es *genuina* y "los tres elementos que la constituyen los liga [a ella] en forma tal que [ella] no consiste en complejo alguno de relaciones diádicas"[23] (CP 2.274), entonces el interpretante (en su sentido más amplio) se puede entender como la *transformación* de un signo en un nuevo signo (véase Figura 1). Esta *transformación* de signos es inmediatamente un *producto* que es el resultado de un *proceso de semiosis* y que tiene algún *efecto* sobre el agente del signo (intérprete o proponente). Esta noción de *transformación* reconcilia las varias definiciones de interpretante dadas por Peirce. Él define interpretante como:

21 El texto original es: "the meaning of a sign is the sign it has to be translated into" [N. T.]

22 El texto original es: "meaning … [is] in its primary acceptation the translation of a sign into another system". [N. T.]

23 El texto original es: "its three members are bound together by it in a way that does not consist in any complexus of dyadic relations". [N. T.]

i) otro signo que resulta de otros signos (CP 5.483; 5.484) o como el producto de la semiosis (CP 4.536); o

ii) el proceso mismo de semiosis o una regla de transformación del signo (CP 5.483; 5.484); o

iii) el efecto esencial sobre el intérprete aportado por la semiosis del signo (CP 5.473; 5.484; 8.191).

El interpretante es la relación del signo con su objeto semiótico con respecto a su intérprete o agente del signo. El *agente del signo* es la persona (enunciador/proponente o intérprete) que se hace cargo del *interpretante* y lo modifica hasta el punto de crear nuevos interpretantes. No hay límite al número de interpretantes reales o posibles creados por el intérprete, y el interpretante está siempre en un estado de llegar a ser, en un proceso de modificación (semiosis ilimitada).

A partir de la transformación continua de signos en nuevos signos, una secuencia concomitante de interpretantes evoluciona originando el surgimiento del significado. Este proceso de transformación es en sí mismo un proceso de interpretación a través del cual los signos llegan a ser transformados en signos menos contextualizados y, por tanto, más generalizados en las mentes de los agentes del signo (intérprete o proponente). Para Peirce, "el interpretante del signo es todo lo que está explícito en el signo mismo que no es ni su contexto ni las circunstancias en que se lo enuncia"[24] (1906b, p. 276). Él considera varios tipos de interpretantes, cada uno con funciones diferentes. Más aún, él reconoce que los interpretantes no solo pueden ser de diferentes grados de complejidad, sino que también pueden ser de diferentes tipos. Aquí consideramos los interpretantes intencional, efectual, comunicacional y lógico. (Véase Hoffmann (2006) y Buchler (1955) con respecto a otros interpretantes y sus interrelaciones).

> Existe el Interpretante *Intencional*, que es una determinación de la mente del enunciador; el Interpretante *Efectual*, que es una determinación de la mente del intérprete, y el Interpretante *Comunicacional,* o digamos el *Cominterpretante*, que es una determinación de aquella mente en la que se tienen que fundir las mentes de enunciador e intérprete para que tenga lugar cualquier comunicación. Esta mente puede llamarse la *co-mente*. [La *co-mente*] es todo lo que es, y debe quedar, comprendido cabalmente entre enunciador e intérprete, desde el comienzo, para que el signo en cuestión cumpla su función.[25] (Peirce, 1908, p. 478; énfasis en el original).

24 El texto original es: "the interpretant of the sign is all that is explicit in the sign itself apart from its context and circumstances of utterance". [N. T.]

25 El texto original es: "There is the Intentional Interpretant, which is a determination of the mind of the utterer; the Effectual Interpretant, which is a determination of the mind of the interpreter; and the Communicational Interpretant, or say the Cominterpretant, which is a determination of that mind into which the minds of utterer and interpreter have to be fused in order that any communication should take place. This mind may be called the commens. [The commens] is all that is, and must be, well understood between utterer and interpreter, at the outset, in order [for] the sign in question [to] fulfill its function". [N. T.]

El interpretante *intencional* motiva al enunciador (proponente) a seleccionar un signo con el propósito de enviar un mensaje. Mientras que el enunciador (proponente) produce un interpretante intencional, el intérprete interpreta y produce, según Peirce, un interpretante *efectual*. El interpretante *efectual* produce una acción sobre el mundo interno del intérprete (un esfuerzo mental) que puede o no producir una acción mental o física. Finalmente, el interpretante *comunicacional* es el pensamiento producido conjuntamente y *compartido en la comunicación* por el enunciador/proponente y el intérprete del signo, o lo que Peirce denomina *cominterpretante* de los agentes del signo.

En otras palabras, el cominterpretante se puede entender como el proceso de las mentes individuales de los agentes del signo, el producto de ellas y el efecto sobre ellas (Liszka, 1996, p. 81). Los agentes del signo también construyen interpretantes lógicos; estos interpretantes se denominan lógicos porque plantean conjeturas y planes de acción que tienen sentido para los agentes del signo dentro de sus propias redes conceptuales. Estos interpretantes lógicos están sujetos posteriormente a modificaciones y correcciones en comunicaciones subsiguientes.

> En el siguiente paso de pensamiento, aquellos primeros Interpretantes *Lógicos* nos estimulan a varios desempeños voluntarios en el mundo interno y procedemos a trazar las líneas alternativas de conducta que las conjeturas nos hubieran abierto. Más aún, somos conducidos por la misma actividad interna, a considerar diferentes maneras en las que nuestras conjeturas pudieran ser ligeramente modificadas. Los interpretantes lógicos deben, por consiguiente, estar en un tiempo verbal relativamente futuro.[26] (Peirce, 1906b, p. 280).

Peirce sostiene que aunque la existencia de interpretantes lógicos depende de la existencia de los interpretantes intencional y efectual, los interpretantes lógicos son más dinámicos y ponen de manifiesto la creatividad en el mundo interior. El elemento temporal presente, pasado y futuro en la red de interpretantes habla directamente de los refinamientos sucesivos de interpretantes existentes, de la construcción potencial de unos nuevos, y de la naturaleza continua de la construcción de significado a través del proceso de interpretación de signos. Desde la perspectiva semiótica de Peirce, la red de interpretantes da cuenta del significado de un concepto matemático. "El problema de qué es el 'significado' de un concepto intelectual solo se puede resolver mediante el estudio de interpretantes o del propio efecto significado de los signos"[27] (CP 5.475).

---

26 El texto original es: "In the next step of thought, those first Logical Interpretants stimulate us to various voluntary performances in the inner world and we proceed to trace out the alternative lines of conduct which the conjectures would have opened to us. Moreover, we are led by the same inward activity, to remark different ways in which our conjectures could be slightly modified. The logical interpretants must, therefore, be in a relatively future tense". [N. T.]

27 El texto original es: "The problem of what the 'meaning'of an intellectual concept is can only be solved by the study of interpretants or proper significate effect of the signs". [N. T.]

Estas redes de interpretantes constituyen la columna vertebral de la actividad de interpretar y conocer que llevan a cabo los participantes del aula que juegan el papel de enunciador/proponente o intérprete en el proceso de interpretar signos matemáticos. En esta actividad, profesor y estudiantes se entienden entre sí como sujetos intencionales y como sujetos interpretadores cuyas actividades individuales concomitantes son esenciales en los procesos de construcción de significado. Tal actividad tiene que ver primariamente, no solo con la transformación de signos en signos más desarrollados, sino también con los efectos importantes que tales signos tienen sobre los agentes que interpretan el signo (profesor y estudiantes). Es decir, construir interpretantes significa estructurar significados matemáticos a través de actos subjetivos de interpretación que de *ninguna manera* son transferencias simplistas de información del profesor al estudiante.

Los conceptos matemáticos constituyen uno de los principales componentes del universo del discurso del aula. Estos conceptos, con el tiempo, han sido validados por diferentes comunidades de matemáticos a través de diferentes culturas y, por tanto, han alcanzado el estatus de *co-mentales*. La meta final de la interpretación del signo en el aula es aproximarse a los significados de estos conceptos matemáticos tanto como sea posible, por medio de redes sucesivas de interpretantes generadas individualmente con la colaboración de los participantes del aula. En este proceso, profesor y estudiantes intercambian sus papeles de proponentes e intérpretes. Esta intercambiabilidad implica un esfuerzo colectivo dirigido hacia la determinación del consenso, que no es más que la constitución de *cominterpretantes*. La aproximación de significados matemáticos privados hacia los significados matemáticos convencionales es un proceso que se realiza con los estudiantes en su formación matemática.

Continuidad en el proceso de interpretación

Las matemáticas, su aprendizaje y su comunicación

La naturaleza de las matemáticas escolares está necesariamente conectada con lo que son las matemáticas. Sin embargo, dicha naturaleza no es solo un problema educativo; es principalmente un problema filosófico con el que filósofos y matemáticos han luchado durante largo tiempo desde diferentes perspectivas filosóficas.

En general, parece haber consenso en que las matemáticas son una actividad sofisticada, arraigada en el razonamiento y la comunicación. Por ejemplo, Peirce (1956) considera que las matemáticas tienen algunas características impactantes. Entre ellas están el aspecto esquelético de sus proposiciones, la generalidad de sus resultados, el uso extraordinario de abstracciones y el énfasis en el razonamiento. Rotman (1988) sostiene que las matemáticas son una actividad y una práctica que tiene maneras formales e informales, escritas y verbales de comunicación. "Si uno observa a sus participantes [los matemáticos], sería perverso no inferir que durante largos periodos están comprometidos en el proceso de *comunicarse* consigo mismos y con otros" (p. 6, énfasis agregado). Sierpinska (1994) caracteriza la actividad matemática "como un juego dialéctico entre libertad y restricciones, invención y descubrimiento; entre la libertad de elecciones iniciales y el confinamiento dentro de leyes de un sistema elegido deliberadamente; entre la creación libre de objetos y la lucha por comprender sus propiedades y significación" (p. 30).

Desde un punto de vista didáctico, se han propuesto varias nociones sobre el aprendizaje de las matemáticas. Muchas de las perspectivas se enfocan en la naturaleza de la actividad matemática de los estudiantes. Por ejemplo, Skemp (1987) considera que los aprendices de matemáticas deberían estar involucrados no solo en una comprensión instrumental (manipulación de marcas en papel, carentes de significado) sino también en una comprensión relacional para aprehender los significados de los conceptos matemáticos. Van Oers (2001) considera que aprender matemáticas tiene que ver con "estructurar las estructuras" a través de la resolución de problemas usando herramientas simbólicas, y con participar en prácticas culturales preexistentes. Sfard (2000) y Dörfler (2000) consideran que los aprendices de matemáticas deberían ser inducidos al discurso matemático y ubican la actividad de los estudiantes como actos de participar en prácticas comunales.

En contraste, Bauersfeld (1995) llama nuestra atención hacia la actividad real de interpretación de los estudiantes. Él comenta que usualmente se les deja solos con sus propios procesos de interpretación, y sus significados privados rara vez se expresan de manera pública para ser modificados o validados. Cuando no comparten sus propios procesos de interpretación con otros, tarde o temprano tales interpretaciones se hacen públicas en su trabajo escrito y algunas de ellas se etiquetan como *concepciones erróneas o errores*. Tales concepciones erróneas parecen ser procesos truncados de interpretación de lo que debería ser una progresión continua de ajuste hacia la generalización y la abstracción como elementos esenciales del pensamiento matemático. La interpretación de conceptos matemáticos debería ser un proceso continuo mediado por la comunicación colaborativa entre profesor y estudiantes y entre estudiantes.

Como lo señala Rotman (1988), la *comunicación* es esencial a la actividad creativa de los matemáticos y, por ende, la *comunicación* debería ser esencial a la actividad matemática de profesor y estudiantes en el aula. La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debería consistir en interpretar conceptos matemáticos mediante la resolución de problemas y el uso de signos; tal interpretación debería ser mediada por la comunicación intencional y recíproca entre los participantes del aula. Por tanto, la *comunicación* se debería tomar como una *herramienta de enseñanza-aprendizaje* para interpretar conceptos matemáticos bien establecidos a través de procesos continuos, colaborativos y sinérgicos de interpretación que son intrasubjetivos e intersubjetivos. En estos procesos, las interpretaciones personales llegan a ser modificadas, validadas y generalizadas y, a lo largo de ello, surgen significados matemáticos en la mente de los intérpretes.

Esta comunicación intencional y recíproca en el aula entre profesor y estudiantes, que permite la *conciencia* y el *compromiso activo* en los procesos de interpretación de los estudiantes, es lo que denomino *juegos de interpretación*. Los juegos de interpretación son una actividad semiótica transformadora que implica la interpretación y el uso de signos matemáticos convencionales y la generación de signos idiosincráticos para registrar y comunicar significados matemáticos que están en desarrollo. Las marcas escritas, mediadas por juegos de interpretación, se transforman en símbolos matemáticos (en el sentido de Peirce) dotados de significados matemáticos que se aproximan a los significados de conceptos matemáticos ya establecidos. Este proceso transformador de interpretación y construcción de significado se integra a la actividad matemática y constituye un aspecto esencial, no solo del desarrollo sociohistórico de los conceptos matemáticos, sino también de la interpretación individual y evolutiva de estos conceptos.

Los conceptos matemáticos que deben aprenderse son estáticos en tanto que los procesos de interpretación son dinámicos. Existen maneras formales de hablar sobre los conceptos matemáticos, como también maneras idiosincrásicas e informales de hablar en los procesos de interpretación. Los significados de los conceptos matemáticos están ya abstraídos, validados y generalizados, mientras que los significados matemáticos en los procesos personales de interpretación se encuentran en un estado de llegar a ser abstraídos, validados y generalizados. Los conceptos se consideran como objetos matemáticos bien formados en tanto que las concepciones en los procesos de interpretación se encuentran en un estado provisional de metamorfosis. De todas maneras, en los procesos de interpretación, los significados matemáticos privados se deberían aproximar a los significados establecidos de los conceptos matemáticos; y tales aproximaciones deberían ser promovidas y sostenidas por la comunicación colaborativa del aula o los *juegos de interpretación*.

Juegos de interpretación

En la comunicación en el aula es central no solo *qué* conceptos sino también de *quién* son los significados y de *quién* las interpretaciones. Cuando el profesor se concentra solamente en lo *que* está enseñando y pasa por alto (o deja casi olvidado) *quién* está interpretando y *quién* está dando significado, el diálogo entre profesor y estudiantes se hace asimétrico. Pero cuando el profesor tiene en cuenta las interpretaciones de los estudiantes y continuamente trata de interpretar cómo están ocurriendo los procesos de construcción de significado por parte de los estudiantes, el diálogo se vuelve simétrico.

Si bien, enseñar implica un papel *directivo* (Dewey, 1997/1916; Freire, 2001/1970), lo que debería estar en el centro de la práctica de enseñanza es la naturaleza y las características de este papel directivo. Por una parte, el profesor podría transformar el pensamiento de los estudiantes en las meras sombras de su pensamiento; por otra parte, el profesor podría usar su papel directivo para facilitar el crecimiento constante de la capacidad de interpretar de los estudiantes.

Idealmente, un profesor que considera la *comunicación* como una *herramienta para enseñar y aprender* debería estar inclinado a tener una relación asimétrica-simétrica con los estudiantes. La relación debería ser asimétrica en la actividad previa a la enseñanza en cuanto el profesor usa su conocimiento para estructurar las clases que va a enseñar y las estrategias de enseñanza que va a usar para comprometer a los estudiantes en un diálogo que facilite sus estrategias de pensamiento, sus interpretaciones y sus maneras de comunicar. Sin embargo, cuando el profesor los invita al diálogo en el aula, los cuestiona y les pide explicaciones y justificaciones, conscientemente transforma la relación autoritaria y asimétrica entre profesor y estudiantes en una relación simétrica en la que ambos colaboran en la experiencia de enseñanza-aprendizaje. En otras palabras, los profesores enseñan y aprenden, y los estudiantes aprenden y enseñan, complementándose los papeles de cada uno.

Hacer un esfuerzo por mantener una relación asimétrica-simétrica con los estudiantes constituye en esencia una solución a la contradicción profesor-estudiante planteada por Freire (2001/1970). Él sostiene que proyectar la ignorancia absoluta en los estudiantes niega su educación y conocimiento como procesos de indagación. Invitar al diálogo es reconocer a los estudiantes como *sujetos* que *actúan* más que como *objetos* de las acciones del profesor.

En una relación en el aula que sea simétrica entre profesor y estudiante, el profesor permite a los estudiantes participar en un diálogo y asumir un papel activo en su propio aprendizaje en cuanto ellos interpretan, explican, justifican y modifican sus interpretaciones originales. Esto quiere decir, que el profesor, por cuanto es un individuo más capaz, favorece las acciones comunicativas e interpretativas que tienen como resultado que los estudiantes expresen sus propios interpretantes (i.e., transformando sus interpretantes en nuevos signos para ser interpretados por otros). Esta relación simétrica entre profesor y estudiantes le permite examinar sus interpretantes de las interpretaciones de los estudiantes (i.e., expresiones de los interpretantes de los estudiantes), las conceptualizaciones de los estudiantes y sus procesos de construcción de significado.

La conceptualización de significados matemáticos objetivos incrustados en signos matemáticos convencionales no proviene de recibir esos significados y almacenarlos. Por el contrario, la conceptualización surge de los esfuerzos de los aprendices por recrear y reinventar tales significados a través de sus propios actos de interpretación. Desde un punto de vista semiótico, los signos (entre ellos, la notación matemática y el lenguaje natural) juegan un papel esencial en el aprendizaje de las matemáticas porque el conocimiento matemático depende, entre otras cosas, de a) la capacidad de representar para comunicar (Otte, 1998, 2006; Sfard, 2001; Ernest, 2006); b) la capacidad de tratar simultáneamente con varios sistemas semióticos (Duval, 1999a; Ernest, 2006); c) la capacidad de reconocer un objeto matemático (concepto) encarnado en diferentes representaciones sin fundir el objeto con ninguna de sus representaciones (Otte, 1998); d) la capacidad de transformar representaciones de objetos matemáticos dentro de sistemas representacionales y entre ellos (Duval, 2006), y e) la capacidad de construir e interpretar significados mediados por signos (Dörfler, 2000; Radford, 2006).

La interpretación de conceptos matemáticos va más allá de la interpretación de un signo particular en un contexto matemático particular. Como lo señala Otte (2006), un signo matemático es un *tipo* (un general, una clase) y, por tanto, podría ser materializado en una diversidad de *sustitutos*. Para comprender realmente el(los) significado(s) de un signo matemático, este ha de ser interpretado en una variedad de contextos de construcción de significado que deberían ser proporcionados por el profesor. En este sentido, los signos matemáticos, lo mismo que las palabras, podrían acarrear diferentes significados según el contexto en el que se usen (Sáenz-Ludlow, 2003a).

La comunicación entre profesor y estudiantes y entre estudiantes facilita considerablemente la interpretación de signos. La semiótica peirceana es muy útil para explicar la comunicación como una herramienta para enseñar y aprender porque implica: 1) la presencia de enunciadores/proponentes e intérpretes (profesor y estudiantes indiscriminadamente tomarán uno u otro papel); 2) el algo que ha de ser interpretado por el enunciador/proponente e intérprete (conceptos matemáticos), y 3) la continuidad en el proceso de interpretación del signo y la continuidad de los procesos de construcción de significado.

Las interacciones sociales entre profesor y estudiantes y entre estudiantes son *actos de comunicación* que se constituyen en dos niveles: actos de comunicación con *uno mismo* y actos de comunicación con *otros*. Como se afirmó antes, estos dos niveles solo se pueden separar para el propósito de conceptualización porque ellos coexisten de manera sinérgica. Más aún, los actos de comunicación con *uno mismo* solo se pueden inferir a partir de actos de comunicación de *uno mismo* con *otros*. Puesto que la comunicación es posible solo a través de signos (Peirce, CP 4.7), la comunicación es en esencia un proceso continuo de interpretación de signos (semiosis ilimitada) en el que los interpretantes se construyen y se transforman en nuevos signos (véase Figura 1). Así que cada *acto de interpretación* implica la generación de un interpretante y su transformación en un nuevo signo para expresarlo (e.g., argumento matemático, diagrama, expresión verbal, gesto, o cualquier otro signo visible).

A este proceso en el que los participantes del aula construyen conjuntamente una interpretación lo denomino *juego de interpretación*. Los juegos de interpretación son en esencia procesos con elementos de aleatoriedad, creatividad, sorpresa e impredictibilidad (Sáenz-Ludlow, 2003a). Consideremos la comunicación entre profesor y estudiantes o entre estudiantes desde la perspectiva de los juegos de interpretación. Cuando los participantes interactúan y se autorreflejan, modifican y refinan viejas interpretaciones y surgen unas nuevas. Algunas interpretaciones generan *interpretantes lógicos* que se transforman en argumentos que son compartidos con otros. Otras interpretaciones generan *interpretantes efectuales* que pueden o no permanecer suspendidos esperando refinamientos futuros y pueden o no generar interpretantes lógicos. Otras interpretaciones generan incluso *interpretantes intencionales* para sostener la comunicación. Los *cominterpretantes* se generan cuando los interpretantes subjetivos de los participantes se han transformado en nuevos signos interpretados por otros y sobre los cuales hay acuerdo en la comunicación (véase Figura 2).

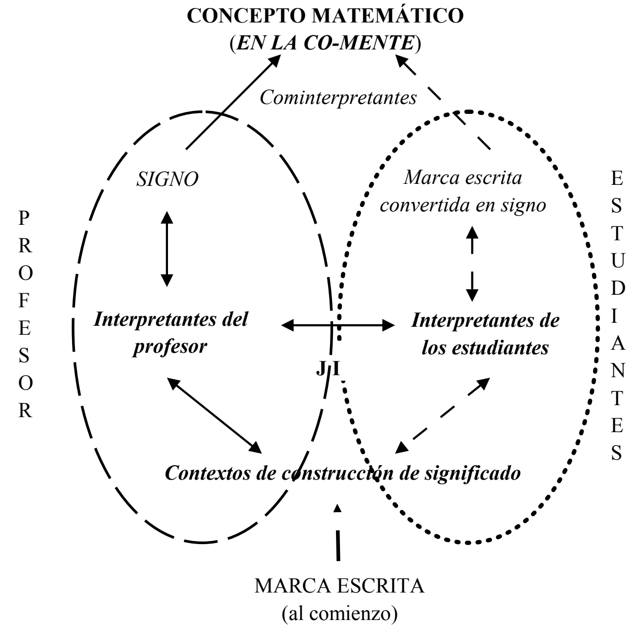


Figura 2. Juegos de interpretación (JI) que median la transformación de marcas escritas en signos matemáticos en las mentes de los estudiantes

Los juegos de interpretación dan cuenta de la actividad cognitiva construida conjuntamente que tiene lugar en el aula cuando los participantes se comprometen intencionalmente en una interacción a través del lenguaje natural, los signos matemáticos y otros tipos de signos. Al comienzo, los signos matemáticos pueden tener el estatus de símbolos (en el sentido de Peirce) para el profesor, pero para los estudiantes pueden parecer simples marcas escritas vacías de significado. Mediados por juegos de interpretación (JI), se generan interpretantes para atribuir, en la mente de los estudiantes, significados matemáticos a estas marcas escritas (Figura 2). Es decir, mediadas por juegos de interpretación, las marcas escritas llegan a dotarse de significados privados y provisionales, sujetos a modificación y refinamiento. A medida que el juego de interpretación continúa, los significados provisionales se hacen cada vez menos subjetivos, se generan cominterpretantes y, en últimas, se aproximan a los significados convencionales objetivos de los conceptos matemáticos (en la co-mente).

La dinámica de la interacción dialógica entre profesor y estudiantes moldea a y es moldeada por los interpretantes de los participantes que se transforman en argumentos matemáticos (válidos o inválidos). Estos argumentos apoyan y sostienen la dotación de marcas escritas con significados generalizados y menos subjetivos (más objetivos) que se aproximan (convergen asintóticamente) a los significados objetivos, estandarizados y convencionales de los conceptos matemáticos. Como resultado de estos argumentos, las marcas escritas toman significados cada vez más ricos y complejos, significados que evolucionan dirigidos por las reglas de la sintaxis, la gramática y la semántica de las notaciones matemáticas y del lenguaje como sistemas semióticos ya constituidos.

Cuando las marcas escritas se dotan de significados matemáticos, se elevan al estatus de símbolos matemáticos. La metamorfosis de las marcas escritas en símbolos, en la mente del aprendiz, está mediada por juegos de interpretación a través del lenguaje natural (formal e informal), de la notación matemática (convencional e idiosincrática), de gestos y de otros signos. Se considera que los juegos de interpretación están constituidos por *ciclos de interpretación* como su unidad de análisis elemental. En estos ciclos, los *significados interpretados* se anclan y dan forma, de una manera sinérgica, a los *significados pretendidos*. Cada ciclo media la constitución de algún tipo de significado que prepara la escena para un ciclo subsiguiente, en el cual surgen nuevos significados que se modifican y luego se refinan.

La Figura 3 representa la estructura de los ciclos de interpretación en el proceso de construcción de significado. El comienzo de un ciclo iniciado por el profesor está representado por los dígitos localizados cerca de la flechas; es decir, este ciclo sigue las flechas en el orden 1, 2, 3, 4. El comienzo de un ciclo iniciado por el estudiante sigue las flechas indicadas por las letras a, b, c, d, localizadas cerca de los dígitos que indican el ciclo iniciado por el profesor. En cada ciclo de interpretación, cada intención está fundamentada en alguna interpretación previa que genera un interpretante particular de una marca escrita dentro de un contexto matemático particular. Es decir, cada ciclo de interpretación está constituido a través de interpretación, intención, transformación de interpretantes en nuevos signos (i.e., expresión de interpretantes), y el surgimiento final de alguna suerte de significado matemático consensual o cominterpretante. Los cominterpretantes evolucionan y, en últimas, se aproximan a conceptos matemáticos (en la co-mente).

Consideremos un ciclo en el que el profesor es el participante que actúa primero. Los actos de interpretación del profesor generan un interpretante intencional (P-i) que está anclado en su propio interpretante efectual (P-I) de un signo matemático. El profesor expresa su interpretante intencional (P-i), que el estudiante interpreta para generar un interpretante efectual (E-I). A su vez, el interpretante efectual (E-I) ancla un interpretante intencional (E-i) expresado por el estudiante. Luego, el profesor interpreta el interpretante intencional expresado por el estudiante y genera un interpretante efectual (P-I´) que ancla un interpretante intencional (P-i') que es de nuevo expresado por el profesor. Este último interpretante intencional es interpretado por el estudiante quien genera un interpretante efectual (E-I′) que ancla un interpetrante intencional (E-i′) que es de nuevo expresado por el estudiante. Así, mientras profesor y estudiantes en sus propios procesos de interpretación construyan y expresen interpretantes efectuales e intencionales (que pueden o no generar interpretantes lógicos), continúa el ciclo hasta cuando se genere y exprese alguna suerte de cominterpretante o significado consensual. El carácter relativamente cerrado, o mejor, la relativa apertura de cada ciclo prepara la escena para un nuevo ciclo que sostiene la continuidad de los procesos de construcción de significado con los cuales se hace el acercamiento al concepto matemático (en la co-mente).

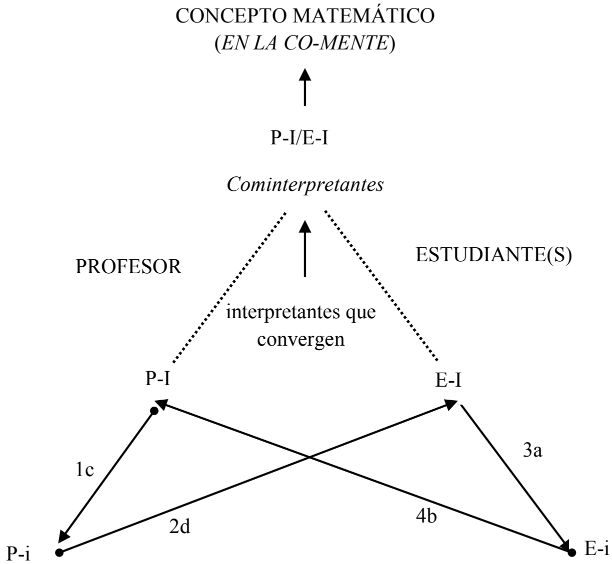


Figura 3. Ciclos de signos mediando la construcción de interpretantes y su aproximación a los conceptos matemáticos

Comprometer a los estudiantes en una interpretación (i.e., juegos de interpretación) es uno de los mayores retos que enfrenta la enseñanza de las matemáticas. Los juegos de interpretación permiten la construcción continua y correctiva de interpretantes (intencional, efectual o lógico), la expresión de aquellos interpretantes en signos posteriores y la constitución de significados provisionales que posteriormente se refinan y, en últimas, convergerán a aquellos significados objetivos otorgados a los símbolos matemáticos. La actividad de interpretar que realizan los participantes favorece la generalidad y, por tanto, la fluidez en el uso de signos matemáticos convencionales para que los estudiantes funcionen matemáticamente.

ejemplo de un juego de interpretación en un aula de tercer grado

El escenario del aula y el método de enseñanza

Los estudiantes de tercer grado que participaron en el episodio que se va a analizar estaban colaborando en un experimento de enseñanza de un año de duración. La escuela en la que tuvo lugar el experimento de enseñanza se consideraba una escuela de bajo rendimiento académico. El grupo de estudiantes de tercer grado estaba conformado por cinco niñas y nueve niños, todos ellos hijos de trabajadores de fábricas.

El experimento de enseñanza consideró la comunicación como una herramienta para enseñar y aprender. El método de enseñanza usado abogaba por la interacción intelectual y colaborativa entre profesor y estudiantes. Esto destacó las complementariedades entre compañerismo e individualidad, intersubjetividad e intrasubjetividad, convencionalidad e idiosincrasia, enseñanza y aprendizaje. La profesora y los estudiantes, trabajando en colaboración, crearon un ambiente de aula en el que todos se sentían constituyentes activos de una comunidad en la que se esperaba escuchar, interpretar, explicar y justificar. La profesora valoraba genuinamente la presencia de cada quien y reconocía que cada uno podía contribuir e influir en el pensamiento de los otros miembros del aula.

Este método de enseñanza puso sobre los hombros de la profesora un nuevo conjunto de expectativas y obligaciones consigo misma y con los estudiantes, debido a que tenía que enfocarse en el surgimiento y evolución de los significados matemáticos del grupo y conjeturar continuamente sus actos de interpretación. Para hacerlo, la profesora aprendió a notar y a diferenciar sus propias acciones personales de las de los estudiantes. Aprendió a hipotetizar y evaluar lo que ellos interpretaban, lo mismo que a proyectar líneas de cuestionamiento. Así mismo, aprendieron a pensar por su propia cuenta, a comparar, explicar y validar su razonamiento. Este método requería: a) que los estudiantes se involucraran en construir su comprensión matemática en interacción con otros, y b) que los profesores respondieran a las interpretaciones y medios de conocer de los estudiantes, y también que enseñaran en armonía con la comprensión real del grupo. En esta manera de enseñar, la profesora no solo enseñaba sino que también aprendía, y los estudiantes no solo aprendían sino que también enseñaban. Enseñar y aprender fueron procesos realmente complementarios.

El experimento de enseñanza consistió en episodios diarios de enseñanza cinco veces a la semana a lo largo del año escolar. Cada día, la profesora y la investigadora se involucraban en conversaciones (en forma de diálogos simétricos) sobre la naturaleza de las interpretaciones aritméticas de los estudiantes y de la profesora, el propósito de las tareas aritméticas de acuerdo con la comprensión real del grupo, y el papel mediador del lenguaje (formal e informal) y de las notaciones matemáticas (convencionales o idiosincráticas) en el continuo despliegue del proceso de interpretación.

Para analizar la semiosis de la actividad aritmética en el aula, se registraron en video las clases y la investigadora tomó notas de campo diariamente. Los enunciados de las tareas, los papeles escritos por los estudiantes y las copias de las transparencias usadas por ellos también se recogieron. Toda la información se organizó cronológicamente.

Sobre la profesora y su enseñanza

La profesora que colaboró en el experimento de enseñanza durante dos años contaba con veintiún años de práctica de enseñanza y afianzada en sus formas de enseñar aritmética a los niños de manera instrumental (en el sentido de Skemp). Antes del primer año del experimento de enseñanza, la profesora participó en un campo de verano con otros profesores. En este campo, la investigadora utilizó la comunicación como una herramienta para enseñar y aprender de manera que los profesores pudieran vivenciar de primera mano la influencia de la interacción social y la interpretación en el proceso de enseñanza-aprendizaje. También utilizó con ellos secuencias de tareas aritméticas preparadas para el experimento de enseñanza con estudiantes de tercero y cuarto grados, y grabaciones de niños que resolvían las mismas actividades propuestas a los profesores.

Así que tuvieron la oportunidad de resolver tareas aritméticas novedosas, hacer sus propias interpretaciones, colaborarse mutuamente, explicar y justificar sus soluciones, lo mismo que las de los estudiantes. Con esta experiencia metodológica común previa, la profesora y la investigadora enseñaron en equipo el curso de aritmética de cuarto grado durante el primer año del experimento de enseñanza. En este primer año, la profesora se convenció de la creatividad y la ingeniosidad de los niños con los números cuando se les anima a pensar por su propia cuenta, a hacer sus propias interpretaciones y a explicarlas a los otros. Durante el segundo año, la profesora enseñó a los estudiantes de tercer grado y la investigadora solo fue una observadora participante. El episodio que se va a analizar proviene de este segundo año del experimento de enseñanza.

Análisis

La tarea que se va a analizar se planteó a los estudiantes cuando el experimento de enseñanza estaba en su quinto mes del segundo año. Por esa época, el grupo conceptualizaba los números en términos de unidades, lo cual les permitió la flexibilidad para sumar números mentalmente usando estrategias idiosincráticas. La profesora les propuso una oración numérica abierta, les dio tiempo para pensar y luego inició un diálogo abierto. Este diálogo se analiza aquí como un *juego de interpretación* entre profesor y estudiantes. La interacción dialógica comenzó cuando los estudiantes leyeron la oración numérica, la interpretaron y trataron de encontrar el número que se podría colocar en el espacio en blanco sin alterar la igualdad. En este proceso de interpretación, la profesora infirió los interpretantes de los estudiantes y sus líneas de razonamiento a partir de signos expresados por ellos, con el propósito de facilitar la construcción de un nuevo significado para el signo igual. Al parecer, en este proceso, los estudiantes comenzaron a anticipar algo sobre la propiedad conmutativa de la adición.

El diálogo duró cincuenta minutos y en el análisis retrospectivo se subdividió en cinco ciclos de interpretación, cada uno de los cuales da cuenta del surgimiento de algún tipo de significado y del logro de alguna clase de consenso, ya fuera de acuerdo o de desacuerdo. En el diálogo, *P* representa al profesor, *E* a un estudiante no identificado, *Ee* a más de un estudiante no identificado, y las abreviaturas indicadas por una letra mayúscula seguida de una vocal o una consonante representan los nombres de estudiantes (e.g., *Da*, *Sh*). Estas abreviaturas se notan en letra cursiva en el cuerpo del texto para evitar confusión. Adicionalmente, la marca puntos suspensivos (…) representa la suspensión de voz.

Ciclo # 1. Interpretaciones iniciales de los estudiantes sobre el signo igual

		¿Qué número hará verdadera la oración numérica? 246+14=__+246
1	*P:*	*Da*, por favor, lee la pregunta del tablero.
2	*Da:*	¿Qué número hará verdadera la oración numérica?
3	*P:*	Bien, *Da*. Ahora léeme la oración numérica.
4	*Da:*	Doscientos cuarenta y seis más catorce es igual a…
5	*P:*	… algo …
6	*Da:*	Más doscientos cuarenta y seis.
7	*P:*	*Kr*, ¿qué significa ese signo igual?
8	*Kr:*	Es igual… ¿es igual a algo?
9	*P:*	*Sh*, ¿qué significa "es igual a algo"?
10	*Sh:*	Es… es cuando se suma algo. El signo igual está ahí para poder poner la respuesta al lado del signo igual.
11	*P:*	Entonces, ¿me estás diciendo que al otro lado del signo igual tienes que tener la respuesta?
12	*Sh:*	Pues sí, porque el signo igual es para cuando se suma algo y el igual está ahí para poder escribir la respuesta.
13	P:	Bueno. ¿Alguien más tiene una explicación?

14 Ka: El signo igual es la suma. Es como si se sumara doscientos cuarenta y seis más catorce, la suma es doscientos sesenta.

15 P: Mmm hmm... Entonces, ¿eso es lo que aquí significa el signo igual?

A través de preguntas, la profesora interpretó el significado construido por los estudiantes para el signo igual. Las líneas 4-5-6 indican la interpretación de la profesora sobre la dificultad de Da para leer un espacio vacío en el contexto dado. En cambio, las líneas 7-14 muestran cómo la profesora guió el diálogo usando los interpretantes lógicos expresados por el estudiante (i.e., el signo igual como una orden para escribir la respuesta). El cuestionamiento intencional de la profesora la condujo a hipotetizar que los estudiantes estaban lejos de ver el signo igual en la igualdad dada como algo que indica que el orden de los sumandos no es importante en el resultado de la adición.

En la línea 15, la profesora expresó la interpretación que los estudiantes daban al signo igual como una orden para hallar "la respuesta" y el espacio en blanco como el lugar para "escribir la respuesta". La última afirmación de la profesora marcó un cierre temporal para este primer ciclo. La interacción dialógica en este ciclo indica que los estudiantes expresaron un interpretante lógico para el signo igual que era consistente con el significado transmitido por el signo en las tareas aritméticas que ellos habían encontrado hasta este momento. Hasta este momento, el cominterpretante inferido para este signo era que el signo igual representaba una orden para realizar la operación indicada.

De las interacciones dialógicas anteriores entre profesora y estudiantes vienen a la mente dos preguntas. ¿Cómo contribuirá la profesora a la modificación de la interpretación del signo igual por parte de los estudiantes? ¿Se influirán progresivamente los estudiantes entre sí y, finalmente, lograrán un consenso sobre el significado del signo igual en este contexto? El siguiente ciclo indica que los estudiantes comenzaron a modificar sus interpretantes del signo igual y trataron de dar un ejemplo incompleto. La profesora lo recogió y lo reconstruyó para ejemplificar un caso más fácil y evidente de la igualdad dada. Usando este caso particular, la profesora involucró de nuevo a los estudiantes en la discusión.

La profesora modificó el ejemplo incompleto producido por *Da* y lo puso en el contexto de la pregunta inicial (la línea 18 indica la expresión del interpretante intencional de *P*). La respuesta negativa de *Sh* y la respuesta de *Da* en términos inciertos fueron sustentadas por *Ka* con su propia "demostración" numérica (las líneas 23, 25, 31 indican el interpretante lógico de *Ka* en la forma de su argumento numérico). *Ka* pudo ver la validez de la igualdad $6+6=6+6$ teniendo en mente el resultado de la suma en ambos lados del signo igual, y sin la necesidad de ver el resultado escrito. Sin tener en cuenta el argumento numérico de *Ka* (línea 23), *Sh* continuó luchando con su propia concepción (la línea 28 indica la expresión del interpretante lógico de *Sh*). Para *Sh*, repetir los números no era lo mismo que realizar la adición y escribir la respuesta. La profesora interpretó el interpretante expresado por *Sh* y utilizó el argumento dado por *Ka* para tratar de convencer a *Sh* de la verdad de la igualdad $6+6=6+6$ (línea 32). La profesora generó y expresó un interpretante intencional para involucrar a *Sh* en la recreación del argumento numérico de *Ka* (líneas 35-38). Este argumento podría haber sido presentado por la profesora de una manera unilateral, pero ella decidió mantener el diálogo simétrico. Como resultado, *Sh* llegó a dudar de su propia interpretación aunque no la modificara en ese momento (línea 39).

Ciclo # 2. Los estudiantes comienzan a modificar sus interpretaciones iniciales del signo igual

16	*P:*	*Da,* tú quieres decir algo, ¿qué es?
17	*Da:*	Umm, creo que el signo igual te está preguntando algo como cuánto es seis más seis.
18	*P:*	¿Qué pasa si digo seis más seis es igual a seis más seis? ¿Es verdadera esta oración?
19	*Sh:*	No.
20	*P:*	Entonces, ¡seis más seis no es igual a seis más seis!
21	*Da:*	En realidad sí lo es. Es como lo mismo.
22	*P:*	¡Cómo lo mismo!
23	*Ka:*	Así es. Puedo demostrarlo porque es a lo que es igual. Seis más seis es igual a doce y se podría decir que seis más seis es igual a seis más seis porque ambos son iguales a la misma cantidad.
24	*P:*	[Escribe en el tablero 6+6=6+6.]
25	*Ka:*	Y son iguales a lo mismo.
26	*Sh:*	No estoy de acuerdo.
27	*P:*	Dime por qué *Sh*.
28	*Sh:*	Porque igual no quiere decir que se ponga seis más seis otra vez. Se supone que tienes que sumar los números y escribir la respuesta. Eso es lo que quiere decir igual.
29	*P:*	Bueno, ¿entonces estás diciendo que igual significa que tienes que tener una respuesta en el otro lado? Por tanto, seis más seis no es igual a seis más seis.
30	*Sh:*	Sí.
31	*Ka:*	Sí, sí lo son porque ambos lados son iguales a la misma cantidad.
32	*P:*	¿Puedo escribir 6+6=6+6?
33	*Ka:*	Sí.
34	*Mi:*	Sí.
35	*Sh:*	No. Seis más seis es igual a doce.
36	*P:*	*Sh*, seis más seis es doce [cubre el lado izquierdo de la igualdad]. ¿Qué es este seis más seis [cubriendo el lado derecho de la igualdad]?
37	*Sh:*	Doce.

38 *P:* [Escribe el tablero]

6+6=6+6

12 12

¿Me estás diciendo que doce no es igual a doce?

39 *Sh:* Sí … no… No lo capto. Es igual… Pero, ¿cómo haces el seis más seis? ¿Seis más seis es igual a seis más seis? No se puede hacer eso porque seis más seis es doce. Si escribes seis más seis en lugar de doce, solo estás repitiendo seis más seis otra vez.

En resumen, el interpretante lógico del signo igual expresado por *Sh* (en el contexto introducido por *Da* y modificado por la profesora para ajustar la tarea que se tenía entre manos), siguió estando fuertemente fundamentado en su interpretación del signo igual como una orden para realizar una operación. En contraste, *Ka* pudo construir y expresar un nuevo interpretante lógico del signo igual en este nuevo contexto (compárense los interpretantes de *Ka* expresados en las líneas 14 y 23) para dar cuenta de la operación de adición y de un equilibrio numérico dado que “ambos [lados] son iguales a la misma cantidad”. La duda de *Sh* marcó un punto de ruptura en el juego de interpretación, ya que se había alcanzado algún consenso.

¿Llegará un estudiante con un argumento que convenza a *Sh* (y quizá a otros estudiantes) de modificar su interpretante lógico del signo igual para determinar el número faltante que hará verdadera la oración numérica? El siguiente ciclo indica que *Ka* pudo crear un argumento numérico por contradicción para tratar de convencer a *Sh* de que el número en el espacio en blanco debería ser 14 en vez de 260.

Ciclo # 3. Argumento numérico intuitivo por contradicción expuesto por Ka

40 *P:* ¿Cuál es el número que hará verdadera la igualdad 246+14=__246?

41 *Ka:* [Pasa al tablero] Se podría poner la respuesta aquí [escribe 260 en el espacio en blanco de la igualdad original] 246+14= 260 +246. Ahora, no sería lo mismo en ambos lados del símbolo igual porque doscientos sesenta más doscientos cuarenta y seis no es lo mismo que doscientos cuarenta y seis más catorce. Pero si en cambio de doscientos sesenta se escribe catorce, entonces eso sí sería lo mismo.

42 *P:* Por tanto, ¿es doscientos cuarenta y seis más catorce igual a doscientos sesenta más doscientos cuarenta y seis una oración numérica verdadera?

43 *Ee:* No. No es una oración verdadera.

44 *P:* Bueno, ¿cómo podemos hacer que esta [la igualdad escrita por *Ka* en el tablero] sea una oración verdadera? [Borra el 260 que *Ka* escribiera en el espacio en blanco.]

45 *Sh:* Escribiendo otra vez doscientos cuarenta y seis, o escribiendo catorce.

46 *P:* ¿Por qué?

47 *Sh:* Seis más seis es igual a seis más seis. Doscientos cuarenta y seis más catorce es igual a doscientos cuarenta y seis más doscientos cuarenta y seis.

48 *Ka:* Pero si escribes 246 en el espacio en blanco, entonces 246+14= 246 +246. Si pones estos dos juntos [se refiere a los números que están en el lado derecho de la igualdad], entonces va a ser cuatrocientos noventa y dos.

49 *Sh:* ¡No se suman!

50 *P:* Sí se suman; dice más. El lado izquierdo es doscientos sesenta; sabemos eso. *Ka* dice que el lado derecho es cuatrocientos noventa y dos. ¿Es esta una oración numérica verdadera?

$246+14=\underline{246}+246$

260 492

51 *Ke:* ¿Puedo mostrarte algo?

52 *P:* Uhh huh

53 *Ke:* [Pasa al tablero y borra el 246 del espacio en blanco] Todo lo que se está haciendo es igualar a doscientos sesenta para hacer que este [se refiere al lado derecho de la igualdad] sea igual a doscientos sesenta. Entonces, todo lo que se está haciendo es poner 14 atrás [escribe 14 en el espacio en blanco]

$246+14=\underline{14}+246$

54 *P:* Así que, ¿ahora estás tratando de decirnos que doscientos cuarenta y seis más catorce es lo mismo que catorce más doscientos cuarenta y seis?

55 *Ke:* Sí.

La profesora, consciente de las interpretaciones de los estudiantes, intencionalmente dirigió la atención del grupo a la pregunta inicial (la línea 40 indica la expresión del interpretante intencional de *P*). *Ka* creó un argumento numérico por contradicción (la línea 41 indica la expresión del nuevo interpretante lógico de *Ka*). El nuevo interpretante de *Ka* fue original porque este tipo de argumento numérico no se había usado en esta aula antes de esta ocasión. Es importante notar la secuencia correctiva de interpretantes expuesta por *Ka* cuando contrastamos este nuevo interpretante con sus interpretantes iniciales del signo igual (compárense las líneas 14 y 23 con la línea 41).

En la línea 42, la profesora usó intencionalmente el nuevo argumento numérico de *Ka* para plantear preguntas a los estudiantes con el propósito de mantener el diálogo. En esta interacción dialógica, la profesora llegó a hipotetizar que *Sh* había sobregeneralizado la oración numérica $6+6=6+6$ (líneas 45 y 47). Sin embargo, fue *Ka* quien abordó la sobregeneralización de *Sh*. *Ka*, con su capacidad para jugar con argumentos por contradicción, tomó la interpretación de *Sh* de repetir uno de los números y modificó su argumento por contradicción (línea 48). Esta vez *Ka* fue más explícita en su explicación. En la línea 50, la profesora usó el argumento de *Ka* con la intención de hacer aún más explícita la contradicción.

Es importante notar que *Sh* no intervino inmediatamente; quizá ella construyó un interpretante efectual que no estaba listo para ser expresado. Los interpretantes lógicos de *Ka* y *Sh* son de tipo diferente; sin embargo, son lógicos dentro de sus propias redes conceptuales. Esto quiere decir que los interpretantes lógicos son relativos a las redes conceptuales de los intérpretes aunque en todos los casos están potencialmente abiertos a modificaciones.

En la línea 53, *Ke*, un estudiante que no había intervenido en la discusión hasta este punto, llegó con la idea de usar 14 en el espacio en blanco para "igualar" los resultados de las adiciones en ambos lados del signo igual. Esto, para él, era lo mismo que escribir los mismos sumandos al lado derecho de la igualdad pero "atrás". Hasta este momento, *Ke* y *Ka* parecían ser los únicos dos estudiantes que explícitamente habían llegado a ver tres cosas simultáneamente: a) el cambio en el orden de los sumandos, b) la adición efectiva, y c) el equilibrio cuantitativo entre los dos lados del signo igual. Las líneas 54 y 55 marcaron un punto de ruptura temporal en el juego de interpretación por cuanto la profesora resumió verbalmente el argumento de *Ke* y *Ke* estuvo de acuerdo. El consenso expresado y convergente de estos dos estudiantes (cominterpretante) marcó un punto de ruptura en la interacción dialógica.

En este ciclo, no solo observamos el argumento por contradicción hecho por *Ka* (i.e., un nuevo signo que expresa su interpretante lógico), sino también su voluntad de usarlo para refutar el interpretante lógico expresado de *Sh*. Además, *Ke* también expresó su propio interpretante lógico. También es evidente que la sofisticación del argumento lógico por contradicción de *Ka* y la interpretación del signo igual hecha por *Ke* no habrían sido posibles sin las interpretaciones (válidas o inválidas) de los otros estudiantes. Que este fue el caso quedó indicado por la falta de este tipo de argumento de parte de los estudiantes cuando interpretaron inicialmente la igualdad. En otras palabras, podemos decir que fueron posibles una secuencia progresiva de interpretantes y sus transformaciones en nuevos signos, debido a la interacción dialógica intencional entre profesora y estudiantes que los condujo a la modificación de sus interpretantes iniciales del signo igual.

Dos preguntas siguen sin respuesta. Una de ellas es si *Sh* podrá o no modificar su interpretante lógico del signo igual como orden para realizar una operación, de manera que incluya la preservación de un equilibrio cuantitativo cuando se cambia el orden de los sumandos. La otra pregunta alude a si otros estudiantes hicieron o no activamente sus propias interpretaciones y construyeron sus propios interpretantes, aunque no lo hayan expresado abiertamente hasta este punto. En el siguiente ciclo, las respuestas a estas dos preguntas parecen ser afirmativas.

Se podría suponer que el juego de interpretación terminó en la línea 55, dado que se había obtenido la respuesta a la pregunta propuesta por la profesora. Sin embargo, la profesora continuó el diálogo porque otros estudiantes estaban deseosos de participar ahora y no habían participado antes. *Me*, por ejemplo, no solo estaba de acuerdo con la conclusión de *Ke,* sino que también hizo su propia hipótesis sobre las interpretaciones de otros estudiantes (líneas 57 y 61).

Por otra parte, *Sh* quería participar de nuevo y qué agradable sorpresa fue esa. *Sh* modificó su interpretante lógico inicial y ahora comenzó a suponer que el número en el espacio en blanco era 260 y recreó el argumento por contradicción expuesto por *Ka*. Finalmente, *Sh* concluyó que el número en el espacio en blanco debería ser 14 (las líneas 64 y 66 son las expresiones de los interpretantes lógicos modificados de *Sh*) para que la oración numérica fuera verdadera. *Sh* incluso fue un paso más allá y creó una cadena de igualdades.

Esta cadena indica que *Sh* había llegado a modificar su primer interpretante. *Sh* sumó los números para ser consistente con su interpretante inicial del signo igual como una orden para "hallar la respuesta y escribirla", pero ahora ella también usó el signo igual para simbolizar un equilibrio cuantitativo. El argumento lógico de *Sh* indica un consenso de parte de los estudiantes sobre el número que debería ir en el espacio en blanco para que la oración numérica fuera verdadera. Es decir, los estudiantes han construido y expresado un consenso o cominterpretante. No es claro qué efecto podría haber tenido la intervención de *Me* en el pensamiento de *Sh*. Podría haber sido que la transformación que hizo *Me* de su propio interpretante en un argumento verbal fuera todo lo que necesitara en este punto para que *Sh* modificara su interpretante.

El ciclo anterior indica que los estudiantes, a través de sus esfuerzos de interpretación, pudieron modificar sus interpretantes lógicos iniciales del signo igual como *sustituto* para una orden de realizar una operación, y usarlo como *sustituto* de una equivalencia cuantitativa.

Ciclo # 4. Me interviene y Sh recrea el argumento numérico por contradicción expuesto por Ka

56 *P:* [Se da cuenta de que *Me* está alzando la mano] Veamos lo que tiene que decir *Me*.

57 *Me:* Pienso esto. Doscientos cuarenta y seis más catorce es igual a catorce más doscientos cuarenta y seis. Así que, digo lo mismo que *Ke*. Es catorce.

58 *P:* ¿Por qué piensas que es catorce? Eres la tercera persona que dice eso. Tres personas dijeron catorce y dos dijeron doscientos sesenta.

59 *Me:* Bueno, otras personas piensan que es doscientos sesenta. Umm… No quiero estar en desacuerdo pero lo estoy.

60 *P:* ¿Por qué? ¿Por qué estás en desacuerdo?

61 *Me:* Bueno, lo que yo creo que ustedes están pensando es que cuando ustedes ponen estos dos juntos [refiriéndose a los números del lado izquierdo del símbolo igual] es doscientos sesenta; así que ustedes piensan poner doscientos sesenta aquí [refiriéndose al espacio en blanco al lado derecho del símbolo igual] y entonces doscientos sesenta más doscientos cuarenta y seis será doscientos sesenta. Eso es lo que creo que algunos de ustedes están pensando. Pero, yo creo que en el espacio en blanco debería ir catorce.

62 *Sh:* ¿Puedo decir algo?

63 *P:* Huh uhh.

64 *Sh:* [Va al tablero] Es así. Doscientos cuarenta y seis más catorce es doscientos sesenta. Si ponemos doscientos sesenta ahí [se refiere al espacio en blanco] entonces tenemos que sumar doscientos sesenta y doscientos cuarenta y seis y eso sería quinientos seis. Así

246+14=260+246

260 506

65 *P:* Entonces, ¿crees que esta es una oración verdadera? ¿Pondrías doscientos sesenta en el espacio en blanco?

66 *Sh:* No estoy de acuerdo con eso. Es algo así [borra 260 y lo reemplaza por 14]. Es como si el signo igual estuviera aquí y lo pones aquí. Es como si estuvieras separando esto

246+14=14+246=260

260 260

67 *P:* Bien. Ella tiene una idea interesante porque quiere ver lo que considera que es la respuesta.

68 *Sh:* Sí, me gusta ver la respuesta.

También parece que los estudiantes se alejaron con una sensación de que los sumandos se pueden intercambiar sin afectar tal equivalencia. La sensación acerca de la propiedad conmutativa de la adición solo estaba surgiendo. Para consolidar los últimos interpretantes lógicos del signo igual expresados por los estudiantes se generaron nuevas tareas aritméticas de manera que ellos pudieran dar sentido a esta propiedad en el contexto de la adición y también en el contexto de la multiplicación. Volveré sobre este asunto en la conclusión.

El siguiente ciclo, el último de este juego de interpretación, se generó debido a que los estudiantes tuvieron la iniciativa de reflexionar sobre su interpretación inicial del signo igual. Fue sorprendente ver a *Sh* (la estudiante que más luchó) iniciar un ciclo para reflexionar sobre las diversas interpretaciones de los estudiantes.

Ciclo # 5. Los estudiantes reflexionan sobre sus interpretaciones del signo igual

69 *Sh:* ¿Por qué estuvimos apegados a la respuesta?

70 *P:* Es la manera como casi siempre se ve en sus libros de matemáticas, ¿verdad?

71 *Ka:* Sí.

72 *P:* Ustedes casi siempre lo ven donde hay algo que se tiene que hacer a este lado [lado izquierdo] y en este lado [lado derecho] solo hay un espacio para un número.

73 *Sh:* ¿Por qué lo hacen así? … Es raro. Porque lo hacen a uno pensar así… y uno… se apega a eso.

74 *P:* Eso está muy bien *Sh* porque eso entra en los cerebros de los niños y ustedes se apegan a ello y se quedan siempre en lo mismo. Pero ahora estamos aprendiendo que con nuestros números podemos hacer muchas cosas.

75 *E:* ¡Oh, es cosa de los libros!

76 *P:* De los libros, sí. En los libros hay cosas que ustedes han visto siempre, prácticamente desde que comenzaron a estudiar.

77 *Sh:* Porque es incorrecto.

78 *Ee:* Eso no es incorrecto.

79 *P:* Eso no es incorrecto, pero es tan solo una manera.

80 *Sh:* Sí, hay muchas maneras de hacer eso. Se puede hacer eso de miles de maneras.

81 *P:* Bien, hoy estuvo bastante movido.

Sh comenzó a cuestionar la causa de su interpretación y la profesora, después de un rápido análisis del evento, trató de explicar la causa de la primera interpretación que los estudiantes hicieron sobre el signo igual. La profesora consideró que los libros de matemáticas (i.e., los libros de aritmética elemental) usan el signo igual para significar la realización de operaciones y, por consiguiente, los estudiantes llegan a interpretar el signo en ese sentido. Uno de los estudiantes, *Ka*, aprueba la explicación de la profesora aunque *Sh* considera que esto causa, en un sentido, obstáculos cognitivos que el grupo tiene que superar (línea 73). La profesora hizo más explícita la idea de *Sh* en la línea 74 donde ella parafraseó (i.e., tradujo en un nuevo signo) la idea de *Sh*. *Sh* también consideró que usar el signo igual de una sola manera era "incorrecto", aunque otros estudiantes estuvieron en desacuerdo con su juicio.

Parece que en esta argumentación entre los estudiantes, se referían a dos significados diferentes de "incorrecto". Al parecer, *Sh* se estaba refiriendo a "incorrecto" en algún sentido ético o moral, mientras que los otros estudiantes parecían estarse refiriendo a "incorrecto" en un sentido lógico. Al parecer, la profesora combinó los dos sentidos de "incorrecto" en su intervención (línea 79) e impulsó a *Sh* a hacer un enunciado más amplio sobre sus nuevas maneras de ver los números y las operaciones entre ellos. Parece que el enunciado de *Sh* se basa, no solo en este episodio, sino en la manera como ella y otros estudiantes habían comenzado a conceptualizar número como resultado de participar en el experimento de enseñanza.

Conclusión

Es importante notar que el episodio anterior ocurrió en un aula en la que la *comunicación* se tomó como *herramienta para enseñar y aprender,* y en la que profesora y estudiantes construyeron un ambiente en el que estaban igualmente comprometidos con la indagación y la interpretación. Estas interpretaciones moldearon la comunicación en el aula y fueron moldeadas por ella. La profesora, después de un año y medio de colaborar en el experimento de enseñanza, se sintió cómoda involucrando a los estudiantes en un diálogo simétrico y haciendo interpretaciones de los interpretantes expresados por los estudiantes para apoyar y sostener la evolución de su construcción de significados aritméticos.

La profesora también entendió que las interpretaciones que dio el grupo sobre los significados matemáticos eran subjetivas y transitorias, pero estaban en proceso de llegar a ser más refinadas y objetivas. Los estudiantes, por otra parte, se sintieron cómodos haciendo sus propias interpretaciones, generando sus propios interpretantes, transformando estos interpretantes en nuevos signos, infiriendo los interpretantes de otros cuando eran expresados, y generando consenso a través de la construcción de cominterpretantes.

La oración numérica propuesta por la profesora facilitó un *juego de interpretación* que medió la construcción de interpretantes, bajo su guía intencionada aunque indirecta. El diálogo simétrico que se analizó aquí indica que profesora y estudiantes contribuyeron a la creación de un espacio de intervención y a una construcción progresiva de interpretantes (intencional, efectual y lógico) que produjeron un cominterpretante sobre el número que haría verdadera la oración numérica. La semiosis de este juego de interpretación tuvo la dinámica de una bola de pimpón entre profesora y estudiantes y entre estudiantes, arraigada en sus propios *actos de interpretación* (i.e., generación de interpretantes y transformación a nuevos signos).

Es importante observar que habría sido imposible para los participantes en el juego de interpretación ser conscientes de los ciclos y de los puntos de ruptura en la construcción de significado mientras participaban en él. De manera análoga, es imposible que ciclistas o nadadores paren sus movimientos para reflexionar sobre la lógica de ellos en vez de concentrarse en su realización. Sin embargo, en un análisis retrospectivo es posible diferenciar tales ciclos y observar los actos de interpretación de profesor y estudiantes, y sus efectos.

El análisis de este episodio de enseñanza como juego de interpretación nos permite "ver" la interdependencia entre pensamiento y comunicación en los *actos de interpretación* de estudiantes y profesor. Los participantes más activos en el diálogo fueron *Kr*, *Da*, *Sh*, *Ka*, *Ke*, *Me* y *P*; los demás solo hicieron intervenciones monosilábicas. Los que expresaron sus interpretantes en forma de argumentos (válidos o no), influyeron en la construcción y modificación de los interpretantes de otros estudiantes. Por ejemplo, se podría inferir que los interpretantes de *Sh* estaban influidos por los de *Ka*, *Ke*, y probablemente *Me*. Al mismo tiempo, los interpretantes de *Sh* parecen haber influido los de *Ka*, *Ke*, e incluso *Me,* quien parece haber tomado el reto de moldear los actos de interpretación de *Sh* del signo igual en la oración numérica dada.

Los juegos de interpretación en el aula constituyen un modelo explicativo, basado en la semiótica de Charles Sanders Peirce, para analizar la comunicación en el aula (tomada en su sentido más amplio) como herramienta para enseñar y aprender. Los juegos de interpretación reúnen las dimensiones social e individual de la comunicación y la actividad matemática, lo mismo que las dimensiones pública y privada de los procesos de construcción de significado. Es decir, los juegos de interpretación destacan procesos de construcción colaborativa y evolutiva de significados matemáticos.

Para que los juegos de interpretación se conviertan en herramientas de enseñanza-aprendizaje, también deberían llegar a ser herramientas de indagación.

Para que esto suceda, es necesario construir ambientes de aula en los que surja de manera natural una relación comunicativa entre profesor y estudiantes, que tenga resultados intelectuales mediatos e inmediatos. Es decir, ambos deberían estar igualmente comprometidos en el establecimiento de una relación comunicativa en la que el uso de signos, la interpretación de signos y la indagación se conviertan en un estado continuo de cosas.

Para usar juegos de interpretación como una herramienta de enseñanza-aprendizaje, el profesor debería considerar seriamente su actividad de enseñanza como constituida por dos partes: la actividad anterior a la enseñanza y la actividad misma de enseñanza. La primera debería basarse en una relación asimétrica con los estudiantes, puesto que el profesor reflexiona sobre su propia comprensión de los conceptos matemáticos y prepara tareas matemáticas y estrategias de enseñanza para comprometer la capacidad inquisitiva de los estudiantes. En la actividad misma de enseñanza, el profesor (la mayor parte de las veces) debería mantener un diálogo simétrico con los estudiantes sin olvidar su papel directivo, pero sin transformarles el pensamiento en las sombras del suyo (cf. Freire, 2001/1970). Por tanto, es necesario que el profesor aprenda a diferenciar sus interpretantes de aquellos que infiere de las expresiones que los estudiantes hacen de sus interpretantes para apoyar y sostener la transformación continuada de los interpretantes de los estudiantes en signos más refinados.

Cuando la construcción de interpretantes y la transformación de interpretantes en nuevos signos ocurren en la comunicación (interacción social), el *yo* y el *otro* traen a primer plano niveles más altos de interpretación, construcción y transformación. Esto se debe al hecho de que en un *acto de interpretación* aparecen dos interpretantes concomitantes: el interpretante del *yo* que propone y expresa, y el interpretante del *otro* que interpreta y construye. Para comunicarse, el *yo* y el *otro* tienen que transformar sus interpretantes en nuevos signos que representan alguna suerte de significado común. Estos interpretantes (transformados en nuevos signos) entran en una interacción animada trayendo con ellos los aspectos público y privado de los procesos de construcción de significado. A través de interpretantes convergentes, la construcción personal y transitoria de los significados matemáticos tiende a ser generalizada y encapsulada en cominterpretantes que convergen hacia los significados matemáticos convencionales de conceptos matemáticos.

Debido a la naturaleza inmaterial de los conceptos matemáticos, hacer conscientes a los estudiantes de sus propios procesos de uso de signos e interpretación de signos y comprometerlos en ellos es un proceso necesario aunque desafiante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Percatarse de las construcciones continuas y evolutivas de los interpretantes de los estudiantes y de los significados matemáticos personales de ellos, lo mismo que de la constitución de cominterpretantes que convergen asintóticamente a los conceptos matemáticos establecidos, es comprender la interdependencia entre pensamiento y comunicación, y el proceso de enseñanza-aprendizaje como una experiencia conceptual, colaborativa, evolutiva y social.

Referencias

Bakhtin, M. (1986). The problem of speech genres. En C. Emerson y M. Holquist (eds.), *Speech genres and other late essays* (pp. 60-102). Austin, TX: University of Texas Press.

Barnes, D. (1992). *From communication to curriculum* (2ª ed.). Portsmouth, NH: Boynton/Cook Publishers. Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in mathematics classrooms: Their function and their effect. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meanings* (pp. 271-291). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Blumer, H. (1995). *Symbolic interactionism*. Berkeley, California: University of California Press.

Bourdieu, P. (1999). *Language and symbolic power* (trad. G. Raymond y M. Adamson). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Buchler, J. (1955). *Philosophical writings of Peirce*. Nueva York: Dover Publications.

Cajori, F. (1974). *A history of mathematical notations: Notations in elementary mathematics* (vol. 1). La Salle, IL: Open Court.

Cobb, P. (2000a) Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (2000b). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematics learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17-36). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Yackel, E. (1995). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. En D.T. Owens, M.K. Reed y G.M. Millsaps (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-29). Columbus, OH: ERIC/CSMEE.

Dewey, J. (1997/1916). *Democracy and education: An introduction to the philosophy of education*. New York: The Free Press.

Dewey, J. (1963/1938). *Experience and education*. Nueva York: Collier.

Dörfler, W. (2000). Means for meaning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 99-131). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1999a). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (trad. M. Vega Restrepo). Cali: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (Ed.) (1999b). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. Séminaire I.U.F.M., D.R.E.D., Villeneuve d'Ascq.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Edwards, D. y Mercer, N. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom*. Nueva York: Routledge.

Ellerton, N. y Clements, M. (1991). *Mathematics in language: A review of language factors in mathematics learning*. Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Ernest, P. (2003). The epistemic subject in mathematical activity. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 81-106). Ottawa, Ontario: Legas.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case on number. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 67-101.

Freire, P. (2001/1970). *Pedagogy of the oppressed*. Nueva York: Continuum.

Foucault, M. (1972). *The archeology of knowledge*. Londres: Tavistock.

Habermas, J. (1984). *The theory of communicative action*. Boston: Beacon Press.

Hoffmann, M. (2004). How to get it. Diagrammatic reasoning as a tool of knowledge development and its pragmatic dimension. *Foundation of Science*, *9*(3), 285-305.

Hoffmann, M. (2005). Signs as means for discoveries. Peirce and his concepts of "Diagrammatic Reasoning," "Theorematic Deduction," "Hypostatic Abstraction," and "Theoric Transformation". En M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (eds.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (pp. 45-56). Nueva York: Springer.

Hoffmann, M. (2006). What is a "semiotic perspective", and what could it be? Some comments on the contributions of this Special Issue. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 279-291.

Kanes, C. (1998). Examining the linguistic mediation of pedagogical interaction in mathematics. En H. Steinbring, M.G. Bartolini-Bussi y A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 120-139). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Liszka, J.J. (1996). *A general introduction to the semiotic of Charles Sanders Peirce*. Bloomington, Indiana: Indiana University Press.

Menninger, K. (1969). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Nagel, E. (1956). Symbolic notation, haddocks' eyes and the dog-walking ordinance. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics* (vol. 3, pp. 1576-1590). Nueva York: Simon and Schuster.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Otte, M. (1998). Limits of constructivism: Kant, Piaget, and Peirce. *Science and Education, 7*, 425-450.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 11-38.

Peirce, C.S. (1867). Questions concerning certain faculties claimed by man. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (1991, pp. 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Peirce, C. S. (1893-1913). *The essential Peirce: Selected philosophical writings* (vol. 2; editado por *Peirce Edition Project*). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1903). *The three normative sciences. The essential Peirce* (vol. 2, 1893-1913; editado por *Peirce Edition Project*, pp. 196-207). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1906a). Prolegomena to an apology for pragmaticism. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (pp. 249-252). Chapel Hill, North Carolina: The University of North Carolina Press.

Peirce, C.S. (1906b). Pragmatism in retrospect: A last formulation. En J. Buchler (ed.), *Philosophical writings of Peirce* (1955) (pp. 269-289). Nueva York: Dover Publications.

Peirce, C.S. (1908). Excerpts from letters to Lady Welby. En Peirce Edition Project (ed.), *The Essential Peirce* (vol. 2, pp. 478-491). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers, vol. II, Elements of Logic*. (editado por C. Hartshorne y P. Weiss). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1956). The essence of mathematics. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, (vol. 3, pp. 1773-1783). Nueva York: Simon and Schuster.

Peirce, C.S. (1976). The new elements of mathematics (NEM), (vol. 4, *Mathematical Philosophy*, editado por Carolyn Eisele). The Hague: Mouton and Co. B. V. Publishers.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Nueva York: Columbia University Press.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in the classrooms*. Londres: Routledge.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 39-65.

Rotman, B. (1988). Towards a semiotics of mathematics. *Semiotica, 72*(1-2), 1-36.

Sáenz-Ludlow, A. (1997). Iconic means in children's understanding of the division algorithm. En C.W. Spinks y J. Deely (eds.), *Semiotics* (pp. 118-130). Toronto, Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (2003a). Classroom mathematics discourse as an evolving interpreting game. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 253-284). Ottawa, Canada: Legas Press.

Sáenz-Ludlow, A. (2003b). A collective chain of signification in conceptualizing fractions: A case of a fourth-grade class. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 181-211.

Saussure, F. de (1959). *Course of general linguistics* (trad. W. Baskin). Nueva York: McGraw-Hill Book Company. (Obra original publicada póstumamente por C. Bally y A. Sechehaye en 1916, sobre los cursos de 1906 a 1911).

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 13-57.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: The Falmer Press.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 133-162.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M.G. y Sierpinska, A. (Eds.) (1998). *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 59-85.

Vile, A. (1997). From Peirce towards a semiotic of mathematical meaning. En J.F. Quesada (ed.), *Logic, semiotic, social and computational perspectives on mathematical languages* (pp. 64-76). Sevilla, España: SAEM Thales.

Vile, A. y Lerman, S. (1996). Semiotics as a descriptive framework in mathematical domains. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 389-402). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society* (edit. y trad. por M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner y E. Souberman a partir de distintas obras originales publicadas en ruso de 1930 a 1960). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1986/1934). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason*. Londres: Routledge.

Whitehead, A.N. (1985). *Symbolism: Its meaning and effect*. Nueva York: Fordham University Press.

Whitson, J.A. (1997). Cognition as a semiosic process: From situated mediation to critical reflective transcendence. En D. Kirshner y J.A. Whitson (eds.), *Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 97-149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wilder, R. (1968). *Evolution of mathematical concepts*. Milton Keynes, Inglaterra: The Open University Press.

Wittgenstein, L. (1991/1944). *Philosophical investigations*. Oxford: Basil Blackwell.

UNA CADENA COLECTIVA DE SIGNIFICACIÓN EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DE FRACCIONES

Adalira Sáenz-Ludlow

El método de enseñanza empleado en el experimento[28] al que se refiere este artículo propició interacciones entre estudiantes y entre ellos y el profesor, como procesos dinámicos de interpretación y representación. Tal interacción dinámica fundamentó el surgimiento de signos generados individual y colectivamente que llegaron a constituirse en una cadena de significación que medió la transición desde las conceptualizaciones de número natural que estos estudiantes de cuarto grado tenían hasta sus conceptualizaciones iniciales de fracciones en totalidades discretas. La meta del experimento de enseñanza era analizar la naturaleza de esta transición.

Justificación teórica

La justificación teórica considera las nociones de signo, semiosis y cadena de significación, lo mismo que la noción de número como composición de unidades; estas nociones juegan un papel importante en la interpretación de la información recogida. Las dos primeras secciones sintetizan las nociones de signo y semiosis en Peirce,[29] ya que constituyen la esencia de las cadenas de significación. La tercera sección da una ojeada al reconocimiento histórico de la importancia de las unidades en la conceptualización de números naturales.

Signos

La contribución de Peirce a la semiótica no estuvo en conceptualizar signos como díadas de la forma objeto-representación (significado-significante), sino como tríadas de la forma objeto-representamen-interpretante (Nöth, 1990). Peirce considera los signos como procesos generales de representación en los que el objeto, el representamen y el interpretante del signo juegan un papel importante (1903).

28 Esta investigación fue financiada por la National Science Foundation (RED 9155734 y RED 9596106) y la University of North Carolina en Charlotte. Los puntos de vista y las conclusiones que se expresan aquí son de la autora y no necesariamente de las instituciones.

29 Las citas que provienen de los escritos de Peirce se acogen a la forma estándar. CP 1.337 se refiere al volumen 1, parágrafo 337 de la obra *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, 1931-1966 (editada por Hartshorne, Weiss y Burks). MS 654.7, 1910 se refiere al manuscrito 654, página 7, datado en 1910, en la colección de *Harvard University* como se catalogó en el *Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce* (editado por Robin).

Los signos, en el sentido más amplio, son entidades que sirven como vehículos para disparar el pensamiento, facilitar la expresión del pensamiento y encarnar el pensamiento original y convencional. Como lo afirma Peirce: "Solo mediante hechos externos puede conocerse el pensamiento. El único pensamiento, entonces, del que es posible tener cognición es el pensamiento en signos. Pero un pensamiento del que no se pueda tener cognición no existe. Todo pensamiento, por consiguiente, debe acaecer en signos"[30] (Peirce, 1867, p. 49).

Peirce no solo da una definición de signo, sino una abundancia de definiciones que se complementan mutuamente enfatizando sus elementos constitutivos.

> Un signo está en lugar *de* algo *ante* la idea que él produce o modifica. O, es un *vehículo* que transmite a la mente algo desde fuera. Aquello en lugar de lo cual está se llama su *objeto*; lo que transmite, su *significado*; y la idea que genera, su *interpretante*.[31] (CP 1.339)

> Un *signo* está en lugar de algo, *su objeto*. Está en lugar de ese objeto, no en todos los sentidos, sino en referencia a cierto tipo de idea, que a veces he llamado el fundamento de la representación.[32] (CP 2.228; énfasis agregado)

> Por *Signo* quiero decir una cosa, sea la que sea, real o figurada, que es capaz de adoptar una forma sensorial, es aplicable a una cosa que no sea ella, … y que es capaz de *ser interpretado* en … lo que llamo su *Interpretante,* de manera tal que sobre su *Objeto* comunica algo que puede no haberse sabido antes. Por lo tanto, existe una relación triádica entre un *Signo*, un *Objeto* y un *Interpretante*.[33] (MS 654. 7) (Citado en Parmentier, 1985, énfasis agregado)

Según Peirce el *objeto* de un signo es la idea mental o el objeto físico *representado por* el signo, el *interpretante* de un signo es la idea producida en la mente del intérprete, y el *representamen* de un signo es el vehículo material o mental que se adecua para representar al objeto físico o mental (véase Figura 1). Es decir, objeto, representamen e interpretante están interconectados inherentemente en el signo.[34]

30 El texto original es: "Only by external facts can thought be known at all. The only thought, then, which can possibly be cognized is thought in signs. But thought, which cannot be cognized, does not exist. All thought therefore must be in signs". Agradezco a Roberto Perry, miembro del Centro de Sistemática Peirceana de Bogotá (Colombia), sus valiosas sugerencias en la traducción de las citas de la obra de Peirce. [N. T.]

31 El texto original es: "A sign stands for something to the idea that it produces or modifies. Or, it is a vehicle conveying into the mind something from without. That for which it stands is called its object; that which it conveys, its meaning; and the idea to which it gives rise, its interpretant". [N. T.]

32 El texto original es: "A sign stands for something, its object. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the representation". [N. T.]

33 El texto original es: "By a Sign I mean anything whatever, real or fictile which is capable of a sensible form, is applicable to something other than itself … and that is capable of being interpreted in … which I call its Interpretant as to communicate something that may have not been previously known about its Object. There is thus a triadic relation between any Sign, an Object, and an Interpretant". [N. T.]

34 Varios autores llaman al representamen, en sí mismo, signo y consideran la tríada objeto, signo, interpretante. Esto presenta dificultades para algunos lectores porque en esta tríada el signo juega el papel de parte y todo al mismo tiempo. De hecho, en un cierto periodo, Peirce también se refiere a la tríada objeto, signo, interpretante.

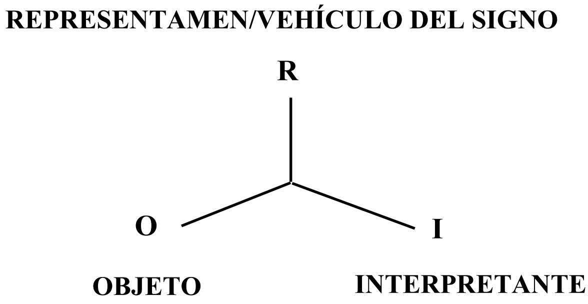


Figura 1. Signo triádico de Peirce

Objeto

Para Peirce, un objeto de un signo es cualquier cosa que llegue a ser objeto de pensamiento, por ejemplo, una cosa, un estado de cosas, un evento, un pensamiento, una relación, una cualidad, un hecho o cualquier cosa que tenga existencia real o la posibilidad de tenerla.

> Los Objetos –puesto que un Signo puede tener varios de ellos– pueden, cada uno, ser una cosa única, existente, conocida o una cosa que se crea que haya existido en el pasado o se espere que exista en el futuro, o una colección de tales cosas, o una cualidad conocida, o relación o hecho conocidos.[35] (CP 2.232)

Es importante observar que en la semiótica, las palabras *objeto* y *cosa* no son intercambiables. Los objetos son lo que las cosas llegan a ser tan pronto como son experimentadas; es decir, las cosas llegan a ser objetos tan pronto han cobrado existencia en la experiencia. Los objetos siempre incluyen una relación con un observador o un organismo que los experimenta (Deely, 1990).

Representamen

Un representamen se adecua para representar al objeto de distintas maneras. Primero, el representamen se puede tomar como el objeto, debido a una cualidad particular que ambos comparten y, por tanto, en ese aspecto son intercambiables (CP 1.558, 1867; CP 3.362); Peirce llama *icónica* a esta relación. Segundo, la posición espacial, temporal o contextual de un representamen puede hacer que se adecue para *representar* algún objeto en un campo experiencial; Peirce llama *indéxica* a esta relación. Tercero, la relación entre representamen y objeto puede trascender tanto el ámbito de la cualidad común

35 El texto original es: “The Objects —for a Sign may have a number of them— may each be a single known existing thing or thing believed formerly to have existed or expected to exist, or a collection of such things, or a known quality or relation or fact”. [N.T.]

como el del contexto común. Peirce llama *simbólica* a esta relación; en esta relación representamen y objeto están relacionados *únicamente* debido a que el interpretante los incluye como relacionados. En resumen, el representamen no solo juega un papel esencial en la naturaleza expresiva de un signo, sino que también satisface una relación particular con el objeto al que representa y con el interpretante que genera.

Interpretante

No se debería confundir un interpretante con el intérprete. El interpretante no es resultado ni producto del signo, es aquello en lo que un signo se convierte en la mente del intérprete; encarna la actividad cognitiva del intérprete. En contraste, el intérprete es un agente personal que toma parte en el proceso de interpretación. Es decir, el intérprete no es la fuente ni el resultado de la semiosis, sino más bien su lugar.

> Un *signo* se dirige a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizá un signo más desarrollado. Al signo creado lo llamo el *Interpretante* del primer signo.[36] (CP 2. 228; énfasis añadido).

Los interpretantes juegan un papel importante en la semiosis. En primer lugar, existen en aquellos puntos de la semiosis en donde los objetos son transformados en signos o los signos son transformados en otros signos. En segundo lugar, los interpretantes definen puntos de innovación en la semiosis al nivel de la representación objetiva y la evolución de la comprensión (Deely, 1990). Por tanto, los interpretantes juegan un papel importante en la cognición no solo de manera retrospectiva (como huellas de nuevos interpretantes), sino también de manera prospectiva (como la fuente de interpretantes más sofisticados).

Semiosis

Para Peirce, el signo tiene naturaleza triádica y relaciones diádicas inherentes entre sus tres elementos. Son las relaciones entre objeto y representamen; representamen e interpretante y objeto e interpretante. Sin embargo, la naturaleza triádica del signo no se puede partir en estas tres relaciones diádicas separadas puesto que, cuando se enfoca la relación diádica entre objeto y representamen, las otras dos relaciones diádicas (representamen e interpretante, objeto e interpretante) se activan también de una manera sinérgica, aun cuando no lleguen a la mente del intérprete todas al mismo tiempo. Peirce (1906a) llama semiosis o actividad semiótica a esta relación trirrelativa.

36 El texto original es: "A *sign* addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the *Interpretant* of the first sign". [N. T.]

La semiosis es un proceso triádico en el que un *objeto* genera un *representamen*, el *representamen* genera un *interpretante*, y a su vez este *interpretante* genera un nuevo *representamen* que representa a un *objeto* modificado que determina un *interpretante más sofisticado*, y de esa manera continúa la espiral de signos. Así que, la semiosis es un proceso en el cual se genera una serie potencialmente ilimitada de interpretantes, representámenes y objetos. Es decir, en la semiosis un signo tiene efecto cognitivo sobre su intérprete (Colapietro, 1993, p. 178) en la medida en que el intérprete se convierta en agente de interpretación y representación.

La semiosis es inherente a la noción triádica de signo. El representamen (vehículo del signo) media entre objeto e interpretante. Esta mediación es un proceso continuado de "representar" que relaciona a objeto e interpretante a través del representamen. Mertz (1985) y Merrell (1995) sostienen que la relación "estar en lugar de" de Peirce es una relación dinámica y mediadora a través de la cual un signo llega a ser un nuevo signo. En este proceso, cada nuevo signo contiene un signo anterior como huella. También sostienen que la relación "estar en lugar de" describe una conexión entre el *representamen*, el *objeto* y el *interpretante*. Es decir, el representamen representa a su objeto, y el interpretante representa a su representamen y a su objeto, mientras que al mismo tiempo, el interpretante está determinado por su representamen y su objeto. Esto quiere decir que los tres elementos del signo sostienen una interrelación dialéctica.

Deely (1994) y Parmentier (1985) también explican la relación "estar en lugar de" de Peirce. Por una parte, Deely considera una tal relación como dialéctica. Él considera el interpretante (I) como pasivo (i.e., determinado por) con respecto al representamen (R) mientras que el representamen (R) es también pasivo con respecto a (i.e., determinado por) su objeto (O). Sin embargo, el interpretante (I) en últimas llega a ser activo con respecto a, y representando tanto al objeto (O) como al representamen (R). Es decir, el representamen (R) y el interpretante (I) representan al *mismo* objeto, aun cuando en diferentes grados de especificidad. Por otra parte, Parmentier considera la dinámica del signo en términos de vectores de determinación y representación (véase Figura 2). En esta figura, los vectores de sentidos opuestos simbolizan la dialéctica entre determinación y representación. El vector de determinación entre O e I es la suma de los vectores de determinación entre O y R, y entre R e I; y el vector de representación entre I y O es la suma de los vectores de representación entre I y R, y entre R y O.

> El encaje de los vectores de representación y determinación implica que los tres elementos que están en la relación de signo nunca son permanentemente objeto, representamen e interpretante, sino que más bien cada uno cambia de papel a medida que se realizan nuevas determinaciones y representaciones. (Parmentier, 1985, pp. 27-29)

Entonces, cuando uno se enfoca en uno de los elementos del signo (objeto, interpretante o representamen), los otros dos están simultáneamente presentes y sinérgicamente activos. En la semiosis, el objeto, el representamen y el interpretante nunca son entidades estáticas ni aisladas. Por el contrario, son entidades interrelacionadas, cambiantes, que llegan a existir como resultado de procesos de interpretación y representación del intérprete.

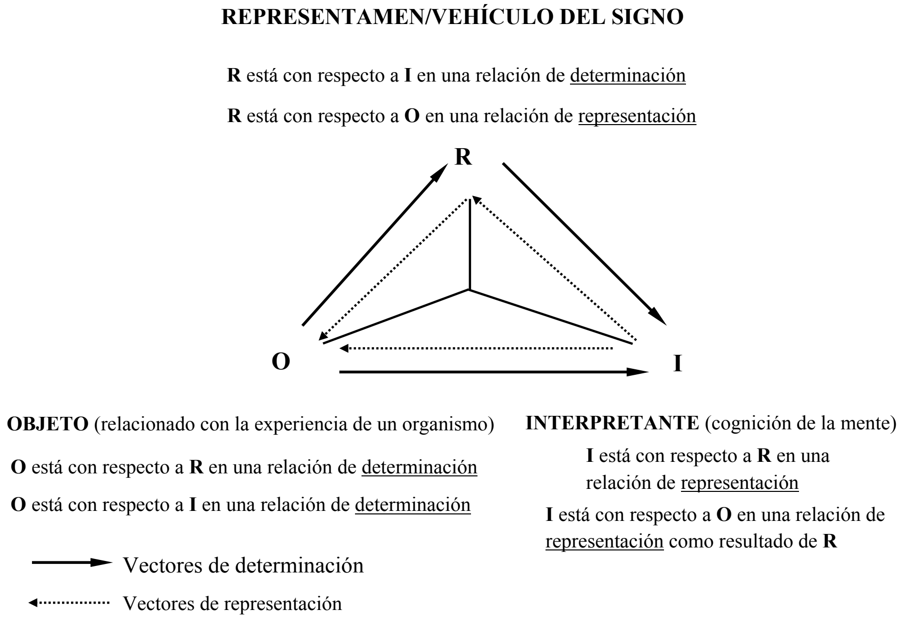


Figura 2. Relaciones dialécticas entre los elementos del signo (adaptado de Parmentier, 1985)

Tan pronto como el objeto inicial determina un representamen y un interpretante, este último determina un nuevo representamen que representa a un nuevo objeto que determina un interpretante nuevo y más sofisticado (véase Figura 3). Cada nuevo interpretante representa al objeto inicial en el mismo aspecto y con el mismo significado como lo hiciera el primer representamen, aunque es más sofisticado y está determinado en más alto grado. La secuencia de tríadas, a saber, objeto-representamen-interpretante (O_1, R_1, I_1), representamen-objeto-interpretante (R_2, O_2, I_2), y así sucesivamente, está en el corazón mismo de la semiosis.

El poder del interpretante para crear un objeto más descontextualizado es lo que Peirce llama "abstracción hipostática". Este poder es la clave de la capacidad del interpretante para cumplir con su carga original de representar al mismo objeto que representa el primer representamen y con el mismo significado que este le asigna. De esta manera, la tríada del signo de Peirce es dinámica y está virtualmente en movimiento perpetuo involucrando procesos abiertos de representación y determinación de los cuales surgen cadenas de significación. En este proceso, los signos se transforman en pensamiento cuando ellos mismos se desvanecen, siendo totalmente transparentes a las relaciones de determinación y representación mediadas por ellos.

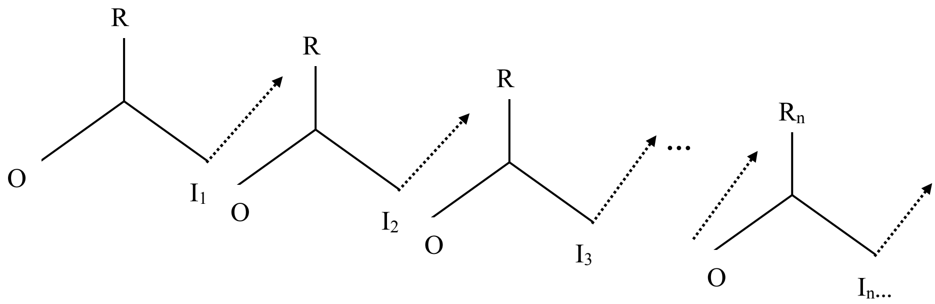


Figura 3. Cadena de significación constituida en un proceso de semiosis

Es decir, las cadenas de significación se manifiestan en la continuidad de los procesos de determinación y representación por parte del intérprete (i.e., el agente del signo). Cuando estos procesos del intérprete son compartidos con los miembros de un grupo contribuyen a los procesos de determinación y representación de los otros individuos y del grupo como colectividad. A través de la semiosis, llegan a existir cadenas de significación y en este proceso los interpretantes presentes anticipan interpretantes futuros y más sofisticados que inherentemente contienen como huellas a interpretantes previos. En otras palabras, una cadena de significación es la incrustación de signos dentro de nuevos y más sofisticados signos que para su funcionamiento dependen de signos previos más simples que se mantienen como huellas.

Número en términos de unidades

La idea de número natural como "una multitud de unidades compuestas" proviene del Libro VII de los *Elementos* (Heath, 1956, p. 277). También el matemático Stevin (1585) sostuvo que "la parte es del 'mismo material' que el todo. La unidad es una parte de una multitud de unidades. Por tanto, la unidad es del 'mismo material' que la multitud de unidades; pero el material de una multitud de unidades es el número. Por tanto, el material de una unidad es el número" (como lo cita Moreno-Armella y Waldegg, 2000, p. 187). Desde una perspectiva psicológica, McLellan y Dewey (1908) hicieron un análisis de la idea de unidad y de su aplicación a métodos de enseñanza de la aritmética. Ellos observaron que "solo cuando la unidad se trata no como una cosa, sino como un patrón para los valores numéricos de medición, la adición y la multiplicación, la división y las fracciones se correlacionan de manera racional" (p. 100).

Newton y Euler introdujeron la noción de número como razón. Según Newton, "número es la razón abstracta de una cantidad a otra de la misma clase" (como es citado en McLellan y Dewey, 1908, p. 72). De modo similar, Euler definió número como "la razón de una cantidad a otra cantidad que se toma como una unidad" (como lo citan McLellan y Dewey, 1908, p. 72). De la misma manera, McLellan y Dewey expresaron la idea de número como:

> La expresión más simple de cantidad en términos numéricos que incluye dos componentes: 1) una unidad patrón, una unidad de referencia —esta es de suyo una magnitud necesariamente de la misma clase que la cantidad medida; y 2) un valor numérico —que expresa *cuántas* unidades patrón hacen o construyen la cantidad que se va a medir… El número es el producto de la mera repetición de una unidad de medición; simplemente indica *cuántas* hay; es puramente abstracto, denota la serie de actos mediante los cuales la mente construye partes definidas en un todo *unificado* y *definido*. (1908, p. 69)

Casi un siglo más tarde, Davydov (1990/1972) definió número de una manera parecida. Lo describió como un caso particular de la representación de una relación general de cantidades, en la que una de ellas se toma como una medida y se está calculando la otra. "Un número se obtiene mediante la fórmula general $A/C=N$, donde N es un número particular, A es cualquier objeto representado como una cantidad, y C es cualquier medida. Claramente, al cambiar la medida se puede cambiar el número que le corresponde al mismo objeto" (p. 362).

La construcción mental de unidades como objetos conceptuales y su importancia en la conceptualización de números naturales han sido estudiadas por von Glasersfeld (1981), von Glasersfeld y Richards (1983), Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb (1983). En la conceptualización de fracciones, también se ha reconocido la importancia de la unidad fraccionaria (Behr, Khoury, Harel, Post y Lesh, 1997; Bergeron y Herscovics, 1987; Hunting, 1980; Hunting, Davis y Pearn, 1996; Kieren, 1988; Kieren y Nelson, 1981; Lamon, 1996; Sáenz-Ludlow, 1994, 1995; Streefland, 1991). Sin embargo, se ha estudiado poco la transición que los estudiantes hacen desde las unidades de números naturales a las unidades de números fraccionarios.

El propósito de este artículo es presentar un análisis de una cadena de significación obtenida colectivamente por un grupo de estudiantes de cuarto grado que participaron en un experimento de enseñanza cuya duración fue de un año. En sus procesos de construcción, expresión e interpretación, los estudiantes trascendieron su conocimiento sobre número natural y construyeron sus conceptualizaciones iniciales de las fracciones en totalidades discretas. La semiótica peirceana contribuye a la explicación de la apropiación de signos aritméticos y la producción de signos idiosincráticos que los estudiantes hacen en sus procesos de conceptualizar el número. Esta teoría de signos explica las cadenas de significación (creación de signos, uso de signos e interpretación de signos) que mediaron las reconceptualizaciones de los números naturales y las conceptualizaciones iniciales de los números fraccionarios por parte de los estudiantes de cuarto grado.

Metodología

Experimento de enseñanza

La metodología de experimento de enseñanza, tal como fue conceptualizada inicialmente por Steffe (1983) y Cobb y Steffe (1983), abarca la interacción social entre estudiante e investigador, aunque solamente se enfoca en el análisis de la actividad aritmética del estudiante. Cuando esta metodología se extiende al aula y cuando el factor social se considera junto con la actividad aritmética de los estudiantes (Cobb y Yackel, 1995), su análisis del razonamiento ya no se enfoca en la especificación de comportamientos cognitivos sino en la caracterización de la calidad de sus experiencias aritméticas (Cobb, 2000a), tomando en cuenta los aspectos sociales y culturales de su actividad (Bauersfeld, 1995; Steffe y Thompson, 2000; Van Oers, 2001). La experiencia matemática de los estudiantes es inseparable de sus propios patrones de uso de los signos y de creación de los signos (Ernest, 2002; Godino y Batanero, 2003; O'Halloran, 2003; Sáenz-Ludlow, 1998; Sáenz-Ludlow y Walgamuth, 2001).

En esta metodología (sea que el profesor/investigador interactúe con un estudiante, un grupo pequeño o todo el grupo), hacer hipótesis sobre las maneras en que comprenden, sobre sus acciones matemáticas y sobre sus patrones de uso de signos y de creación de signos debería constituir un proceso progresivo y continuado. La esencia de la metodología es facilitar e impulsar la interacción entre estudiante y profesor y entre estudiantes, y en consecuencia, proporcionar muchas oportunidades para que construyan, simbolicen y expliquen sus estrategias numéricas.

Siguiendo una metodología de experimento de enseñanza similar a la de Cobb y sus colegas, se condujo un experimento de enseñanza de un año con un grupo de estudiantes de cuarto grado. En cada episodio de enseñanza se prestó especial atención, por una parte, al cambio operado en los estudiantes de "un reflejo simbólico" (reacción pasiva a los signos) a una "iniciativa simbólica" (creación dinámica de signos y uso de signos) y, por otra parte, a la mediación de signos idiosincráticos y convencionales en su reconceptualización de número, de palabras numéricas, de la estructura del valor posicional de los numerales, de las operaciones con números y sobre la conceptualización de fracciones.

El experimento de enseñanza en que participaron los estudiantes consistió en episodios diarios de enseñanza en el aula y en entrevistas semanales a pequeños grupos. La profesora de cuarto grado y la investigadora enseñaron en equipo la clase de aritmética, y la investigadora condujo las entrevistas semanales a un grupo pequeño. Las interacciones dialógicas entre profesora y estudiante y entre estudiantes caracterizaron cada episodio de enseñanza. En cada episodio de enseñanza, la profesora/investigadora hizo un esfuerzo para "ver" las estrategias de solución de los estudiantes desde las perspectivas de ellos. Este esfuerzo le permitió a la profesora/investigadora formular preguntas que pudieran ser interpretadas por el grupo, de acuerdo con sus propias experiencias numéricas, y estimularlos a formular preguntas por sí mismos y plantearlas a los demás.

Esta estrategia pedagógica está sustentada por la afirmación de Vygotsky (1986/1934) según la cual "el marco del niño es puramente situacional, con la palabra atada a algo concreto, en tanto que el marco del adulto es conceptual" (p. 133). En consecuencia, para comprender las conceptualizaciones de las tareas aritméticas de los estudiantes, la profesora tuvo que interpretar en paralelo tanto sus propias acciones aritméticas como las de los estudiantes para "ver" la solución de ellos desde la perspectiva de ellos, y para mantener una interacción dialógica significativa.

Como parte del proyecto de investigación, la profesora colaboradora participó en un campo de verano intenso para profesores y niños en el que se usó la metodología de experimento de enseñanza. Durante el año lectivo, esa profesora también participó en cursos enseñados por la investigadora, para progresar en su comprensión del fundamento socioconstructivista de la metodología. Diariamente, la investigadora y la profesora se comprometieron en conversaciones sobre la naturaleza y el propósito de las tareas aritméticas que se propondrían a los estudiantes, las estrategias numéricas de los niños, el uso de signos y la creación de signos, y el papel mediador de aquellos signos en sus conceptualizaciones.

Estudiantes

La escuela elemental que colaboró con el experimento de enseñanza era considerada de bajo rendimiento académico y la mayoría de los estudiantes provenía de familias de estatus socioeconómico bajo. Los estudiantes de cuarto grado que participaron (seis niñas y ocho niños) estaban retrasados en su desarrollo numérico, según los lineamientos curriculares de tercer grado. Además, también quedaron clasificados en un nivel muy bajo en la prueba estandarizada que tomaron en tercer grado.

Expectativas para la actividad matemática

La enseñanza en aritmética que estos estudiantes recibieron en los años anteriores se podría caracterizar como tradicional en el sentido de que se esperaba que realizaran cálculos aritméticos usando solamente los algoritmos convencionales explicados y modelados por el profesor. Al comienzo del año escolar, tendían a esperar instrucciones específicas o a buscar la aprobación de la profesora, pero cuando ella no les daba tales instrucciones, comenzaron a confiar en su propio razonamiento. Una práctica común en el experimento de enseñanza fue la presentación oral y escrita de tareas aritméticas que se les asignaban para resolver individualmente. Después de darles un tiempo adecuado, la profesora procedía a la discusión con todo el grupo; ellos explicaban y justificaban sus estrategias de solución y cómo habían llegado a sus respuestas. Se esperaba que cada uno escuchara con atención la solución de otros y expresara su acuerdo o desacuerdo junto con una justificación.

Rápidamente, los estudiantes comenzaron a asumir la responsabilidad de su propio pensamiento, y las normas sociales y sociomatemáticas del aula (Yackel y Cobb, 1996) comenzaron a cambiar. La interacción dialógica en el aula mejoró a medida que los estudiantes sentían que sus contribuciones se tenían en cuenta y sus soluciones eran aceptadas y validadas por los otros miembros del grupo. La satisfacción con el nuevo ambiente de enseñanza-aprendizaje en el aula se manifestó en la voluntad de proponer al grupo problemas aritméticos generados por ellos mismos, de interpretar las estrategias de solución de otros, e incluso de imitar algunas de esas estrategias.

Recolección de información

Para analizar la evolución de la actividad aritmética en el aula, las estrategias de solución de los estudiantes y la creación y el uso de signos, las clases fueron grabadas en video y un observador tomó a diario notas de campo. También se recogieron las hojas de tarea, los papeles de borrador de los estudiantes y copias de las transparencias usadas por ellos. Toda la información se recopiló en orden cronológico.

Tareas de enseñanza

Se generaron tareas especiales para el experimento de enseñanza, que sufrieron cambios de acuerdo con las necesidades aritméticas y cognitivas de los estudiantes. Se generaron también nuevas tareas como resultado de las interacciones del grupo en los episodios de enseñanza. En general, la generación de tareas y la actividad de investigación fueron evolucionando conjuntamente de una manera sinérgica. Este enfoque no fue diferente del recomendado por el enfoque didáctico de Freudenthal (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994).

El principio que guió la preparación de tareas consistió en facilitar la conceptualización amplia de los números naturales en términos de unidades de diez y otras unidades. Las tareas pretendían ayudar a los estudiantes a: 1) construir una comprensión más profunda del valor posicional y de las palabras numéricas; 2) reconceptualizar los algoritmos convencionales que ya conocían y construir, desde la perspectiva de sus propias estrategias numéricas, aquellos que no conocían todavía, y 3) conceptualizar los números fraccionarios.

Análisis

Conceptualización de los números naturales como multiplicidad de unidades

De conformidad con el currículo de aritmética de la escuela en donde se llevó a cabo el experimento de enseñanza, a los estudiantes de tercer grado se les enseñaron los algoritmos usuales con números de dos dígitos, y se esperaba que los de cuarto grado sumaran, restaran, multiplicaran y dividieran con números de tres dígitos. Con esta expectativa en mente, decidimos indagar sobre la comprensión que estos estudiantes tenían de número y de las operaciones con números. Para lograr este fin, diseñamos tareas aritméticas que incluían contar hacia adelante y hacia atrás, comenzando en cualquier número, tareas que presentaban números en configuraciones geométricas para evitar la presentación convencional de los números en forma vertical y horizontal, y diferentes tipos de tareas con dinero.

Al comienzo del año escolar, los estudiantes tuvieron dificultad con la secuencia de palabras numéricas más allá de 99; la mayoría podía sumar y restar mediante los algoritmos usuales, pero difícilmente daban sentido a los números más allá de 150. Además, tenían una comprensión rudimentaria del valor posicional. Por ejemplo, podían escribir numerales correspondientes a palabras numéricas como *doscientos treinta y cinco,* pero tenían dificultad para escribir los numerales correspondientes a palabras numéricas como *doscientos seis,* ya que la posición de las unidades de diez está silenciosamente preservada en la palabra numérica; por tanto, escribían 2006 en vez de 206.

Además, cuando se les pedía encontrar el número de decenas en números como *doscientos cuarenta y seis,* respondían 4 sin tener en cuenta el número de decenas en las unidades de una centena. Algunos, sin embargo, podían contar de 5 en 5 y de 10 en 10, y tenían un buen sentido de los números anteriores a 500. Estos estudiantes aportaron a la clase maneras de hablar y pensar sobre los números que contribuyeron al surgimiento de una metáfora colectiva que medió la descomposición de números en unidades. El surgimiento de esta metáfora colectiva y los consiguientes diagramas numéricos están documentados en otro artículo (Sáenz-Ludlow, 2004).

Al comienzo del año escolar se asignaron tareas como encontrar el número de doses, treses, cuatros y seises en 12, usando diferentes contextos (una docena de huevos, una docena de rosquillas, una docena de barras de dulce, doce meses en un año, doce pulgadas en un pie, doce horas en un reloj de manecillas, y así sucesivamente).

En todos los diálogos, *P* representa a la profesora y una letra mayúscula seguida de una minúscula (excepto *Ee*) se usan como abreviatura del pseudónimo de un estudiante, y aparecerán en letra cursiva. *Ee* representa a estudiantes que respondieron simultáneamente. Las flechas en los diagramas numéricos indican el sentido en el que los estudiantes los construyeron. Al hacer conteo doble, los estudiantes ponen en correspondencia uno a uno la sucesión que mantiene los registros de iteración de una unidad particular (*sucesión de iteración*) con la sucesión que mantiene los registros del número de veces que se produce la iteración (*sucesión de conteo*).

Episodio #1

1	*P*:	Encuentre el número de doses en 12.
2	*Jp*:	1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10, 11-12 [golpea cada dedo dos veces y muestra uno a uno seis dedos].
3	*Li:*	[Levanta uno por uno seis dedos para llevar la cuenta de su conteo de dos en dos] 2-4-6-8-10-12; 6.
4	*Ri:*	6. 2-4-6-8, y 4 más.
5	*P:*	¿*Ra*?
6	*Ra*	2 es 1, 4 es 2, 6 es 3, 8 es 4, 10 es 5, 12 es 6.

Al contar el número de doses en 12, los estudiantes mostraron un conteo doble implícito y explícito de acuerdo con su conceptualización de 2 como una unidad compuesta o como una unidad iterable (Steffe, 1983). Por ejemplo, el concepto que *Jp* tenía de 2 no era el de una unidad compuesta, sino más bien el de una unidad iterable de dos unos, ya que él golpeó cada dedo dos veces. Es decir, el doble golpe de cada dedo era una indicación de la iterabilidad de su unidad de 2 mientras mantenía los registros de conteo en el dedo con el que golpeaba (línea 2). En la línea 3, *Li* usó uno a uno sus dedos para mantener el registro de su conteo de 2 en 2, dejándonos con una indicación de su conceptualización de dos como una unidad compuesta. Su sucesión de iteración fue explícita, mientras que su sucesión de conteo fue implícita en los movimientos de los dedos.

El conteo de *Ri* (línea 4), aunque sofisticado, fue menos explícito, ya que la sucesión de conteo fue totalmente implícita. Usó primero una sucesión numérica para mantener los registros de conteo de 2 en 2 hasta 8, y luego usó su conocimiento de 4 como resultado de iterar dos doses para llevar la cuenta mentalmente de todos los doses en 12. *Ra* (línea 6) fue quien contó de manera más explícita, ya que superpuso, en una correspondencia uno a uno, las sucesiones de iteración y de conteo. Las maneras de contar de *Li*, de *Ra* y de *Ri* indican que, para ellos, 2 era ya una unidad compuesta con la cual podían operar directamente; en contraste, para *Jp*, 2 era solamente una unidad iterable que requería ser construida cada vez para operar con ella.

Los estudiantes hicieron sus propias interpretaciones de la tarea (objeto) y expresaron su comprensión (interpretantes) a través del conteo doble (representamen simbólico) y movimientos de dedos (representamen indéxico). Es decir, la actividad de conteo fue un proceso triádico de tipo sígnico.

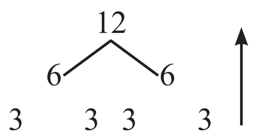
Los estudiantes también recurrieron a diagramas numéricos, además de su conteo doble implícito o explícito. El diagrama en el episodio que sigue fue interpretado por uno de ellos como algo que sugiere la relación inversa entre los procesos de iterar una unidad y la plausibilidad de descomponer la unidad resultante, más grande, en sus unidades constitutivas.

Una instancia del uso de un diagrama por parte del grupo para esquematizar relaciones numéricas tuvo lugar el día después del episodio que se presentó antes. La profesora les pidió que distribuyeran mentalmente 12 rosquillas en cuatro grupos iguales y calcularan el número de rosquillas en cada grupo.

Episodio #2

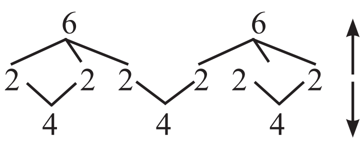
1 *Li:* 3 grupos, quiero decir 4 grupos de 3. Un grupo de 3 aquí, otro 3 aquí [gesticula en el aire]. 3, 3, y 3 es 9, y 3 más es 12.

2 *Pr*: Toma dos grupos de 3; 3 y 3 es 6; y otros 2 grupos de 3 es 6; 6 y 6 es 12. [Pasa al tablero y hace el siguiente diagrama de abajo hacia arriba como lo indica la flecha].



3 *St*: [Interpretando el diagrama de *Pr*] Sí, podrías hacer esto si supieras que 6 y 6 es 12, y 3 y 3 es 6.

4 *Co*: Toma 2, 2, 2 y haces 6; toma otros 2, 2, 2 y haces otro 6. Luego, toma 2, 2 y haces un 4; 2, 2 otro 4; 2, 2 otro 4. [Pasa al tablero y hace el siguiente diagrama en los sentidos indicados por las dos flechas].



5 *P:* Pero, no dije tres grupos iguales, dije cuatro grupos iguales. ¡Buena explicación para una pregunta diferente, Co!

Todos los estudiantes del diálogo anterior parecen poder componer a 12 mediante iteración. *Li* y *Pr* anticiparon a 3 como la unidad apropiada de iteración y compusieron a 12 iterando a 3 cuatro veces o iterando a 3 dos veces para hacer un 6 y luego 6 dos veces. *St* interpreta la solución de *Pr* e inmediatamente señala que la unidad de iteración se debe anticipar para descomponer a 12 en cuatro grupos.

Cuando la unidad apropiada de iteración no ha sido anticipada, otras unidades se podrían iterar para componer a 12 aunque el objetivo de tener cuatro grupos no se cumpla. *Co*, por ejemplo, iteró tres doses para componer a 6 y luego iteró dos doses para componer a 4 y como resultado final descompuso a 12 en tres grupos iguales de 4. Sin embargo, no pudo ver que tener tres grupos iguales de 4 era diferente de tener cuatro grupos iguales de 3. Al parecer, no podía darse cuenta de la diferencia entre la cardinalidad de las unidades de iteración y el número de iteraciones.

El episodio anterior es significativo por tres razones. Primero, ilustra la capacidad de los estudiantes para convertir representámenes de un tipo (expresiones lingüísticas aritméticas) en representámenes de otro tipo (diagramas numéricos) y su capacidad de interpretar las soluciones de otros. Segundo, ilustra la dificultad que tienen algunos para diferenciar el número de grupos y la cardinalidad de cada grupo. Tal diferenciación es necesaria para conceptualizar cuantificaciones fraccionarias en totalidades discretas, como se mostrará en la siguiente sección. Tercero, ilustra acciones inversas de los estudiantes cuando iteran una unidad para componer un número y descomponen un número en unidades constitutivas de iteración.

La iteración se puede hacer directamente una vez conocida la unidad de iteración; sin embargo, cuando se distribuye igualmente una cantidad, se tiene que anticipar la unidad apropiada de iteración. Esto es para decir que cuando los estudiantes son capaces de iterar, son capaces de multiplicar; sin embargo, solo cuando son capaces de descomponer un número en unidades de la misma cardinalidad, son capaces de distribuir (dividir) un número dado de objetos. En otras palabras, para distribuir un número de objetos dados, los estudiantes deben poder anticipar la unidad de iteración y diferenciar entre la cardinalidad de la unidad de iteración y el número de iteraciones.

En el siguiente episodio, los estudiantes indican su capacidad de descomponer e iterar unidades mediante un conteo doble intencionado o un razonamiento proporcional simple para encontrar el número de cuatros y doses en 24 sabiendo el número de cuatros que hay en 12. También encontraron el número de treses que hay en 36 sabiendo el número de seises que hay en 36.

Episodio #3

1 *P:* Por la clase anterior sabemos el número de unos, doses, treses, cuatros, seises y doces que hay en 12. Hoy, veamos si podemos encontrar el número de cuatros que hay en 24. [Escribe en el tablero $24 \div 4$].

2 *Ho:* Hay tres cuatros en 12, luego seis cuatros en 24.

3 *An*: Dos cuatros en 8. Hay tres ochos en 24. Luego hay seis cuatros en 24.

4 *P:* [Escribe en el tablero $24 \div 4 = 6$ y $6 \times 4 = 24$). Si tenemos seis cuatros en 24, ¿cuántos doses hay en 24? ¿Se tienen más doses o más cuatros en 24?

5 *Ee:* Más doses.

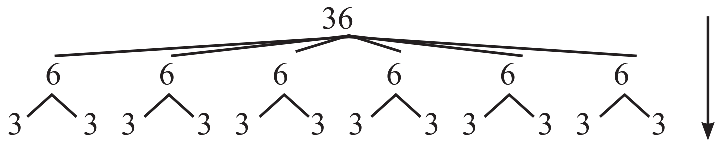
6 *St:* Más doses porque vi tres ochos en 24. Conté de dos en dos y hay cuatro doses en 8. Cuatro doses en 8 y agregué un 8 más y eso es cuatro doses más, más cuatro doses más agregados a los ocho [ella quiere decir ocho doses] eso es doce doses.

7 *P:* Muy bien. Sabemos que hay seis seises en 36 [escribe en el tablero $6 \times 6 = 36$ y $36 \div 6 = 6$]. ¿Puedes encontrar cuántos treses hay en 36?

8 *Ra:* El doble.

9 *P:* *¿Por qué?*

10 *Pr:* Partes 6 por la mitad y tienes 3 y 3 [va al tablero y continúa]. Esto fue lo que hice. Sabía que seis seises es 36. Solo conté dos treses por cada 6; 2, 4, 6, 8, 10, 12. Tan solo tomé a 6 y lo partí en mitades [hace el siguiente diagrama en el tablero].



Hay dos treses allí [señala a los primeros dos treses y continúa señalando a las siguientes parejas de treses] cuatro treses, seis treses, ocho treses, diez treses, doce treses.

11 *P:* [Escribe en el tablero $12 \times 3 = 36$ y $36 \div 3 = 12$].

El diálogo anterior ilustra la utilidad del conteo doble (sea implícito o explícito) para iterar y descomponer un número; también ilustra la representación de la iteración y la descomposición a través de diagramas numéricos. La iteración y la descomposición también parecen estar en la raíz del razonamiento proporcional implícito de *Ho y Ra*. La respuesta de *Ho* "hay tres cuatros en 12, luego seis cuatros en 24" parece ser una inferencia basada en la relación entre 12 y 24. Su explicación indica que él sabe que hay dos doces en 24 y tres cuatros en 12; en consecuencia, el número de cuatros que hay en 24 es el doble del número de cuatros que hay en 12. Asimismo, la respuesta sucinta de *Ra* "el doble" parece ser el resultado de una inferencia del mismo tipo: hay dos treses en 6 y seis seises en 36, entonces el número de treses que hay en 36 es el doble del número de seises que hay en 36.

En contraste, *E* encuentra el número de doses que hay en 24, no como una inferencia del número de cuatros que hay en 24, sino a partir de "ver" a 24 compuesto de tres unidades de 8 y cada 8 compuesto de cuatro unidades de 2; entonces ella iteró cuatro unidades de 2 tres veces. *Pr* también usa conteo doble para iterar el número de treses que hay en 36; sin embargo, él utiliza el hecho dado de que hay seis seises en 36 y se enfoca en el número de iteraciones de la unidad de 3 para componer una unidad de 6 usando la *sucesión de conteo* 2-4-6-8-10-12, mientras que mantenía implícita la *sucesión de iteración* (3-6/9-12/15-18/21-24/27-30/33-36). Después complementó su conteo doble implícito con un diagrama numérico.

El diálogo anterior ilustra la conceptualización hecha por los estudiantes sobre números particulares en términos de diferentes unidades: 24 como seis cuatros, 24 como doce doses, 24 como tres ochos, 36 como seis seises, y 36 como doce treses. En clases siguientes se les pidió hablar, de tantas maneras como pudieran, sobre 36, 48, 60, 72 y otros números. Por ejemplo, 36 fue conceptualizado como dos dieciochos, tres doces, cuatro nueves, seis seises, nueve cuatros, doce treses y dieciocho doses. Los estudiantes usaron, además del razonamiento proporcional y el conteo doble, diagramas numéricos para representar la iteración y la descomposición.

Decimos que un estudiante construye el número como *multiplicidad de unidades* cuando es consciente de diferentes, aunque equivalentes, maneras en las que se puede componer y descomponer el mismo número por medio de unidades de la misma cardinalidad. La construcción del número como multiplicidad de unidades requiere no solo la construcción del número como una unidad de unidades (Steffe, 1983), sino también la conciencia de varias representaciones del mismo número como una unidad de unidades en diferentes, aunque equivalentes, maneras. Es decir, el número como *multiplicidad de unidades* se refiere a la plausibilidad de expresar simultáneamente el mismo número como una unidad de unidades en más de una manera. Es en este sentido en el que decimos que estos estudiantes estaban en vía de construir el número como *multiplicidad de unidades*.

Tenemos aquí nuestro primer signo colectivo en el que la iteración y la descomposición de unidades es el *objeto* (O_1) del signo; expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos son *representámenes* (R_1) del signo; y, finalmente, el número como multiplicidad de unidades es el *interpretante* (I_1) del signo. En la mente de los estudiantes, el número como multiplicidad de unidades es una conceptualización generalizada de iteración y descomposición. Esto significa que el número como multiplicidad de unidades representa no solo a su objeto (iteración y descomposición), sino también a sus representámenes (expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos) de una manera más abstracta. Al mismo tiempo, el número como multiplicidad de unidades está determinado por la iteración y la descomposición (O_1), lo mismo que por expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos (R1). Es decir, el número como multiplicidad de unidades (I_1) mantiene una relación dialéctica de determinación y representación con O_1 y R_1 (véase Figura 4).

Este signo colectivo está constituido por tres pares interrelacionados:

- iteración/descomposición y expresiones numéricas lingüísticas/conteo doble/diagramas numéricos (O_1, R_1);
- expresiones numéricas lingüísticas/conteo doble/diagramas numéricos y número como multiplicidad de unidades (R_1, I_1);
- iteración/descomposición y número como multiplicidad de unidades (O_1, I_1).

Cada elemento de un par interactúa dialécticamente con el otro en el sentido de que el primero determina al segundo, mientras que el segundo representa al primero. Estas relaciones dialécticas se indican en la Figura 4 mediante los vectores opuestos de determinación y representación. La relación dialéctica entre iteración/descomposición de unidades (O_1), y número como multiplicidad de unidades (I_1) es una relación de encaje en la que iteración/descomposición está generalizada, preservada y cumplida en la conceptualización del número como multiplicidad de unidades. Esta relación de encaje también representa la suma de las otras dos relaciones dialécticas intrínsecas de los pares (O_1, R_1) y (R_1, I_1).

Es conveniente formular dos preguntas. La primera es si la conceptualización que los estudiantes tienen del número como multiplicidad de unidades podría o no influir en sus construcciones de los números fraccionarios en totalidades discretas. Por ejemplo, si los estudiantes fueron capaces de conceptualizar a 24 en términos de unos, doses, treses, cuatros, seises, ochos, doces, ¿estarían en capacidad de conceptualizar cuantificaciones fraccionarias entre 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24? La segunda pregunta se refiere a si las sucesiones de iteración y de conteo en el conteo doble jugarían o no un papel en la conceptualización que de las fracciones en totalidades discretas hagan los estudiantes. Las siguientes secciones se concentran en estos asuntos.

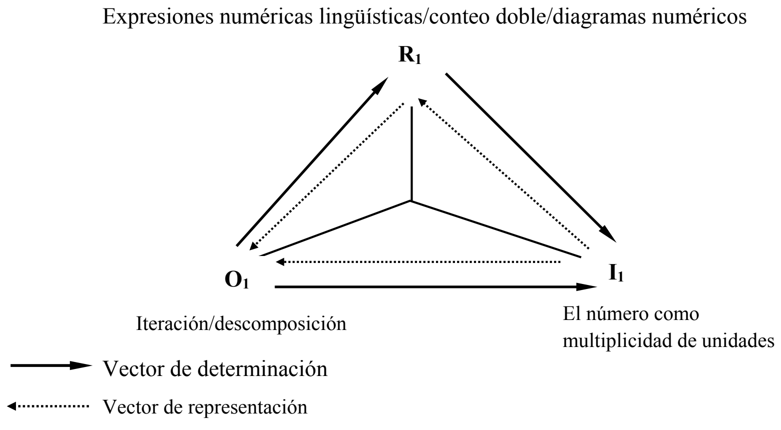
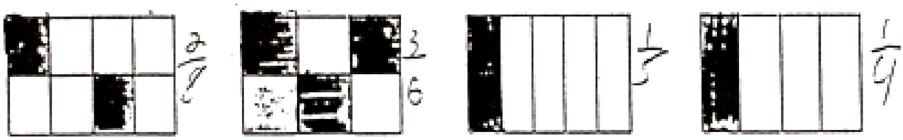


Figura 4. Primer signo colectivo: de la iteración y la descomposición (O1) al número como multiplicidad de unidades (I1) a través de expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos (R1)

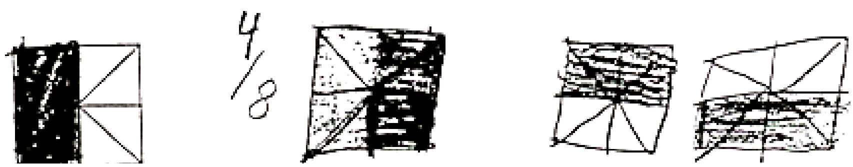
Dificultades iniciales de los estudiantes en sus conceptualizaciones de fracciones

Por la época en que comenzamos a plantear tareas de fracciones a los estudiantes, aparecieron en sus estrategias numéricas la iteración y la descomposición sofisticadas de números naturales; esto se hizo evidente en sus maneras creativas de realizar cálculos mentales y escritos (Sáenz-Ludlow, 1997, 1998). Puesto que una de las metas principales del experimento de enseñanza era analizar la naturaleza de la transición de los estudiantes para ir de su conocimiento sobre números naturales a su conceptualización de fracciones en totalidades discretas, dedicamos veinte clases consecutivas a trabajar con fracciones. Más aún, a partir de finales de febrero hasta el final del año escolar, todas las entrevistas semanales a pequeños grupos estuvieron enfocadas solamente en fracciones.

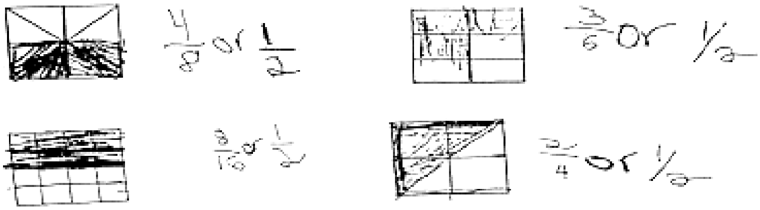
Al comienzo pareció que podría ser algo más fácil para los estudiantes identificar fracciones de tortas o barras de dulce que fracciones simples de totalidades discretas relativamente pequeñas. En las primeras cuatro clases sobre fracciones, hicieron relaciones fraccionarias entre las partes iguales en que se dividían objetos continuos (círculos, regiones cuadradas y regiones rectangulares) y el objeto completo. La comprensión inicial que tenían de fracciones en totalidades continuas se ilustra mediante varias muestras de su trabajo. Por ejemplo, cuando se les dio una figura dividida y se les pidió expresar la parte sombreada de cada figura mediante un número fraccionario, pudieron relacionar el número de partes sombreadas con el número total de partes de la figura dada y expresarlo verbalmente como “tantas partes del número total de partes”. La siguiente tarea proviene de la hoja de trabajo de *Pr*.



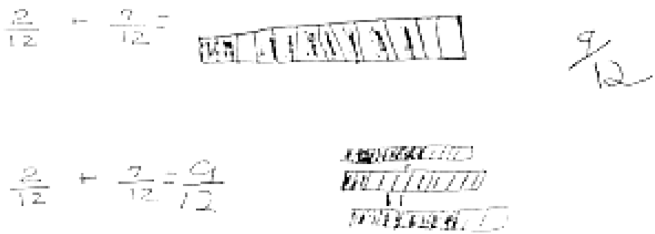
También cuando se dio a los estudiantes una figura dividida y se les pidió colorear cuatro octavos de la figura, ellos pudieron no solo hacer eso sino también escribir el numeral fraccionario. Además, estaban deseosos de dibujar una figura similar y colorear cuatro octavos de ella de diferentes maneras indicando la independencia entre la relación cuantitativa fraccionaria y la posición de las partes en el todo. La siguiente tarea proviene de la hoja de trabajo de *Mi*:



Los estudiantes también manifestaron su capacidad para generar fracciones simples equivalentes cuando recibieron figuras divididas y se les pidió sombrear la mitad de la figura y expresar eso en términos de fracciones distintas de un medio. La siguiente tarea proviene de la hoja de trabajo de *Ho*:



Recíprocamente, cuando se les dieron numerales fraccionarios, pudieron representarlos usando totalidades continuas. El trabajo de *Pr* y de *Ja* en la figura siguiente indica que pudieron tomar una totalidad particular (en este caso un rectángulo) y dividirla teniendo en cuenta el número de partes indicadas por el denominador del numeral fraccionario, aunque pasaron por alto la igualdad del tamaño de las partes. El trabajo de *Ja* en la segunda fila de la figura muestra que él tampoco pudo mantener igual el tamaño de las totalidades usadas en su representación.

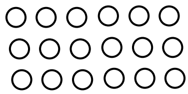


Aunque el trabajo de estos estudiantes no indica una comprensión sofisticada de cuantificaciones fraccionarias en totalidades continuas, sí indica una comprensión que está en progreso. Cuando trabajaron con barras de dulce, tortas u otras totalidades continuas, tuvieron éxito por dos razones. Primera, no tenían que preocuparse por la magnitud de cada parte, pues estaba determinada físicamente por la extensión de las partes y, por consiguiente, los estudiantes contaron el número de partes en que la totalidad estaba dividida y a partir de ello tomaron una o más partes para establecer cuantificaciones fraccionarias. Segunda, habían trabajado con fracciones en tercer grado y habían aprendido algo sobre numerales fraccionarios y las palabras numéricas para fracciones. Expresiones como “2 partes ‘de’ 3 partes” para “dos tercios” y el símbolo “2/3” les eran conocidos en el contexto de totalidades continuas. Indagamos entonces si serían capaces de encontrar fracciones como 1/3 y 2/3 de cualquier número de objetos que fuera múltiplo de 3 y de transformar su expresión conocida “dos partes ‘de’ tres partes” en una expresión de la forma “dos unidades de cardinalidad *k* ‘de’ tres unidades de cardinalidad *k*”.

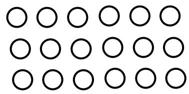
El propósito de esta sección es analizar la transición progresiva de los estudiantes que va de su comprensión de fracciones en totalidades continuas a su comprensión emergente de fracción en totalidades discretas. Tal transición se basó en la interpretación que daban al número como multiplicidad de unidades al mismo tiempo que podían mantener activa pero implícita la cardinalidad de la unidad de iteración. Los estudiantes que no podían mantener implícita esta cardinalidad experimentaron dificultades en la conceptualización de fracciones de totalidades discretas.

En los siguientes episodios se les presentó dos tipos complementarios de tareas. Estas tareas se pueden describir así: a) dado el número de objetos de un grupo, encontrar un subgrupo que represente una fracción particular del grupo (e.g., muestra un tercio de 18 fríjoles), y b) dado un subgrupo de un grupo, encontrar el número fraccionario que establece una relación fraccionaria entre el subgrupo y el grupo (e.g., 6 fríjoles son qué fracción de 18 fríjoles). La siguiente tarea se les presentó en un formato escrito durante una entrevista a los grupos pequeños:

Muestra 1/3 de 18



Muestra 2/3 de 18



Los estudiantes tuvieron tiempo de pensar y resolver esta tarea individualmente o con un compañero. Varios encerraron con una línea un conjunto de 3 redondeles como la respuesta a 1/3 de 18 y 2 conjuntos de 3 redondeles como la respuesta a 2/3 de 18.

Episodio #4

1 *Li:* [Encierra con una línea 3 redondeles y escribe 3 como respuesta para 1/3 de 18].

2 *P:* Dime, ¿cómo calculaste que 3 es un tercio de 18?

3 *Li:* Porque todos los grupos son de 3.

4 *P:* Ya veo. ¿Qué significa para ti tener un tercio de algo?

5 *Li:* Uno ‘de’ 3.

6 *P:* *¿Un qué ‘de’ 3 qué?*

7 *Li:* Un grupo ‘de’ 3 grupos.

8 *P:* Ya veo. Muéstrame tus 3 grupos aquí.

9 *Li:* [Señala a 3 grupos de 3 redondeles cada uno].

10 *P:* *¿Cuántos redondeles usaste en total?*

11 *Li:* [No responde].

12 *P:* Te daré 18 fríjoles y 3 tazas para que me muestres 3 grupos.

13 *Li:* [Coloca cada vez un fríjol en cada una de las tres tazas y comienza de nuevo el proceso hasta que ya no tiene más fríjoles].

14 *P:* Muéstrame un tercio de tus fríjoles.

15 *Li:* [Señala una taza].

16 *P:* *¿Cuántos fríjoles en un tercio de 18?*

17 *Li:* Seis.

18 *P:* Así que, dices que 6 fríjoles es ¿qué fracción de todos tus fríjoles?

19 *Li:* Un seis.

20 *P:* Déjame preguntarte algo. ¿6 es qué fracción de 18 fríjoles, un medio, un tercio, un cuarto,…?

21 *Li:* Un sexto porque hay 6 fríjoles en cada taza.

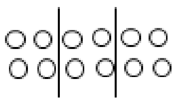
La comprensión inicial de *Li* de *"un tercio"* fue *"un tres"*, así que encerró tres redondeles del conjunto de 18 redondeles; esto indica que no se percató de ningún tipo de relación fraccionaria entre el subgrupo de 3 fríjoles y el grupo de 18. Cuando recibió 3 tazas y 18 fríjoles, ella usó este material sin hacer intento alguno de anticipar el número de fríjoles por taza; en cambio, los distribuyó secuencialmente uno a uno en las tres tazas. El hecho de que ella hubiera terminado con tres grupos iguales de 6 fríjoles en cada uno fue solo una función del número inicial de fríjoles y el número de tazas. Tan pronto como tuvo las 3 tazas de 6 fríjoles en cada una, ella se refirió a una taza como un tercio. Sin embargo, cuando la profesora cambió la manera de expresar la misma pregunta, *Li* cambió su respuesta a "un seis" y luego a "un sexto". Este cambio es consistente con su interpretación inicial de un tercio como "un tres".

El mismo día, *Ja* experimentó una dificultad similar en su entrevista en grupo pequeño. La tarea escrita que recibió fue la siguiente:

Episodio #5

1 *P:* *¿Podrías mostrarme un tercio de esos 12 redondeles?*

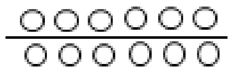
2 *Ja:* Solo encontré cómo hacer las partes /1-2-3 [mostrando tres grupos de 4] /4 en cada lado.



[Después *Ja* escribe 1/3 de 12 = 4].

3 *P:* Si un tercio de 12 es 4, ¿puedes mostrarme dos tercios de 12?

4 *Ja:* Dos tercios de 12… [Traza una línea horizontal como se muestra en la figura



siguiente] y 1-2-3/4-5-6/ y seis en el otro lado.
2/3 de 12 = 6.

5 *P:* Antes tenías tres grupos de 4 redondeles cada uno… y me dijiste que 4 es un tercio de 12.

6 *Ja:* Eso quiere decir 2 partes [mostrando el 2 en 2/3] … hay dos partes allí.

7 *P:* Muéstrame una parte.

8 *Ja:* Una parte podría ser precisamente 6 [Encierra los 6 redondeles que hay arriba de la línea horizontal].

9 *P:* Muéstrame dos partes 'de' tres partes.

10 *Ja:* [Borra su respuesta "6" en "2/3 de 12 = 6" y la remplaza por 12].

Ja pudo encontrar a 4 como un 1/3 de 12; esto indica que interpretó un tercio como "una parte 'de' tres partes". Sin embargo, cuando se le pidió mostrar 2/3 de 12, interpretó a 2/3 como "dos treses", como quedó indicado por las pausas en su conteo en la línea 4 ("1-2-3/4-5-6/ y seis en el otro lado"). Cuando se le pidió reconsiderar su respuesta, decidió que 2/3 de 12 era dos seises y, por tanto, era 12. La confusión de *Ja* parece deberse a la fusión de su interpretación de 2 en dos dominios diferentes: el dominio de los números naturales cuando interpreta a 2/3 como "dos treses" y el dominio de las fracciones cuando interpreta a 2 como dos partes, pero sin tener en cuenta el papel del 3 en las tres partes en que se dividió el número total de redondeles.

Después del diálogo anterior, la profesora continuó haciéndole preguntas relativas a la figura en la que él hizo tres grupos de 4 redondeles cada uno. Se le pidió usar diferentes colores para mostrar cada uno de los tres grupos y también establecer la relación fraccionaria entre uno, dos y tres subgrupos y el grupo total. Finalmente, él se dio cuenta de que 2/3 de 12 era 8, en vez de "dos treses" o "dos seises", como lo había interpretado antes.

Las interpretaciones que de 1/3 de 18 y 2/3 de 12 dieron respectivamente *Li* y *Ja*, indican que no tomaron a 18 o a 12 como unidades en sí mismas que hubieran de tenerse en cuenta. El hecho de que estos estudiantes no se percataran del todo como una unidad en sí misma los condujo a interpretar a 1/3 como un tres y a 2/3 como dos treses. *Li* y *Ja* no estaban solos en sus interpretaciones de fracciones como multiplicación entre el numerador y el denominador. En general, cuando estos estudiantes de cuarto grado tuvieron que enfrentarse a totalidades discretas, interpretaron la fracción *m*/*n* como $m \times n$ (i.e., *m enes*) en el sentido de "*m* veces la unidad de cardinalidad *n*". A esta interpretación de la fracción *m*/*n* la llamamos *interpretación como número natural*.

Otros estudiantes interpretaron la fracción "1/*n* sacado de *k*" como "un *n* sacado de *k*" (i.e., de *k* tomar *n*). A esta interpretación de la fracción 1/*n,* la llamamos *interpretación aditiva*. En el diálogo siguiente, *Mo* y *Mi* ilustran las dos interpretaciones anteriores.

Episodio #6

1	*P:*	*Mo* y *Mi*: cada uno de ustedes tiene en frente 12 fríjoles. ¿Podrían darme un tercio de sus respectivos fríjoles?
2	*Mo:*	[Cuenta 3 fríjoles de su grupo de 12 fríjoles y muestra el grupo de 3 fríjoles].
3	*Mi:*	[Saca 3 fríjoles de su grupo de 12 fríjoles y señala el grupo de 9 fríjoles].
4	*P:*	*Mi*, ¿crees que un tercio de 12 es 9?
5	*Mi:*	Mm hmm.
6	*P:*	*Mo*, ¿crees que un tercio de 12 es 3?
7	*Mo:*	Mm hmm.
8	*P:*	*Mo*, dime por qué.
9	*Mo:*	[No responde].
10	*P:*	¿Cuántos treses tienes en 12?
11	*Mo:*	Cuatro.
12	*P:*	¿Tienes cuatro grupos de tres?
13	*Mo:*	*Sí.*
14	*P:*	Si me das tres fríjoles, ¿qué fracción de tus fríjoles me habrás dado?
15	*Mo:*	¡Oh! … Un cuarto.
16	*P:*	¿Por qué?
17	*Mo:*	Porque 3, y 3, y 3, y 3 es 12.
18	*P:*	*Mi*, ¿podrías darme un tercio de tus fríjoles?
19	*Mi:*	Cuatro [contando cuatro fríjoles].
20	*P:*	¿Por qué?
21	*Mi:*	Porque 4 y 4 y 4 es 12.

A primera vista, pareciera como si las confusiones de *Mi* y *Mo* fueran mucho más serias, cuando de hecho ellos han construido pero no consolidado relaciones parte-a-todo (Sáenz-Ludlow, 1994, 1995). Es decir, 12 no se había consolidado multiplicativamente como tres unidades de 4. *Mo* contó 3 fríjoles y los separó indicando que había interpretado un tercio como "un 3". *Mi* hizo un grupo de 9 y un grupo de 3 y mostró el grupo de 9 después de tomar 3 fríjoles de 12 fríjoles e indicar que ella había interpretado "un tercio de 12" como "un 3 tomado de 12" (i.e., de 12 sacar 3). De manera que faltaba la anticipación de 4 como la unidad de iteración para construir a 12 y, por tanto, la relación parte-a-todo (i.e., 12 compuesto como tres unidades de 4) y también faltaba la relación todo-a-parte (i.e., 12 descompuesto en tres unidades de 4). Como consecuencia, estos estudiantes estaban haciendo temporalmente una "interpretación aditiva" y una "interpretación como número natural" de las fracciones.

Sin embargo, después de algunas preguntas de parte de la profesora, ellos pudieron encontrar un tercio y un cuarto de 12. Fue relativamente fácil guiarlos 'fuera de' su propia confusión, debido a que tenían ya construido el número como multiplicidad de unidades y podían componer a 12 multiplicativamente como tres cuatros y cuatro treses (relaciones parte-a-todo), pero ahora también tenían que construir relaciones todo-a-parte (Sáenz-Ludlow, 1994, 1995) para construir relaciones fraccionarias entre la parte y el todo. Es decir, la interpretación inicial de "un tercio" como "una parte 'de' tres partes" tiene que ser transformada en "una unidad de 4 'de' tres unidades de 4" para conceptualizar a cuatro como un tercio de 12.

Asimismo, la interpretación inicial de "un cuarto" como "una parte 'de' cuatro partes" tiene que ser transformada en "una unidad de 3 'de' cuatro unidades de 3". Esto indica que construir al número como multiplicidad de unidades es necesario pero no suficiente en la conceptualización de cuantificaciones fraccionarias. El número como multiplicidad de unidades estaba aquí representado por su conteo doble implícito en el que ambas sucesiones, la de iteración y la de conteo, se mantenían implícitas pero estaban representadas por las repeticiones de la unidad de iteración (3 o 4). Solo manteniendo implícita la unidad de iteración mientras se enfocaban en el número de iteraciones (4 o 3, respectivamente) fue como los estudiantes pudieron conceptualizar a 3 como un cuarto de 12 y a 4 como un tercio de 12.

En el siguiente episodio, otra pareja de estudiantes también estaba haciendo la transición desde la "interpretación como número natural" hasta la "interpretación fraccionaria" de las palabras numéricas fraccionarias. Esta transición estuvo acompañada con la fusión entre el número de iteraciones y la cardinalidad de la unidad de iteración en la descomposición de una totalidad discreta.

Episodio #7

1	*P:*	*¿Cuánto es cuatro quintos de cien?*
2	*Ri:*	Cuatro quintos es 20.
3	*P:*	[Repite la pregunta] ¿Cuánto es cuatro quintos de cien?
4	*Ri:*	20.
5	*P:*	Dije cuatro quintos de cien no cuatro cincos.
6	*Ri:*	20.
7	*P:*	*Ri*, ¿cuánto es un quinto de 100?
8	*Ri:*	… 20.
9	*P:*	¿Cuánto es cuatro quintos de 100?
10	*Ri:*	¡Oh! 80.
11	*P:*	*¿Cuánto es veinte centésimos de 100?*
12	*Ri:*	¿Veinte centésimos?
13	*Ho:*	*¡Oh! 20.*
14	*P:*	¿Cuánto es un veinteavo de 100?

15 *Ho:* 20.

16 *Ri:* *Sí, 20 … veinte billetes de un dólar.*

17 *P:* [Repite la pregunta] ¿Cuánto es un veinteavo de 100?

18 *Ho:* Cinco veintes en 100.

19 *P:* Luego 20 ¿es qué fracción de 100?

20 *Ho:* Un quinto.

21 *P:* Luego 20 es un quinto de 100, pero ¿pregunté por un quinto de 100? No. Pregunté por un veinteavo de 100.

22 *Ho:* hmm … un veinteavo.

23 *Ri:* … cinco

24 *Ho:* [Contando con los dedos, cada dedo representa cinco] 5, 10, 15, … 100; son 40 partes.

25 *Ri:* 20 partes … tus manos no tienen 20 dedos.

26 *P:* ¿Cuánto es cuatro quintos de 100?

27 *Ri:* 80 porque 20, 40, 60, 80, 100, y 20, 40, 60, 80 son cuatro veintes 'de' cinco veintes.

Ri y *Ho* estuvieron haciendo temporalmente "interpretaciones como número natural" de palabras numéricas fraccionarias. Interpretaron "un veinteavo de 100" como "un 20". Llegaron a conceptualizar un veinteavo de 100 cuando pudieron fijar a 100 como la unidad que se puede componer y descomponer en términos de unidades de 5. En esta conceptualización, transformaron su interpretación de "un veinteavo" o "uno 'de' veinte", usada para referirse a fracciones de totalidades continuas en "una unidad de 5 'de' veinte unidades de 5". Para verificar la respuesta de *Ri*, *Ho* contó de cinco en cinco hasta 100 usando una sucesión de iteración explícita y sustituyendo su sucesión de conteo con el movimiento de sus dedos. *Ri* conceptualizó a 5 como un veinteavo de 100 porque se enfocó en la sucesión de conteo mientras mantenía implícita la sucesión de iteración.

Ri y *Ho* interpretaron inicialmente a "cuatro quintos de 100" como "cuatro cincos"; sin embargo, cuando *Ri* pudo anticipar a 20 como la unidad que se debía iterar cinco veces para componer a 100, conceptualizó a ochenta como cuatro quintos de 100. En la línea 27, *Ri* explicó su respuesta según la cual 80 es cuatro quintos de 100. Él dijo, "80 porque 20, 40, 60, 80, 100, y 20, 40, 60 y 80 son cuatro veintes "tomados 'de' cinco veintes". Aun cuando *Ri* dejó implícita su sucesión de conteo, la utilizó en combinación con su sucesión de iteración para trascender su comprensión de cuatro quintos en totalidades continuas como "4 partes 'de' 5 partes" y conceptualizar cuatro quintos de 100 como "4 unidades de 20 'de' 5 unidades de 20".

Los episodios anteriores ilustran las luchas y los éxitos de los estudiantes para diferenciar el número de iteraciones (como la contraparte del número de partes iguales) de la cardinalidad de las unidades de iteración (como la contraparte del tamaño de cada parte), lo mismo que sus luchas y éxitos al cuantificar relaciones fraccionarias entre unidades de iteración y la unidad compuesta. Estos episodios también indican que conceptualizar el número como multiplicidad de unidades y el conteo doble no son suficientes para la conceptualización de las fracciones, a menos que los estudiantes mantengan la sucesión de iteración jugando un papel subsidiario y la sucesión de conteo jugando un papel focal.

La anticipación de la unidad de iteración y la conciencia del número de iteraciones (mientras se mantiene implícita la cardinalidad de la unidad de iteración) parecen ser esenciales en la conceptualización de las fracciones de totalidades discretas. Tal conciencia requiere un periodo de transición y del uso de conteo doble (implícito o explícito) como vehículo conceptual (i.e., representamen) en los procesos de iteración y descomposición. Este periodo transicional fue más largo para estudiantes que no habían consolidado al número como multiplicidad de unidades y más corto para aquellos que lo habían hecho. La siguiente sección se enfoca en el papel jugado por el conteo doble y los diagramas numéricos en las conceptualizaciones de fracciones de los estudiantes.

El conteo doble y los diagramas numéricos de los estudiantes en la generación de cuantificaciones fraccionarias

El conteo doble fue una estrategia generalizada que estos estudiantes usaron para consolidar relaciones entre la parte y el todo (i.e., relaciones parte-a-todo y todo-a-parte). El conteo doble, implícito o explícito, fue el medio por el cual iteraron unidades particulares para conceptualizar a los números naturales como multiplicidad de unidades, antes de considerar la descomposición de un número en sus unidades de iteración. Es decir, el conteo doble fue el medio de los estudiantes para establecer relaciones multiplicativas parte-a-todo, antes de establecer relaciones fraccionarias todo-a-parte.

En totalidades discretas, las preguntas del tipo "*x* es qué fracción de un múltiplo particular de *x*" fueron más fáciles para los estudiantes que preguntas del tipo "encuentra la fracción *m*/*n* de una cantidad *y*". Los diferentes grados de dificultad se debieron a que en el primer caso se daba a los estudiantes la unidad que se debía iterar, mientras que en el segundo caso tenían que anticiparla antes de determinar la unidad fraccionaria 1/*n* y luego la fracción *m*/*n* como *m* veces la unidad fraccionaria 1/*n*.

En el siguiente episodio, iteran una unidad dada y la comparan con una unidad más grande dada para conceptualizar la unidad de iteración como una relación fraccionaria con la unidad más grande.

Episodio #8

1	*P:*	100 es ¿qué fracción de 400?
2	*Ho:*	Un cuarto…
3	*P:*	*¿Por qué?*
4	*Ho:*	Porque hay cuatro cientos en 400. Por eso es un cuarto.
5	*P:*	1.000 es ¿qué fracción de 10.000?
6	*Ho:*	Un décimo.
7	*Ri:*	Porque 5.000 y 5.000 es 10.000. 5.000 es 5 miles y 10.000 es 5 miles y 5 miles. 10.000 es 10 miles.

En el diálogo anterior, la manera en que *Ri* y *Ho* descompusieron a 400 y a 10.000 indica que conceptualizaron estos números como multiplicidad de unidades (400 como cuatro unidades de 100; 10.000 como dos unidades de 5.000; y 5.000 como cinco unidades de 1.000). Una vez establecidas estas relaciones multiplicativas (i.e., relación parte-a-todo), los estudiantes, enfocándose en el número de iteraciones mientras mantenían implícita la unidad de iteración, estuvieron pendientes de las unidades más grandes y su descomposición en unidades más pequeñas (i.e., relaciones todo-a-parte) para conceptualizar cada unidad de iteración como algo que está en relación fraccionaria con la unidad más grande.

Los siguientes episodios indican la confianza de los estudiantes en el conteo doble explícito o implícito para resolver tareas del tipo "encuentre la fracción *m/n* de la cantidad *y*" y "*x* es qué fracción de *y*" cuando *y* es una totalidad discreta. En este episodio, anticiparon la unidad que habrían de iterar y luego por medio de iteración y conteo doble establecieron cuantificaciones fraccionarias.

Episodio #9

1	*P:*	*¿Puedes encontrar un tercio de quince?*
2	*Mi:*	Un tercio de quince/creo que es 5/tres manos y 15 dedos, y una mano de 5 dedos es un tercio, un quinto, espera … Un tercio.
3	*P:*	*Mo*, ¿cuántos dedos es dos tercios de 15 dedos?
4	*Mo:*	10 porque 5 y 5 es 10.
5	*Mi:*	Voy a explicar lo que ella está tratando de decir.
6	*P:*	Bueno.
7	*Mi:*	Un tercio de 15 es 5, otro tercio de 15 es 5, otro tercio de 15 es 5. Se suman estos dos un tercio, esto junto da 10.

En la línea 2, *Mi* anticipó primero a 5 como la unidad de iteración y luego hizo conteo doble usando sus manos para iterar cincos con el propósito de componer a 15 como tres unidades de 5. La respuesta de *Mo* (línea 4) también se basó en iteraciones de cincos; cada 5 estaba representando implícitamente a un tercio. *Mi* hizo explícito lo implícito cuando se ofreció a explicar la respuesta de *Mo*. *Mi* (en la línea 7) hizo una correspondencia uno a uno entre tres cincos y tres un tercios. Luego, ella sumó dos tercios sumando dos cincos para llegar a la misma respuesta de *Mo*. El diálogo anterior indica que *Mo* y *Mi* conceptualizaron dos tercios de quince como dos veces un tercio usando conteo doble implícito.

En el episodio que sigue, la profesora propuso una tarea similar usando un contexto social y dividió la pregunta en dos partes: a) ¿cuántos dulces por estudiante? y b) ¿qué fracción de los dulces recibirá cada estudiante? En este episodio, los estudiantes conceptualizaron fracciones equivalentes por su cuenta y usaron un diagrama numérico y un conjunto de redondeles para explicar sus soluciones.

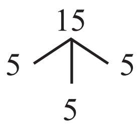
Episodio #10

1 *P:* La señora Walgamuth reparte por igual 15 dulces entre 3 estudiantes. ¿Cuántos dulces por estudiante?

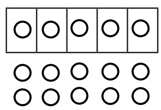
2 *Ra:* 5; 5 y 5 y 5 es 15.

3 *P:* *¿Qué fracción de 15 dulces recibe cada estudiante?*

4 *Je:* 5 es 1, 10 es 2, 15 es 3 [hace el siguiente diagrama en su hoja]. Un tercio o cinco quinceavos.



5 *Ra:* Cinco quinceavos o un tercio [hace el siguiente dibujo en su hoja].



En la línea 2, *Ra* iteró a 5 tres veces, “5 y 5 y 5 es 15”, para encontrar el número de dulces que correspondía a cada estudiante. En la línea 4, *Je* recurrió al conteo doble explícito y conceptualizó dos fracciones equivalentes, es decir, un tercio y cinco quinceavos. La conceptualización de *Je* de estas dos fracciones indica que él consideró a 15 como multiplicidad de unidades (quince unidades de 1 y tres unidades de 5). Más aún, consideró las diferentes funciones de cada una de las dos sucesiones en el conteo doble (5-10-15 la sucesión de iteración que lleva la cuenta de los resultados de iterar cincos, y 1-2-3 la sucesión de conteo que lleva la cuenta del número de iteraciones).

Sin embargo, parece ser claro para *Je* que al contar de uno en uno, la sucesión de iteración y la sucesión de conteo habrían sido idénticas y, por consiguiente, sería innecesario identificarlas. Es decir, la sucesión 1-2-3-…-15 habría sido suficiente para iterar las unidades de 1, lo mismo que para llevar la cuenta del número de iteraciones. Se podría decir que contar de uno en uno es un caso degenerado de conteo doble. El diagrama de *Ra* fue otra explicación para las respuestas de *Je*; él indicó tanto la plausibilidad de hacer tres cajas con cinco redondeles cada una, aunque solo se mostrara una caja en el diagrama, y la plausibilidad de hacer quince cajas con un redondel cada una, aunque se mostraran solo cinco cajas. En su diagrama, *Ra* indicó la iteración de unidades al encajar una unidad de 5 o cinco unidades de 1 en un esfuerzo por hacer explícitas las relaciones fraccionarias entre cada una de las unidades de iteración y la unidad más grande de quince.

El episodio que sigue también indica la fuerte confianza de los estudiantes en el conteo doble incluso cuando estaban deseosos de acortar el proceso debido a la reconceptualización consolidada de los números como multiplicidad de unidades:

Episodio #11

1	*P:*	Tengo 100 dólares y quiero darle a *Ra* ocho veinteavos de este dinero, ¿cuánto dinero debería darle?
2	*Pr*:	5-10-15-20-25 [muestra una mano extendida]/30-35-40-45-50 [muestra dos manos extendidas].
3	*Ra:*	¡Sí! Hay veinte cincos.
4	*Je:*	*Pr*, dijiste 5-10-15-20-25-30-35-40-45-50.
5	*Pr*:	Quiero decir 50/Obtengo 50 en diez cincos aquí [levantando 10 dedos]/está bien. Suma otros 50 con los 10 dedos, ¿cuántos dedos obtienes?
6	*Je:*	20.
7	*Pr*:	Hay 1-2-3-4/5-6-7-8 cincos/es decir 20 dólares y 20 dólares. Deberías darle 40 dólares a *Ra*. Eso es ocho veinteavos.

Pr encontró que ocho veinteavos de 100 dólares era “40 dólares”. Él llegó a esta respuesta porque pudo conceptualizar a 100 como multiplicidad de unidades de 50 y de 5, lo que le permitió anticipar a 5 como un veinteavo de 100. Esta anticipación se verificó a través de conteo doble implícito en el que la sucesión 5-10-15-20-25-30-35-40-45-50 mantuvo los registros de iteración de cincos (sucesión de iteración), mientras que la sucesión de números que llevaba la cuenta del número de iteraciones (sucesión de conteo) fue sustituida por los dedos de sus dos manos. *Pr* iteró cincos hasta 50 y acortó el conteo porque sabía que 100 se podía descomponer en dos unidades de 50. *Je* quien estaba siguiendo de cerca el conteo doble implícito de *Pr* no tenía en mente meta particular alguna.

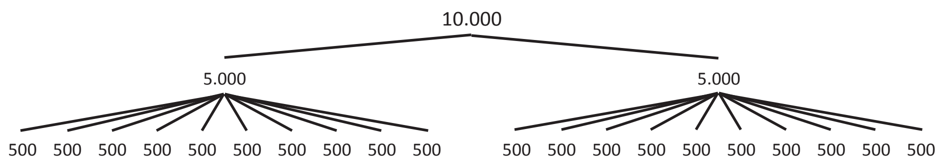
Pr asumió la tarea de asegurarse de que *Je* seguía su línea de razonamiento, y usó de nuevo conteo doble implícito para convencerlo de que 100 está compuesto de dos unidades de 50 y, por tanto, también está compuesto de veinte unidades de 5. Habiendo convencido a *Je*, *Pr* usó parte de la sucesión de conteo implícita (antes sustituida por sus dedos) y la hizo explícita. Interpretó "1-2-3-4/5-6-7-8 cincos" como 1-2-3-4 cincos es 20 dólares, y 5-6-7-8 cincos es 20 dólares. Al mismo tiempo, parece que estaba estableciendo una correspondencia implícita de uno a uno entre 1-2-3-4 cincos y 1/20-2/20-3/20-4/20 y 5-6-7-8 cincos con 5/20-6/20-7/20-8/20 para encontrar que "40 dólares" era "ocho veinteavos" de 100 dólares. Es decir, *Pr* parece trascender su comprensión de ocho veinteavos como "8 partes 'de' 20 partes" en totalidades continuas y transformarla en "ocho unidades de 5 'de' veinte unidades de cinco" para encontrar ocho veinteavos de 100.

El episodio que sigue también indica que el conteo doble y los diagramas numéricos determinaron dialécticamente y representaron las relaciones parte-a-todo y todo-a-parte que los estudiantes establecieron mientras generaban relaciones fraccionarias cuantitativas.

En el siguiente episodio hay una indicación de una interacción triádica entre iteración y descomposición, conteo doble y diagramas numéricos, y relaciones parte-todo (parte-a-todo y todo-a-parte) y cuantificaciones fraccionarias. Un mes después de haber trabajado sobre fracciones, un estudiante se acercó a la profesora y le mostró un pedazo de papel doblado que en su exterior tenía escrito "Trabajo de matemáticas ultrasecreto, no mirar", y más abajo en el papel estaba la pregunta siguiente con su correspondiente respuesta: "¿500 es qué fracción de 10.000? Un veinteavo". En el otro lado del papel había una sucesión numérica acompañada por un diagrama numérico.

Episodio #12

500, 1.000, 1.500, 2.000, 2.500, 3.000
3.000, 3.500, 4.000, 4.500, 5.000, 5.500
6.000, 6.500, 7.000, 7.500, 8.000, 8.500
9.000, 9.500, 10.000



El trabajo escrito de *Pr* indica a 500 como la unidad de iteración y 500, 1.000, … , 10.000 como la sucesión de iteración. Luego, él sustituyó su sucesión de conteo implícita por ramas de su diagrama que tiene dos niveles de descomposición. En el primer nivel, hizo una descomposición de 10.000 en dos unidades de 5.000 y, en el segundo nivel, hizo una descomposición de cada 5.000 en diez unidades de 500. Parecía haber formulado su pregunta después de haber construido el diagrama enfocando su atención en el número de ramas del diagrama (i.e., una sustitución para la sucesión de conteo) para encontrar el número de iteraciones de 500.

El diagrama de *Pr* representa su conceptualización de 10.000 como una multiplicidad de unidades de 5.000 y 500. Más aún, la conceptualización de *Pr* de 500 como una fracción de 10.000 y su diagrama numérico indican su cambio conceptual, tanto entre iteración y descomposición como entre parte y todo. Al iterar a 500 para obtener 10.000, *Pr* construyó a 10.000 multiplicativamente en términos de la unidad de 500 como unidad de iteración (relación parte-a-todo) lo que a su vez le permitió conceptualizar a 500 como una fracción de 10.000 (relación todo-a-parte). *Pr* manifestó ser consciente de la diferenciación entre la unidad de iteración y el número de iteraciones para descomponer la unidad más grande, la de 10.000, con el propósito de generar una cuantificación fraccionaria entre una parte y su todo.

El siguiente episodio también ilustra cómo *Ri* usó diagramas numéricos para expresar iteración, descomposición y cuantificaciones fraccionarias. En este episodio, la profesora propuso una tarea del tipo "*x* es qué fracción de un múltiplo de *x*". Los estudiantes habían realizado este tipo de tarea antes, pero con números más pequeños; lo que aquí es de interés no es el grado de dificultad de la tarea, sino la sofisticación de una solución colectiva y la comprensión compartida entre los estudiantes.

Episodio #13

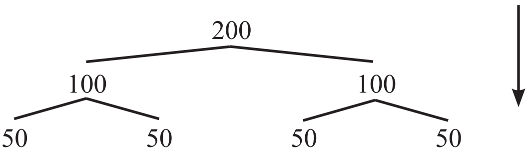
1 *P:* *¿50 es qué fracción de 200?*

2 *Pr*: Un cuarto porque 200 se parte en cuatro partes.

3 *P:* *¿Cómo partes a 200 en cuatro partes, Mi*?

4 *Mi:* 2 cincuentas en un 100 y 2 cincuentas más en un 100 y eso es 200. Así que tienes 4 cincuentas en 200.

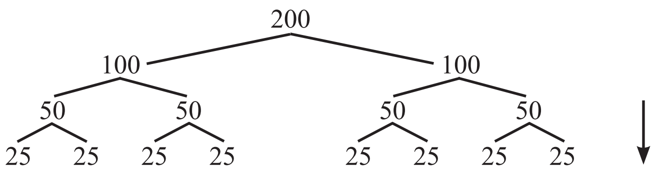
5 *Ri:* [Va al tablero y hace el siguiente diagrama].



6 *P:* *¿25 es qué fracción de 200?*

7 *Ee*: Un octavo.

8 *Ri:* [Vuelve al tablero y continúa elaborando el diagrama que había hecho en la intervención 5].



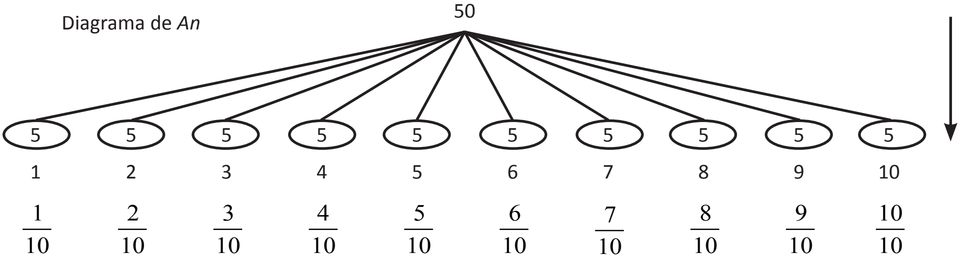
Pr partió a 200 en cuatro cincuentas, pero no explicó su manera de hacerlo. Sin embargo, *Mi* pudo explicar la solución de *Pr* indicando que compartían un significado numérico para la palabra "partir" (Sáenz-Ludlow, 2004). Sin demeritar lo hecho por *Mi*, su descripción se habría podido considerar como la continuación de la explicación de *Pr.* Luego, *Ri* fue al tablero y simbolizó la iteración de *Mi* a través de un diagrama numérico que indicaba las iteraciones de cincuentas y de cientos, la descomposición de 200 en cientos y cincuentas y la cuantificación fraccionaria de 50 con respecto a 100. Cuando la profesora preguntó "¿25 es qué fracción de 200?", los estudiantes inmediatamente conceptualizaron a 25 como un octavo de 200. *Ri* pasó de nuevo al tablero y continuó su diagrama para simbolizar esta fracción en un diagrama con ocho ramas y el numeral 25 en cada una.

El diagrama de *Ri*, precedido por las líneas 1-7, sintetiza de una manera simbólica el pensamiento colectivo sobre iteración y descomposición y sobre las relaciones parte-a-todo y todo-a-parte para conceptualizar a 50 como un cuarto y a 25 como un octavo de 200. El hecho de que las soluciones fueran generadas, no por un estudiante sino por el pensamiento compuesto de diferentes estudiantes, indica que sus conceptualizaciones de alguna manera eran convergentes.

En el episodio anterior observamos que los estudiantes hicieron implícitamente correspondencias uno a uno entre cuatro cincuentas y cuatro un-cuartos, lo mismo que entre ocho veinticincos y ocho un-octavos. ¿Podrían hacer explícita tal correspondencia? El episodio que sigue responde esta pregunta de manera positiva. Las tareas de fraccionarios se propusieron frecuentemente usando dinero para proporcionar situaciones concretas que fueran significativas para ellos. Usar cantidades discretas representadas por dinero promovió su conciencia sobre la diferenciación entre la unidad de iteración y el número de iteraciones, quizá porque podían representar unidades haciendo imágenes de billetes o monedas concretos del sistema monetario.

Por ejemplo, la profesora puso una moneda de cinco centavos de dólar en el retroproyector y preguntó "¿5 centavos es qué fracción de 50 centavos?". Fue muy fácil para la mayoría de estudiantes decir que cinco centavos es "un décimo de cincuenta centavos porque había diez cincos en 50". No obstante, *An* acompañó sus explicaciones verbales con el siguiente diagrama:

Episodio #14



El diagrama de *An* representa diversos aspectos de su actividad cognitiva. Primero, una descomposición de 50 en diez cincos; segundo, la iteración de diez cincos para componer a 50; tercero, el conteo de las diez iteraciones de 5 y cuarto, la conceptualización de unidades fraccionarias usando el número de iteraciones mientras se mantiene implícita la unidad de iteración de 5. El diagrama numérico de *An* parece ser el vehículo que no solo representaba en el mundo físico sus relaciones parte-a-todo (mediante iteración) y sus relaciones todo-a-parte (mediante descomposición), sino también a la dialéctica de la determinación y la representación entre el diagrama numérico y la conceptualización de cuantificaciones fraccionarias. Puesto que el diagrama parecía muy sofisticado, la profesora formuló otra pregunta: "*An*, si miras tu diagrama, ¿30 centavos es qué fracción de 50?". Él encerró, haciendo un ademán con un dedo índice, los primeros seis cincos y dijo "seis décimos".

Los episodios de esta sección indican el surgimiento de un segundo signo colectivo en el que las relaciones parte-a-todo y todo-a-parte constituyen el objeto (O_2) del signo; las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos son representámenes (R_2) del signo; y las cuantificaciones fraccionarias son los interpretantes (I_2) del signo que generaliza las relaciones parte-todo (véase Figura 5). Las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos preservan al número como multiplicidad de unidades (I_1) que es el interpretante del primer signo. Es decir, el número como multiplicidad de unidades (I_1) es la base sobre la cual surgen las relaciones parte-todo (O_2). Las cuantificaciones fraccionarias (I_2) llevan una relación dialéctica de determinación y representación con (O_2) y (R_2).

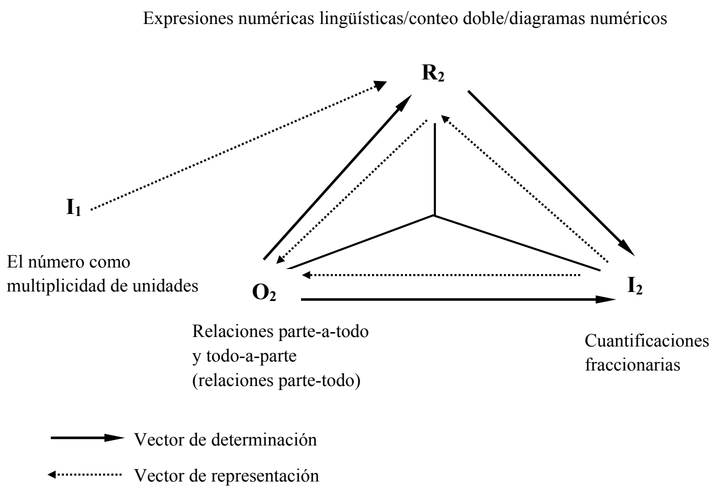


Figura 5. Segundo signo: del número como multiplicidad de unidades (I1) a cuantificaciones fraccionarias (I2) a través de expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos (R2)

Este segundo signo colectivo está constituido por tres parejas interrelacionadas:

- la relación parte-todo (parte-a-todo y todo-a-parte) y las expresiones numéricas lingüísticas/el conteo doble/los diagramas numéricos (O_2, R_2);
- las expresiones numéricas lingüísticas/el conteo doble/los diagramas numéricos y las cuantificaciones fraccionarias (R_2, I_2);
- la relación parte-todo y las cuantificaciones fraccionarias (O_2, I_2).

El representamen del segundo signo (R_2) es del mismo tipo que el representamen del primer signo (R_1), pero ahora es sofisticado e implícito en un nivel más alto, ya que el conteo doble comienza a utilizarse con un propósito.

Cada elemento de un par interactúa dialécticamente con el otro en el sentido de que el primero determina al segundo, mientras que el segundo representa al primero; es decir, cada uno cumple con el otro y lo preserva. Estas relaciones dialécticas se indican en la Figura 5 mediante vectores opuestos de determinación y representación. La dialéctica entre la relación parte-todo (O_2) y las cuantificaciones fraccionarias (I_2) es una relación de encaje en la que la relación parte-todo se generaliza, se preserva y se cumple en la conceptualización de cuantificaciones fraccionarias. Esta relación de encaje también representa a la suma de las otras dos relaciones dialécticas intrínsecas de las parejas (O_2, R_2) y (R_2, I_2).

Como se observó en los diálogos, los estudiantes pudieron transformar patrones de cuantificaciones fraccionarias en totalidades continuas en patrones de cuantificaciones fraccionarias en totalidades discretas.

Esta transformación sofisticada fue un nuevo paso en la evolución continua de la comprensión de los estudiantes con respecto a fracciones.

Conclusión

La cadena de significación se constituyó cuando el segundo signo sustituyó al primero. Es decir, el segundo signo superó al primer signo y, sin embargo, el primer signo no desapareció sino que, por el contrario, se preservó como huella. En cierto sentido, el segundo signo fue la realización del primer signo. La cadena de significación y la naturaleza dialéctica de las relaciones diádicas entre los elementos de cada signo nos proveen los medios para hablar sobre la naturaleza compleja y no lineal inherente a la construcción de cuantificaciones fraccionarias. A través de esta cadena de significación, los estudiantes trascendieron su conocimiento de números naturales para generar cuantificaciones fraccionarias en totalidades discretas.

La Figura 6 muestra el vínculo entre el primer signo (O_1, R_1, I_1) y el segundo signo (O_2, R_2, I_2). En esta cadena de significación se generalizaron la iteración y la descomposición de unidades (O_1) en la relación parte-todo (relaciones parte-a-todo y todo-a-parte) (O_2) a través de la construcción del número como multiplicidad de unidades y la mediación de las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos (R_1). La iteración y la descomposición fundamentaron e indujeron la relación parte-todo. De la misma manera, el número como multiplicidad de unidades (I_1) fundamentó e indujo cuantificaciones fraccionarias (I_2) a través de la mediación de las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos (R_2).

Tenemos aquí una secuencia de dos objetos concebidos (O_1 y O_2) y dos interpretantes concebidos (I_1 e I_2) mediados por los representámenes R_1 y R_2 de la misma naturaleza pero de diferentes grados de sofisticación. En resumen, la iteración y la descomposición fueron el fundamento para la conceptualización del número como multiplicidad de unidades y, a su vez, el número como multiplicidad de unidades fue el fundamento para la relación parte-todo que, a su vez, constituyó el fundamento para las cuantificaciones fraccionarias. Las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos se consideran como representámenes que tienen que ver con la relación dialéctica entre los objetos y los interpretantes de cada signo.

La transformación de la iteración y la descomposición de unidades (O_1) en la relación parte-todo (O_2) requirió la conceptualización de número como multiplicidad de unidades (I_1). I_1 fue determinado y representado dialécticamente por las expresiones lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos (R_1). En la transición del primer signo al segundo, los estudiantes experimentaron dificultades porque la descomposición y la iteración no fueron suficientes para generar las relaciones inversas parte-a-todo y todo-a-parte. El vínculo necesario para el paso del primer signo al segundo era la conciencia de los estudiantes con respecto al funcionamiento de las dos sucesiones numéricas en el conteo doble: una sucesión para llevar la cuenta de los registros de iteración (sucesión de iteración) y la otra para llevar la cuenta del número de iteraciones (sucesión de conteo).

El surgimiento de las relaciones inversas parte-a-todo y todo-a-parte estuvo fundamentado no solo en la anticipación de la unidad de iteración que compondrá la totalidad, sino también en la conciencia de la función focal que adquieren la *sucesión de conteo* mientras se mantiene implícita la unidad de iteración y la *sucesión de iteración*. Tan pronto como las expresiones numéricas, el conteo doble y los diagramas numéricos determinaron y representaron al número como multiplicidad de unidades, el surgimiento de las relaciones inversas incluidas en la relación parte-todo fue plausible por cuanto los estudiantes pudieron enfocarse en el número de iteración y mantener implícita en alguna medida la unidad de iteración.

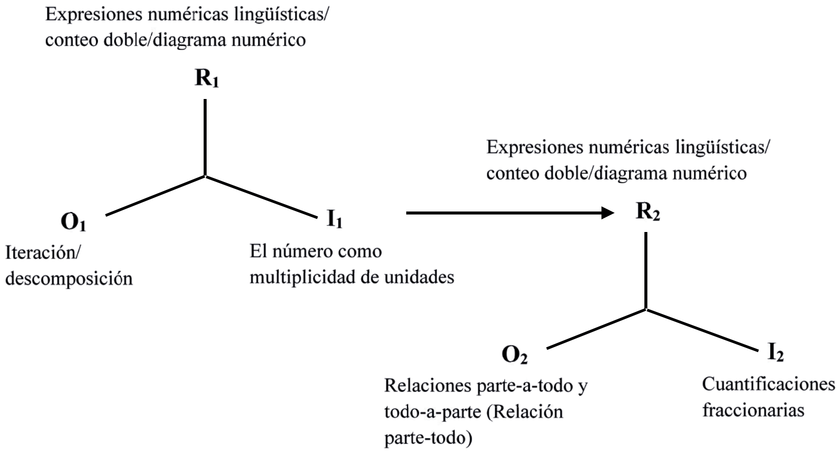


Figura 6. Cadena de significación: de iteración y descomposición de unidades (O1) a relaciones fraccionarias cuantitativas (I2)

La mayoría de las dificultades que experimentaron los estudiantes en la transición del primer signo al segundo se debió a no poder conceptualizar la función focal que la *sucesión de conteo* adquiere cuando se resuelven tareas en el contexto de fracciones en contraste con la función subsidiaria que esta sucesión juega en el contexto de los números naturales. En la Tabla 1 se resume un ejemplo.

Las conceptualizaciones de estos estudiantes sobre el número natural como multiplicidad de unidades les permitieron reconstruir multiplicativamente cualquier número en términos de unidades más pequeñas o descomponer en unidades constitutivas de la misma cardinalidad a cualquier número. Los diagramas numéricos de diferentes grados de sofisticación mediaron (i.e., determinaron y representaron dialécticamente) la composición y descomposición de números. Iterar unidades de la misma cardinalidad permitió a los estudiantes percatarse de la relación parte-a-todo; en contraste, descomponer números en unidades que cuando se iteran compondrán de nuevo al número inicial les permitió percatarse de la relación todo-a-parte; esta relación indujo y fundamentó la cuantificación fraccionaria en totalidades discretas.

Cuando una totalidad discreta se descompuso en unidades anticipadas de iteración de la misma cardinalidad, el grupo generó cuantificaciones fraccionarias manteniendo implícita la unidad de iteración y trascendiendo la interpretación de las fracciones *m*/*n* en totalidades continuas como "*m* partes iguales 'de' *n* partes iguales" e interpretándolas como "*m* iteraciones de una unidad de cardinalidad *k* 'de' *n* iteraciones de la unidad de cardinalidad *k*" en totalidades discretas. Aquellas cuantificaciones fraccionarias fueron correctas cuando los estudiantes pudieron conceptualizar la función focal de la *sucesión de conteo* (i.e., la sucesión que lleva la cuenta del número de iteraciones) y la función subsidiaria de la *sucesión de iteración* (i.e., la sucesión que lleva la cuenta de la iteración), lo mismo que el grado en que esta sucesión estaba implícita.

Tabla 1. Ejemplo del conteo doble en el contexto de números naturales y en el de números fraccionarios		
Conteo doble en el contexto de los números naturales	Conteo doble en el contexto de las fracciones de totalidades discretas	Conteo doble en el contexto de las fracciones de totalidades discretas
Tarea: ¿Cuántos treses en 12?	**Tarea**: ¿3 es qué fracción de 12?	**Tarea**: Halle un cuarto de 12.
Iterando a 3 hasta 12	Iterando a 3 hasta 12	Anticipando a 3 como la unidad de iteración para componer a 12
Acción con un propósito	***Acción con un propósito***	***Acción con un propósito***
Conteo doble 3 es ***1***, 6 es ***2***, 9 es ***3***, 12 es ***4***	**Conteo doble** 3 es ***1***, 6 es ***2***, 9 es ***3***, 12 es ***4***	**Conteo doble** 3 es ***1***, 6 es ***2***, 9 es ***3***, 12 es ***4***
3, 6, 9, 12 Sucesión de iteración a mantener relevante y explícita ***Sucesión con la función focal de establecer una relación parte-a-todo***	3, 6, 9, 12 Sucesión de iteración a mantener relevante pero implícita ***Sucesión con la función subsidiaria de establecer una relación parte-a-todo***	3, 6, 9, 12 Sucesión de iteración a mantener relevante pero implícita ***Sucesión con la función subsidiaria de establecer una relación parte-a-todo***
1, 2, 3, 4 Sucesión de conteo a mantener explícita ***Sucesión con la función subsidiaria de establecer una relación parte-a-todo***	***1, 2, 3, 4*** Sucesión de conteo a mantener explícita ***Sucesión con la función focal de establecer una relación todo-a-parte***	***1, 2, 3, 4*** Sucesión de conteo a mantener explícita ***Sucesión con la función focal de establecer una relación todo-a-parte***
Respuesta: *Cuatro treses en 12*	***Respuesta***: *3 es un cuarto de 12*	***Respuesta***: *Un cuarto de doce es 3*

Los diagramas numéricos constituyeron representámenes no proposicionales (vehículos de signo) y sirvieron a diferentes funciones cognitivas para diferentes estudiantes. Para algunos estudiantes, los diagramas numéricos fueron instrumentales al mediar en sus operaciones mentales en cuanto generaron cuantificaciones fraccionarias; para otros, los diagramas numéricos fueron un medio de expresar sus maneras de operar; para otros más, los diagramas numéricos fueron los medios de interpretar una estrategia ya generada por otro estudiante. En este proceso, los diagramas numéricos (representámenes/vehículos de signo) y las construcciones mentales de los estudiantes (interpretantes) estuvieron dialécticamente interrelacionados para representar e inducir cuantificaciones fraccionarias.

En la continuidad inherente al proceso de significación, los interpretantes presentes (las conceptualizaciones de los estudiantes con respecto al número como multiplicidad de unidades) anticiparon interpretantes futuros (conceptualizaciones de los estudiantes sobre fracciones) mediados por las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos que representaban a objetos conceptuales (iteración/descomposición y relación parte-todo) en una relación dialéctica de representación y determinación. Es decir, en este proceso, las semiosis colectiva e individual contribuyeron a la construcción inicial de las fracciones como resultado de un proceso colectivo de significación constituido en la sinergia de la interacción entre los estudiantes y la profesora. En tal proceso, los signos de un alto grado de complejidad (cuantificaciones fraccionarias) surgieron de signos de un grado menor de complejidad (número como multiplicidad de unidades).

En resumen, en esta cadena colectiva de significación varios representámenes (expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos) representaron objetos conceptuales (iteración/descomposición y relación parte-todo) y generaron diversos interpretantes (número como multiplicidad de unidades y cuantificaciones fraccionarias). El proceso de semiosis nos proporciona un medio para a) explicar la continuidad en la conceptualización de fracciones en el sentido de que las conceptualizaciones de fracción superan a las conceptualizaciones del número natural; b) explicar las relaciones dialécticas de determinación y representación entre iteración/descomposición, número como multiplicidad de unidades, relación parte-todo, cuantificaciones fraccionarias y expresiones numéricas lingüísticas/conteo doble/diagramas numéricos; c) explicar el proceso dialéctico de determinación y representación a través del cual las conceptualizaciones más complejas (interpretantes) contienen como huellas a las menos complejas. La semiosis también da cuenta de contribuciones individuales y colectivas en el flujo continuo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referencias

Bauersfeld, H. (1995). “Language games” in mathematics classrooms: Their function and their effect. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meanings* (pp. 271-291). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of pre-service elementary school teachers’ strategies on rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69.

Bergeron, J. y Herscovics, N. (1987). Unit fractions of a continuous whole. En J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 357-365). Montreal.

Cobb, P. (2000a). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (2000b). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematics learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17-36). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Steffe, L.P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 83-94.

Cobb, P. y Yackel, E. (1995). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. En D.T. Owens, M.K. Reed y G.M. Millsaps (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-29). Columbus, OH: ERIC/CSMEE.

Colapietro, V.M. (1993). *Glossary of semiotics*. Nueva York: Paragon House.

Confrey, J. (1988). Multiplication and splitting: Their role in understanding exponential functions. En M. Behr, C. LaCampagne y M. Wheeler (eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 250-259). DeKalb, IL: Northern Illinois University.

Davydov, V.V. (1990/1972). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of the school curricula*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Deely, J. (1990). *Basics of semiotics*. Bloomington: University of Indiana Press.

Deely, J. (1994). *New beginnings: Early modern philosophy and postmodern thought*. Toronto: University of Toronto Press.

Ernest, P. (2002, julio). *A semiotic perspective of mathematical activity*. Ponencia presentada en el Grupo de Discusión "Semiotics in Mathematics Education Research" en 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. y Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 149-168). Ottawa, Ont.: Legas.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443-471.

Heath, T.L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (traducción del texto de Heiberg, con introducción y comentario; 2ª ed. revisada). Nueva York: Dover Publications.

Hunting, R. (1980). *The role of the discrete quantity partition knowledge in the child's construction of fractional number*. Disertación doctoral, The University of Georgia. Dissertation Abstracts International, University Microfilms No. 8107919, 430-A.

Hunting, R., Davis, G. y Pearn, C. (1996). Engaging whole number knowledge for rational number learning using a computer-based tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 354-379.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. y Nelson, L.D. (1981). Partitioning and unit recognition in performances of rational numbers tasks. En *Proceedings of the Third International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 91-102). Grenoble, France.

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170-193.

McLellan, J.A. y Dewey, J. (1908). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. Nueva York: D. Appleton and Company.

Merrell, F. (1995). *Peirce's semiotics now: A primer*. Toronto, Canada: Canadian Scholars' Press.

Mertz, E. (1985). Beyond symbolic anthropology: Introducing semiotic mediation. En E. Mertz y R.J. Parmentier (eds.), *Semiotic mediation: Sociocultural and psychological perspectives* (pp. 1-19). Orlando, FL: Academic Press.

Moreno-Armella, L.E. y Waldegg, G.C. (2000). An epistemological history of number and variation. En V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 183-190). MAA Notes 51. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Nöth, W. (1990). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

O'Halloran, K.L. (2003). Implications of mathematics as a multisemiotic discourse. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185-214). Ottawa, Ont.: Legas.

Parmentier, R.J. (1985). Signs' Place in Medias Res: Peirce's concept of semiotic mediation. En E. Mertz y R.J. Parmentier (eds.), *Semiotic mediation: Sociocultural and psychological perspectives* (pp. 23-48). Orlando, FL: Academic Press.

Peirce, C.S. (1867). Questions concerning certain faculties claimed by man. En

J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (1991, pp. 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Peirce, C. S. (1893-1913). *The essential Peirce: Selected philosophical writings* (vol. 2; editado por *Peirce Edition Project*). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1903). *The three normative sciences. The essential Peirce* (vol. 2, 1893-1913; editado por *Peirce Edition Project*, pp. 196-207). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1906a). Prolegomena to an apology for pragmaticism. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (pp. 249-252). Chapel Hill, North Carolina: The University of North Carolina Press.

Peirce, C.S. (1906b). Pragmatism in retrospect: A last formulation. En J. Buchler (ed.), *Philosophical writings of Peirce* (1955) (pp. 269-289). Nueva York: Dover Publications.

Peirce, C.S. (1908). Excerpts from letters to Lady Welby. En Peirce Edition Project (ed.), *The Essential Peirce* (vol. 2, pp. 478-491). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers, vol. II, Elements of Logic*. (editado por C. Hartshorne y P. Weiss). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1956). The essence of mathematics. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, (vol. 3, pp. 1773-1783). Nueva York: Simon and Schuster.

Peirce, C.S. (1976). The new elements of mathematics (NEM), (vol. 4, *Mathematical Philosophy*, editado por Carolyn Eisele). The Hague: Mouton and Co. B. V. Publishers.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Sáenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 50-85.

Sáenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics, 28*(1), 101-132.

Sáenz-Ludlow, A. (1997). Iconic means in children's understanding of the division algorithm. En C.W. Spinks y J. Deely (eds.), *Semiotics* (pp. 118-130). Toronto, Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (1998). Symbolic activity in mathematics classrooms: A semiotic perspective. En C.W. Spinks y J. Deely (Eds.), *Semiotics* (pp. 156-170). Toronto, Canadá: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (2004). Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(1), 34-56.

Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (2001). Question-and diagram-mediated mathematical activity: A case in a fourth-grade classroom. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *23*(4), 27-40.

Steffe, L.P. (1983). The teaching-experiment methodology in a constructivist research program. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 469-471). Boston, Massachusetts: Birkhäuser.

Steffe, L.P. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L.P., von Glasersfeld, E., Richards, J. *et al*. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory and applications.* Nueva York: Praeger.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 59-85.

Von Glasersfeld, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and number. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(2), 83-94.

Von Glasersfeld, E. y Richards, J. (1983). The creation of units as a prerequisite for number: A philosophical review. En L.P. Steffe, E. von Glasersfeld, J. Richards *et al*. (eds.), *Children's counting types: Philosophy, theory and applications* (pp. 1-20). Nueva York: Praeger.

Vygotsky, L.S. (1986/1934). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

COMENTARIOS A LOS ARTÍCULOS DE RAYMOND DUVAL

Bruno D'Amore

Lo que siempre me ha entusiasmado del trabajo de investigación y de reflexión del amigo Raymond Duval es su constante y sincera atención a los verdaderos problemas del aprendizaje. Muchos investigadores, atraídos por una didáctica de la matemática que trata cuestiones concretas, ligadas al aprendizaje de los estudiantes, después de algunos años saborean el gusto embriagante de la investigación abstracta, investigación ligada a temas epistemológicos, semióticos, filosóficos, olvidando los problemas concretos del aula, el estudiante, el aprendizaje. Según mi opinión, es como si un investigador de medicina se dedicara a la filosofía del ácido acetilsalicílico y a la semiótica del diazepam, olvidando los enfermos que esperan nuevas medicinas que podrían curar sus reales y concretos problemas de salud.

Conocí personalmente a Duval en 1995 en Catania, Sicilia, Italia, durante un ICMI Study sobre el aprendizaje de la geometría, donde interactuamos en dos ocasiones consecutivas y, desde entonces, las oportunidades de encuentro han sido asiduas y continuas; al año siguiente fue mi colaborador en el Topic Group 14 en Sevilla durante ICME 8: *Infinite processes throughout the curriculum*, 14-21 julio 1996, del cual era yo el Chief Organizer.

He aprendido mucho de él, de sus textos, de la discusión personal, de haber sido su huésped a Lille como potencial estudiante de doctorado; es él, tal vez, el estudioso de quien, directa y personalmente, he aprendido más.

Nunca, en ningún escrito, en ninguna conferencia, en ningún curso, en ninguna ocasión él olvida que el problema de fondo de la didáctica de la matemática es el aprendizaje de la matemática o, mejor aún, la razón por la cual no se da este aprendizaje.

Estos tres artículos son ejemplares y constituyen para todos nosotros una ocasión de reflexión y de análisis crítico de su misma obra, entendida en sentido general. En el primero de estos, Duval se concentra en las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría, centrando la atención en algunos problemas de mayor significación: el desarrollo de la visualización, la diferencia de los razonamientos que caracterizan el discurso geométrico y su aprendizaje, la coordinación de sus funcionamientos.

Tuve el privilegio de escuchar en ante prima este tipo de reflexiones; tanto que, en un congreso que se hizo en mi honor en la Universidad de Bologna el 8 octubre de 2011, estando presente entre los relatores Raymond Duval, yo le pedí explícitamente abordar este tema como primera intervención, como inauguración de la jornada, frente a estudiosos de didáctica de la matemática, pero también frente a matemáticos (entusiasmados de su discurso) y a algunos rectores de universidades.

No puedo dejar de precisar que desde hace algunas décadas se estudia la problemática de la visualización de la geometría; ¿cómo no recordar la obra pionera que en esta dirección cumplió el grande Efraim Fischbein (1920-1998)?, quien fuera el primero estudioso de didáctica de la matemática en la acepción moderna de esta disciplina a quien conocí (en Italia, en 1980). Pero es Duval el máximo intérprete de este estudio con sus fascinantes y eficaces instrumentos, con una capacidad analítica que nos deja estupefactos.

En otro artículo aquí presentado propone un análisis cognitivo de los problemas de comprensión (mucho más en general) del aprendizaje de la matemática. Las preguntas de investigación que se plantea parecen ser de una gran ingenuidad (¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen en la comprensión de la matemática? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas?), pero precisamente esta es su fuerza, el coraje de afrontar la problemática desde las raíces, así como lo vive un docente en el aula. Con una simplicidad que nos deja asombrados, Duval es capaz de reportar el problema general al problema de la representación. (Una representación es algo que se pone en el lugar de otro algo. Pero al mismo tiempo esta noción puede ser elusiva o demasiado formal. ¿Cuál es la naturaleza de este "algo que se pone en el lugar de…"?). Y aquí inicia su análisis que lo hace partir teóricamente de estudios de Piaget de los años 20 y lo porta lejos, hasta llegar a nosotros, al momento actual.

Entre las temáticas matemáticas de mayor significado que forman parte de los estudios iniciados por Duval, ¿quién no recuerda el *glissement* entre los verbos "tener" y "ser", relativo a la falta de construcción cognitiva del infinito por parte de los estudiantes? ¿Quién no recuerda la distinción profunda entre demostración y argumentación que nos ha llevado, primero al estudio y después a la reflexión, de todos nosotros? Duval retoma en esta ocasión la idea de *prueba*, con características un poco más generales respecto a la idea matemática de demostración.

Sin duda, el proceso de prueba (y aún más para mí, el de demostración) constituye por sí mismo un aparato matemático complejo desde el punto de vista epistemológico; tanto que, después de un milenio y medio, todavía se está discutiendo. Pero, desde el punto de vista de la comprensión y, por tanto, acerca de su funcionamiento cognitivo, los problemas son aún mayores. El autor se pide, en forma ingenua en apariencia: ¿Por qué hay tantos estudiantes que no tienen éxito en atravesarlo verdaderamente?

Sabemos que el estudio de este objeto ha creado tres direcciones de estudio en el ámbito de la didáctica de la matemática: una dirección psicológica que asume como modelo de razonamiento las formas aristotélicas (a esta hacen referencia los estudios iniciales de Piaget e Inhelder, por ejemplo); una segunda corriente didáctica que evidencia una relación de interacción entre las figuras, los teoremas y las definiciones, llegando a producciones discursivas, a las cuales se vuelven a estudiar los trabajos de Balacheff; y una última dirección que aprovecha las ideas de modelos de razonamiento que funcionan como máquinas de inferencia, algo así como la inteligencia artificial, típica de los años 80.

Duval analiza cada una de estas corrientes y logra proporcionar interpretaciones personales del funcionamiento del objeto "prueba"; logra exponer diversas interpretaciones posibles de los malentendidos que se pueden individuar en el aprendizaje cognitivo de la prueba, reafirmando la necesidad hecha explícita en los años 90 en sus mismos escritos, de la coordinación de los pasajes formales entre proposiciones, al interno de la lengua materna.

Sugiere también una visualización de carácter semiótico que regula el funcionamiento de una prueba: desde una hipótesis, sale una flecha pero nunca puede llegar una flecha; una o varias flechas llegan a un teorema, pero solo una flecha puede salir de él; una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella. Una ejemplificación de una elegante simplicidad. Sugiere también un uso heurístico de las figuras que podrían construir una base cognitiva notable.

El investigador puede obtener ventajas del estudio de estos tres artículos, pero también aquel docente consciente del malestar cognitivo de sus estudiantes y busca la forma de interpretarlo con inteligencia, buscando no los síntomas del mal, los signos, los errores, sino las causas que los han generado, causas sobre las cuales se debe intervenir.

De forma más específica, en el primer artículo Duval toma en consideración las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría, la función que tienen en este proceso la visualización, las diferencias entre los diversos tipos de razonamiento y cómo se coordinan entre sí los respectivos funcionamientos.

En cuanto al primer punto, él logra establecer una clasificación del papel que asumen las figuras dentro de la actividad geométrica que constituyen las actividades de los estudiantes, en el proceso de aprendizaje. Obviamente, estos papeles deben ser examinados sobre la base del funcionamiento cognitivo, lo cual crea una dualidad de extremo interés entre la visualización icónica y la no icónica. Esta dualidad condiciona la forma de ver lo que se realiza en geometría, por lo general dado por descontado, adquirido sin un explícito proceso de enseñanza-aprendizaje; en particular, la deconstrucción dimensional de las formas. Además, una cosa es el ver; otra muy diferente, el decir; la necesidad de fundir estas dos acciones se enfrenta con la dificultad de hacerlas confluir en una actividad única o, por lo menos, en una actividad fluida. Por ejemplo, ¿cómo una proposición puede ser transformada en figura?, o ¿cómo una figura puede verse como un contraejemplo del enunciado de una conjetura?, o ¿cómo las figuras representan una definición?

El hecho es que la cantidad de actividad que se puede proponer a los estudiantes como trabajo sobre una figura no es unívoca; por el contrario, es extremadamente amplia. Estas actividades pueden hacer referencia al trabajo que debe realizarse (por ejemplo, reproducir la figura misma o adaptarla a una determinado modelo, o medir algunas de sus magnitudes, o describirla oralmente de forma tal que otro estudiante la pueda reproducir), o al tipo de trabajo pedido (con material concreto, o solo la reproducción gráfica, con ciertos instrumentos establecidos o sin ellos).

Naturalmente, se debe tomar en consideración el hecho de si la figura es bidimensional o tridimensional, la forma perceptiva de ser vista, si se desea modificar o no…

Tomando como criterios los tipos de operaciones que se desean cumplir sobre las formas dadas, el autor toma en examen cuatro modalidades diversas, y cada una de estas conduce a modalidades de ingreso diferentes en el mundo de la geometría por parte de los aprendices; él las llama modalidad del botánico, del agrimensor–geómetra, del constructor y del inventor. Para cada una de estas modalidades distingue el tipo de operación sobre las formas visuales requeridas por la actividad propuesta y cómo se movilizan las propiedades geométricas con respecto al tipo de operación.

Al margen del agudo y detallado análisis, que no dudo en definir al mismo tiempo didáctico y epistemológico, yo veo en esta actitud una gran ayuda para el docente que distingue los diversos modos de entender el contacto con la geometría por parte de los alumnos.

Aun en sus diferencias, los problemas evidenciados tienen en común el análisis de una actividad fundamental de todas las acciones en geometría, es decir, el uso heurístico de las figuras: se debe partir de una figura inicial (por ejemplo aquella que acompaña el enunciado de un problema o que se puede construir gráficamente leyendo el texto de un problema) con el objetivo de individuar sobre la misma figura, con intervenciones oportunas, un procedimiento de resolución, como se suele pedir en geometría.

Duval, siguiendo aún la distinción de las cuatro actitudes precedentes, distingue entre un estatus epistemológico y una “fuente cognitiva de la certidumbre”. De manera inconsciente o intuitiva, los estudiantes se sitúan en diversas posiciones que crean respuestas diversas al mismo problema.

A este punto, el autor plantea dos modelos opuestos de funcionamiento cognitivo: una visualización icónica y una no icónica, mostrando cómo estas constituyen dos mecanismos de identificación de objetos a partir de formas visuales. Las diferencias son puestas en evidencia, pero con rasgos comunes; por ejemplo, que las figuras se generan la una de la otra en cada caso, sea por motivos debidos a los procesos de construcción, sea por la reorganización visual de las formas.

El proceso de generación es autónomo y está estrictamente ligado al control discursivo. Sobre esto se basa la aprehensión operatoria, la cual está a la base de la "fecundidad intuitiva de las figuras".

La iconicidad puede representar un obstáculo al aprendizaje. Como Duval lo manifestó en artículos precedentes, si el referente objetual es el mismo espacio físico circunstante o los objetos materiales, establecer correspondencias entre las formas y el referente real trae a colación el cuerpo de quien observa (incluidos sus gestos, la visión, el desplazamiento del cuerpo).

Por ejemplo, los esquemas que acompañan las instrucciones de montaje de un mueble, los mapas de una ciudad, los planos urbanos entran en esta categoría. Pero si la figura de la cual se habla es una típica figura geométrica, el rectángulo, el triángulo, entonces existen formas típicas de representación estándar llamadas a formar parte de la representación. Estas obstaculizan la visualización iónica y bloquean el desarrollo de las figuras de partida, sean las que sean, y bloquean también las figuras que se tienen delante y que se obtienen a partir de aquellas de partida con algunas intervenciones.

En relación con la visualización no icónica, se requiere tener en cuenta la descomposición de formas, iniciando por aquellas que parecen visualmente simples; de hecho, para entrar en el funcionamiento específico de la visualización icónica, es necesaria su identificación.

Frente a la aparente simplicidad de estas operaciones que parecen espontáneas, Duval evidencia dos formas diversas de descomponer una figura de partida en unidades figurales que analiza con atención y en detalle con gran interés concreto.

Pero volvamos a la figura que se desea usar para resolver un problema; en este caso, la situación es diversa. Por ejemplo, iniciar de un particular triángulo y cortarlo oportunamente para transformarlo en un paralelogramo, actividad típica de niños en una clase de geometría. Acá se debe hablar de "deconstrucción" de una forma visual de base para obtener otra forma visual de base. Dicha "deconstrucción" no es relacionable a aquella implicada en la construcción de las figuras, como podría aparecer a primera vista.

Entra en juego la especificidad del acto de ver en el aprendizaje de la geometría; la visualización icónica es totalmente independiente de toda enunciación explícita o implícita. En otros términos, no está en absoluto subordinada a un conocimiento de propiedades geométricas.

Todo esto lo muestra Duval con un fino y concreto análisis.

También analiza la siguiente cuestión: ¿Las adquisiciones relativas a una manera de ver ayudan a entrar en las otras maneras de ver? Es decir, conocer o darse cuenta de lo que se ha adquirido gracias a una transferencia de un tipo de actividad propuesta en clase a otro tipo de actividad es algo crucial para el aprendizaje de la matemática en primaria y comienzos de secundaria. Por ejemplo, si la "transferencia" tiene que ver con el trabajo de transformación de figuras, esto es crucial, repito, por el aprendizaje de la geometría. Querer privilegiar una entrada como más accesible que las otras lleva a suponer la transferibilidad, más o menos espontánea, de una manera de ver a otras. Pasar de la visualización icónica, que es común a todos los campos de conocimiento, a la visualización no icónica, que es específica de la matemática, exige un cambio completo del funcionamiento cognitivo del acto de "ver".

Estamos habituados desde hace algunos decenios a estas formas de análisis típicas de los estudios de Duval; desde una pregunta de tipo didáctico, aparentemente simple, a una reflexión profunda sobre el funcionamiento cognitivo, que implican semiótica y noética.

Después Duval dedica algunos estudios específicos al caso de la descomposición por deconstrucción dimensional de las formas; este caso muestra especificidades que se examinan en detalle.

¿Y qué relación existe entre saber ver la figura y los teoremas que eventualmente esta evidencia? El autor presenta ejemplos de gran interés.

Queda una clásica problemática, la relación entre "ver" y "decir"; aquí la pregunta es: ¿Cómo y hasta dónde se pueden reunir en geometría? El problema es que las figuras geométricas dependen de dos registros de representación que son cognitivamente heterogéneos, pues conservan sus propias posibilidades de tratamiento, lo que quiere decir que funcionan en paralelo y de manera independiente.

Duval asevera que la geometría requiere la utilización de un vocabulario técnico más o menos pesado. Podemos encontrar muy rápidamente en el currículo la introducción de por lo menos cuarenta términos, y si hacemos la suma de lo que se introduce hasta tercer grado de secundaria, ¡se supera ampliamente la centena de términos! Sin embargo, lo más importante no es eso, sino la heterogeneidad semántica de esta terminología. Toda formulación en geometría recurre a un vocabulario que cubre por lo menos cuatro tipos de términos denominativos.

Los problemas que son examinados con atención son:

Clasificación de términos geométricos en función de su valor descriptivo de un dato visual;

¿Cómo se pueden poner las proposiciones en correspondencia con una figura o convertirse ellas mismas en una figura?

El papel del lenguaje no es "poner en palabras" lo que ya estaría pensado claramente o vivido, sino determinar proposiciones para construir el pensamiento de los objetos de conocimiento, por lo menos en los campos de las ciencias y la matemática. Lo que las proposiciones enuncian constituye un sentido que es irreductible al de las palabras que ellas articulan. Esta irreductibilidad aparece con los problemas específicos que plantean tanto la producción, oral y sobre todo escrita, como la comprensión de las proposiciones, escuchadas o leídas; por ejemplo, la distinción entre una proposición y su recíproca, aunque emplean las mismas palabras, o la modificación del sentido relacionada con la cuantificación y la negación, o incluso el cambio de sentido de una proposición en función del estatus que se le da en el desarrollo de un discurso.

Y ¿cuál es un análisis funcional de la relación entre una proposición enunciada y una figura?

Son muy bien conocidos los estudios de Duval sobre la relación entre argumentación y demostración que reaparecen con la pregunta que él se plantea: ¿Qué solapamientos hay entre visualización y razonamientos para justificar o para probar? En qué se diferencia un razonamiento de una descripción o de una explicación y, sobre todo, en qué es diferente un razonamiento que justifica, como por ejemplo en el marco de un debate sobre un asunto de sociedad o para tomar una decisión, de un razonamiento que demuestra, como en matemática. Invocar la lógica, o la "derivabilidad lógica" resulta ingenuo cuando se trata de razonamientos que se hacen en lenguaje natural y con sus recursos, pues esto no permite comprender por qué las deducciones válidas no tienen de ninguna manera fuerza de prueba a los ojos de los estudiantes y cómo se inscriben ellas en el lenguaje natural.

Este es un artículo que afronta temas de extrema delicadeza acerca del aprendizaje de la geometría en los primeros niveles de escolaridad, primaria y secundaria; que ofrece al docente y al investigador formidables elementos de análisis de las dificultades que tiene los estudiantes en la articulación del cognitivo, la visión de las figuras (y su uso) con el lenguaje.

En el segundo artículo, Duval propone un análisis cognitivo de los problemas de comprensión en el aprendizaje de la matemática.

El primer punto que se debe examinar es la forma en la cual se pueden caracterizar las actividades matemáticas desde un punto de vista cognitivo.

En primer lugar, él examina el papel "capital" de las representaciones semióticas, relanza la idea de paradoja cognitiva del acceso a los objetos de conocimiento y muestra la gran variedad de representaciones semióticas usadas en matemáticas.

Después de esto, analiza los procesos de pensamiento que entran en juego en la actividad matemática. Pero lo hace de forma problemática: cómo describir la gran variedad de procesos matemáticos, usando y evidenciando los diversos registros que se ponen en juego en dichos procesos, incluso con ejemplos específicos. Siempre recurriendo ampliamente a ejemplos, aritméticos y geométricos, trata de las transformaciones semióticas de tratamiento y conversión. Cierto, los problemas que este análisis presenta son multíplices; por ejemplo, el problema de reconocer el mismo objeto matemático a través de representaciones cuyos contenidos son heterogéneos.

Por último, Duval propone dos fuentes de incomprensión en el aprendizaje de la matemática, y las hace coincidir precisamente con las dos transformaciones semióticas. En primer lugar, considera la complejidad y la especificidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional; aquí los ejemplos que presenta son múltiples. En segundo lugar, toma en examen la conversión de representaciones o cambio de registro. En los dos casos, las fuentes de incomprensión llevan al problema de reconocer en una representación, y para cualquier registro usado, aquello que es matemáticamente relevante, de lo que no lo es.

Entrando más en detalle, las preguntas que el autor se pone inicialmente son, por lo tanto, repito, las siguientes: ¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen con la comprensión de la matemática? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas? Estas preguntas han cobrado una magnitud y una importancia particular con la reciente presión para lograr más educación matemática inicial para todos los estudiantes, y esto en todo el mundo; también la Unesco publicó recientemente un amplio estudio sobre el conocimiento matemático necesario para los futuros ciudadanos, conocimientos que los prepare para enfrentar un entorno tecnológico y orientado hacia la computación (y la estadística, agrego yo), de una complejidad que se incrementa en forma ilimitada (Artigue, 2011).

Los estudios de las últimas décadas han mostrado que los procesos de adquisición del conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario considerar diferentes enfoques, el epistemológico y el educativo, los cuales tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren en cualquier proceso de conocimiento o que lo constituyen.

A partir de estas consideraciones, inicia una larga reflexión sobre la idea de representación: algo que se pone en lugar de otro algo. Pero, ¿cuál es la naturaleza de este “algo que se pone en lugar de…”? La respuesta puede ser múltiple, dependiendo de si se consideran las representaciones con respecto a un individuo concreto y sus experiencias, a las estructuras mentales o a los objetos de conocimiento con sus requisitos epistemológicos específicos. Las representaciones entonces pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales a las cuales cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas.

Anteriormente hice explícito el hecho de que Duval, a este punto, recurre a los estudios de Piaget de los años 20 para pasar inmediatamente a investigaciones mucho más recientes, en las cuales las representaciones semióticas, incluidos todos los lenguajes, aparecen como herramientas comunes para producir nuevos conocimientos y no solo para comunicar cualquier representación mental particular.

En esta dirección se encuentran Frege y Hilbert, con respecto a los requisitos epistemológicos y metamatemáticos; pero todo esto se reveló inútil incluso para las investigaciones sobre la cognición. Las representaciones son solamente los resultados superficiales del funcionamiento de estructuras mentales profundas, que no dependen de la conciencia real de los individuos, y con esto volvemos a Piaget.

Para determinar el origen de la incomprensión de los estudiantes, primero debemos determinar las condiciones cognitivas que hacen posible la comprensión. Y este punto nos lleva a preguntas de gran interés: ¿Qué sistemas cognitivos se requieren y se movilizan para acceder a los objetos matemáticos y al mismo tiempo hacer posible la realización de las múltiples transformaciones que constituyen los procesos matemáticos? ¿La manera de pensar en matemática es la misma que en las otras áreas de conocimiento? ¿La actividad matemática requiere solamente los procesos cognitivos comunes o, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas específicas cuyo desarrollo se debe tener en cuenta en la enseñanza? Estas son las preguntas clásicas que se hace un docente de matemática y que se plantean quienes estudian el complejo sistema cognitivo que hace referencia a esta disciplina.

Para entrar en el complejo sistema que el autor evidencia para dar respuesta a estas preguntas, sería oportuno acceder a artículos precedentes en los ya se abordó el tema. En este artículo, presenta resultados concretos y específicos que ilustran muy bien la problemática. Para hacer esto, prosigue con una serie de preguntas siempre más precisas. ¿Qué caracteriza la actividad matemática desde un punto de vista cognitivo? Estamos todos convencidos de que el aprendizaje de la matemática es un hecho específico, tanto que desde el inicio de la didáctica se estudiaron los casos del fracaso electivo en matemática. Pero aquí Duval hace un análisis mucho más fino e interesante que involucra un estudio sobre los obstáculos que los estudiantes experimentan para comprender; a menudo se recurre a los conceptos y su complejidad epistemológica. Esta complejidad se puede explicar mediante la historia de dichos conceptos.

Sin embargo, justamente el autor plantea que tal enfoque no es suficiente para caracterizar lo que es nuevo y específico para los procesos de pensamiento en matemática, pues en dicha área tienen un papel específico las representaciones semióticas. Mirando la historia del desarrollo de la matemática, se ve que el desarrollo de las representaciones semióticas (en el sentido de tratamientos y conversiones) fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático mismo. A este punto, Duval proporciona algunos ejemplos tomados de la historia de la matemática, relacionados siempre con experiencias de aula.

Gracias a este punto de vista epistemológico, nuestro autor reafirma la potencia de su famosa paradoja cognitiva, que tanto nos ha influenciado como investigadores en los últimos decenios. Esta ha sido objeto de un estudio específico desde un punto de vista epistemológico y filosófico (D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, Matteuzzi, 2015).

Otro argumento fuerte de la teoría duvaliana es el relacionado con la gran variedad de representaciones semióticas usadas en matemática.

Ahora bien, es obvio que una variedad de estas sea necesaria para la construcción cognitiva del objeto matemático y se señaló en estudios precedentes; que una excesiva cantidad de representaciones crea dificultades ulteriores, necesita un análisis didáctico concreto y oportuno (véase: D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013; no es por caso que una de las prefaciones a este libro esté firmada por el mismo Raymond Duval).

Nuestro autor se lanza aquí en una interesante y abundante serie de ejemplos, tomados de varios temas de la matemática, relacionándolos con el problema de la multiplicidad de las representaciones semióticas traídas a colación.

Existe siempre el problema de la definición de los procesos de pensamiento involucrados en la actividad matemática; la representación semiótica no se reduce a designar objetos, a poner algo en lugar de otro. De otra parte, para analizar los procesos de pensamiento complejos y específicos que subyacen a la actividad matemática, debemos tener en cuenta las diferencias entre los diversos sistemas de representación semiótica usados.

¿Qué papeles tienen? y ¿qué diferencias llevan consigo? ¿Son importantes estas diferencias en los procesos matemáticos?

Una vez establecidos los varios procesos matemáticos, estos deben ser descritos, otro campo de reflexiones que se abre. Aquí entran en campos las imágenes, los lenguajes tanto naturales como simbólicos. Entre los diversos sistemas de representación semiótica usados existe una diferencia funcional que es esencial porque está intrínsecamente conectada con la manera en que los procesos matemáticos transcurren. Y los procesos nunca se pueden convertir en algoritmos (sobre este tema, véase también Brousseau, D'Amore, 2008).

Duval propone a este punto un estudio sobre los dos tipos de transformación de las representaciones semióticas, es decir, tratamiento y conversión. Las explica con ejemplos concretos y analiza sofisticadamente sus características.

No obstante se trata de un argumento muy bien conocido; los ejemplos proporcionados y el análisis propuesto clarifican ciertas posiciones y aclaran algunas dudas. Por ejemplo, evidencian la frase: "Los tratamientos que se pueden realizar dependen principalmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicas para el registro utilizado".

Yo mismo tuve la posibilidad de estudiar por mucho tiempo el tratamiento y, por tanto, puedo testificar que se trata de consideraciones de gran interés teórico y práctico, de hecho empírico.

Pero, si nos encontramos frente a dos representaciones cuyos contenidos son heterogéneos, ¿cómo reconocer el mismo objeto matemático? En el pasado la respuesta parecía clara: Frege nos enseñó a evidenciar la diferencia entre el contenido de una representación y aquello a lo cual hace referencia la representación. Pero hoy somos propensos a pensar, con Duval, que el contenido de una representación depende más del registro de representación que del objeto representado. Esta relación entre el contenido de una representación y el objeto representado depende del sistema que se moviliza para producir la representación. Podemos obtener iconicidad o no iconicidad para una representación semiótica, lo mismo que para una representación no semiótica. Y eso nos devuelve a la paradoja cognitiva de la comprensión en matemática.

Volviendo al tema de base, Duval estudia a este punto las fuentes de incomprensión en el aprendizaje de la matemática. Estas son dos, relacionadas precisamente con los dos tipos de trasformaciones de representaciones semióticas.

En un primer momento, el autor estudia la complejidad de los tratamientos relacionados en un registro multifuncional, recurriendo a ejemplos tomados de diversos campos, por ejemplo de la geometría. En un segundo momento estudia la otra fuente de incomprensión: conversión de las representaciones, la cual implica necesariamente un cambio de registro.

El autor hace notar cómo las dificultades de conversión se consideran normalmente un signo de incomprensión conceptual. Y esto complica la comprensión por parte del docente, acerca de las causas del fracaso de sus estudiantes. Esta es la razón por la cual la mayor parte de la investigación se ha dirigido a la reorganización de representaciones auxiliares de transición, las que los aprendices desarrollan espontáneamente o las que se introducen en la enseñanza.

Un tema posterior de gran interés para la investigación y para el mundo de la escuela es el siguiente: a veces se confunden las características relevantes y las no relevantes de las representaciones. ¿Cómo seleccionar y valorizar estas informaciones? Duval propone varios ejemplos tomados de diferentes temas de la matemática, en un primer momento para evidenciar el fenómeno y en un segundo momento para analizarlo, en álgebra, en geometría, en aritmética, etcétera.

Que este tipo de estudio sea relevante se pone aquí en evidencia a partir de una frase que comparto plenamente: Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Esto depende de la coordinación de varios registros de representación y es solo en matemática donde se requiere fuertemente la coordinación de registros.

En el tercer artículo, Duval estudia los procesos matemáticos de prueba y en particular examina el funcionamiento cognitivos y la comprensión de tales procesos por parte de los estudiantes.

En un primer momento presenta un amplio análisis de los estudios sobre la complejidad cognitiva del funcionamiento del razonamiento. Pero también reflexiones profundas sobre cuáles sean las características de un razonamiento, partiendo de la idea de organización discursiva de las proposiciones. Esto implica el estudio de las componentes "internas" del significado de una proposición y un análisis del estatuto de las proposiciones y de las diferencias funcionales entre estas en el desarrollo discursivo (en las diversas acepciones de razonamiento, argumentación, prueba etc.).

Retomando sus estudios precedentes sobre este mismo tema, Duval propone una forma de ver y de determinar el funcionamiento cognitivo específico de una prueba de matemática mostrando, entre otras cosas, cómo cambia el focus al interior de un "espacio del significado" de una proposición; si es verdad que en el habla común las interacciones sociales, las únicas características del significado que se activan para cualquier proposición expresada son su contenido (informativo) y su valor pragmático de comunicación, en el razonamiento los valores epistémicos llegan a ser las características predominantes del significado, porque el razonamiento juega con las diferencias de los valores epistémicos de las proposiciones. Esta observación es suficiente para el avío de un análisis profundo, basado también en la experiencia de aula.

Sucesivamente formula el problema de qué es y de cómo se puede formular el aprender a probar, iniciando de la pregunta: ¿qué diferencia existe entre un razonamiento válido y uno no válido? Si la pregunta que se plantea es de carácter cognitivo, se puede hacer referencia a la clásica distinción de Nicolás Balacheff de 1987, quien distingue cuatro tipos de pruebas: empirismo ingenuo, experimento crucial (estas dos pruebas son de tipo pragmático basadas en la observación), experimento genérico y experimento mental (estas dos pruebas son de tipo intelectual, basadas en la necesidad de la afirmación).

Por último, examina la forma en la cual se puede inducir a los estudiantes para hacer funcionar cognitivamente el razonamiento deductivo, lo cual trae a colación varios factores entre los cuales emergen por importancia: la diferenciación y la coordinación de los registros de representación semiótica, analizar la organización deductiva y cómo esta funciona.

Entre las temáticas matemáticas de mayor significado que forman parte de los estudios iniciados por Duval, ¿quién no recuerda el deslizamiento entre los verbos “ser” y “tener”, en relación con la falta de construcción cognitiva del infinito por parte de los estudiantes? ¿Quién no recuerda la distinción profunda entre demostración y argumentación que nos ha llevado a todos nosotros, primero al estudio y después a la reflexión sobre estos argumentos? Duval retoma en esta ocasión la idea de prueba, con características un poco más generales respecto a la idea matemática de demostración.

Indudablemente, el proceso de prueba (y, aún más, para mí, él de demostración) constituye por sí mismo un aparato matemático complejo desde un punto de vista epistemológico, tanto que, después de un milenio y medio, se está aún discutiendo. Pero, desde el punto de vista de la comprensión y, por tanto, del de su funcionamiento cognitivo, los problemas son aún mayores. Duval se pregunta, en forma aparentemente ingenua: ¿Por qué hay tantos estudiantes que no tienen éxito en lograrlo verdaderamente?

Sabemos que el estudio de este objeto ha creado tres direcciones de investigación en el ámbito de la didáctica de la matemática: una dirección psicológica que asume como modelo de razonamiento las formas aristotélicas (a esta hacen referencia los estudios iniciales de Piaget e Inhelder, por ejemplo); una segunda corriente didáctica que evidencia una relación de interacción entre las figuras, los teoremas y las definiciones, llegando a producciones discursivas a las cuales se refieren los trabajos de Balacheff; y una última dirección que aprovecha las ideas de modelos de razonamiento que funcionan como máquinas de inferencia, algo así como la inteligencia artificial, típica de los años 80.

Duval analiza cada una de estas corrientes y logra proporcionar interpretaciones personales del funcionamiento del objeto "prueba"; logra exponer diversas interpretaciones posibles de los malentendidos que se pueden encontrar en la actividad cognitiva de la prueba, reafirmando la necesidad ya explícita en sus mismos escritos en los años 90, acerca de la coordinación de los tránsitos formales entre proposiciones en el interior del registro semiótico de la lengua materna.

Sugiere también una visualización de carácter semiótico que regula el funcionamiento de una prueba: desde la hipótesis, parte una flecha pero nunca puede llegar una flecha; una o varias flechas llegan a un teorema pero solo una flecha puede salir de él; una o varias flechas llegan a la conclusión buscada (lo que se va a probar) y ninguna flecha sale de ella. Una ejemplificación de una elegante simplicidad. Sugiere también un uso heurístico de las figuras que podrían construir una base cognitiva notable.

En este artículo, Duval estudia entonces los procesos matemáticos de prueba y en particular examina el funcionamiento cognitivo y la comprensión de tales procesos por parte de los estudiantes.

Uno de los problemas para la enseñanza es que sigue faltando la distinción entre los diferentes estatus operativos de las proposiciones, aun cuando ya no haya confusión superficial o circularidad en las expresiones. Muchos estudiantes, sin cometer errores evidentes, no captan exactamente cómo operan en una prueba las diferencias funcionales entre las proposiciones de un discurso o de una "explicación". No ven por qué y cómo el estatus operativo, y no solo el estatus teórico (definiciones, teoremas), son herramientas para desarrollar el razonamiento de una manera bien diferente a la de la argumentación en el lenguaje natural.

Se ha observado la misma incomprensión en estudiantes de entre quince y dieciséis años. Pero mi experiencia personal es que este tipo de actitud no tiene que ver solo con la edad, no necesariamente se desarrolla con el pasar del tiempo. He visto profesores decidir de anticipar a la didáctica de los teoremas una larga enseñanza de la lógica aristotélica o proposicional, con un resultado que podemos calificar de negativo porque, entre otros aspectos, muchos confunden la implicación material $A \rightarrow B$ (que pertenece al lenguaje: si A entonces B) con la deducción lógica (que pertenece al metalenguaje: de A se deduce B). Y porque no es un hecho que la modalidad de razonamiento aristotélico sea la más cercana a la experiencia argumentativa del estudiante; por el contrario, mis investigaciones me llevaron a mostrar que el razonamiento lógico intuitivo del estudiante de 15-17 años es mucho más cercana a la nyaya indiana que no a la lógica aristotélica (D'Amore, 2005).

Lo que sucede además, es que en el nivel de organización de los pasajes, estos están conectados por proposiciones que se superponen: algunas conclusiones del último pasaje se toman como premisas para el nuevo pasaje. A esto se debe que no haya brecha entre dos pasajes. En este nivel, el uso de los conectores por parte de los estudiantes no es relevante, aspecto que sí es importante para los profesores.

El estudio que se puede proponer, entonces, desde un punto de vista epistemológico, es considerar las pruebas desde un tercer nivel: el nivel teórico. Este nivel involucra un cambio de escala: se pasa de la deducción local de una proposición a la deducción global dentro de un conjunto de proposiciones. Pero, existen aspectos que deben tenerse en cuenta, aspectos de carácter lingüístico de gran interés. A diferencia del habla común, el razonamiento moviliza los tres componentes posibles del significado de cada proposición, pero están combinados de maneras específicas para el argumento y para la prueba matemática. El argumento no fluye como una deducción válida porque el contenido se impone sobre los otros componentes, como lo hace en el habla común.

Por ejemplo, existe una gran diferencia en el uso de la palabra "entonces" en el lenguaje cotidiano y el uso de la misma palabra en el lenguaje lógico o matemático, por ejemplo en el curso de una demostración.

Podríamos entonces pensar en demostraciones (o pruebas más generales) sin lenguaje; pero no hay razonamiento válido sin lenguaje, porque solo las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas y porque no hay proposición sin enunciado. Por tanto, el problema de la relación entre razonamiento y redacción explícita no se puede desconocer, especialmente en la educación matemática. Nace una pregunta que no tiene solo interés didáctico, sino que tiene también un interés cultural y epistemológico: ¿Cuáles son las interacciones entre el razonamiento como organización específica de proposiciones y la redacción, o expresión, como expresión explícita en un lenguaje particular?

En la argumentación común, el lenguaje dominante y, por tanto, el más usado es la lengua materna; es mediante esta que los aprendices se pueden percatar de lo que se requiere para una prueba matemática y lo que esta produce. De otra parte, razonar en lengua materna requiere tomar en cuenta el estatus y el valor epistémico de cada proposición al mismo tiempo. Solo así el razonamiento puede funcionar como un verdadero razonamiento convincente. Quedándonos dentro la matemática, al contrario, en el cálculo lo importante es enfocarse en las reglas de uso y en la sustitución para cada símbolo (variables, cuantificadores, operadores, relaciones, etc.); el estatus y el valor epistémico de las expresiones simbólicas no interesan. Desde un punto de vista cognitivo, esta es la diferencia profunda: el cálculo es más "fácil" que el razonamiento.

No es un caso, agrego entre líneas, que muchos lógicos en el transcurso del tiempo han intentado transformar la lógica, la demostración, el razonamiento, en puro cálculo simbólico, en un algoritmo o en un mecanismo.

Pero, ¿cómo un individuo, un estudiante, llega a la necesidad de hacer uso de una proposición? La primera experiencia que conduce a la conciencia de la necesidad de alguna proposición, según Duval, es cuando su contenido corresponde a datos sensoriales, percibidos con o sin instrumentos. Solo así se puede verificar lo que se dice examinando lo que se puede percibir. Esa es la práctica epistemológica común.

Este tipo de debate no es nuevo, se trata de lo que Leibniz denominó la "necesidad física" como opuesta a la "necesidad lógica o geométrica". Pero es siempre actual. La distinción entre los tipos de lenguaje y su necesidad es sofisticada, muchas veces fuera del alcance de los estudiantes.

Relacionada con este debate, existe el sentido según el cual, algunas proposiciones son consideradas verdaderas y otras no. O, mejor, son consideradas *necesariamente* verdaderas.

Por último, siempre en relación con este hecho existe la posibilidad de reconocer que una determinada proposición es la única conclusión posible de lo que se ha afirmado previamente, aunque a la postre vaya en contra de la evidencia perceptual o de un acuerdo general.

Todas estas temáticas están estrechamente ligadas a la vida de aula, al aprendizaje de la prueba y de la demostración, pero también con la resolución de un problema, como lo muestra con varios ejemplos el mismo Duval.

La tarea del estudiante no es banal: debe llegar a ser capaz de distinguir entre una prueba matemática y un argumento, que tienen redacciones similares o las mismas marcas verbales (conectores gramaticales y lógicos); esto incluye cambiar de foco con respecto a lo que se considera como el primer componente de los significados de las proposiciones: su estatus en lugar de su contenido.

Muy pocas veces se considera la importancia que tiene, para seguir una argumentación, la capacidad de diferenciación y de coordinación implícita y compleja de registros de representación semiótica en un modo que por lo general no se requiere en otros campos de actividad mental.

Se debe tener en cuenta que la comprensión (matemática) no sigue el orden de la construcción (matemática) del conocimiento; no se puede enseñar matemática, en un nivel inferior, sin tener en cuenta los requisitos básicos para desarrollar la "arquitectura cognitiva" específica del sujeto. Y esto es particularmente cierto para la prueba matemática.

Duval tiene una formidable experiencia en lo relacionado con la enseñanza de la prueba, enseñanza que divide en tres etapas: una primera de exploración libre, una segunda de investigación específica de la organización deductiva de proposiciones en un registro no discursivo, y una tercera de descripción o explicación verbal de la organización deductiva que se ha descubierto. Sobre este tema insiste con ejemplos en este artículo, como lo ha hecho en tantos otros, publicados en el pasado.

Referencias

Artigue, M. (2011). Le sfide dell'insegnamento della matematica nell'educazione di base. *La matematica nella società e nella cultura*. rivista della Unione Matematica Italiana, *4*(2) 211-259. Brousseau, G., D'Amore, B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico. En D'Amore B., Sbaragli F. (eds.) (2008). *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme (Bo), 7-8-9 novembre 2008. Bolonia: Pitagora. 3-14. ISBN: 88-371-1746-9.

D'Amore, B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno,38*, 83-99. D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (*nyaya*). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26-32.

D'Amore B., Fandiño-Pinilla, M. I., Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford. Prólogo a la edición en español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., Fandiño-Pinilla, M. I., Iori, M. *et al.* (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *18*(2), 177-212. Recuperado de http://www.clame.org.mx/relime.htm Doi: 10.12802/relime.13.1822

COMENTARIOS A LOS ARTÍCULOS DE ADALIRA SÁENZ-LUDLOW

Carlos Eduardo Vasco Uribe

He seguido de cerca la obra de Adalira Sáenz-Ludlow desde que se graduó en la Universidad de Georgia, la primera mujer colombiana en obtener un doctorado en los Estados Unidos en la entonces naciente disciplina de la Educación Matemática. En su tesis doctoral, empezó a desarrollar la idea que ha dirigido buena parte de sus investigaciones desde entonces: el análisis de los esquemas personales que van inventando y desarrollando los niños y niñas en el paso de los números naturales a los racionales ("children's fraction schemes"). En particular, empecé a colaborar con ella como asesor ocasional en su primer gran proyecto de investigación, cuando comenzó su carrera como docente investigadora en Educación Matemática en la Universidad de Purdue, en Lafayette, Indiana, en 1992.

Allí obtuvo una holgada financiación de la Fundación Nacional para la Ciencia NSF en los Estados Unidos para un proyecto de largo alcance, que continuó luego en la Universidad de North Carolina, en Charlotte, que le ha proporcionado material e inspiración permanente para su trabajo investigativo y docente durante estos últimos 20 años a partir de 1995. Durante todo el proyecto, siguió de cerca el aún no bien comprendido proceso de construcción de los números racionales en los niños y niñas de primaria. Retrospectivamente podríamos clasificar esa parte inicial de su trabajo como un análisis de la microgénesis de los números racionales. Sus publicaciones sobre los esquemas fraccionales de Miguelito y de Anita ("Michael's fraction schemes" and "Ann's fraction schemes", ver referencias) siguen siendo hitos en la literatura sobre este tema de la construcción de los números racionales.

La investigación pedagógica y didáctica en este nuevo sentido sobre las llamadas "fracciones" —en inglés "fractions" y en Colombia "fraccionarios"— había empezado en los años 70 con las propuestas de Thomas Kieren en el Canadá y, en Colombia, con las ideas de Carlo Federici en esa misma época, ideas que precisamos como todo un "Archipiélago Fraccionario" con el grupo de matemáticas de la renovación curricular en el Ministerio de Educación de 1978 a 1984. Después de diseñar los libros con los programas curriculares de los grados sexto y séptimo, y de reformular el marco de referencia para todo el currículo de matemáticas desde la Teoría General de Sistemas en 1991, publiqué la propuesta para el tratamiento de los racionales Q en 1991: *El archipiélago fraccionario. Notas de Matemática (*Universidad Nacional de Colombia, Bogotá).

Debo mencionar en seguida a Merlyn Behr y a su discípulo Guershon Harel, a quienes les debemos la síntesis que apareció en el *Handbook* de Douglas Grouws en 1992. El trabajo de Gérard Vergnaud sobre el campo conceptual de la multiplicación y el de James Kaput sobre representaciones múltiples llevaron a nuevos avances, pero hasta la introducción y lenta difusión en la Educación Matemática de las herramientas más finas de la semiótica de Peirce a finales del siglo XX, y de la distinción entre registros semióticos de representación y representaciones semióticas por Raymond Duval hacia 1995-2000, no se pudo progresar mucho más allá de los resultados ya conocidos a comienzos de los años 90.

Adalira Sáenz-Ludlow fue una de las pioneras en la introducción de la semiótica peirceana en la Educación Matemática, que había empezado aquí y allá un poco antes, pero que se consagró internacionalmente con la publicación simultánea en 2006 del número especial de RELIME *Semiótica, cultura y pensamiento*, editado por Bruno D'Amore y Luis Radford, y del número especial de *Educational Studies in Mathematics* sobre Semiótica (Vol. 61, No. 1-2), del que Adalira fue coeditora con Norma Presmeg.

Habíamos trabajado juntos en la preparación de ese número especial y, sobre todo, para prepararnos a la reunión de PME en Bergen, Noruega, en 2004. Luego empezamos un largo trabajo de aprendizaje de la semiótica de Peirce, guiados por el profesor Shea Zellweger, quien descubrió un libro raro y curioso, escrito por un español hasta entonces desconocido: Miguel García de la Madrid. Ese libro, *La ideología o tratado de las ideas y de sus signos,* impreso en 1820, más de sesenta años antes que los *Estudios de lógica* de Peirce, fue una pista privilegiada que señalaba un sendero entonces perdido hacia la semiótica de la Escolástica tardía, desde Ockham y Francis Bacon, pasando por los conimbricenses hasta João Poinsot.[37]

Tras este largo trabajo de interpretación de la extensa y profunda obra de Peirce que ella ha seguido en estos diez años en North Carolina y en sus conversaciones con el profesor Zellweger, puedo pues recomendar sin reservas a los lectores y lectoras un examen atento y cuidadoso de estos tres artículos de Adalira Sáenz-Ludlow aquí recopilados, traducidos fielmente por Patricia Perry. Estos trabajos reflejan los sucesivos aprendizajes obtenidos por ella al incorporar a las herramientas teóricas de la Educación Matemática los avances que iba

37 Nota: Ver nuestra ponencia en el congreso de la Sociedad Semiótica Americana en Houston: Vasco, C. E., Zellweger, Sh. y Sáenz-Ludlow, A. (2009). García de la Madrid: Ideas and signs in the Iberian Gray Zone (1650-1850) that follows the Black Hole (1350-1650). In J. Deely and L. G. Sbrocchi (eds.), *Semiotics 2008 "Specialization, Semiosis, Semiotics"* [Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the Semiotic Society of America. 16-19 October 2008] (pp. 91-111). New York-Ottawa-Toronto: LEGAS.

http://www.pdcnet.org/collection-anonymous/browse?start=10&fq=cpsem%2f6992%7c2008%2f&fp=cpsem

logrando en la interpretación de las numerosas y no siempre coherentes versiones de la tríada constitutiva del signo Representamen-Interpretante-Objeto en la semiótica de Charles Sanders Peirce. Para ello, Adalira y Patricia contaron con la asesoría de un experto colombiano en Peirce, lamentablemente fallecido hace poco en la flor de su edad, Roberto Perry.

En el primer artículo, Adalira utiliza una lectura inicial de algunos de esos difíciles textos sobre el signo en Peirce para describir el dispositivo didáctico que ella llama "juegos de interpretación", con el ejemplo de las ingeniosas interpretaciones que se les ocurren a los alumnos sobre el signo igual; en el segundo, utiliza una lectura un poco más fina de Peirce para seguir la cadena de construcciones semióticas de los niños y niñas en tres interpretaciones distintas de las fracciones. En el tercero, Adalira utiliza un aspecto todavía más avanzado de las subdivisiones peirceanas del signo, que lleva hasta la metáfora, para elaborar con ese microscopio teórico un análisis de la metáfora de "partir" para la invención y práctica de algoritmos no convencionales para las sumas y multiplicaciones.

En cada uno de estos tres artículos, Adalira nos introduce en los rudimentos de la semiótica de Peirce, en cuanto se requieren para seguir el razonamiento cuidadoso que desarrolla la autora con el fin precisar el sentido en el que utiliza el signo, el objeto, la interpretación, el intérprete y el interpretante en ese artículo.

Para los hablantes y lectores desprevenidos, la interpretación parece transparente, pues continuamente estamos interpretando signos y símbolos: sin esfuerzo aparente, estamos siempre asignándoles sentidos y significados a las emisiones simbólicas gestuales, orales y escritas de los demás seres humanos, y esperamos que ellos interpreten fácilmente las nuestras. Pareciera que simplemente se tratara de detectar con nuestros órganos de los sentidos un gesto, una emisión fónica o un grafismo, que sería el signo material externo, y asignarle una interpretación convencional que extraeríamos de nuestra memoria, que sería el significado mental interno. Pero los largos estudios y repetidos intentos de Peirce para mostrar la necesidad de introducir precisiones y distinciones en el signo mismo llamaron la atención de los estudiosos sobre la multiplicidad conceptual y la intrincada estructura de la comunicación humana en sus aspectos expresivos, mediacionales e interpretativos.

Peirce minimizó la distinción aparentemente obvia entre el signo externo como marca material sensible y el signo mental interno. Sin precisar bien la distinción entre signo externo e interno, propuso un modelo del signo como sistema de tres componentes en relación triádica, irreductible a las tres relaciones diádicas entre cada pareja de componentes. En contra del uso común, utilizó la mayor parte del tiempo la palabra "signo" para referirse a todo ese sistema triádico mental interno, pero durante un breve lapso de tiempo, la utilizó también para referirse a la vez a una parte de ese sistema. Pocas veces se refirió a la marca material externa por sí misma, a la que en ocasiones llamó "réplica" o "instancia" ("token") del signo mental como tipo ("type").

El primero de los tres componentes del signo mental triádico tuvo varios nombres en distintas épocas de Peirce, quien durante muchos años lo llamó también "signo", como lo hace Adalira en el primer artículo sobre juegos de interpretación. Pero luego Adalira se corrige en el artículo siguiente sobre una cadena colectiva para las fracciones (ver nota 7):

Varios autores llaman al representamen, en sí mismo, *signo* y consideran la tríada objeto, signo, interpretante. Esto presenta dificultades para algunos lectores porque en esta tríada el signo juega el papel de parte y todo al mismo tiempo. De hecho, en un cierto periodo, Peirce también se refiere a la tríada objeto, signo, interpretante.

Efectivamente, otros estudiosos han adoptado ese otro nombre también propuesto por el mismo Peirce: "representamen", utilizado por ella en ese segundo artículo; pero aun esa palabra le pareció a Peirce inapropiada al final de su vida, como se lo confiesa a Lady Welby en una de sus cartas en 1903, y no volvió a usarlo de 1904 a 1914 (ver Deledalle, G., 2000, *Charles S. Peirce's philosophy of sign: Essays in comparative semiotics*. Bloomington-Indianapolis: Indiana University Press).

El signo o representamen es, pues, el componente del signo mental triádico que se refiere a esa primera incitación a buscar sentidos y significados, con lo cual ya no es tan importante si se usa el mismo vocablo, sea "signo" o "representamen", para lo que llamábamos arriba "el signo material externo" captado por los sentidos, y también para el primer componente del signo mental interno. Una posible razón es que, para Peirce, no se trataba tanto de señalar la distinción entre el evento material externo y el evento neurológico interno, sino de precisar la función que se asigna al signo o representamen en la comunicación humana viva y actuante.

Este primer componente de la tríada parece coincidir con lo que a comienzos del siglo XX Ferdinand de Saussure llamó "el significante" ("signifiant"), que era también el primer componente de su modelo diádico del signo mental. En De Saussure, este primer componente se correlacionaba con el segundo componente de su modelo: "el significado" ("signifié"). Pero para Peirce, después de unos manuscritos iniciales ambiguos, el significado no era un componente de una díada, sino a veces era uno de los tres componentes de la tríada del signo: objeto-significado-interpretante, como lo cita Adalira en el segundo artículo sobre cadenas de significación para las fracciones: "Un signo está en lugar de algo ante la idea que él produce o modifica. O, es un vehículo que transmite a la mente algo desde fuera. Aquello en lugar de lo cual está se llama su objeto; lo que transmite, su significado; y la idea que genera, su interpretante" (CP 1.339).

Otras veces más bien parecía que, para Peirce, el significado se escindía en dos aspectos o componentes de su sistema triádico que se llamaron también de diversas maneras en las distintas épocas de Peirce, pero para los cuales se ha estabilizado ya la pareja "interpretante/objeto", que trataremos en seguida.

Un tercer sentido en el que Peirce utiliza a veces la palabra "significado" es para la transformación que sufre el signo triádico en las sucesivas interpretaciones, y un cuarto sentido es para el resultado de esa transformación, un nuevo signo más desarrollado que resulta del primero. Como lo muestra Adalira con distintas citas, estos dos últimos sentidos nos orientan hacia el interpretante del primer signo, y hacia el segundo signo producto de la interpretación del primero, en donde se ubica una jugada más en los juegos de interpretación que ella nos propone.

La distinción entre interpretante y objeto requiere, en primer lugar, distinguir el *interpretante*, como segundo componente del signo, del *intérprete*, como el agente del signo o sujeto que interpreta el signo y, en segundo lugar, distinguir el *objeto*, como tercer componente del signo, de un posible objeto externo al que refiera el signo, ya sea material o ideal, que puede o no existir.

No es fácil ir más allá en la distinción entre interpretante y objeto del signo en Peirce, quien a su vez distinguió al menos tres tipos de interpretante y dos de objeto, no siempre con la misma terminología. El segundo artículo de Adalira nos presenta una propuesta de entender el interpretante como la transformación misma o el proceso de transformación o como el signo resultante de ella o producto de la transformación, y escoge una de las tríadas peirceanas para distinguir tres tipos de interpretante. *Caveat lector*.

En el primer artículo, después de una ilustrativa comparación con los juegos de lenguaje de Wittgenstein, Adalira aprovecha la concreción de un ejemplo muy rico que parte de las interpretaciones iniciales que dan los estudiantes al signo igual ("=") en una oración aritmética abierta. Ella nos va guiando por esos caminos resbalosos para aclarar los sentidos que se requieren para analizar los juegos de interpretación, jugando con los niños y niñas delante de nosotros para que captemos la riqueza de la propuesta basada en el encadenamiento de los signos que describió Peirce. Este artículo bien merece varias lecturas cuidadosas para aprender a jugar los juegos de interpretación, ejercitarnos en distinguir y analizar sus ciclos, y practicar nosotros mismos algunos experimentos de enseñanza con tan prometedora herramienta.

En el segundo artículo, por medio de experimentos de enseñanza sobre el número de doses, treses y cuatros en una docena, sobre la subdivisión de áreas continuas en trozos de la misma área, y sobre la subdivisión de agrupaciones discretas en mitades, tercios y cuartos, se logró seguir una cadena de significación de signos que se describe finamente con las herramientas peirceanas, refinadas por Parmentier. Ojalá podamos también leer y releer este segundo artículo hasta aprender a jugar con los estudiantes estos nuevos juegos de interpretación que lleven a la construcción de cadenas de significación en la construcción de los números racionales.

En el tercero se utiliza una de las divisiones de los signos que propone Peirce, en íconos, índices y símbolos, y una subdivisión de los íconos en imágenes, diagramas y metáforas, para seguir con esta lupa teórica el desarrollo de otro experimento de enseñanza sobre distintas maneras de subdividir números para operar con ellos. En el curso del experimento, los estudiantes proponen la metáfora de "partir" un número cardinal en trozos, lo que les facilita la obtención de resultados sin necesidad de seguir los algoritmos usuales, inventando atajos y trucos para lograr sus propósitos o verificar sus conjeturas.

Es fascinante seguir el cuidadoso análisis del desarrollo de esta metáfora (relacionada con, pero distinta de la utilizada para las fracciones por los mismos niños, por Jere Confrey y por la propia Adalira), para apreciar su potencia como estrategia didáctica para la aritmética elemental. Este tercer artículo nos proporciona una nueva herramienta semiótica con la metáfora de "partir", que nos ayudará a estimular a nuestros estudiantes para que lleguen a la invención de distintos algoritmos y a su evaluación y comparación.

Así podremos ejercitar de manera productiva y amena el quinto proceso matemático que proponen los Estándares Básicos de Competencias: "razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos", como se explica ampliamente en los Lineamientos curriculares para esta área.

Emprendamos, pues, la lectura de estos tres exigentes y densos artículos, que nos enseñarán muchísimo, precisamente por su profundidad y exigencia.

Raymond Duval

Después de una tesis sobre las implicaciones filosóficas de la epistemología genética de Piaget (Universidad de París X), Raymond Duval trabajó en el IREM de Strasbourg (Institut de Recherche sur l'enseignement des Mathématiques) desde 1969 hasta 1995. En este instituto participó en varias investigaciones en aulas con alumnos de 11 a16 años. Sucesivamente, fue docente del I.U.F.M. (Institut de Formation des Maîtres) de la Academia de Lille, en el ámbito de la formación de futuros profesores de la escuela primaria. Al mismo tiempo, era director del laboratorio Cambios de los sistemas educativos de la Universidad ULCO (Boulogne, Francia). Sus investigaciones tenían como temas la comprensión de los textos, las prácticas argumentativas y matemática del razonamiento y los diversos tipos de visualización en matemática. Esto lo condujo a desarrollar un modelo de los procesos cognitivos subyacentes a la actividad del pensamiento matemático, expuesto en la obra *Sémiosis et pensée humaine* (1995), traducido al español. Sus trabajos han sido publicados en dos artículos en las revistas *Educational Studies in Mathematics*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, y en obras colectivas. Fue el fundador y director de la revista *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* desde 1988 hasta 1995. Recientemente publicó el primer volumen de la serie *Voir et enseigner les mathématiques autrement* (*Ver y enseñar la matemática de otra forma*).

Adalira Sáenz-Ludlow

Adalira Sáenz-Ludlow es Licenciada en Matemáticas y Física de la Universidad Pedagógica Nacional,UPN de Colombia. Es Doctora en Educación Matemática de la Universidad de Georgia (USA), con el trabajo Esquemas de los niños sobre fracciones: Una elaboración de sus secuencias numéricas. También es Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Estado de Nueva York. Actualmente es profesora de Matemáticas y Educación Matemática en la Universidad de Carolina del Norte, en Charlotte. Con el enfoque de la teoría del signo peirceano, sus intereses de investigación son los aspectos semióticos en la conceptualización de los objetos matemáticos y la interpretación intra-inter que se produce durante la comunicación de lo matemático en los salones de clase. Ha sido profesora invitada del Doctorado Interinstitucional en Educación de las universidades Distrital Francisco José de Caldas, del Valle y Pedagógica Nacional, vinculada a las líneas de investigación: Argumentación en lenguaje y matemáticas; Lenguaje y construcción de conocimiento matemático; Didáctica del lenguaje y las matemáticas.

También ha sido invitada por parte de la Universidad de los Andes de Bogotá. Actualmente es investigadora del Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas, GIIPLyM, aprobado por Colciencias y adscrito a la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Bruno D'Amore

Graduado en Matemática, en Filosofía y en Pedagogía, en la Universidad de Bolonia, Italia; posee una especialización en Matemática Elemental desde un punto de vista superior, otorgada también en Bolonia; cuenta con un Ph.D. en Mathematics Education, en la Universidad de Nitra, Eslovaquia, y un Ph.D. Honoris Causa, en Nicosia, Chipre. En la actualidad, es profesor y director de tesis en el Doctorado Interinstitucional en Educación, DIE, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá.

Carlos Eduardo Vasco Uribe

Licenciado en Filosofía y Letras de la Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá; cuenta con un M. Sc. en Física y un Ph.D. en Matemáticas de Saint Louis University, EE.UU. Es Licenciado en Teología del Hochshule Sankt-Georgen, Frankfurt am Main, Alemania; Ph.D. Honoris Causa, de la Universidad Nacional de Colombia. Es profesor y director de tesis en el Doctorado Interinstitucional en Educación, DIE, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá.

UD Editorial

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Este libro está destinado al estudio, investigación y preparación profesional tanto de los doctorandos de nuestro énfasis, como de los estudiosos de todo el mundo. Dados sus contenidos transcendentales y ricos, el libro podría incluso ser leído por estudiantes de maestría en Didáctica de la matemática, por los colegas profesores de otras universidades y profesores de todos los niveles escolares que deseen tener una mayor competencia en estos importantes temas. Este es el propósito de los autores de este complejo pero interesante e iluminador volumen. Un libro de base para quienes deseen dar los primeros pasos en el estudio de la semiótica en los procesos de comprensión de aquel maravilloso mundo que involucra la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Del Prólogo

9 789588 972312