UNA CADENA COLECTIVA DE SIGNIFICACIÓN EN LA CONCEPTUALIZACIÓN DE FRACCIONES

Adalira Sáenz-Ludlow

El método de enseñanza empleado en el experimento[28] al que se refiere este artículo propició interacciones entre estudiantes y entre ellos y el profesor, como procesos dinámicos de interpretación y representación. Tal interacción dinámica fundamentó el surgimiento de signos generados individual y colectivamente que llegaron a constituirse en una cadena de significación que medió la transición desde las conceptualizaciones de número natural que estos estudiantes de cuarto grado tenían hasta sus conceptualizaciones iniciales de fracciones en totalidades discretas. La meta del experimento de enseñanza era analizar la naturaleza de esta transición.

Justificación teórica

La justificación teórica considera las nociones de signo, semiosis y cadena de significación, lo mismo que la noción de número como composición de unidades; estas nociones juegan un papel importante en la interpretación de la información recogida. Las dos primeras secciones sintetizan las nociones de signo y semiosis en Peirce,[29] ya que constituyen la esencia de las cadenas de significación. La tercera sección da una ojeada al reconocimiento histórico de la importancia de las unidades en la conceptualización de números naturales.

Signos

La contribución de Peirce a la semiótica no estuvo en conceptualizar signos como díadas de la forma objeto-representación (significado-significante), sino como tríadas de la forma objeto-representamen-interpretante (Nöth, 1990). Peirce considera los signos como procesos generales de representación en los que el objeto, el representamen y el interpretante del signo juegan un papel importante (1903).

28 Esta investigación fue financiada por la National Science Foundation (RED 9155734 y RED 9596106) y la University of North Carolina en Charlotte. Los puntos de vista y las conclusiones que se expresan aquí son de la autora y no necesariamente de las instituciones.

29 Las citas que provienen de los escritos de Peirce se acogen a la forma estándar. CP 1.337 se refiere al volumen 1, parágrafo 337 de la obra *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, 1931-1966 (editada por Hartshorne, Weiss y Burks). MS 654.7, 1910 se refiere al manuscrito 654, página 7, datado en 1910, en la colección de *Harvard University* como se catalogó en el *Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce* (editado por Robin).

Los signos, en el sentido más amplio, son entidades que sirven como vehículos para disparar el pensamiento, facilitar la expresión del pensamiento y encarnar el pensamiento original y convencional. Como lo afirma Peirce: "Solo mediante hechos externos puede conocerse el pensamiento. El único pensamiento, entonces, del que es posible tener cognición es el pensamiento en signos. Pero un pensamiento del que no se pueda tener cognición no existe. Todo pensamiento, por consiguiente, debe acaecer en signos"[30] (Peirce, 1867, p. 49).

Peirce no solo da una definición de signo, sino una abundancia de definiciones que se complementan mutuamente enfatizando sus elementos constitutivos.

> Un signo está en lugar *de* algo *ante* la idea que él produce o modifica. O, es un *vehículo* que transmite a la mente algo desde fuera. Aquello en lugar de lo cual está se llama su *objeto*; lo que transmite, su *significado*; y la idea que genera, su *interpretante*.[31] (CP 1.339)

> Un *signo* está en lugar de algo, *su objeto*. Está en lugar de ese objeto, no en todos los sentidos, sino en referencia a cierto tipo de idea, que a veces he llamado el fundamento de la representación.[32] (CP 2.228; énfasis agregado)

> Por *Signo* quiero decir una cosa, sea la que sea, real o figurada, que es capaz de adoptar una forma sensorial, es aplicable a una cosa que no sea ella, … y que es capaz de *ser interpretado* en … lo que llamo su *Interpretante,* de manera tal que sobre su *Objeto* comunica algo que puede no haberse sabido antes. Por lo tanto, existe una relación triádica entre un *Signo*, un *Objeto* y un *Interpretante*.[33] (MS 654. 7) (Citado en Parmentier, 1985, énfasis agregado)

Según Peirce el *objeto* de un signo es la idea mental o el objeto físico *representado por* el signo, el *interpretante* de un signo es la idea producida en la mente del intérprete, y el *representamen* de un signo es el vehículo material o mental que se adecua para representar al objeto físico o mental (véase Figura 1). Es decir, objeto, representamen e interpretante están interconectados inherentemente en el signo.[34]

30 El texto original es: "Only by external facts can thought be known at all. The only thought, then, which can possibly be cognized is thought in signs. But thought, which cannot be cognized, does not exist. All thought therefore must be in signs". Agradezco a Roberto Perry, miembro del Centro de Sistemática Peirceana de Bogotá (Colombia), sus valiosas sugerencias en la traducción de las citas de la obra de Peirce. [N. T.]

31 El texto original es: "A sign stands for something to the idea that it produces or modifies. Or, it is a vehicle conveying into the mind something from without. That for which it stands is called its object; that which it conveys, its meaning; and the idea to which it gives rise, its interpretant". [N. T.]

32 El texto original es: "A sign stands for something, its object. It stands for that object, not in all respects, but in reference to a sort of idea, which I have sometimes called the ground of the representation". [N. T.]

33 El texto original es: "By a Sign I mean anything whatever, real or fictile which is capable of a sensible form, is applicable to something other than itself … and that is capable of being interpreted in … which I call its Interpretant as to communicate something that may have not been previously known about its Object. There is thus a triadic relation between any Sign, an Object, and an Interpretant". [N. T.]

34 Varios autores llaman al representamen, en sí mismo, signo y consideran la tríada objeto, signo, interpretante. Esto presenta dificultades para algunos lectores porque en esta tríada el signo juega el papel de parte y todo al mismo tiempo. De hecho, en un cierto periodo, Peirce también se refiere a la tríada objeto, signo, interpretante.

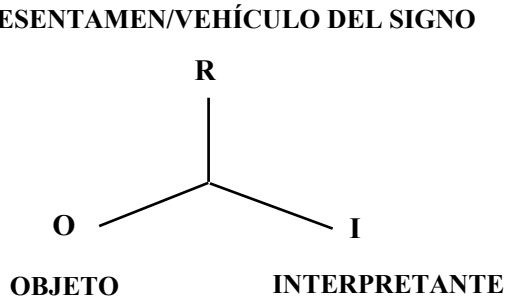


Figura 1. Signo triádico de Peirce

Objeto

Para Peirce, un objeto de un signo es cualquier cosa que llegue a ser objeto de pensamiento, por ejemplo, una cosa, un estado de cosas, un evento, un pensamiento, una relación, una cualidad, un hecho o cualquier cosa que tenga existencia real o la posibilidad de tenerla.

> Los Objetos –puesto que un Signo puede tener varios de ellos– pueden, cada uno, ser una cosa única, existente, conocida o una cosa que se crea que haya existido en el pasado o se espere que exista en el futuro, o una colección de tales cosas, o una cualidad conocida, o relación o hecho conocidos.[35] (CP 2.232)

Es importante observar que en la semiótica, las palabras *objeto* y *cosa* no son intercambiables. Los objetos son lo que las cosas llegan a ser tan pronto como son experimentadas; es decir, las cosas llegan a ser objetos tan pronto han cobrado existencia en la experiencia. Los objetos siempre incluyen una relación con un observador o un organismo que los experimenta (Deely, 1990).

Representamen

Un representamen se adecua para representar al objeto de distintas maneras. Primero, el representamen se puede tomar como el objeto, debido a una cualidad particular que ambos comparten y, por tanto, en ese aspecto son intercambiables (CP 1.558, 1867; CP 3.362); Peirce llama *icónica* a esta relación. Segundo, la posición espacial, temporal o contextual de un representamen puede hacer que se adecue para *representar* algún objeto en un campo experiencial; Peirce llama *indéxica* a esta relación. Tercero, la relación entre representamen y objeto puede trascender tanto el ámbito de la cualidad común

35 El texto original es: "The Objects —for a Sign may have a number of them— may each be a single known existing thing or thing believed formerly to have existed or expected to exist, or a collection of such things, or a known quality or relation or fact". [N.T.]

como el del contexto común. Peirce llama *simbólica* a esta relación; en esta relación representamen y objeto están relacionados *únicamente* debido a que el interpretante los incluye como relacionados. En resumen, el representamen no solo juega un papel esencial en la naturaleza expresiva de un signo, sino que también satisface una relación particular con el objeto al que representa y con el interpretante que genera.

Interpretante

No se debería confundir un interpretante con el intérprete. El interpretante no es resultado ni producto del signo, es aquello en lo que un signo se convierte en la mente del intérprete; encarna la actividad cognitiva del intérprete. En contraste, el intérprete es un agente personal que toma parte en el proceso de interpretación. Es decir, el intérprete no es la fuente ni el resultado de la semiosis, sino más bien su lugar.

> Un *signo* se dirige a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizá un signo más desarrollado. Al signo creado lo llamo el *Interpretante* del primer signo.[36] (CP 2. 228; énfasis añadido).

Los interpretantes juegan un papel importante en la semiosis. En primer lugar, existen en aquellos puntos de la semiosis en donde los objetos son transformados en signos o los signos son transformados en otros signos. En segundo lugar, los interpretantes definen puntos de innovación en la semiosis al nivel de la representación objetiva y la evolución de la comprensión (Deely, 1990). Por tanto, los interpretantes juegan un papel importante en la cognición no solo de manera retrospectiva (como huellas de nuevos interpretantes), sino también de manera prospectiva (como la fuente de interpretantes más sofisticados).

Semiosis

Para Peirce, el signo tiene naturaleza triádica y relaciones diádicas inherentes entre sus tres elementos. Son las relaciones entre objeto y representamen; representamen e interpretante y objeto e interpretante. Sin embargo, la naturaleza triádica del signo no se puede partir en estas tres relaciones diádicas separadas puesto que, cuando se enfoca la relación diádica entre objeto y representamen, las otras dos relaciones diádicas (representamen e interpretante, objeto e interpretante) se activan también de una manera sinérgica, aun cuando no lleguen a la mente del intérprete todas al mismo tiempo. Peirce (1906a) llama semiosis o actividad semiótica a esta relación trirrelativa.

36 El texto original es: "A *sign* addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the *Interpretant* of the first sign". [N. T.]

La semiosis es un proceso triádico en el que un *objeto* genera un *representamen*, el *representamen* genera un *interpretante*, y a su vez este *interpretante* genera un nuevo *representamen* que representa a un *objeto* modificado que determina un *interpretante más sofisticado*, y de esa manera continúa la espiral de signos. Así que, la semiosis es un proceso en el cual se genera una serie potencialmente ilimitada de interpretantes, representámenes y objetos. Es decir, en la semiosis un signo tiene efecto cognitivo sobre su intérprete (Colapietro, 1993, p. 178) en la medida en que el intérprete se convierta en agente de interpretación y representación.

La semiosis es inherente a la noción triádica de signo. El representamen (vehículo del signo) media entre objeto e interpretante. Esta mediación es un proceso continuado de "representar" que relaciona a objeto e interpretante a través del representamen. Mertz (1985) y Merrell (1995) sostienen que la relación "estar en lugar de" de Peirce es una relación dinámica y mediadora a través de la cual un signo llega a ser un nuevo signo. En este proceso, cada nuevo signo contiene un signo anterior como huella. También sostienen que la relación "estar en lugar de" describe una conexión entre el *representamen*, el *objeto* y el *interpretante*. Es decir, el representamen representa a su objeto, y el interpretante representa a su representamen y a su objeto, mientras que al mismo tiempo, el interpretante está determinado por su representamen y su objeto. Esto quiere decir que los tres elementos del signo sostienen una interrelación dialéctica.

Deely (1994) y Parmentier (1985) también explican la relación "estar en lugar de" de Peirce. Por una parte, Deely considera una tal relación como dialéctica. Él considera el interpretante (I) como pasivo (i.e., determinado por) con respecto al representamen (R) mientras que el representamen (R) es también pasivo con respecto a (i.e., determinado por) su objeto (O). Sin embargo, el interpretante (I) en últimas llega a ser activo con respecto a, y representando tanto al objeto (O) como al representamen (R). Es decir, el representamen (R) y el interpretante (I) representan al *mismo* objeto, aun cuando en diferentes grados de especificidad. Por otra parte, Parmentier considera la dinámica del signo en términos de vectores de determinación y representación (véase Figura 2). En esta figura, los vectores de sentidos opuestos simbolizan la dialéctica entre determinación y representación. El vector de determinación entre O e I es la suma de los vectores de determinación entre O y R, y entre R e I; y el vector de representación entre I y O es la suma de los vectores de representación entre I y R, y entre R y O.

> El encaje de los vectores de representación y determinación implica que los tres elementos que están en la relación de signo nunca son permanentemente objeto, representamen e interpretante, sino que más bien cada uno cambia de papel a medida que se realizan nuevas determinaciones y representaciones. (Parmentier, 1985, pp. 27-29)

Entonces, cuando uno se enfoca en uno de los elementos del signo (objeto, interpretante o representamen), los otros dos están simultáneamente presentes y sinérgicamente activos. En la semiosis, el objeto, el representamen y el interpretante nunca son entidades estáticas ni aisladas. Por el contrario, son entidades interrelacionadas, cambiantes, que llegan a existir como resultado de procesos de interpretación y representación del intérprete.

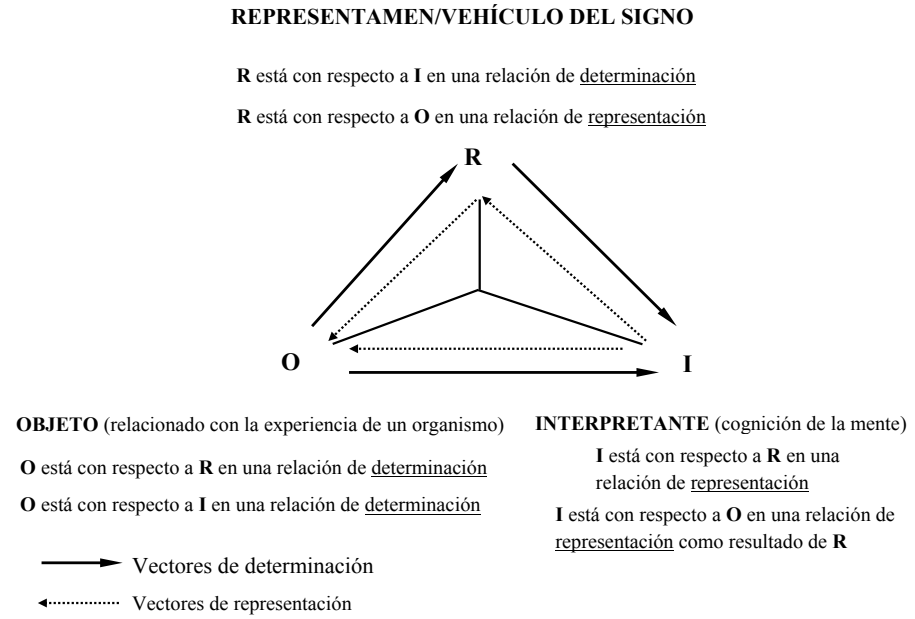


Figura 2. Relaciones dialécticas entre los elementos del signo (adaptado de Parmentier, 1985)

Tan pronto como el objeto inicial determina un representamen y un interpretante, este último determina un nuevo representamen que representa a un nuevo objeto que determina un interpretante nuevo y más sofisticado (véase Figura 3). Cada nuevo interpretante representa al objeto inicial en el mismo aspecto y con el mismo significado como lo hiciera el primer representamen, aunque es más sofisticado y está determinado en más alto grado. La secuencia de tríadas, a saber, objeto-representamen-interpretante (O_1, R_1, I_1), representamen-objeto-interpretante (R_2, O_2, I_2), y así sucesivamente, está en el corazón mismo de la semiosis.

El poder del interpretante para crear un objeto más descontextualizado es lo que Peirce llama "abstracción hipostática". Este poder es la clave de la capacidad del interpretante para cumplir con su carga original de representar al mismo objeto que representa el primer representamen y con el mismo significado que este le asigna. De esta manera, la tríada del signo de Peirce es dinámica y está

virtualmente en movimiento perpetuo involucrando procesos abiertos de representación y determinación de los cuales surgen cadenas de significación. En este proceso, los signos se transforman en pensamiento cuando ellos mismos se desvanecen, siendo totalmente transparentes a las relaciones de determinación y representación mediadas por ellos.

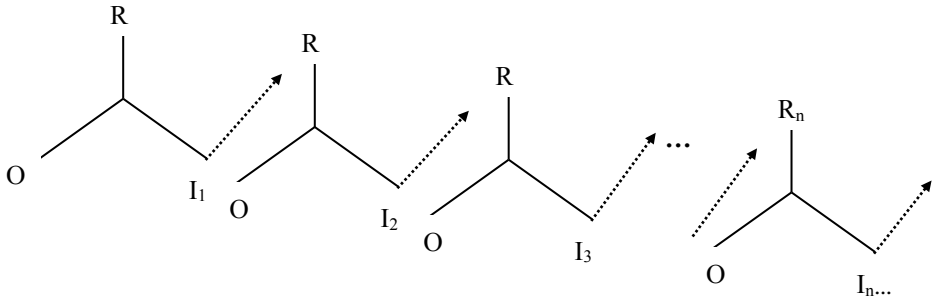


Figura 3. Cadena de significación constituida en un proceso de semiosis

Es decir, las cadenas de significación se manifiestan en la continuidad de los procesos de determinación y representación por parte del intérprete (i.e., el agente del signo). Cuando estos procesos del intérprete son compartidos con los miembros de un grupo contribuyen a los procesos de determinación y representación de los otros individuos y del grupo como colectividad. A través de la semiosis, llegan a existir cadenas de significación y en este proceso los interpretantes presentes anticipan interpretantes futuros y más sofisticados que inherentemente contienen como huellas a interpretantes previos. En otras palabras, una cadena de significación es la incrustación de signos dentro de nuevos y más sofisticados signos que para su funcionamiento dependen de signos previos más simples que se mantienen como huellas.

Número en términos de unidades

La idea de número natural como "una multitud de unidades compuestas" proviene del Libro VII de los *Elementos* (Heath, 1956, p. 277). También el matemático Stevin (1585) sostuvo que "la parte es del 'mismo material' que el todo. La unidad es una parte de una multitud de unidades. Por tanto, la unidad es del 'mismo material' que la multitud de unidades; pero el material de una multitud de unidades es el número. Por tanto, el material de una unidad es el número" (como lo cita Moreno-Armella y Waldegg, 2000, p. 187). Desde una perspectiva psicológica, McLellan y Dewey (1908) hicieron un análisis de la idea de unidad y de su aplicación a métodos de enseñanza de la aritmética. Ellos observaron que "solo cuando la unidad se trata no como una cosa, sino como un

patrón para los valores numéricos de medición, la adición y la multiplicación, la división y las fracciones se correlacionan de manera racional" (p. 100).

Newton y Euler introdujeron la noción de número como razón. Según Newton, "número es la razón abstracta de una cantidad a otra de la misma clase" (como es citado en McLellan y Dewey, 1908, p. 72). De modo similar, Euler definió número como "la razón de una cantidad a otra cantidad que se toma como una unidad" (como lo citan McLellan y Dewey, 1908, p. 72). De la misma manera, McLellan y Dewey expresaron la idea de número como:

> La expresión más simple de cantidad en términos numéricos que incluye dos componentes: 1) una unidad patrón, una unidad de referencia —esta es de suyo una magnitud necesariamente de la misma clase que la cantidad medida; y 2) un valor numérico —que expresa *cuántas* unidades patrón hacen o construyen la cantidad que se va a medir… El número es el producto de la mera repetición de una unidad de medición; simplemente indica *cuántas* hay; es puramente abstracto, denota la serie de actos mediante los cuales la mente construye partes definidas en un todo *unificado* y *definido*. (1908, p. 69)

Casi un siglo más tarde, Davydov (1990/1972) definió número de una manera parecida. Lo describió como un caso particular de la representación de una relación general de cantidades, en la que una de ellas se toma como una medida y se está calculando la otra. "Un número se obtiene mediante la fórmula general $A/C=N$, donde *N* es un número particular, *A* es cualquier objeto representado como una cantidad, y *C* es cualquier medida. Claramente, al cambiar la medida se puede cambiar el número que le corresponde al mismo objeto" (p. 362).

La construcción mental de unidades como objetos conceptuales y su importancia en la conceptualización de números naturales han sido estudiadas por von Glasersfeld (1981), von Glasersfeld y Richards (1983), Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb (1983). En la conceptualización de fracciones, también se ha reconocido la importancia de la unidad fraccionaria (Behr, Khoury, Harel, Post y Lesh, 1997; Bergeron y Herscovics, 1987; Hunting, 1980; Hunting, Davis y Pearn, 1996; Kieren, 1988; Kieren y Nelson, 1981; Lamon, 1996; Sáenz-Ludlow, 1994, 1995; Streefland, 1991). Sin embargo, se ha estudiado poco la transición que los estudiantes hacen desde las unidades de números naturales a las unidades de números fraccionarios.

El propósito de este artículo es presentar un análisis de una cadena de significación obtenida colectivamente por un grupo de estudiantes de cuarto grado que participaron en un experimento de enseñanza cuya duración fue de un año. En sus procesos de construcción, expresión e interpretación, los estudiantes trascendieron su conocimiento sobre número natural y construyeron sus conceptualizaciones iniciales de las fracciones en totalidades discretas. La semiótica peirceana contribuye a la explicación de la apropiación de signos aritméticos y la producción de signos idiosincráticos que los estudiantes hacen

en sus procesos de conceptualizar el número. Esta teoría de signos explica las cadenas de significación (creación de signos, uso de signos e interpretación de signos) que mediaron las reconceptualizaciones de los números naturales y las conceptualizaciones iniciales de los números fraccionarios por parte de los estudiantes de cuarto grado.

Metodología

Experimento de enseñanza

La metodología de experimento de enseñanza, tal como fue conceptualizada inicialmente por Steffe (1983) y Cobb y Steffe (1983), abarca la interacción social entre estudiante e investigador, aunque solamente se enfoca en el análisis de la actividad aritmética del estudiante. Cuando esta metodología se extiende al aula y cuando el factor social se considera junto con la actividad aritmética de los estudiantes (Cobb y Yackel, 1995), su análisis del razonamiento ya no se enfoca en la especificación de comportamientos cognitivos sino en la caracterización de la calidad de sus experiencias aritméticas (Cobb, 2000a), tomando en cuenta los aspectos sociales y culturales de su actividad (Bauersfeld, 1995; Steffe y Thompson, 2000; Van Oers, 2001). La experiencia matemática de los estudiantes es inseparable de sus propios patrones de uso de los signos y de creación de los signos (Ernest, 2002; Godino y Batanero, 2003; O'Halloran, 2003; Sáenz-Ludlow, 1998; Sáenz-Ludlow y Walgamuth, 2001).

En esta metodología (sea que el profesor/investigador interactúe con un estudiante, un grupo pequeño o todo el grupo), hacer hipótesis sobre las maneras en que comprenden, sobre sus acciones matemáticas y sobre sus patrones de uso de signos y de creación de signos debería constituir un proceso progresivo y continuado. La esencia de la metodología es facilitar e impulsar la interacción entre estudiante y profesor y entre estudiantes, y en consecuencia, proporcionar muchas oportunidades para que construyan, simbolicen y expliquen sus estrategias numéricas.

Siguiendo una metodología de experimento de enseñanza similar a la de Cobb y sus colegas, se condujo un experimento de enseñanza de un año con un grupo de estudiantes de cuarto grado. En cada episodio de enseñanza se prestó especial atención, por una parte, al cambio operado en los estudiantes de "un reflejo simbólico" (reacción pasiva a los signos) a una "iniciativa simbólica" (creación dinámica de signos y uso de signos) y, por otra parte, a la mediación de signos idiosincráticos y convencionales en su reconceptualización de número, de palabras numéricas, de la estructura del valor posicional de los numerales, de las operaciones con números y sobre la conceptualización de fracciones.

El experimento de enseñanza en que participaron los estudiantes consistió en episodios diarios de enseñanza en el aula y en entrevistas semanales a pequeños grupos. La profesora de cuarto grado y la investigadora enseñaron en equipo la clase de aritmética, y la investigadora condujo las entrevistas semanales a un grupo pequeño. Las interacciones dialógicas entre profesora y estudiante y entre estudiantes caracterizaron cada episodio de enseñanza. En cada episodio de enseñanza, la profesora/investigadora hizo un esfuerzo para "ver" las estrategias de solución de los estudiantes desde las perspectivas de ellos. Este esfuerzo le permitió a la profesora/investigadora formular preguntas que pudieran ser interpretadas por el grupo, de acuerdo con sus propias experiencias numéricas, y estimularlos a formular preguntas por sí mismos y plantearlas a los demás.

Esta estrategia pedagógica está sustentada por la afirmación de Vygotsky (1986/1934) según la cual "el marco del niño es puramente situacional, con la palabra atada a algo concreto, en tanto que el marco del adulto es conceptual" (p. 133). En consecuencia, para comprender las conceptualizaciones de las tareas aritméticas de los estudiantes, la profesora tuvo que interpretar en paralelo tanto sus propias acciones aritméticas como las de los estudiantes para "ver" la solución de ellos desde la perspectiva de ellos, y para mantener una interacción dialógica significativa.

Como parte del proyecto de investigación, la profesora colaboradora participó en un campo de verano intenso para profesores y niños en el que se usó la metodología de experimento de enseñanza. Durante el año lectivo, esa profesora también participó en cursos enseñados por la investigadora, para progresar en su comprensión del fundamento socioconstructivista de la metodología. Diariamente, la investigadora y la profesora se comprometieron en conversaciones sobre la naturaleza y el propósito de las tareas aritméticas que se propondrían a los estudiantes, las estrategias numéricas de los niños, el uso de signos y la creación de signos, y el papel mediador de aquellos signos en sus conceptualizaciones.

Estudiantes

La escuela elemental que colaboró con el experimento de enseñanza era considerada de bajo rendimiento académico y la mayoría de los estudiantes provenía de familias de estatus socioeconómico bajo. Los estudiantes de cuarto grado que participaron (seis niñas y ocho niños) estaban retrasados en su desarrollo numérico, según los lineamientos curriculares de tercer grado. Además, también quedaron clasificados en un nivel muy bajo en la prueba estandarizada que tomaron en tercer grado.

Expectativas para la actividad matemática

La enseñanza en aritmética que estos estudiantes recibieron en los años anteriores se podría caracterizar como tradicional en el sentido de que se esperaba que realizaran cálculos aritméticos usando solamente los algoritmos convencionales explicados y modelados por el profesor. Al comienzo del año escolar, tendían a esperar instrucciones específicas o a buscar la aprobación de la profesora, pero cuando ella no les daba tales instrucciones, comenzaron a confiar en su propio razonamiento. Una práctica común en el experimento de enseñanza fue la presentación oral y escrita de tareas aritméticas que se les asignaban para resolver individualmente. Después de darles un tiempo adecuado, la profesora procedía a la discusión con todo el grupo; ellos explicaban y justificaban sus estrategias de solución y cómo habían llegado a sus respuestas. Se esperaba que cada uno escuchara con atención la solución de otros y expresara su acuerdo o desacuerdo junto con una justificación.

Rápidamente, los estudiantes comenzaron a asumir la responsabilidad de su propio pensamiento, y las normas sociales y sociomatemáticas del aula (Yackel y Cobb, 1996) comenzaron a cambiar. La interacción dialógica en el aula mejoró a medida que los estudiantes sentían que sus contribuciones se tenían en cuenta y sus soluciones eran aceptadas y validadas por los otros miembros del grupo. La satisfacción con el nuevo ambiente de enseñanza-aprendizaje en el aula se manifestó en la voluntad de proponer al grupo problemas aritméticos generados por ellos mismos, de interpretar las estrategias de solución de otros, e incluso de imitar algunas de esas estrategias.

Recolección de información

Para analizar la evolución de la actividad aritmética en el aula, las estrategias de solución de los estudiantes y la creación y el uso de signos, las clases fueron grabadas en video y un observador tomó a diario notas de campo. También se recogieron las hojas de tarea, los papeles de borrador de los estudiantes y copias de las transparencias usadas por ellos. Toda la información se recopiló en orden cronológico.

Tareas de enseñanza

Se generaron tareas especiales para el experimento de enseñanza, que sufrieron cambios de acuerdo con las necesidades aritméticas y cognitivas de los estudiantes. Se generaron también nuevas tareas como resultado de las interacciones del grupo en los episodios de enseñanza. En general, la generación de tareas y la actividad de investigación fueron evolucionando conjuntamente de una manera sinérgica. Este enfoque no fue diferente del recomendado por el enfoque didáctico de Freudenthal (Freudenthal, 1991; Gravemeijer, 1994).

El principio que guió la preparación de tareas consistió en facilitar la conceptualización amplia de los números naturales en términos de unidades de diez y otras unidades. Las tareas pretendían ayudar a los estudiantes a: 1) construir una comprensión más profunda del valor posicional y de las palabras numéricas; 2) reconceptualizar los algoritmos convencionales que ya conocían y construir, desde la perspectiva de sus propias estrategias numéricas, aquellos que no conocían todavía, y 3) conceptualizar los números fraccionarios.

Análisis

Conceptualización de los números naturales como multiplicidad de unidades

De conformidad con el currículo de aritmética de la escuela en donde se llevó a cabo el experimento de enseñanza, a los estudiantes de tercer grado se les enseñaron los algoritmos usuales con números de dos dígitos, y se esperaba que los de cuarto grado sumaran, restaran, multiplicaran y dividieran con números de tres dígitos. Con esta expectativa en mente, decidimos indagar sobre la comprensión que estos estudiantes tenían de número y de las operaciones con números. Para lograr este fin, diseñamos tareas aritméticas que incluían contar hacia adelante y hacia atrás, comenzando en cualquier número, tareas que presentaban números en configuraciones geométricas para evitar la presentación convencional de los números en forma vertical y horizontal, y diferentes tipos de tareas con dinero.

Al comienzo del año escolar, los estudiantes tuvieron dificultad con la secuencia de palabras numéricas más allá de 99; la mayoría podía sumar y restar mediante los algoritmos usuales, pero difícilmente daban sentido a los números más allá de 150. Además, tenían una comprensión rudimentaria del valor posicional. Por ejemplo, podían escribir numerales correspondientes a palabras numéricas como *doscientos treinta y cinco,* pero tenían dificultad para escribir los numerales correspondientes a palabras numéricas como *doscientos seis,* ya que la posición de las unidades de diez está silenciosamente preservada en la palabra numérica; por tanto, escribían 2006 en vez de 206.

Además, cuando se les pedía encontrar el número de decenas en números como *doscientos cuarenta y seis,* respondían 4 sin tener en cuenta el número de decenas en las unidades de una centena. Algunos, sin embargo, podían contar de 5 en 5 y de 10 en 10, y tenían un buen sentido de los números anteriores a 500. Estos estudiantes aportaron a la clase maneras de hablar y pensar sobre los números que contribuyeron al surgimiento de una metáfora colectiva que medió la descomposición de números en unidades. El surgimiento de esta metáfora colectiva y los consiguientes diagramas numéricos están documentados en otro artículo (Sáenz-Ludlow, 2004).

Al comienzo del año escolar se asignaron tareas como encontrar el número de doses, treses, cuatros y seises en 12, usando diferentes contextos (una docena de huevos, una docena de rosquillas, una docena de barras de dulce, doce meses en un año, doce pulgadas en un pie, doce horas en un reloj de manecillas, y así sucesivamente).

En todos los diálogos, *P* representa a la profesora y una letra mayúscula seguida de una minúscula (excepto *Ee*) se usan como abreviatura del pseudónimo de un estudiante, y aparecerán en letra cursiva. *Ee* representa a estudiantes que respondieron simultáneamente. Las flechas en los diagramas numéricos indican el sentido en el que los estudiantes los construyeron. Al hacer conteo doble, los estudiantes ponen en correspondencia uno a uno la sucesión que mantiene los registros de iteración de una unidad particular (*sucesión de iteración*) con la sucesión que mantiene los registros del número de veces que se produce la iteración (*sucesión de conteo*).

Episodio #1

1	*P*:	Encuentre el número de doses en 12.
2	*Jp*:	1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-10, 11-12 [golpea cada dedo dos veces y muestra uno a uno seis dedos].
3	*Li:*	[Levanta uno por uno seis dedos para llevar la cuenta de su conteo de dos en dos] 2-4-6-8-10-12; 6.
4	*Ri:*	6. 2-4-6-8, y 4 más.
5	*P:*	¿*Ra*?
6	*Ra*	2 es 1, 4 es 2, 6 es 3, 8 es 4, 10 es 5, 12 es 6.

Al contar el número de doses en 12, los estudiantes mostraron un conteo doble implícito y explícito de acuerdo con su conceptualización de 2 como una unidad compuesta o como una unidad iterable (Steffe, 1983). Por ejemplo, el concepto que *Jp* tenía de 2 no era el de una unidad compuesta, sino más bien el de una unidad iterable de dos unos, ya que él golpeó cada dedo dos veces. Es decir, el doble golpe de cada dedo era una indicación de la iterabilidad de su unidad de 2 mientras mantenía los registros de conteo en el dedo con el que golpeaba (línea 2). En la línea 3, *Li* usó uno a uno sus dedos para mantener el registro de su conteo de 2 en 2, dejándonos con una indicación de su conceptualización de dos como una unidad compuesta. Su sucesión de iteración fue explícita, mientras que su sucesión de conteo fue implícita en los movimientos de los dedos.

El conteo de *Ri* (línea 4), aunque sofisticado, fue menos explícito, ya que la sucesión de conteo fue totalmente implícita. Usó primero una sucesión numérica para mantener los registros de conteo de 2 en 2 hasta 8, y luego usó su conocimiento de 4 como resultado de iterar dos doses para llevar la cuenta mentalmente de todos los doses en 12. *Ra* (línea 6) fue quien contó de mane-

ra más explícita, ya que superpuso, en una correspondencia uno a uno, las sucesiones de iteración y de conteo. Las maneras de contar de *Li*, de *Ra* y de *Ri* indican que, para ellos, 2 era ya una unidad compuesta con la cual podían operar directamente; en contraste, para *Jp*, 2 era solamente una unidad iterable que requería ser construida cada vez para operar con ella.

Los estudiantes hicieron sus propias interpretaciones de la tarea (objeto) y expresaron su comprensión (interpretantes) a través del conteo doble (representamen simbólico) y movimientos de dedos (representamen indéxico). Es decir, la actividad de conteo fue un proceso triádico de tipo sígnico.

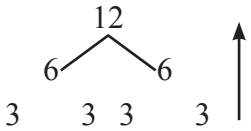
Los estudiantes también recurrieron a diagramas numéricos, además de su conteo doble implícito o explícito. El diagrama en el episodio que sigue fue interpretado por uno de ellos como algo que sugiere la relación inversa entre los procesos de iterar una unidad y la plausibilidad de descomponer la unidad resultante, más grande, en sus unidades constitutivas.

Una instancia del uso de un diagrama por parte del grupo para esquematizar relaciones numéricas tuvo lugar el día después del episodio que se presentó antes. La profesora les pidió que distribuyeran mentalmente 12 rosquillas en cuatro grupos iguales y calcularan el número de rosquillas en cada grupo.

Episodio #2

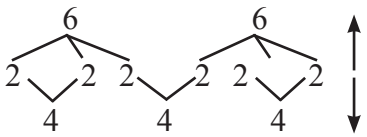
1 *Li:* 3 grupos, quiero decir 4 grupos de 3. Un grupo de 3 aquí, otro 3 aquí [gesticula en el aire]. 3, 3, y 3 es 9, y 3 más es 12.

2 *Pr*: Toma dos grupos de 3; 3 y 3 es 6; y otros 2 grupos de 3 es 6; 6 y 6 es 12. [Pasa al tablero y hace el siguiente diagrama de abajo hacia arriba como lo indica la flecha].



3 *St*: [Interpretando el diagrama de *Pr*] Sí, podrías hacer esto si supieras que 6 y 6 es 12, y 3 y 3 es 6.

4 *Co*: Toma 2, 2, 2 y haces 6; toma otros 2, 2, 2 y haces otro 6. Luego, toma 2, 2 y haces un 4; 2, 2 otro 4; 2, 2 otro 4. [Pasa al tablero y hace el siguiente diagrama en los sentidos indicados por las dos flechas].



5 *P:* Pero, no dije tres grupos iguales, dije cuatro grupos iguales. ¡Buena explicación para una pregunta diferente, Co!

Todos los estudiantes del diálogo anterior parecen poder componer a 12 mediante iteración. *Li* y *Pr* anticiparon a 3 como la unidad apropiada de iteración y compusieron a 12 iterando a 3 cuatro veces o iterando a 3 dos veces para hacer un 6 y luego 6 dos veces. *St* interpreta la solución de *Pr* e inmediatamente señala que la unidad de iteración se debe anticipar para descomponer a 12 en cuatro grupos.

Cuando la unidad apropiada de iteración no ha sido anticipada, otras unidades se podrían iterar para componer a 12 aunque el objetivo de tener cuatro grupos no se cumpla. *Co*, por ejemplo, iteró tres doses para componer a 6 y luego iteró dos doses para componer a 4 y como resultado final descompuso a 12 en tres grupos iguales de 4. Sin embargo, no pudo ver que tener tres grupos iguales de 4 era diferente de tener cuatro grupos iguales de 3. Al parecer, no podía darse cuenta de la diferencia entre la cardinalidad de las unidades de iteración y el número de iteraciones.

El episodio anterior es significativo por tres razones. Primero, ilustra la capacidad de los estudiantes para convertir representámenes de un tipo (expresiones lingüísticas aritméticas) en representámenes de otro tipo (diagramas numéricos) y su capacidad de interpretar las soluciones de otros. Segundo, ilustra la dificultad que tienen algunos para diferenciar el número de grupos y la cardinalidad de cada grupo. Tal diferenciación es necesaria para conceptualizar cuantificaciones fraccionarias en totalidades discretas, como se mostrará en la siguiente sección. Tercero, ilustra acciones inversas de los estudiantes cuando iteran una unidad para componer un número y descomponen un número en unidades constitutivas de iteración.

La iteración se puede hacer directamente una vez conocida la unidad de iteración; sin embargo, cuando se distribuye igualmente una cantidad, se tiene que anticipar la unidad apropiada de iteración. Esto es para decir que cuando los estudiantes son capaces de iterar, son capaces de multiplicar; sin embargo, solo cuando son capaces de descomponer un número en unidades de la misma cardinalidad, son capaces de distribuir (dividir) un número dado de objetos. En otras palabras, para distribuir un número de objetos dados, los estudiantes deben poder anticipar la unidad de iteración y diferenciar entre la cardinalidad de la unidad de iteración y el número de iteraciones.

En el siguiente episodio, los estudiantes indican su capacidad de descomponer e iterar unidades mediante un conteo doble intencionado o un razonamiento proporcional simple para encontrar el número de cuatros y doses en 24 sabiendo el número de cuatros que hay en 12. También encontraron el número de treses que hay en 36 sabiendo el número de seises que hay en 36.

Episodio #3

1 *P:* Por la clase anterior sabemos el número de unos, doses, treses, cuatros, seises y doces que hay en 12. Hoy, veamos si podemos encontrar el número de cuatros que hay en 24. [Escribe en el tablero $24 \div 4$].

2 *Ho:* Hay tres cuatros en 12, luego seis cuatros en 24.

3 *An*: Dos cuatros en 8. Hay tres ochos en 24. Luego hay seis cuatros en 24.

4 *P:* [Escribe en el tablero $24 \div 4 = 6$ y $6 \times 4 = 24$). Si tenemos seis cuatros en 24, ¿cuántos doses hay en 24? ¿Se tienen más doses o más cuatros en 24?

5 *Ee:* Más doses.

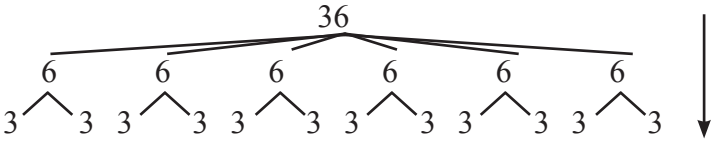
6 *St:* Más doses porque vi tres ochos en 24. Conté de dos en dos y hay cuatro doses en 8. Cuatro doses en 8 y agregué un 8 más y eso es cuatro doses más, más cuatro doses más agregados a los ocho [ella quiere decir ocho doses] eso es doce doses.

7 *P:* Muy bien. Sabemos que hay seis seises en 36 [escribe en el tablero $6 \times 6 = 36$ y $36 \div 6 = 6$]. ¿Puedes encontrar cuántos treses hay en 36?

8 *Ra:* El doble.

9 *P:* *¿Por qué?*

10 *Pr:* Partes 6 por la mitad y tienes 3 y 3 [va al tablero y continúa]. Esto fue lo que hice. Sabía que seis seises es 36. Solo conté dos treses por cada 6; 2, 4, 6, 8, 10, 12. Tan solo tomé a 6 y lo partí en mitades [hace el siguiente diagrama en el tablero].



Hay dos treses allí [señala a los primeros dos treses y continúa señalando a las siguientes parejas de treses] cuatro treses, seis treses, ocho treses, diez treses, doce treses.

11 *P:* [Escribe en el tablero $12 \times 3 = 36$ y $36 \div 3 = 12$].

El diálogo anterior ilustra la utilidad del conteo doble (sea implícito o explícito) para iterar y descomponer un número; también ilustra la representación de la iteración y la descomposición a través de diagramas numéricos. La iteración y la descomposición también parecen estar en la raíz del razonamiento proporcional implícito de *Ho y Ra*. La respuesta de *Ho* "hay tres cuatros en 12, luego seis cuatros en 24" parece ser una inferencia basada en la relación entre 12 y 24. Su explicación indica que él sabe que hay dos doces en 24 y tres cuatros en 12; en consecuencia, el número de cuatros que hay en 24 es el doble del número de cuatros que hay en 12. Asimismo, la respuesta sucinta de *Ra "*el doble" parece ser el resultado de una inferencia del mismo tipo: hay dos treses en 6 y seis seises en 36, entonces el número de treses que hay en 36 es el doble del número de seises que hay en 36.

En contraste, *E* encuentra el número de doses que hay en 24, no como una inferencia del número de cuatros que hay en 24, sino a partir de "ver" a 24 compuesto de tres unidades de 8 y cada 8 compuesto de cuatro unidades de 2; entonces ella iteró cuatro unidades de 2 tres veces. *Pr* también usa conteo

doble para iterar el número de treses que hay en 36; sin embargo, él utiliza el hecho dado de que hay seis seises en 36 y se enfoca en el número de iteraciones de la unidad de 3 para componer una unidad de 6 usando la *sucesión de conteo* 2-4-6-8-10-12, mientras que mantenía implícita la *sucesión de iteración* (3-6/9-12/15-18/21-24/27-30/33-36). Después complementó su conteo doble implícito con un diagrama numérico.

El diálogo anterior ilustra la conceptualización hecha por los estudiantes sobre números particulares en términos de diferentes unidades: 24 como seis cuatros, 24 como doce doses, 24 como tres ochos, 36 como seis seises, y 36 como doce treses. En clases siguientes se les pidió hablar, de tantas maneras como pudieran, sobre 36, 48, 60, 72 y otros números. Por ejemplo, 36 fue conceptualizado como dos dieciochos, tres doces, cuatro nueves, seis seises, nueve cuatros, doce treses y dieciocho doses. Los estudiantes usaron, además del razonamiento proporcional y el conteo doble, diagramas numéricos para representar la iteración y la descomposición.

Decimos que un estudiante construye el número como *multiplicidad de unidades* cuando es consciente de diferentes, aunque equivalentes, maneras en las que se puede componer y descomponer el mismo número por medio de unidades de la misma cardinalidad. La construcción del número como multiplicidad de unidades requiere no solo la construcción del número como una unidad de unidades (Steffe, 1983), sino también la conciencia de varias representaciones del mismo número como una unidad de unidades en diferentes, aunque equivalentes, maneras. Es decir, el número como *multiplicidad de unidades* se refiere a la plausibilidad de expresar simultáneamente el mismo número como una unidad de unidades en más de una manera. Es en este sentido en el que decimos que estos estudiantes estaban en vía de construir el número como *multiplicidad de unidades*.

Tenemos aquí nuestro primer signo colectivo en el que la iteración y la descomposición de unidades es el *objeto* (O_1) del signo; expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos son *representámenes* (R_1) del signo; y, finalmente, el número como multiplicidad de unidades es el *interpretante* (I_1) del signo. En la mente de los estudiantes, el número como multiplicidad de unidades es una conceptualización generalizada de iteración y descomposición. Esto significa que el número como multiplicidad de unidades representa no solo a su objeto (iteración y descomposición), sino también a sus representámenes (expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos) de una manera más abstracta. Al mismo tiempo, el número como multiplicidad de unidades está determinado por la iteración y la descomposición (O_1), lo mismo que por expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos (R1). Es decir, el número como multiplicidad de unidades (I_1) mantiene una relación dialéctica de determinación y representación con O_1 y R_1 (véase Figura 4).

Este signo colectivo está constituido por tres pares interrelacionados:

- iteración/descomposición y expresiones numéricas lingüísticas/conteo doble/diagramas numéricos (O_1, R_1);
- expresiones numéricas lingüísticas/conteo doble/diagramas numéricos y número como multiplicidad de unidades (R_1, I_1);
- iteración/descomposición y número como multiplicidad de unidades (O_1, I_1).

Cada elemento de un par interactúa dialécticamente con el otro en el sentido de que el primero determina al segundo, mientras que el segundo representa al primero. Estas relaciones dialécticas se indican en la Figura 4 mediante los vectores opuestos de determinación y representación. La relación dialéctica entre iteración/descomposición de unidades (O_1), y número como multiplicidad de unidades (I_1) es una relación de encaje en la que iteración/descomposición está generalizada, preservada y cumplida en la conceptualización del número como multiplicidad de unidades. Esta relación de encaje también representa la suma de las otras dos relaciones dialécticas intrínsecas de los pares (O_1, R_1) y (R_1, I_1).

Es conveniente formular dos preguntas. La primera es si la conceptualización que los estudiantes tienen del número como multiplicidad de unidades podría o no influir en sus construcciones de los números fraccionarios en totalidades discretas. Por ejemplo, si los estudiantes fueron capaces de conceptualizar a 24 en términos de unos, doses, treses, cuatros, seises, ochos, doces, ¿estarían en capacidad de conceptualizar cuantificaciones fraccionarias entre 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24? La segunda pregunta se refiere a si las sucesiones de iteración y de conteo en el conteo doble jugarían o no un papel en la conceptualización que de las fracciones en totalidades discretas hagan los estudiantes. Las siguientes secciones se concentran en estos asuntos.

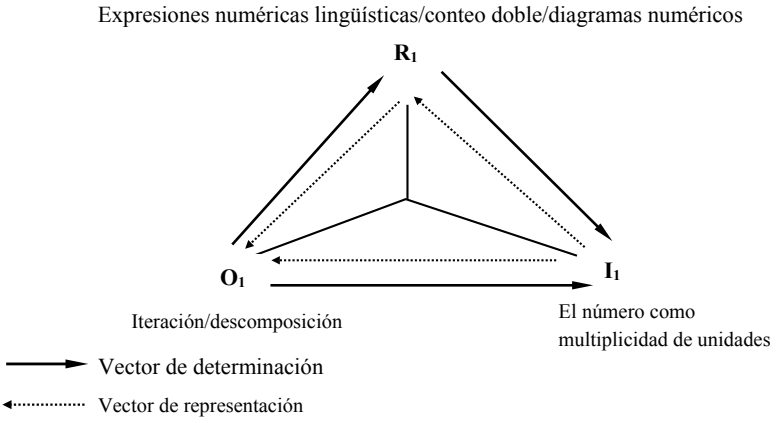
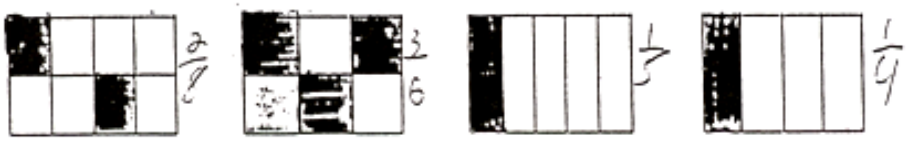


Figura 4. Primer signo colectivo: de la iteración y la descomposición (O1) al número como multiplicidad de unidades (I1) a través de expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos (R1)

Dificultades iniciales de los estudiantes en sus conceptualizaciones de fracciones

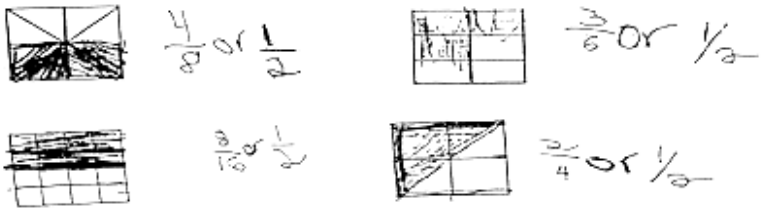
Por la época en que comenzamos a plantear tareas de fracciones a los estudiantes, aparecieron en sus estrategias numéricas la iteración y la descomposición sofisticadas de números naturales; esto se hizo evidente en sus maneras creativas de realizar cálculos mentales y escritos (Sáenz-Ludlow, 1997, 1998). Puesto que una de las metas principales del experimento de enseñanza era analizar la naturaleza de la transición de los estudiantes para ir de su conocimiento sobre números naturales a su conceptualización de fracciones en totalidades discretas, dedicamos veinte clases consecutivas a trabajar con fracciones. Más aún, a partir de finales de febrero hasta el final del año escolar, todas las entrevistas semanales a pequeños grupos estuvieron enfocadas solamente en fracciones.

Al comienzo pareció que podría ser algo más fácil para los estudiantes identificar fracciones de tortas o barras de dulce que fracciones simples de totalidades discretas relativamente pequeñas. En las primeras cuatro clases sobre fracciones, hicieron relaciones fraccionarias entre las partes iguales en que se dividían objetos continuos (círculos, regiones cuadradas y regiones rectangulares) y el objeto completo. La comprensión inicial que tenían de fracciones en totalidades continuas se ilustra mediante varias muestras de su trabajo. Por ejemplo, cuando se les dio una figura dividida y se les pidió expresar la parte sombreada de cada figura mediante un número fraccionario, pudieron relacionar el número de partes sombreadas con el número total de partes de la figura dada y expresarlo verbalmente como "tantas partes del número total de partes". La siguiente tarea proviene de la hoja de trabajo de *Pr*.



También cuando se dio a los estudiantes una figura dividida y se les pidió colorear cuatro octavos de la figura, ellos pudieron no solo hacer eso sino también escribir el numeral fraccionario. Además, estaban deseosos de dibujar una figura similar y colorear cuatro octavos de ella de diferentes maneras indicando la independencia entre la relación cuantitativa fraccionaria y la posición de las partes en el todo. La siguiente tarea proviene de la hoja de trabajo de *Mi*:

Los estudiantes también manifestaron su capacidad para generar fracciones simples equivalentes cuando recibieron figuras divididas y se les pidió sombrear la mitad de la figura y expresar eso en términos de fracciones distintas de un medio. La siguiente tarea proviene de la hoja de trabajo de *Ho*:



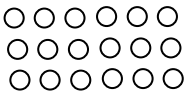
Recíprocamente, cuando se les dieron numerales fraccionarios, pudieron representarlos usando totalidades continuas. El trabajo de *Pr* y de *Ja* en la figura siguiente indica que pudieron tomar una totalidad particular (en este caso un rectángulo) y dividirla teniendo en cuenta el número de partes indicadas por el denominador del numeral fraccionario, aunque pasaron por alto la igualdad del tamaño de las partes. El trabajo de *Ja* en la segunda fila de la figura muestra que él tampoco pudo mantener igual el tamaño de las totalidades usadas en su representación.

Aunque el trabajo de estos estudiantes no indica una comprensión sofisticada de cuantificaciones fraccionarias en totalidades continuas, sí indica una comprensión que está en progreso. Cuando trabajaron con barras de dulce, tortas u otras totalidades continuas, tuvieron éxito por dos razones. Primera, no tenían que preocuparse por la magnitud de cada parte, pues estaba determinada físicamente por la extensión de las partes y, por consiguiente, los estudiantes contaron el número de partes en que la totalidad estaba dividida y a partir de ello tomaron una o más partes para establecer cuantificaciones fraccionarias. Segunda, habían trabajado con fracciones en tercer grado y habían aprendido algo sobre numerales fraccionarios y las palabras numéricas para fracciones. Expresiones como “2 partes ‘de’ 3 partes” para “dos tercios” y el símbolo “2/3” les eran conocidos en el contexto de totalidades continuas. Indagamos entonces si serían capaces de encontrar fracciones como 1/3 y 2/3 de cualquier número de objetos que fuera múltiplo de 3 y de transformar su expresión conocida “dos partes ‘de’ tres partes” en una expresión de la forma “dos unidades de cardinalidad *k* ‘de’ tres unidades de cardinalidad *k*”.

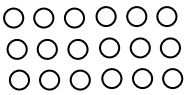
El propósito de esta sección es analizar la transición progresiva de los estudiantes que va de su comprensión de fracciones en totalidades continuas a su comprensión emergente de fracción en totalidades discretas. Tal transición se basó en la interpretación que daban al número como multiplicidad de unidades al mismo tiempo que podían mantener activa pero implícita la cardinalidad de la unidad de iteración. Los estudiantes que no podían mantener implícita esta cardinalidad experimentaron dificultades en la conceptualización de fracciones de totalidades discretas.

En los siguientes episodios se les presentó dos tipos complementarios de tareas. Estas tareas se pueden describir así: a) dado el número de objetos de un grupo, encontrar un subgrupo que represente una fracción particular del grupo (e.g., muestra un tercio de 18 fríjoles), y b) dado un subgrupo de un grupo, encontrar el número fraccionario que establece una relación fraccionaria entre el subgrupo y el grupo (e.g., 6 fríjoles son qué fracción de 18 fríjoles). La siguiente tarea se les presentó en un formato escrito durante una entrevista a los grupos pequeños:

Muestra 1/3 de 18



Muestra 2/3 de 18



Los estudiantes tuvieron tiempo de pensar y resolver esta tarea individualmente o con un compañero. Varios encerraron con una línea un conjunto de 3 redondeles como la respuesta a 1/3 de 18 y 2 conjuntos de 3 redondeles como la respuesta a 2/3 de 18.

Episodio #4

1 *Li:* [Encierra con una línea 3 redondeles y escribe 3 como respuesta para 1/3 de 18].

2 *P:* Dime, ¿cómo calculaste que 3 es un tercio de 18?

3 *Li:* Porque todos los grupos son de 3.

4 *P:* Ya veo. ¿Qué significa para ti tener un tercio de algo?

5 *Li:* Uno 'de' 3.

6 *P:* *¿Un qué 'de' 3 qué?*

7 *Li:* Un grupo 'de' 3 grupos.

8 *P:* Ya veo. Muéstrame tus 3 grupos aquí.

9 *Li:* [Señala a 3 grupos de 3 redondeles cada uno].

10 *P:* *¿Cuántos redondeles usaste en total?*

11 *Li:* [No responde].

12 *P:* Te daré 18 fríjoles y 3 tazas para que me muestres 3 grupos.

13 *Li:* [Coloca cada vez un fríjol en cada una de las tres tazas y comienza de nuevo el proceso hasta que ya no tiene más fríjoles].

14 *P:* Muéstrame un tercio de tus fríjoles.

15 *Li:* [Señala una taza].

16 *P:* *¿Cuántos fríjoles en un tercio de 18?*

17 *Li:* Seis.

18 *P:* Así que, dices que 6 fríjoles es ¿qué fracción de todos tus fríjoles?

19 *Li:* Un seis.

20 *P:* Déjame preguntarte algo. ¿6 es qué fracción de 18 fríjoles, un medio, un tercio, un cuarto,…?

21 *Li:* Un sexto porque hay 6 fríjoles en cada taza.

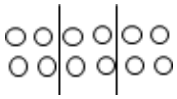
La comprensión inicial de *Li* de "*un tercio*" fue "*un tres*", así que encerró tres redondeles del conjunto de 18 redondeles; esto indica que no se percató de ningún tipo de relación fraccionaria entre el subgrupo de 3 fríjoles y el grupo de 18. Cuando recibió 3 tazas y 18 fríjoles, ella usó este material sin hacer intento alguno de anticipar el número de fríjoles por taza; en cambio, los distribuyó secuencialmente uno a uno en las tres tazas. El hecho de que ella hubiera terminado con tres grupos iguales de 6 fríjoles en cada uno fue solo una función del número inicial de fríjoles y el número de tazas. Tan pronto como tuvo las 3 tazas de 6 fríjoles en cada una, ella se refirió a una taza como un tercio. Sin embargo, cuando la profesora cambió la manera de expresar la misma pregunta, *Li* cambió su respuesta a "un seis" y luego a "un sexto". Este cambio es consistente con su interpretación inicial de un tercio como "un tres".

El mismo día, *Ja* experimentó una dificultad similar en su entrevista en grupo pequeño. La tarea escrita que recibió fue la siguiente:

Episodio #5

1 *P:* *¿Podrías mostrarme un tercio de esos 12 redondeles?*

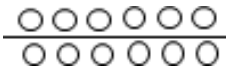
2 *Ja:* Solo encontré cómo hacer las partes /1-2-3 [mostrando tres grupos de 4] /4 en cada lado.



[Después *Ja* escribe 1/3 de 12 = 4].

3 *P:* Si un tercio de 12 es 4, ¿puedes mostrarme dos tercios de 12?

4 *Ja:* Dos tercios de 12… [Traza una línea horizontal como se muestra en la figura



siguiente] y 1-2-3/4-5-6/ y seis en el otro lado.

2/3 de 12 = 6.

5 *P:* Antes tenías tres grupos de 4 redondeles cada uno… y me dijiste que 4 es un tercio de 12.

6	*Ja:*	Eso quiere decir 2 partes [mostrando el 2 en 2/3] … hay dos partes allí.
7	*P:*	Muéstrame una parte.
8	*Ja:*	Una parte podría ser precisamente 6 [Encierra los 6 redondeles que hay arriba de la línea horizontal].
9	*P:*	Muéstrame dos partes 'de' tres partes.
10	*Ja:*	[Borra su respuesta "6" en "2/3 de 12 = 6" y la remplaza por 12].

Ja pudo encontrar a 4 como un 1/3 de 12; esto indica que interpretó un tercio como "una parte 'de' tres partes". Sin embargo, cuando se le pidió mostrar 2/3 de 12, interpretó a 2/3 como "dos treses", como quedó indicado por las pausas en su conteo en la línea 4 ("1-2-3/4-5-6/ y seis en el otro lado"). Cuando se le pidió reconsiderar su respuesta, decidió que 2/3 de 12 era dos seises y, por tanto, era 12. La confusión de *Ja* parece deberse a la fusión de su interpretación de 2 en dos dominios diferentes: el dominio de los números naturales cuando interpreta a 2/3 como "dos treses" y el dominio de las fracciones cuando interpreta a 2 como dos partes, pero sin tener en cuenta el papel del 3 en las tres partes en que se dividió el número total de redondeles.

Después del diálogo anterior, la profesora continuó haciéndole preguntas relativas a la figura en la que él hizo tres grupos de 4 redondeles cada uno. Se le pidió usar diferentes colores para mostrar cada uno de los tres grupos y también establecer la relación fraccionaria entre uno, dos y tres subgrupos y el grupo total. Finalmente, él se dio cuenta de que 2/3 de 12 era 8, en vez de "dos treses" o "dos seises", como lo había interpretado antes.

Las interpretaciones que de 1/3 de 18 y 2/3 de 12 dieron respectivamente *Li* y *Ja*, indican que no tomaron a 18 o a 12 como unidades en sí mismas que hubieran de tenerse en cuenta. El hecho de que estos estudiantes no se percataran del todo como una unidad en sí misma los condujo a interpretar a 1/3 como un tres y a 2/3 como dos treses. *Li* y *Ja* no estaban solos en sus interpretaciones de fracciones como multiplicación entre el numerador y el denominador. En general, cuando estos estudiantes de cuarto grado tuvieron que enfrentarse a totalidades discretas, interpretaron la fracción *m*/*n* como $m \times n$ (i.e., *m enes*) en el sentido de "*m* veces la unidad de cardinalidad *n*". A esta interpretación de la fracción *m*/*n* la llamamos *interpretación como número natural*.

Otros estudiantes interpretaron la fracción "1/*n* sacado de *k*" como "un *n* sacado de *k*" (i.e., de *k* tomar *n*). A esta interpretación de la fracción 1/*n,* la llamamos *interpretación aditiva*. En el diálogo siguiente, *Mo* y *Mi* ilustran las dos interpretaciones anteriores.

Episodio #6

1	*P:*	*Mo* y *Mi*: cada uno de ustedes tiene en frente 12 fríjoles. ¿Podrían darme un tercio de sus respectivos fríjoles?
2	*Mo:*	[Cuenta 3 fríjoles de su grupo de 12 fríjoles y muestra el grupo de 3 fríjoles].
3	*Mi:*	[Saca 3 fríjoles de su grupo de 12 fríjoles y señala el grupo de 9 fríjoles].
4	*P:*	*Mi*, ¿crees que un tercio de 12 es 9?
5	*Mi:*	Mm hmm.
6	*P:*	*Mo*, ¿crees que un tercio de 12 es 3?
7	*Mo:*	Mm hmm.
8	*P:*	*Mo*, dime por qué.
9	*Mo:*	[No responde].
10	*P:*	¿Cuántos treses tienes en 12?
11	*Mo:*	Cuatro.
12	*P:*	¿Tienes cuatro grupos de tres?
13	*Mo:*	*Sí.*
14	*P:*	Si me das tres fríjoles, ¿qué fracción de tus fríjoles me habrás dado?
15	*Mo:*	¡Oh! … Un cuarto.
16	*P:*	¿Por qué?
17	*Mo:*	Porque 3, y 3, y 3, y 3 es 12.
18	*P:*	*Mi*, ¿podrías darme un tercio de tus fríjoles?
19	*Mi:*	Cuatro [contando cuatro fríjoles].
20	*P:*	¿Por qué?
21	*Mi:*	Porque 4 y 4 y 4 es 12.

A primera vista, pareciera como si las confusiones de *Mi* y *Mo* fueran mucho más serias, cuando de hecho ellos han construido pero no consolidado relaciones parte-a-todo (Sáenz-Ludlow, 1994, 1995). Es decir, 12 no se había consolidado multiplicativamente como tres unidades de 4. *Mo* contó 3 fríjoles y los separó indicando que había interpretado un tercio como "un 3". *Mi* hizo un grupo de 9 y un grupo de 3 y mostró el grupo de 9 después de tomar 3 fríjoles de 12 fríjoles e indicar que ella había interpretado "un tercio de 12" como "un 3 tomado de 12" (i.e., de 12 sacar 3). De manera que faltaba la anticipación de 4 como la unidad de iteración para construir a 12 y, por tanto, la relación parte-a-todo (i.e., 12 compuesto como tres unidades de 4) y también faltaba la relación todo-a-parte (i.e., 12 descompuesto en tres unidades de 4). Como consecuencia, estos estudiantes estaban haciendo temporalmente una "interpretación aditiva" y una "interpretación como número natural" de las fracciones.

Sin embargo, después de algunas preguntas de parte de la profesora, ellos pudieron encontrar un tercio y un cuarto de 12. Fue relativamente fácil guiarlos 'fuera de' su propia confusión, debido a que tenían ya construido el número

como multiplicidad de unidades y podían componer a 12 multiplicativamente como tres cuatros y cuatro treses (relaciones parte-a-todo), pero ahora también tenían que construir relaciones todo-a-parte (Sáenz-Ludlow, 1994, 1995) para construir relaciones fraccionarias entre la parte y el todo. Es decir, la interpretación inicial de "un tercio" como "una parte 'de' tres partes" tiene que ser transformada en "una unidad de 4 'de' tres unidades de 4" para conceptualizar a cuatro como un tercio de 12.

Asimismo, la interpretación inicial de "un cuarto" como "una parte 'de' cuatro partes" tiene que ser transformada en "una unidad de 3 'de' cuatro unidades de 3". Esto indica que construir al número como multiplicidad de unidades es necesario pero no suficiente en la conceptualización de cuantificaciones fraccionarias. El número como multiplicidad de unidades estaba aquí representado por su conteo doble implícito en el que ambas sucesiones, la de iteración y la de conteo, se mantenían implícitas pero estaban representadas por las repeticiones de la unidad de iteración (3 o 4). Solo manteniendo implícita la unidad de iteración mientras se enfocaban en el número de iteraciones (4 o 3, respectivamente) fue como los estudiantes pudieron conceptualizar a 3 como un cuarto de 12 y a 4 como un tercio de 12.

En el siguiente episodio, otra pareja de estudiantes también estaba haciendo la transición desde la "interpretación como número natural" hasta la "interpretación fraccionaria" de las palabras numéricas fraccionarias. Esta transición estuvo acompañada con la fusión entre el número de iteraciones y la cardinalidad de la unidad de iteración en la descomposición de una totalidad discreta.

Episodio #7

1	*P:*	*¿Cuánto es cuatro quintos de cien?*
2	*Ri:*	Cuatro quintos es 20.
3	*P:*	[Repite la pregunta] ¿Cuánto es cuatro quintos de cien?
4	*Ri:*	20.
5	*P:*	Dije cuatro quintos de cien no cuatro cincos.
6	*Ri:*	20.
7	*P:*	*Ri*, ¿cuánto es un quinto de 100?
8	*Ri:*	… 20.
9	*P:*	¿Cuánto es cuatro quintos de 100?
10	*Ri:*	¡Oh! 80.
11	*P:*	*¿Cuánto es veinte centésimos de 100?*
12	*Ri:*	¿Veinte centésimos?
13	*Ho:*	*¡Oh! 20.*
14	*P:*	¿Cuánto es un veinteavo de 100?

15	*Ho:*	20.
16	*Ri:*	*Sí, 20 … veinte billetes de un dólar.*
17	*P:*	[Repite la pregunta] ¿Cuánto es un veinteavo de 100?
18	*Ho:*	Cinco veintes en 100.
19	*P:*	Luego 20 ¿es qué fracción de 100?
20	*Ho:*	Un quinto.
21	*P:*	Luego 20 es un quinto de 100, pero ¿pregunté por un quinto de 100? No. Pregunté por un veinteavo de 100.
22	*Ho:*	hmm … un veinteavo.
23	*Ri:*	… cinco
24	*Ho:*	[Contando con los dedos, cada dedo representa cinco] 5, 10, 15, … 100; son 40 partes.
25	*Ri:*	20 partes … tus manos no tienen 20 dedos.
26	*P:*	¿Cuánto es cuatro quintos de 100?
27	*Ri:*	80 porque 20, 40, 60, 80, 100, y 20, 40, 60, 80 son cuatro veintes 'de' cinco veintes.

Ri y *Ho* estuvieron haciendo temporalmente "interpretaciones como número natural" de palabras numéricas fraccionarias. Interpretaron "un veinteavo de 100" como "un 20". Llegaron a conceptualizar un veinteavo de 100 cuando pudieron fijar a 100 como la unidad que se puede componer y descomponer en términos de unidades de 5. En esta conceptualización, transformaron su interpretación de "un veinteavo" o "uno 'de' veinte", usada para referirse a fracciones de totalidades continuas en "una unidad de 5 'de' veinte unidades de 5". Para verificar la respuesta de *Ri*, *Ho* contó de cinco en cinco hasta 100 usando una sucesión de iteración explícita y sustituyendo su sucesión de conteo con el movimiento de sus dedos. *Ri* conceptualizó a 5 como un veinteavo de 100 porque se enfocó en la sucesión de conteo mientras mantenía implícita la sucesión de iteración.

Ri y *Ho* interpretaron inicialmente a "cuatro quintos de 100" como "cuatro cincos"; sin embargo, cuando *Ri* pudo anticipar a 20 como la unidad que se debía iterar cinco veces para componer a 100, conceptualizó a ochenta como cuatro quintos de 100. En la línea 27, *Ri* explicó su respuesta según la cual 80 es cuatro quintos de 100. Él dijo, "80 porque 20, 40, 60, 80, 100, y 20, 40, 60 y 80 son cuatro veintes "tomados 'de' cinco veintes". Aun cuando *Ri* dejó implícita su sucesión de conteo, la utilizó en combinación con su sucesión de iteración para trascender su comprensión de cuatro quintos en totalidades continuas como "4 partes 'de' 5 partes" y conceptualizar cuatro quintos de 100 como "4 unidades de 20 'de' 5 unidades de 20".

Los episodios anteriores ilustran las luchas y los éxitos de los estudiantes para diferenciar el número de iteraciones (como la contraparte del número de partes iguales) de la cardinalidad de las unidades de iteración (como la contraparte

del tamaño de cada parte), lo mismo que sus luchas y éxitos al cuantificar relaciones fraccionarias entre unidades de iteración y la unidad compuesta. Estos episodios también indican que conceptualizar el número como multiplicidad de unidades y el conteo doble no son suficientes para la conceptualización de las fracciones, a menos que los estudiantes mantengan la sucesión de iteración jugando un papel subsidiario y la sucesión de conteo jugando un papel focal.

La anticipación de la unidad de iteración y la conciencia del número de iteraciones (mientras se mantiene implícita la cardinalidad de la unidad de iteración) parecen ser esenciales en la conceptualización de las fracciones de totalidades discretas. Tal conciencia requiere un periodo de transición y del uso de conteo doble (implícito o explícito) como vehículo conceptual (i.e., representamen) en los procesos de iteración y descomposición. Este periodo transicional fue más largo para estudiantes que no habían consolidado al número como multiplicidad de unidades y más corto para aquellos que lo habían hecho. La siguiente sección se enfoca en el papel jugado por el conteo doble y los diagramas numéricos en las conceptualizaciones de fracciones de los estudiantes.

El conteo doble y los diagramas numéricos de los estudiantes en la generación de cuantificaciones fraccionarias

El conteo doble fue una estrategia generalizada que estos estudiantes usaron para consolidar relaciones entre la parte y el todo (i.e., relaciones parte-a-todo y todo-a-parte). El conteo doble, implícito o explícito, fue el medio por el cual iteraron unidades particulares para conceptualizar a los números naturales como multiplicidad de unidades, antes de considerar la descomposición de un número en sus unidades de iteración. Es decir, el conteo doble fue el medio de los estudiantes para establecer relaciones multiplicativas parte-a-todo, antes de establecer relaciones fraccionarias todo-a-parte.

En totalidades discretas, las preguntas del tipo "x es qué fracción de un múltiplo particular de x" fueron más fáciles para los estudiantes que preguntas del tipo "encuentra la fracción m/n de una cantidad y". Los diferentes grados de dificultad se debieron a que en el primer caso se daba a los estudiantes la unidad que se debía iterar, mientras que en el segundo caso tenían que anticiparla antes de determinar la unidad fraccionaria $1/n$ y luego la fracción m/n como m veces la unidad fraccionaria $1/n$.

En el siguiente episodio, iteran una unidad dada y la comparan con una unidad más grande dada para conceptualizar la unidad de iteración como una relación fraccionaria con la unidad más grande.

Episodio #8

1	*P:*	100 es ¿qué fracción de 400?
2	*Ho:*	Un cuarto…
3	*P:*	*¿Por qué?*
4	*Ho:*	Porque hay cuatro cientos en 400. Por eso es un cuarto.
5	*P:*	1.000 es ¿qué fracción de 10.000?
6	*Ho:*	Un décimo.
7	*Ri:*	Porque 5.000 y 5.000 es 10.000. 5.000 es 5 miles y 10.000 es 5 miles y 5 miles. 10.000 es 10 miles.

En el diálogo anterior, la manera en que *Ri* y *Ho* descompusieron a 400 y a 10.000 indica que conceptualizaron estos números como multiplicidad de unidades (400 como cuatro unidades de 100; 10.000 como dos unidades de 5.000; y 5.000 como cinco unidades de 1.000). Una vez establecidas estas relaciones multiplicativas (i.e., relación parte-a-todo), los estudiantes, enfocándose en el número de iteraciones mientras mantenían implícita la unidad de iteración, estuvieron pendientes de las unidades más grandes y su descomposición en unidades más pequeñas (i.e., relaciones todo-a-parte) para conceptualizar cada unidad de iteración como algo que está en relación fraccionaria con la unidad más grande.

Los siguientes episodios indican la confianza de los estudiantes en el conteo doble explícito o implícito para resolver tareas del tipo "encuentre la fracción *m*/*n* de la cantidad *y*" y "*x* es qué fracción de *y*" cuando *y* es una totalidad discreta. En este episodio, anticiparon la unidad que habrían de iterar y luego por medio de iteración y conteo doble establecieron cuantificaciones fraccionarias.

Episodio #9

1	*P:*	*¿Puedes encontrar un tercio de quince?*
2	*Mi:*	Un tercio de quince/creo que es 5/tres manos y 15 dedos, y una mano de 5 dedos es un tercio, un quinto, espera … Un tercio.
3	*P:*	*Mo*, ¿cuántos dedos es dos tercios de 15 dedos?
4	*Mo:*	10 porque 5 y 5 es 10.
5	*Mi:*	Voy a explicar lo que ella está tratando de decir.
6	*P:*	Bueno.
7	*Mi:*	Un tercio de 15 es 5, otro tercio de 15 es 5, otro tercio de 15 es 5. Se suman estos dos un tercio, esto junto da 10.

En la línea 2, *Mi* anticipó primero a 5 como la unidad de iteración y luego hizo conteo doble usando sus manos para iterar cincos con el propósito de componer a 15 como tres unidades de 5. La respuesta de *Mo* (línea 4) también se basó en iteraciones de cincos; cada 5 estaba representando implícitamente

a un tercio. *Mi* hizo explícito lo implícito cuando se ofreció a explicar la respuesta de *Mo*. *Mi* (en la línea 7) hizo una correspondencia uno a uno entre tres cincos y tres un tercios. Luego, ella sumó dos tercios sumando dos cincos para llegar a la misma respuesta de *Mo*. El diálogo anterior indica que *Mo* y *Mi* conceptualizaron dos tercios de quince como dos veces un tercio usando conteo doble implícito.

En el episodio que sigue, la profesora propuso una tarea similar usando un contexto social y dividió la pregunta en dos partes: a) ¿cuántos dulces por estudiante? y b) ¿qué fracción de los dulces recibirá cada estudiante? En este episodio, los estudiantes conceptualizaron fracciones equivalentes por su cuenta y usaron un diagrama numérico y un conjunto de redondeles para explicar sus soluciones.

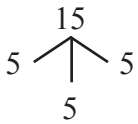
Episodio #10

1 *P:* La señora Walgamuth reparte por igual 15 dulces entre 3 estudiantes. ¿Cuántos dulces por estudiante?

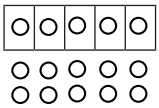
2 *Ra:* 5; 5 y 5 y 5 es 15.

3 *P:* *¿Qué fracción de 15 dulces recibe cada estudiante?*

4 *Je:* 5 es 1, 10 es 2, 15 es 3 [hace el siguiente diagrama en su hoja]. Un tercio o cinco quinceavos.



5 *Ra:* Cinco quinceavos o un tercio [hace el siguiente dibujo en su hoja].



En la línea 2, *Ra* iteró a 5 tres veces, "5 y 5 y 5 es 15", para encontrar el número de dulces que correspondía a cada estudiante. En la línea 4, *Je* recurrió al conteo doble explícito y conceptualizó dos fracciones equivalentes, es decir, un tercio y cinco quinceavos. La conceptualización de *Je* de estas dos fracciones indica que él consideró a 15 como multiplicidad de unidades (quince unidades de 1 y tres unidades de 5). Más aún, consideró las diferentes funciones de cada una de las dos sucesiones en el conteo doble (5-10-15 la sucesión de iteración que lleva la cuenta de los resultados de iterar cincos, y 1-2-3 la sucesión de conteo que lleva la cuenta del número de iteraciones).

Sin embargo, parece ser claro para *Je* que al contar de uno en uno, la sucesión de iteración y la sucesión de conteo habrían sido idénticas y, por consiguiente, sería innecesario identificarlas. Es decir, la sucesión 1-2-3-…-15 habría sido

suficiente para iterar las unidades de 1, lo mismo que para llevar la cuenta del número de iteraciones. Se podría decir que contar de uno en uno es un caso degenerado de conteo doble. El diagrama de *Ra* fue otra explicación para las respuestas de *Je*; él indicó tanto la plausibilidad de hacer tres cajas con cinco redondeles cada una, aunque solo se mostrara una caja en el diagrama, y la plausibilidad de hacer quince cajas con un redondel cada una, aunque se mostraran solo cinco cajas. En su diagrama, *Ra* indicó la iteración de unidades al encajar una unidad de 5 o cinco unidades de 1 en un esfuerzo por hacer explícitas las relaciones fraccionarias entre cada una de las unidades de iteración y la unidad más grande de quince.

El episodio que sigue también indica la fuerte confianza de los estudiantes en el conteo doble incluso cuando estaban deseosos de acortar el proceso debido a la reconceptualización consolidada de los números como multiplicidad de unidades:

Episodio #11

1	*P:*	Tengo 100 dólares y quiero darle a *Ra* ocho veinteavos de este dinero, ¿cuánto dinero debería darle?
2	*Pr*:	5-10-15-20-25 [muestra una mano extendida]/30-35-40-45-50 [muestra dos manos extendidas].
3	*Ra:*	¡Sí! Hay veinte cincos.
4	*Je:*	*Pr*, dijiste 5-10-15-20-25-30-35-40-45-50.
5	*Pr*:	Quiero decir 50/Obtengo 50 en diez cincos aquí [levantando 10 dedos]/está bien. Suma otros 50 con los 10 dedos, ¿cuántos dedos obtienes?
6	*Je:*	20.
7	*Pr*:	Hay 1-2-3-4/5-6-7-8 cincos/es decir 20 dólares y 20 dólares. Deberías darle 40 dólares a *Ra*. Eso es ocho veinteavos.

Pr encontró que ocho veinteavos de 100 dólares era "40 dólares". Él llegó a esta respuesta porque pudo conceptualizar a 100 como multiplicidad de unidades de 50 y de 5, lo que le permitió anticipar a 5 como un veinteavo de 100. Esta anticipación se verificó a través de conteo doble implícito en el que la sucesión 5-10-15-20-25-30-35-40-45-50 mantuvo los registros de iteración de cincos (sucesión de iteración), mientras que la sucesión de números que llevaba la cuenta del número de iteraciones (sucesión de conteo) fue sustituida por los dedos de sus dos manos. *Pr* iteró cincos hasta 50 y acortó el conteo porque sabía que 100 se podía descomponer en dos unidades de 50. *Je* quien estaba siguiendo de cerca el conteo doble implícito de *Pr* no tenía en mente meta particular alguna.

Pr asumió la tarea de asegurarse de que *Je* seguía su línea de razonamiento, y usó de nuevo conteo doble implícito para convencerlo de que 100 está compuesto de dos unidades de 50 y, por tanto, también está compuesto de veinte unidades de 5. Habiendo convencido a *Je*, *Pr* usó parte de la sucesión de

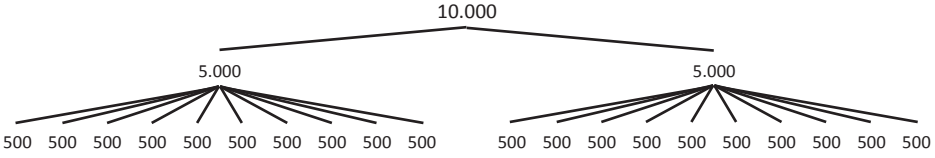
conteo implícita (antes sustituida por sus dedos) y la hizo explícita. Interpretó "1-2-3-4/5-6-7-8 cincos" como 1-2-3-4 cincos es 20 dólares, y 5-6-7-8 cincos es 20 dólares. Al mismo tiempo, parece que estaba estableciendo una correspondencia implícita de uno a uno entre 1-2-3-4 cincos y 1/20-2/20-3/20-4/20 y 5-6-7-8 cincos con 5/20-6/20-7/20-8/20 para encontrar que "40 dólares" era "ocho veinteavos" de 100 dólares. Es decir, *Pr* parece trascender su comprensión de ocho veinteavos como "8 partes 'de' 20 partes" en totalidades continuas y transformarla en "ocho unidades de 5 'de' veinte unidades de cinco" para encontrar ocho veinteavos de 100.

El episodio que sigue también indica que el conteo doble y los diagramas numéricos determinaron dialécticamente y representaron las relaciones parte-a-todo y todo-a-parte que los estudiantes establecieron mientras generaban relaciones fraccionarias cuantitativas.

En el siguiente episodio hay una indicación de una interacción triádica entre iteración y descomposición, conteo doble y diagramas numéricos, y relaciones parte-todo (parte-a-todo y todo-a-parte) y cuantificaciones fraccionarias. Un mes después de haber trabajado sobre fracciones, un estudiante se acercó a la profesora y le mostró un pedazo de papel doblado que en su exterior tenía escrito "Trabajo de matemáticas ultrasecreto, no mirar", y más abajo en el papel estaba la pregunta siguiente con su correspondiente respuesta: "¿500 es qué fracción de 10.000? Un veinteavo". En el otro lado del papel había una sucesión numérica acompañada por un diagrama numérico.

Episodio #12

500, 1.000, 1.500, 2.000, 2.500, 3.000
3.000, 3.500, 4.000, 4.500, 5.000, 5.500
6.000, 6.500, 7.000, 7.500, 8.000, 8.500
9.000, 9.500, 10.000



El trabajo escrito de *Pr* indica a 500 como la unidad de iteración y 500, 1.000, … , 10.000 como la sucesión de iteración. Luego, él sustituyó su sucesión de conteo implícita por ramas de su diagrama que tiene dos niveles de descomposición. En el primer nivel, hizo una descomposición de 10.000 en dos unidades de 5.000 y, en el segundo nivel, hizo una descomposición de cada 5.000 en diez unidades de 500. Parecía haber formulado su pregunta después de haber construido el diagrama enfocando su atención en el número de ramas del diagrama (i.e., una sustitución para la sucesión de conteo) para encontrar el número de iteraciones de 500.

El diagrama de *Pr* representa su conceptualización de 10.000 como una multiplicidad de unidades de 5.000 y 500. Más aún, la conceptualización de *Pr* de 500 como una fracción de 10.000 y su diagrama numérico indican su cambio conceptual, tanto entre iteración y descomposición como entre parte y todo. Al iterar a 500 para obtener 10.000, *Pr* construyó a 10.000 multiplicativamente en términos de la unidad de 500 como unidad de iteración (relación parte-a-todo) lo que a su vez le permitió conceptualizar a 500 como una fracción de 10.000 (relación todo-a-parte). *Pr* manifestó ser consciente de la diferenciación entre la unidad de iteración y el número de iteraciones para descomponer la unidad más grande, la de 10.000, con el propósito de generar una cuantificación fraccionaria entre una parte y su todo.

El siguiente episodio también ilustra cómo *Ri* usó diagramas numéricos para expresar iteración, descomposición y cuantificaciones fraccionarias. En este episodio, la profesora propuso una tarea del tipo "*x* es qué fracción de un múltiplo de *x*". Los estudiantes habían realizado este tipo de tarea antes, pero con números más pequeños; lo que aquí es de interés no es el grado de dificultad de la tarea, sino la sofisticación de una solución colectiva y la comprensión compartida entre los estudiantes.

Episodio #13

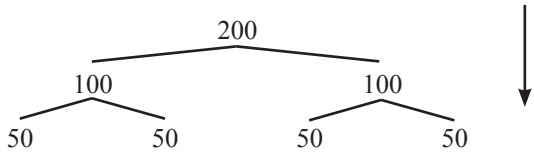
1 *P:* *¿50 es qué fracción de 200?*

2 *Pr*: Un cuarto porque 200 se parte en cuatro partes.

3 *P:* *¿Cómo partes a 200 en cuatro partes, Mi*?

4 *Mi:* 2 cincuentas en un 100 y 2 cincuentas más en un 100 y eso es 200. Así que tienes 4 cincuentas en 200.

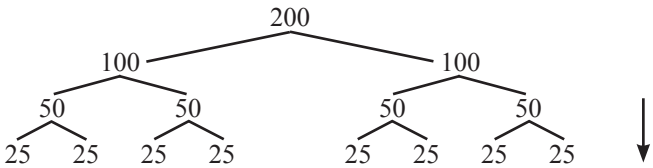
5 *Ri:* [Va al tablero y hace el siguiente diagrama].



6 *P:* *¿25 es qué fracción de 200?*

7 *Ee*: Un octavo.

8 *Ri:* [Vuelve al tablero y continúa elaborando el diagrama que había hecho en la intervención 5].



Pr partió a 200 en cuatro cincuentas, pero no explicó su manera de hacerlo. Sin embargo, *Mi* pudo explicar la solución de *Pr* indicando que compartían un significado numérico para la palabra "partir" (Sáenz-Ludlow, 2004). Sin

demeritar lo hecho por *Mi*, su descripción se habría podido considerar como la continuación de la explicación de *Pr*. Luego, *Ri* fue al tablero y simbolizó la iteración de *Mi* a través de un diagrama numérico que indicaba las iteraciones de cincuentas y de cientos, la descomposición de 200 en cientos y cincuentas y la cuantificación fraccionaria de 50 con respecto a 100. Cuando la profesora preguntó "¿25 es qué fracción de 200?", los estudiantes inmediatamente conceptualizaron a 25 como un octavo de 200. *Ri* pasó de nuevo al tablero y continuó su diagrama para simbolizar esta fracción en un diagrama con ocho ramas y el numeral 25 en cada una.

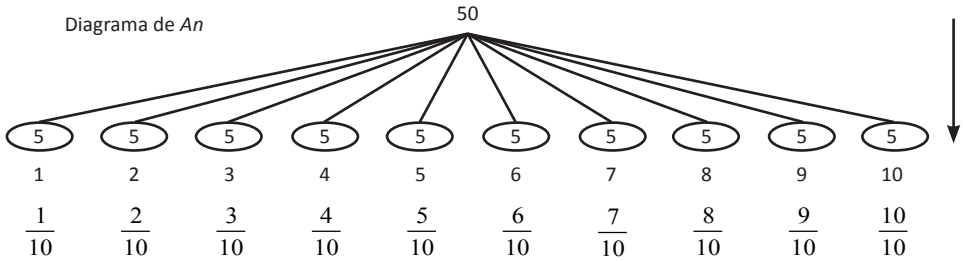
El diagrama de *Ri*, precedido por las líneas 1-7, sintetiza de una manera simbólica el pensamiento colectivo sobre iteración y descomposición y sobre las relaciones parte-a-todo y todo-a-parte para conceptualizar a 50 como un cuarto y a 25 como un octavo de 200. El hecho de que las soluciones fueran generadas, no por un estudiante sino por el pensamiento compuesto de diferentes estudiantes, indica que sus conceptualizaciones de alguna manera eran convergentes.

En el episodio anterior observamos que los estudiantes hicieron implícitamente correspondencias uno a uno entre cuatro cincuentas y cuatro un-cuartos, lo mismo que entre ocho veinticincos y ocho un-octavos. ¿Podrían hacer explícita tal correspondencia? El episodio que sigue responde esta pregunta de manera positiva. Las tareas de fraccionarios se propusieron frecuentemente usando dinero para proporcionar situaciones concretas que fueran significativas para ellos. Usar cantidades discretas representadas por dinero promovió su conciencia sobre la diferenciación entre la unidad de iteración y el número de iteraciones, quizá porque podían representar unidades haciendo imágenes de billetes o monedas concretos del sistema monetario.

Por ejemplo, la profesora puso una moneda de cinco centavos de dólar en el retroproyector y preguntó "¿5 centavos es qué fracción de 50 centavos?". Fue muy fácil para la mayoría de estudiantes decir que cinco centavos es "un décimo de cincuenta centavos porque había diez cincos en 50". No obstante, *An* acompañó sus explicaciones verbales con el siguiente diagrama:

Episodio #14

Diagrama de *An*



El diagrama de *An* representa diversos aspectos de su actividad cognitiva. Primero, una descomposición de 50 en diez cincos; segundo, la iteración de diez cincos para componer a 50; tercero, el conteo de las diez iteraciones de 5 y cuarto, la conceptualización de unidades fraccionarias usando el número de iteraciones mientras se mantiene implícita la unidad de iteración de 5. El diagrama numérico de *An* parece ser el vehículo que no solo representaba en el mundo físico sus relaciones parte-a-todo (mediante iteración) y sus relaciones todo-a-parte (mediante descomposición), sino también a la dialéctica de la determinación y la representación entre el diagrama numérico y la conceptualización de cuantificaciones fraccionarias. Puesto que el diagrama parecía muy sofisticado, la profesora formuló otra pregunta: "*An*, si miras tu diagrama, ¿30 centavos es qué fracción de 50?". Él encerró, haciendo un ademán con un dedo índice, los primeros seis cincos y dijo "seis décimos".

Los episodios de esta sección indican el surgimiento de un segundo signo colectivo en el que las relaciones parte-a-todo y todo-a-parte constituyen el objeto (O_2) del signo; las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos son representámenes (R_2) del signo; y las cuantificaciones fraccionarias son los interpretantes (I_2) del signo que generaliza las relaciones parte-todo (véase Figura 5). Las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos preservan al número como multiplicidad de unidades (I_1) que es el interpretante del primer signo. Es decir, el número como multiplicidad de unidades (I_1) es la base sobre la cual surgen las relaciones parte-todo (O_2). Las cuantificaciones fraccionarias (I_2) llevan una relación dialéctica de determinación y representación con (O_2) y (R_2).

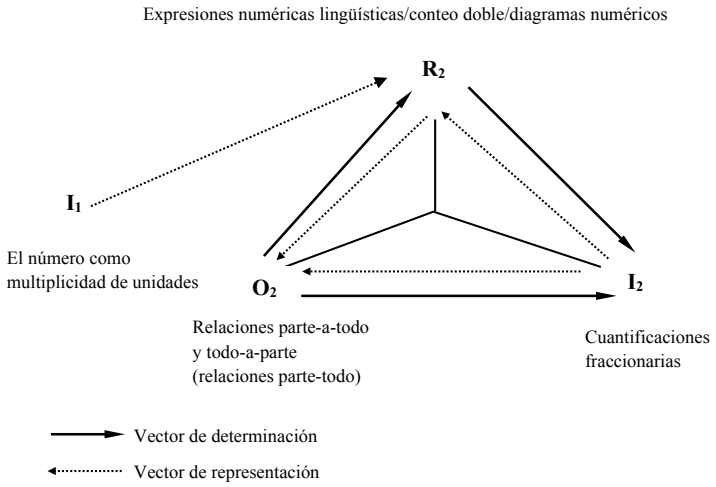


Figura 5. Segundo signo: del número como multiplicidad de unidades (I1) a cuantificaciones fraccionarias (I2) a través de expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos (R2)

Este segundo signo colectivo está constituido por tres parejas interrelacionadas:

- la relación parte-todo (parte-a-todo y todo-a-parte) y las expresiones numéricas lingüísticas/el conteo doble/los diagramas numéricos (O_2, R_2);
- las expresiones numéricas lingüísticas/el conteo doble/los diagramas numéricos y las cuantificaciones fraccionarias (R_2, I_2);
- la relación parte-todo y las cuantificaciones fraccionarias (O_2, I_2).

El representamen del segundo signo (R_2) es del mismo tipo que el representamen del primer signo (R_1), pero ahora es sofisticado e implícito en un nivel más alto, ya que el conteo doble comienza a utilizarse con un propósito.

Cada elemento de un par interactúa dialécticamente con el otro en el sentido de que el primero determina al segundo, mientras que el segundo representa al primero; es decir, cada uno cumple con el otro y lo preserva. Estas relaciones dialécticas se indican en la Figura 5 mediante vectores opuestos de determinación y representación. La dialéctica entre la relación parte-todo (O_2) y las cuantificaciones fraccionarias (I_2) es una relación de encaje en la que la relación parte-todo se generaliza, se preserva y se cumple en la conceptualización de cuantificaciones fraccionarias. Esta relación de encaje también representa a la suma de las otras dos relaciones dialécticas intrínsecas de las parejas (O_2, R_2) y (R_2, I_2).

Como se observó en los diálogos, los estudiantes pudieron transformar patrones de cuantificaciones fraccionarias en totalidades continuas en patrones de cuantificaciones fraccionarias en totalidades discretas.

Esta transformación sofisticada fue un nuevo paso en la evolución continua de la comprensión de los estudiantes con respecto a fracciones.

Conclusión

La cadena de significación se constituyó cuando el segundo signo sustituyó al primero. Es decir, el segundo signo superó al primer signo y, sin embargo, el primer signo no desapareció sino que, por el contrario, se preservó como huella. En cierto sentido, el segundo signo fue la realización del primer signo. La cadena de significación y la naturaleza dialéctica de las relaciones diádicas entre los elementos de cada signo nos proveen los medios para hablar sobre la naturaleza compleja y no lineal inherente a la construcción de cuantificaciones fraccionarias. A través de esta cadena de significación, los estudiantes trascendieron su conocimiento de números naturales para generar cuantificaciones fraccionarias en totalidades discretas.

La Figura 6 muestra el vínculo entre el primer signo (O_1, R_1, I_1) y el segundo signo (O_2, R_2, I_2). En esta cadena de significación se generalizaron la iteración y la descomposición de unidades (O_1) en la relación parte-todo (relaciones parte-a-todo y todo-a-parte) (O_2) a través de la construcción del número como multiplicidad de unidades y la mediación de las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos (R_1). La iteración y la descomposición fundamentaron e indujeron la relación parte-todo. De la misma manera, el número como multiplicidad de unidades (I_1) fundamentó e indujo cuantificaciones fraccionarias (I_2) a través de la mediación de las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos (R_2).

Tenemos aquí una secuencia de dos objetos concebidos (O_1 y O_2) y dos interpretantes concebidos (I_1 e I_2) mediados por los representámenes R_1 y R_2 de la misma naturaleza pero de diferentes grados de sofisticación. En resumen, la iteración y la descomposición fueron el fundamento para la conceptualización del número como multiplicidad de unidades y, a su vez, el número como multiplicidad de unidades fue el fundamento para la relación parte-todo que, a su vez, constituyó el fundamento para las cuantificaciones fraccionarias. Las expresiones numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos se consideran como representámenes que tienen que ver con la relación dialéctica entre los objetos y los interpretantes de cada signo.

La transformación de la iteración y la descomposición de unidades (O_1) en la relación parte-todo (O_2) requirió la conceptualización de número como multiplicidad de unidades (I_1). I_1 fue determinado y representado dialécticamente por las expresiones lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos (R_1). En la transición del primer signo al segundo, los estudiantes experimentaron dificultades porque la descomposición y la iteración no fueron suficientes para generar las relaciones inversas parte-a-todo y todo-a-parte. El vínculo necesario para el paso del primer signo al segundo era la conciencia de los estudiantes con respecto al funcionamiento de las dos sucesiones numéricas en el conteo doble: una sucesión para llevar la cuenta de los registros de iteración (sucesión de iteración) y la otra para llevar la cuenta del número de iteraciones (sucesión de conteo).

El surgimiento de las relaciones inversas parte-a-todo y todo-a-parte estuvo fundamentado no solo en la anticipación de la unidad de iteración que compondrá la totalidad, sino también en la conciencia de la función focal que adquieren la *sucesión de conteo* mientras se mantiene implícita la unidad de iteración y la *sucesión de iteración*. Tan pronto como las expresiones numéricas, el conteo doble y los diagramas numéricos determinaron y representaron al número como multiplicidad de unidades, el surgimiento de las relaciones inversas incluidas en la relación parte-todo fue plausible por cuanto los estudiantes pudieron enfocarse en el número de iteración y mantener implícita en alguna medida la unidad de iteración.

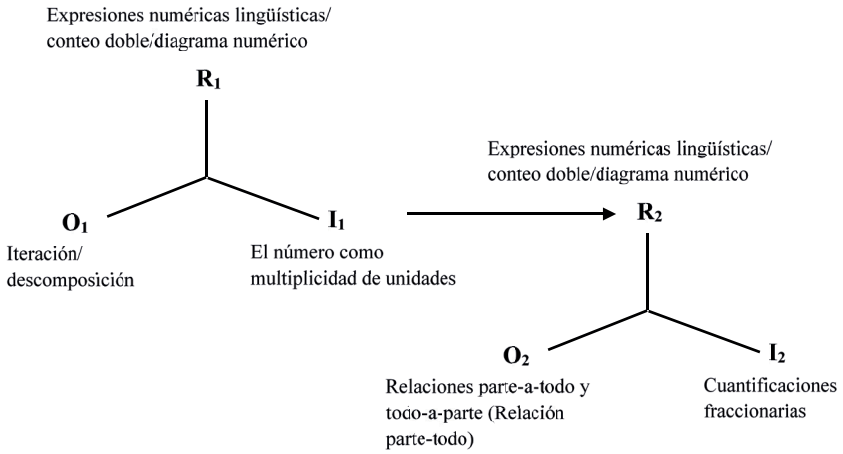


Figura 6. Cadena de significación: de iteración y descomposición de unidades (O1) a relaciones fraccionarias cuantitativas (I2)

La mayoría de las dificultades que experimentaron los estudiantes en la transición del primer signo al segundo se debió a no poder conceptualizar la función focal que la *sucesión de conteo* adquiere cuando se resuelven tareas en el contexto de fracciones en contraste con la función subsidiaria que esta sucesión juega en el contexto de los números naturales. En la Tabla 1 se resume un ejemplo.

Las conceptualizaciones de estos estudiantes sobre el número natural como multiplicidad de unidades les permitieron reconstruir multiplicativamente cualquier número en términos de unidades más pequeñas o descomponer en unidades constitutivas de la misma cardinalidad a cualquier número. Los diagramas numéricos de diferentes grados de sofisticación mediaron (i.e., determinaron y representaron dialécticamente) la composición y descomposición de números. Iterar unidades de la misma cardinalidad permitió a los estudiantes percatarse de la relación parte-a-todo; en contraste, descomponer números en unidades que cuando se iteran compondrán de nuevo al número inicial les permitió percatarse de la relación todo-a-parte; esta relación indujo y fundamentó la cuantificación fraccionaria en totalidades discretas.

Cuando una totalidad discreta se descompuso en unidades anticipadas de iteración de la misma cardinalidad, el grupo generó cuantificaciones fraccionarias manteniendo implícita la unidad de iteración y trascendiendo la interpretación de las fracciones *m*/*n* en totalidades continuas como "*m* partes iguales 'de' *n* partes iguales" e interpretándolas como "*m* iteraciones de una unidad de cardinalidad *k* 'de' *n* iteraciones de la unidad de cardinalidad *k*" en totalidades discretas. Aquellas cuantificaciones fraccionarias fueron correctas cuando los

estudiantes pudieron conceptualizar la función focal de la *sucesión de conteo* (i.e., la sucesión que lleva la cuenta del número de iteraciones) y la función subsidiaria de la *sucesión de iteración* (i.e., la sucesión que lleva la cuenta de la iteración), lo mismo que el grado en que esta sucesión estaba implícita.

Tabla 1. Ejemplo del conteo doble en el contexto de números naturales y en el de números fraccionarios		
Conteo doble en el contexto de los números naturales	Conteo doble en el contexto de las fracciones de totalidades discretas	Conteo doble en el contexto de las fracciones de totalidades discretas
Tarea: ¿Cuántos treses en 12?	**Tarea**: ¿3 es qué fracción de 12?	**Tarea**: Halle un cuarto de 12.
Iterando a 3 hasta 12	Iterando a 3 hasta 12	Anticipando a 3 como la unidad de iteración para componer a 12
Acción con un propósito	***Acción con un propósito***	***Acción con un propósito***
Conteo doble 3 es ***1***, 6 es ***2***, 9 es ***3***, 12 es ***4***	**Conteo doble** 3 es ***1***, 6 es ***2***, 9 es ***3***, 12 es ***4***	**Conteo doble** 3 es ***1***, 6 es ***2***, 9 es ***3***, 12 es ***4***
3, 6, 9, 12 Sucesión de iteración a mantener relevante y explícita ***Sucesión con la función focal de establecer una relación parte-a-todo***	3, 6, 9, 12 Sucesión de iteración a mantener relevante pero implícita ***Sucesión con la función subsidiaria de establecer una relación parte-a-todo***	3, 6, 9, 12 Sucesión de iteración a mantener relevante pero implícita ***Sucesión con la función subsidiaria de establecer una relación parte-a-todo***
1, 2, 3, 4 Sucesión de conteo a mantener explícita ***Sucesión con la función subsidiaria de establecer una relación parte-a-todo***	***1, 2, 3, 4*** Sucesión de conteo a mantener explícita ***Sucesión con la función focal de establecer una relación todo-a-parte***	***1, 2, 3, 4*** Sucesión de conteo a mantener explícita ***Sucesión con la función focal de establecer una relación todo-a-parte***
Respuesta: *Cuatro treses en 12*	***Respuesta***: *3 es un cuarto de 12*	***Respuesta***: *Un cuarto de doce es 3*

Los diagramas numéricos constituyeron representámenes no proposicionales (vehículos de signo) y sirvieron a diferentes funciones cognitivas para diferentes estudiantes. Para algunos estudiantes, los diagramas numéricos fueron instrumentales al mediar en sus operaciones mentales en cuanto generaron cuantificaciones fraccionarias; para otros, los diagramas numéricos fueron un medio de expresar sus maneras de operar; para otros más, los diagramas numéricos fueron los medios de interpretar una estrategia ya generada por otro estudiante. En este proceso, los diagramas numéricos (representámenes/vehículos de signo) y las construcciones mentales de los estudiantes (interpretantes) estuvieron dialécticamente interrelacionados para representar e inducir cuantificaciones fraccionarias.

En la continuidad inherente al proceso de significación, los interpretantes presentes (las conceptualizaciones de los estudiantes con respecto al número como multiplicidad de unidades) anticiparon interpretantes futuros (conceptualizaciones de los estudiantes sobre fracciones) mediados por las expresio-

nes numéricas lingüísticas, el conteo doble y los diagramas numéricos que representaban a objetos conceptuales (iteración/descomposición y relación parte-todo) en una relación dialéctica de representación y determinación. Es decir, en este proceso, las semiosis colectiva e individual contribuyeron a la construcción inicial de las fracciones como resultado de un proceso colectivo de significación constituido en la sinergia de la interacción entre los estudiantes y la profesora. En tal proceso, los signos de un alto grado de complejidad (cuantificaciones fraccionarias) surgieron de signos de un grado menor de complejidad (número como multiplicidad de unidades).

En resumen, en esta cadena colectiva de significación varios representámenes (expresiones numéricas lingüísticas, conteo doble y diagramas numéricos) representaron objetos conceptuales (iteración/descomposición y relación parte-todo) y generaron diversos interpretantes (número como multiplicidad de unidades y cuantificaciones fraccionarias). El proceso de semiosis nos proporciona un medio para a) explicar la continuidad en la conceptualización de fracciones en el sentido de que las conceptualizaciones de fracción superan a las conceptualizaciones del número natural; b) explicar las relaciones dialécticas de determinación y representación entre iteración/descomposición, número como multiplicidad de unidades, relación parte-todo, cuantificaciones fraccionarias y expresiones numéricas lingüísticas/conteo doble/diagramas numéricos; c) explicar el proceso dialéctico de determinación y representación a través del cual las conceptualizaciones más complejas (interpretantes) contienen como huellas a las menos complejas. La semiosis también da cuenta de contribuciones individuales y colectivas en el flujo continuo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Referencias

Bauersfeld, H. (1995). “Language games” in mathematics classrooms: Their function and their effect. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meanings* (pp. 271-291). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M., Khoury, H., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of pre-service elementary school teachers’ strategies on rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 48-69.

Bergeron, J. y Herscovics, N. (1987). Unit fractions of a continuous whole. En J. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 357-365). Montreal.

Cobb, P. (2000a). Conducting teaching experiments in collaboration with tea-

chers. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (2000b). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematics learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17-36). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Steffe, L.P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 83-94.

Cobb, P. y Yackel, E. (1995). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. En D.T. Owens, M.K. Reed y G.M. Millsaps (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-29). Columbus, OH: ERIC/CSMEE.

Colapietro, V.M. (1993). *Glossary of semiotics*. Nueva York: Paragon House.

Confrey, J. (1988). Multiplication and splitting: Their role in understanding exponential functions. En M. Behr, C. LaCampagne y M. Wheeler (eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 250-259). DeKalb, IL: Northern Illinois University.

Davydov, V.V. (1990/1972). *Types of generalization in instruction: Logical and psychological problems in the structuring of the school curricula*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Deely, J. (1990). *Basics of semiotics*. Bloomington: University of Indiana Press.

Deely, J. (1994). *New beginnings: Early modern philosophy and postmodern thought*. Toronto: University of Toronto Press.

Ernest, P. (2002, julio). *A semiotic perspective of mathematical activity*. Ponencia presentada en el Grupo de Discusión "Semiotics in Mathematics Education Research" en 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. y Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 149-168). Ottawa, Ont.: Legas.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5), 443-471.

Heath, T.L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (traducción del texto

de Heiberg, con introducción y comentario; 2ª ed. revisada). Nueva York: Dover Publications.

Hunting, R. (1980). *The role of the discrete quantity partition knowledge in the child's construction of fractional number*. Disertación doctoral, The University of Georgia. Dissertation Abstracts International, University Microfilms No. 8107919, 430-A.

Hunting, R., Davis, G. y Pearn, C. (1996). Engaging whole number knowledge for rational number learning using a computer-based tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(3), 354-379.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. y Nelson, L.D. (1981). Partitioning and unit recognition in performances of rational numbers tasks. En *Proceedings of the Third International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 91-102). Grenoble, France.

Lamon, S. (1996). The development of unitizing: Its role in children partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170-193.

McLellan, J.A. y Dewey, J. (1908). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. Nueva York: D. Appleton and Company.

Merrell, F. (1995). *Peirce's semiotics now: A primer*. Toronto, Canada: Canadian Scholars' Press.

Mertz, E. (1985). Beyond symbolic anthropology: Introducing semiotic mediation. En E. Mertz y R.J. Parmentier (eds.), *Semiotic mediation: Sociocultural and psychological perspectives* (pp. 1-19). Orlando, FL: Academic Press.

Moreno-Armella, L.E. y Waldegg, G.C. (2000). An epistemological history of number and variation. En V. Katz (Ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 183-190). MAA Notes 51. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Nöth, W. (1990). *Handbook of semiotics*. Bloomington, IN: Indiana University Press.

O'Halloran, K.L. (2003). Implications of mathematics as a multisemiotic discourse. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185-214). Ottawa, Ont.: Legas.

Parmentier, R.J. (1985). Signs' Place in Medias Res: Peirce's concept of semiotic mediation. En E. Mertz y R.J. Parmentier (eds.), *Semiotic mediation: Sociocultural and psychological perspectives* (pp. 23-48). Orlando, FL: Academic Press.

Peirce, C.S. (1867). Questions concerning certain faculties claimed by man. En

J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (1991, pp. 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Peirce, C. S. (1893-1913). *The essential Peirce: Selected philosophical writings* (vol. 2; editado por *Peirce Edition Project*). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1903). *The three normative sciences. The essential Peirce* (vol. 2, 1893-1913; editado por *Peirce Edition Project*, pp. 196-207). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1906a). Prolegomena to an apology for pragmaticism. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (pp. 249-252). Chapel Hill, North Carolina: The University of North Carolina Press.

Peirce, C.S. (1906b). Pragmatism in retrospect: A last formulation. En J. Buchler (ed.), *Philosophical writings of Peirce* (1955) (pp. 269-289). Nueva York: Dover Publications.

Peirce, C.S. (1908). Excerpts from letters to Lady Welby. En Peirce Edition Project (ed.), *The Essential Peirce* (vol. 2, pp. 478-491). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers*, *vol. II, Elements of Logic*. (editado por C. Hartshorne y P. Weiss). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1956). The essence of mathematics. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, (vol. 3, pp. 1773-1783). Nueva York: Simon and Schuster.

Peirce, C.S. (1976). The new elements of mathematics (NEM), (vol. 4, *Mathematical Philosophy*, editado por Carolyn Eisele). The Hague: Mouton and Co. B. V. Publishers.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Sáenz-Ludlow, A. (1994). Michael's fraction schemes. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(1), 50-85.

Sáenz-Ludlow, A. (1995). Ann's fraction schemes. *Educational Studies in Mathematics, 28*(1), 101-132.

Sáenz-Ludlow, A. (1997). Iconic means in children's understanding of the division algorithm. En C.W. Spinks y J. Deely (eds.), *Semiotics* (pp. 118-130). Toronto, Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (1998). Symbolic activity in mathematics classrooms: A semiotic perspective. En C.W. Spinks y J. Deely (Eds.), *Semiotics* (pp. 156-170). Toronto,

Canadá: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (2004). Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(1), 34-56.

Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (2001). Question-and diagram-mediated mathematical activity: A case in a fourth-grade classroom. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *23*(4), 27-40.

Steffe, L.P. (1983). The teaching-experiment methodology in a constructivist research program. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 469-471). Boston, Massachusetts: Birkhäuser.

Steffe, L.P. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L.P., von Glasersfeld, E., Richards, J. *et al.* (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory and applications.* Nueva York: Praeger.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 59-85.

Von Glasersfeld, E. (1981). An attentional model for the conceptual construction of units and number. *Journal for Research in Mathematics Education*, *12*(2), 83-94.

Von Glasersfeld, E. y Richards, J. (1983). The creation of units as a prerequisite for number: A philosophical review. En L.P. Steffe, E. von Glasersfeld, J. Richards *et al.* (eds.), *Children's counting types: Philosophy, theory and applications* (pp. 1-20). Nueva York: Praeger.

Vygotsky, L.S. (1986/1934). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.