UN ANÁLISIS COGNITIVO DE PROBLEMAS DE COMPRENSIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS[9]

Raymond Duval

¿Cómo podemos entender las dificultades, frecuentemente insuperables, que muchos estudiantes tienen con la comprensión de las matemáticas? ¿Cuál es la naturaleza de estas dificultades? ¿Dónde están localizadas? Estas preguntas han cobrado una magnitud y una importancia particular con la reciente presión para lograr más educación matemática inicial para todos los estudiantes, que los prepare para enfrentar un entorno tecnológico y orientado hacia la computación, de una complejidad que se incrementa ilimitadamente. Hay un desafío educativo en las aulas y un desafío teórico para investigar sobre el desarrollo y el aprendizaje del conocimiento matemático. Los procesos de adquisición del conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques. Los más predominantes, y a veces opuestos, son el enfoque epistemológico y el educativo. Pero ellos tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren en cualquier proceso de conocimiento o que lo constituyen.

Esta noción básica de representación es muy antigua y precisa. Una representación es algo que se pone en lugar de otro algo. Pero al mismo tiempo esta noción puede ser elusiva o demasiado formal. ¿Cuál es la naturaleza de este "algo que se pone en lugar de…"? Se puede tener un abanico amplio de respuestas, dependiendo de si se consideran las representaciones con respecto a un individuo concreto y sus experiencias, a las estructuras mentales o, por el contrario, a los objetos de conocimiento con sus requisitos epistemológicos específicos (Hitt, 2002). Así, las representaciones pueden ser creencias, concepciones o concepciones erróneas individuales a las que cada quien accede a través de sus producciones verbales o esquemáticas. Esta respuesta, desarrollada inicialmente en dos estudios importantes de Piaget (1923, 1926), es ahora uno de los marcos metodológicos y teóricos más importantes para investigar y explicar la adquisición del conocimiento matemático.

Pero las representaciones también pueden ser signos y sus asociaciones complejas, que se producen de acuerdo con reglas y que permiten la descripción de un sistema, un proceso, un conjunto de fenómenos. Allí las representaciones

9 Un primer esbozo de este artículo se publicó en 2002 en *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16. Aquí presentamos una versión más desarrollada del modelo cognitivo de la actividad y el pensamiento matemático.

semióticas, incluido cualquier lenguaje, aparecen como herramientas comunes para producir nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental particular. Esta respuesta, desarrollada progresivamente desde Frege y Hilbert con respecto a los requisitos epistemológicos y metamatemáticos, también ha cobrado una gran importancia en la investigación sobre cognición (Duval, 1998a). Cualquier investigación acerca del aprendizaje de las matemáticas involucra alguna elección teórica sobre la posible relación y el respectivo papel de estos tipos de representación bastante opuestos, que están "en lugar de otro algo", es decir, representan objetos de conocimiento.

Parece obvio que la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas y sus dificultades se deba basar en lo que los estudiantes hacen realmente por sí mismos, en sus producciones, en sus voces. Pero, ¿cómo podemos analizar los procesos de adquisición de conocimiento a partir de las concepciones de los estudiantes y encontrar las fuentes de sus dificultades? Las representaciones son solamente los resultados superficiales del funcionamiento de estructuras mentales profundas, que no dependen de la conciencia real de los individuos (Piaget, 1967a, pp. 78-79). Subyacente a los dos tipos bien opuestos de representación, existe una organización de estructuras cognitivas que hace a los individuos capaces de realizar los varios tipos de actividad de conocimiento (Duval, 1996a). Así, el rasgo característico de un enfoque cognitivo procura determinar primero el funcionamiento cognitivo subyacente a los varios procesos matemáticos. Para determinar el origen de la incomprensión de los estudiantes, primero debemos determinar las condiciones cognitivas que hacen posible la comprensión. Para ello, debemos formular la pregunta:

1. ¿Qué sistemas cognitivos se requieren y se movilizan para acceder a los objetos matemáticos y al mismo tiempo hacer posible la realización de las múltiples transformaciones que constituyen los procesos matemáticos?

En términos generales, se supone que la manera de pensar es básicamente la misma en las diferentes áreas de conocimiento, aunque el conocimiento matemático es más abstracto, e incluso si en matemáticas se utilizan lenguaje o codificaciones específicos. Observaciones que he realizado en las aulas y fuera de ellas durante muchos años, me conducen no solo a cambiar de un enfoque centrado en las concepciones de los estudiantes (Duval, 1983) a un enfoque cognitivo, sino también y, sobre todo, a formular la pregunta:

2. ¿La manera de pensar en matemáticas es la misma que en otras áreas de conocimiento? En otras palabras, ¿la actividad matemática requiere solamente los procesos cognitivos comunes o, de hecho, requiere ciertas estructuras cognitivas muy específicas cuyo desarrollo se debe tener en cuenta en la enseñanza?

Este asunto sobre el aprendizaje de las matemáticas tiene una gran importancia si la meta de su enseñanza, en los niveles de primaria y secundaria, no es formar a futuros matemáticos ni tampoco dar herramientas a los estudiantes, que solo posiblemente les serán útiles muchos años más tarde, sino más bien contribuir al desarrollo general de sus capacidades de razonamiento, análisis y visualización. En todo caso, se hace necesario considerar las representaciones semióticas en el nivel de la estructura mental y no solamente con respecto al requerimiento epistemológico para tener acceso a los objetos de conocimiento (Duval, 1995b, pp. 3-8, 15-35). Y desde este enfoque cognitivo parece que la oposición entre representaciones mentales y representaciones semióticas ya no es pertinente, porque descansa en la confusión entre el modo fenomenológico de producción y el tipo de sistema movilizado para producir cualquier representación (Duval, 2000b, pp. 59-60).

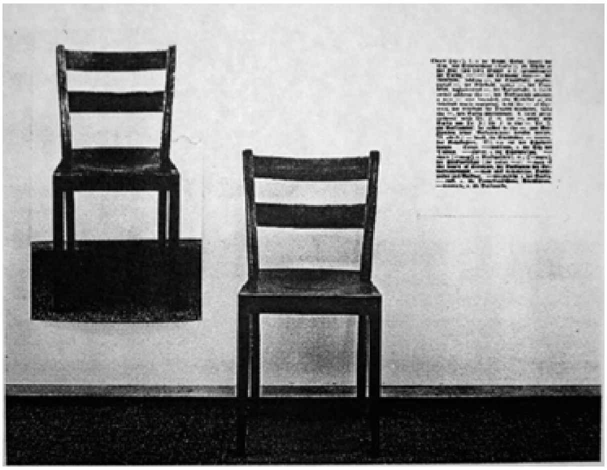
Aquí presentaré algunos de los resultados principales que he obtenido. Están relacionados, por una parte, con el papel predominante que juegan las transformaciones de representaciones semióticas en cualquier actividad matemática y, por otra, con el tipo de sistema semiótico utilizado para estas transformaciones. La complejidad cognitiva subyacente a los procesos de pensamiento en matemáticas reside en el hecho de que hay dos formas bien diferentes de transformaciones que nunca se toman en cuenta explícitamente en la enseñanza. Y desde el punto de vista matemático, una de ellas requiere la mayor atención, mientras que la otra es la que causa las mayores dificultades a los estudiantes. Después de una descripción de los varios procesos cognitivos requeridos por el pensamiento matemático, presentaré algunos datos empíricos para mostrar cómo estos dos tipos de transformaciones son fuentes específicas e independientes de incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas.

¿Qué caracteriza la actividad matemática desde un punto de vista cognitivo?

La situación epistemológica particular de las matemáticas con respecto a los otros campos de conocimiento conduce a conferir a las representaciones semióticas un rol primordial. En primer lugar, constituyen el único medio de acceso a los objetos matemáticos; lo cual plantea el problema cognitivo del paso de la representación de un objeto a otra representación de ese mismo objeto. Luego, y ante todo, las estrategias matemáticas implican de manera intrínseca la transformación de representaciones semióticas. Basta con revisar la historia del desarrollo de las matemáticas para ver que el desarrollo de las representaciones semióticas fue una condición esencial para el desarrollo del pensamiento matemático. Para comenzar, está el hecho de que la posibilidad del tratamiento matemático, por ejemplo el cálculo, depende del sistema de representación; esto porque el papel principal de los signos no es ponerse en lugar de objetos matemáticos, sino de proporcionar la capacidad de sustituir algunos signos por otros.

1.1 *¿Por qué las representaciones semióticas son necesarias en toda estrategia matemática?*

Para ilustrar la complejidad del problema de la representación, partiré de una fotografía tomada por Kosuth en 1965, titulada “Una y tres sillas”. Para realizarla, Kosuth yuxtapuso tres elementos en el montaje que fotografió:



Elementos yuxtapuestos	Naturaleza de los elementos yuxtapuestos
1. Una SILLA contra un muro.	(1) EL OBJETO mismo.
2. La fotografía de esa silla contra el muro.	(2) Una imagen de ese objeto, producida físicamente (por un aparato).
3. Una página de diccionario abierto en la palabra “silla” y pegada al muro.	(3) Una descripción verbal.
Este montaje podría completarse con:	
4. El dibujo de una silla que permita fabricarla, como en una nota de montaje.	(4) Otro tipo de imagen, producido por un procedimiento “semiótico” de trazado.
5. Flechas sobre el muro para marcar la relación (parecido, referencia o equivalencia) entre todos esos tipos diferentes de presentación de una silla.	(5) Un esquema (de tipo “red conceptual”) *“UNA y CINCO sillas”*

Figura 1. Yuxtaposición de un objeto y varias de sus representaciones posibles

La originalidad del montaje realizado por Kosuth radica en una doble yuxtaposición. Primero que todo la yuxtaposición de un objeto O y de una de sus representaciones {O, R(O)}. El objeto mismo es evidentemente la silla en la que uno puede sentarse. Luego hay la yuxtaposición de varias representaciones de un mismo objeto {Ra(O), Rb(O)}. Kosuth se limitó a dos representaciones, pero habría podido realizar un montaje “una y cinco sillas” o, en general, “una y *n* sillas”.

Esta doble yuxtaposición pone en evidencia las dos características esenciales para analizar las representaciones y para comprender su rol en el funcionamiento cognitivo del pensamiento y en la adquisición de conocimientos.

1. dos representaciones son diferentes cuando sus contenidos son de naturaleza diferente, es decir, no presentan el mismo tipo de unidades (palabras, contornos, densidad de puntos, flechas…), aunque representen el mismo objeto.

2. existen tantos tipos de representación diferentes como medios o sistemas para producir una representación: aparatos físicos, sistemas semióticos. No es posible clasificar, ni analizar las representaciones sin referirse a los diferentes sistemas que permiten construirlas. Eso quiere decir que las representaciones no dependen en primer lugar de los individuos sino de los sistemas productores de representaciones.

Esas dos características están relacionadas en la medida en que el contenido de una representación depende tanto del sistema movilizado para producir la representación de un objeto, como del objeto representado.

1.2 La doble yuxtaposición y los dos problemas cruciales para el aprendizaje y para la adquisición de conocimientos

La doble yuxtaposición puesta en escena por Kosuth no tiene nada de fantástico o excepcional. Reproduce una práctica cultural que se ha vuelto dominante en la enseñanza y en el mundo de la comunicación. Basta con remplazar la silla por cualquier otro objeto para constatar que la presentación en paralelo de representaciones diferentes (la segunda yuxtaposición) está presente en cualquier página de libro de texto, de revista, de noticia, de ficha de trabajo y, por supuesto, en una pantalla de computador donde es posible multiplicar como se quiera las representaciones de un mismo objeto. La actividad cognitiva necesaria es el reconocimiento de los objetos representados a través de representaciones variadas (imágenes, esquemas, explicaciones verbales…), que deben aclararse mutuamente.

Por lo general, se supone que esta actividad cognitiva es trivial. En realidad, es una de las más complejas que existen, y más en matemáticas que en los otros campos del saber. Y esta complejidad está en el corazón de todos los problemas de aprendizaje y de adquisición de conocimientos. La doble yuxtaposición puesta en evidencia por Kosuth permite plantear los dos siguientes problemas cruciales:

Problema 1. Existen muchas situaciones en las que se da solamente una representación sin ningún otro acceso al objeto estudiado: {R(O)}. ¿Cómo adquirir el conocimiento de objetos o fenómenos a partir de representaciones, si no se tiene acceso a una «experiencia» más o menos directa o personal? En otras palabras, ¿las representaciones pueden funcionar como sustitutos del objeto para quienes no hayan adquirido ya una experiencia más o menos directa?

En efecto, existe una solución que se encuentra en el desarrollo de todas las pedagogías: hacer entrar a la clase muestras o especímenes de la realidad estudiada, o al contrario, salir de la clase para ir al terreno, para permitir precisamente un acceso más directo a los objetos y a los fenómenos estudiados. Eso es evidente, en particular para las ciencias de la vida y de la tierra y, en general, para las ciencias experimentales. El video y las posibilidades de simulación en computador se inscriben también en esta preocupación pedagógica fundamental: ¡no limitarse a la presentación de representaciones en la adquisición de conocimientos!

Problema 2. Cuando ponemos lado a lado varias representaciones de un mismo objeto, para compararlas {Ra(O_1), Rb(O_1), Rc(O_1)... }, podemos constatar que sus contenidos no tienen casi nunca nada en común. Por ejemplo, ante una fotografía de un objeto O_1 y una descripción verbal de O_1, ¿cómo reconocer que es el mismo objeto representado en dos representaciones cuyos contenidos no presentan ningún parecido, si no se tiene (o no se ha tenido) un acceso a ese objeto que no sea a través de representaciones?

Este es el problema crucial en el aprendizaje de las matemáticas. Basta con tomar el ejemplo de la representación de los números para verlo. Podemos realizar fácilmente una yuxtaposición de diferentes tipos de representaciones posibles de un número entero (Figura 2). ¿Pero podemos realizar un montaje a la Kosuth, es decir, yuxtaponer los números mismos y sus múltiples representaciones?

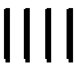
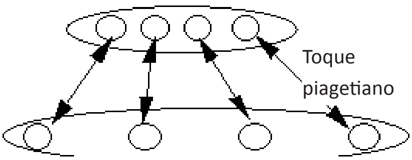
Representaciones ICÓNICAS **Representaciones «propias».**	**Representaciones SIMBÓLICAS** **(cifras o palabras)**
 ¿Dedos o cerillas? Ilación colectiva o o o o Configuración poligonal **((((I)I)I)I)** Iteración 	**4 SISTEMA** decimal **100 SISTEMA** binario. Estos sistemas de posición en base *n* implican EL SIGNO POR EXCELENCIA, «0», *que no se escucha en la oralización de la escritura simbólica* y abren extensiones. **64/16** escritura fraccionaria. **Cuatro** denominación verbal cuyo sentido se deriva de su posición en una serie de denominaciones.

Figura 2. Yuxtaposición de varias representaciones de un número

Nótese que aquí solo podemos tener una yuxtaposición de representaciones y no una doble yuxtaposición como en montaje fotografiado por Kosuth, aunque las representaciones de los números pueden clasificarse en dos categorías: representaciones icónicas, es decir, las que presentan un parecido con colecciones de elementos materiales, y las representaciones simbólicas, es decir, las que dependen de un sistema de reglas de composición y que implican signos que no remiten a ninguna «intuición» sensible o concreta, como el símbolo «0».

Esta imposibilidad de una doble yuxtaposición no tiene nada de accidental, sino que marca el paso entre dos situaciones epistemológicas fundamentales para el desarrollo de los conocimientos. Existe la situación en la que se puede tener acceso a los objetos mismos:

- ya sea directamente por una percepción no instrumentada, o recogiendo datos por medio de muestras, etc.
- ya sea por instrumentos que aumentan el campo de percepción (telescopio, microscopio) o que permiten recoger datos inaccesibles (espectrómetros).

Y existe la situación en la que los objetos estudiados son inaccesibles fuera de representaciones que relevan de una actividad semiótica, como en matemáticas. En otras palabras, el rol de las representaciones semióticas cambia totalmente según la situación en la que uno se encuentre, entre esas dos situaciones epistemológicas. El desafío del problema 2 para la enseñanza es saber si los aprendizajes movilizan los mismos procesos cognitivos en la primera situación que en la segunda, o si, por el contrario, requieren procesos más complejos cuando los objetos de estudio son inaccesibles perceptiva o instrumentalmente.

1.3 El problema cognitivo del paso de una representación a otra en las dos situaciones epistemológicas fundamentales

Los procesos cognitivos que permiten reconocer un mismo objeto en representaciones diferentes no pueden ser los mismos en las dos situaciones.

En la situación de posibilidad de un acceso directo o instrumental a los objetos estudiados, el reconocimiento de un mismo objeto en dos representaciones diferentes y, por lo tanto, la capacidad de pasar de una representación a otra (flechas 3 y 5 en la siguiente figura), se adquieren por asociación directa con la experiencia del objeto (flechas 1, 2, 4). Es la experiencia del objeto mismo la que garantiza la mediación entre dos representaciones de contenidos diferentes. En esta situación, el rol de las representaciones semióticas en la adquisición de conocimientos es secundario, ya que siempre es posible volver a la experiencia para controlar la pertinencia y el sentido de esas representaciones.

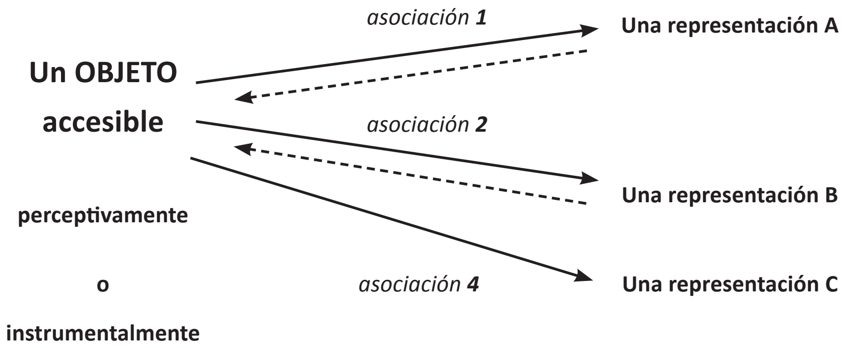


Figura 3. Procedimiento asociativo en situación de accesibilidad directa o instrumental a los objetos de estudio

No sucede lo mismo para el estudio de objetos inaccesibles perceptiva o instrumentalmente, y para los que solo tenemos como medio de aprehensión o de utilización, la producción de representaciones semióticas. Dejemos por el momento la pregunta sobre qué permite pensar que, en esta situación, las representaciones producidas representan algo «real» y racionalmente explorable, y centrémonos en el paso de una representación a otra, es decir, en el reconocimiento de una misma denotación. Vemos entonces que toda posibilidad de asociación de una representación con el objeto representado es imposible. En estas condiciones, ¿cómo establecer que dos representaciones diferentes A y B son representaciones del mismo objeto, cuando sus contenidos son radicalmente diferentes?

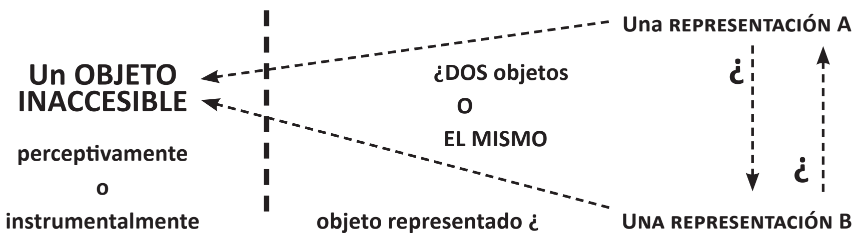


Figura 4. ¿Qué reconocimiento en situación de inaccesibilidad no semiótica?

La yuxtaposición de ocho representaciones posibles de un número, presentada anteriormente (Figura 2), ilustra la complejidad de ese problema ¡nada más que en el plano didáctico! Cuando un niño utiliza una, o incluso dos, de estas representaciones, ¿es capaz de reconocer los números en una tercera o una cuarta representación? Tal vez hemos olvidado hoy en día la distancia cognitiva que separa la representación asociada a la tarea piagetiana y las otras representaciones icónicas, y los debates y dificultades que suscitó en los años 60 a

80 su valorización institucional contra otras representaciones. Hemos opuesto entonces la construcción del concepto de número por las operaciones de clasificación y seriación, a la enumeración verbal de una sucesión de números, que entonces no se dudaba en calificar de «simple recitación de una cuenta». Fueron necesarios, entre otros, los trabajos de Gelman para recordar los principios subyacentes a todo conteo, es decir, a toda enumeración que implica necesariamente medios de denominación.

La conquista de los números por los niños pequeños no se hace por medio de acciones con base en representaciones icónicas o materiales equivalentes, sino por la coordinación de acciones concretas sobre representaciones icónicas con operaciones semióticas que relevan de sistemas sin relación con las representaciones icónicas movilizadas. El desafío esencial de la enseñanza es el paso de las representaciones icónicas, cualesquiera que sean, a los sistemas de representación simbólicos, donde las enumeraciones verbales familiares constituyen una zona de transición indispensable, aun cuando solo sea por su espontaneidad oral. Pero sucede, como lo observamos en una clase de grado octavo, que la mayoría de los alumnos no puede resolver este ejercicio de hueco:

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/5 + \ldots = 2.$$

Los profesores lo propusieron con el fin de hacer pasar a los alumnos por la representación decimal 1 + 0,50 + 0, 25 + 0, 20 + ... = 2, lo que, evidentemente, no se les pasó por la cabeza.

¿Cómo analizar los procesos de pensamiento involucrados en la actividad matemática?

El papel de las representaciones semióticas no se reduce a designar objetos, a ponerse en lugar de algo, o a ser ellas mismas consideradas como objetos. Su uso está determinado por la posibilidad del procesamiento matemático que permiten. Cualesquiera sean las representaciones semióticas usadas, se pueden cambiar por otras representaciones semióticas sin el apoyo de nuevos datos u observaciones empíricas. De otra manera, la operación cognitiva básica de sustituir alguna representación semiótica por otra no sería posible. Pero eso depende del sistema semiótico dentro del cual se producen las representaciones semióticas. Cada sistema semiótico proporciona posibilidades muy específicas.

La variación de "capacidad" que fue mencionada por Peirce (1931-1966, CP: 2.228) para el *representamen*, no está en el nivel de las representaciones particulares, sino en el nivel del sistema semiótico dentro del cual se producen. Así, para analizar los procesos de pensamiento complejos y específicos que subyacen a la actividad matemática, debemos tener en cuenta las diferencias entre los varios sistemas de representación semiótica usados. ¿Son importantes estas diferencias en los procesos matemáticos? Siempre que analizamos las dificultades y los bloqueos del estudiante en el aprendizaje de las matemáticas nos enfrentamos con este asunto.

¿Cómo describir los varios procesos matemáticos?

Dada la paradoja cognitiva del acceso a los objetos de conocimiento en matemáticas, una tal descripción debe apoyarse en la variedad de sistemas de representación semiótica que se usan y en la "capacidad" específica de cada una para realizar procesos matemáticos.

La manera más difundida de clasificar es oponer el lenguaje, natural o simbólico, y la imagen. Sin embargo, esto es general y sobre todo está lejos de ser suficiente. También hay otra diferencia esencial que muy frecuentemente se omite. Algunos sistemas semióticos se pueden usar para una sola función cognitiva: el procesamiento matemático. De otra parte, otros sistemas semióticos pueden satisfacer una amplia gama de funciones cognitivas: comunicación, procesamiento de información, conciencia, imaginación, etc. (Duval, 1995a, pp. 89-90).

Esta diferencia funcional entre los varios sistemas de representación semiótica usados en matemáticas es esencial porque está intrínsecamente conectada con la manera en que los procesos matemáticos transcurren: dentro de un sistema semiótico monofuncional, la mayoría de procesos toman la forma de algoritmos, en tanto que dentro de un sistema semiótico multifuncional los procesos nunca se pueden convertir en algoritmos. Por ejemplo, en geometría elemental no hay algoritmo para utilizar figuras de una manera heurística (Duval, 1995b) y la manera como transcurre una prueba matemática en lenguaje natural no se puede formalizar sino usando sistemas simbólicos. La mayoría de estudiantes no entiende las pruebas que usan lenguaje natural (Duval, 1991).

A partir de estas observaciones, podemos obtener un esbozo rápido de las varias formas de procesos matemáticos, como lo muestra la superposición de una gráfica en la tabla de clasificación (Figura 5).

	Representaciones resultantes de uno de los tres tipos de **OPERACIONES DISCURSIVAS:** **1** ***Denotación de objetos*** **(nombres, marcas…)** **2** *Enunciado de relaciones o propiedades* **3** *Inferencia* **(***deducción, cálculo…***)**	**Representación** **NO DISCURSIVA** **(***Configuraciones de forma* **1D/2D, 2D/2D, 3D/2D)**
REGISTROS MULTIFUNCTIONALES: *Los procesos NO SE PUEDEN poner en algoritmos*	**EN LENGUAJE NATURAL***: dos modalidades* *no equivalentes* **para expresar** •*Explicaciones* **ORALES,** **? ?** • **ESCRITOS (visuales):** *teorema***,** *demostraciones* **…**	**ICÓNICO: dibujo, esbozo, patrón….** **NO ICÓNICO: figuras geométricas que se pueden construir con herramientas**
	Representaciones AUXILIARES transicionales *Sin reglas de combinación* **(***apoyo libre***)**	
REGISTROS MULTIFUNCTIONALES: *Los procesos NO SE PUEDEN poner en algoritmos*	**EN SISTEMAS SIMBÓLICOS** **Solo escritos***:* ***imposible de contar oralmente si no es deletreando*** *Cálculo, demostración*	**D2 COMBINACIÓN DE FORMAS D1 y D0, orientadas o no (flechas)** *Diagramas, gráficas*

Figura 5. Clasificación de los registros que se pueden movilizar en procesos matemáticos

Lo que interesa para comprender los procesos de pensamiento involucrados en cualquier actividad matemática es enfocarse en el nivel de los sistemas de representación semiótica y no en la representación particular producida. Y son esenciales los siguientes dos puntos. En primer lugar, la propiedad básica de la representación semiótica y su importancia para las matemáticas solo se puede capturar en este nivel: el hecho de que se pueda intercambiar una por otra, mientras se mantiene la misma denotación (Frege, 1971/1892). En segundo lugar, una marca no puede funcionar como un signo fuera del sistema semiótico en el que su significado toma valor en oposición a otros signos dentro de ese sistema (posteriormente se da un ejemplo en la Figura 19).

Esta idea fue la principal contribución de Saussure (1973/1916, pp. 158-168) al análisis del lenguaje como un sistema semiótico. Eso quiere decir, también, que existen reglas para producir representaciones semióticas pertinentes. Así, todos los sistemas semióticos monofuncionales que son característicos de las matemáticas se basan en reglas de formación de representación. Eso se puede revisar fácilmente para cualquier sistema de notación numérica o para las gráficas cartesianas.

Desde luego, algunas representaciones que no dependen de un sistema semiótico se usan en la actividad matemática. El mejor ejemplo es el uso de palitos para representar números enteros pequeños. No tienen ni reglas de formación ni posibilidades específicas de transformación. Se usan como material para manipulaciones libres. En ese sentido, se ajustan perfectamente a la tercera determinación de *representamen* dada por Peirce: "algo que *para alguien* se pone en lugar de…" (1931, p. 2.228). Su uso depende solamente del *interpretante*. Aparecen más frecuentemente como representaciones auxiliares transicionales (Hitt, 2003).

Así, con respecto a la propiedad de las representaciones semióticas, básica para la actividad matemática, podemos distinguir cuatro tipos muy diferentes de sistemas semióticos. Retomando la palabra ya usada por Descartes en *La Géométrie* (Descartes, 1954/1637, p. 8 (p. 300)), y manteniendo también sus significados modernos, las denominamos "registros de representación" (Duval, 1995a, p. 21). No todos los sistemas semióticos son registros, solo los que permiten una transformación de representaciones. Hemos destacado el caso muy genuino del lenguaje natural. Allí, la producción de representaciones semióticas se puede lograr según dos modalidades muy fenomenológicas. De una a la otra existe una gran brecha, que muy a menudo se desestima (Duval, 2000b).

Esta clasificación proporciona las herramientas para analizar la actividad matemática y para identificar la raíz de los problemas con la comprensión matemática y no solo sobre la comprensión de tal y tal concepto que muchos estudiantes tienen.

Los dos tipos de transformación de representaciones semióticas

En la medida en que la actividad matemática consiste intrínsecamente en la transformación de representaciones, se hace evidente que hay dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas que son radicalmente diferentes: tratamientos y conversiones.

Los tratamientos (flechas curvadas en la Figura 5) son transformaciones de representaciones que ocurren dentro del mismo registro; por ejemplo, realizar un cálculo mientras se permanece estrictamente en el mismo sistema de notación para representar los números, resolver una ecuación o sistema de ecuaciones, completar una figura usando criterios perceptuales de conectividad o simetría, etc. Eso da prominencia al papel intrínseco de los sistemas semióticos en los procesos matemáticos. Los tratamientos que se pueden realizar dependen principalmente de las posibilidades de transformación semiótica que son específicas para el registro utilizado. Dos ejemplos son suficientes para mostrar esto.

Los procedimientos para realizar una operación numérica dependen lo mismo del sistema de representación usado para los números como de las propiedades matemáticas de las operaciones. Así, los algoritmos son diferentes para una notación decimal y para una notación fraccionaria de los mismos números:

12+13=...	
0,20+0,25=...	1/5+1/4=...
0,20÷0,25=...	1/5÷1/4=...

Esto significa que los procesos de cálculo nunca son puramente matemáticos; dependen del tipo de funcionamiento representativo que el sistema en uso permite. Uno puede estar motivado, por razones de economía o de visibilidad, a cambiar sistemas de notación para realizar el tratamiento.

Con frecuencia se recurre al registro de transformaciones figurales de orden *gestáltico* para resolver y justificar heurísticamente muchos problemas de geometría elemental. Estas transformaciones, que son puramente visuales, se pueden efectuar cambiando el punto de vista desde el cual se observan, o materialmente como sucede en un rompecabezas. A continuación se presentan tres ejemplos clásicos en los que las transformaciones visuales consisten en una operación de reconfiguración de la figura original (Figura 6).

En estos ejemplos, las unidades figurales de una figura original se pueden reconfigurar visualmente sin recurrir en manera alguna a una propiedad matemática. Esta operación puramente visual de reconfigurar una figura original subyace a la mayoría de los ejemplos de evidencia visual que se utilizan en la enseñanza para dar explicaciones "intuitivas" de ciertos resultados matemáticos. Pero en la mayoría de casos no funciona porque los procesos visuales de reconocimiento *gestalt* no suceden de la misma manera como se requiere y se espera desde un punto de vista matemático (Duval, 1995b).

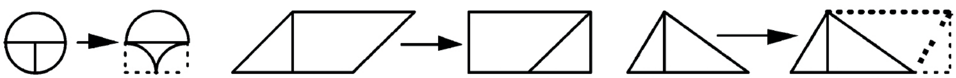


Figura 6. Transformaciones visuales de formas

Las conversiones (flechas rectas en la Figura 5) son transformaciones de representación que consisten en cambiar un registro sin cambiar los objetos denotados; por ejemplo, pasar de la notación algebraica para una ecuación a su representación gráfica, pasar del enunciado de una relación en lenguaje natural a su notación usando letras, etc. La conversión, que es una transformación en la representación, es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero que entre dos representaciones cuyos contenidos con frecuencia no tienen nada en común, se reconozca al mismo objeto representado. Hay como una brecha que depende del registro de partida y el registro de llegada (flechas rectas en la Figura 5). Muy a menudo, la conversión se clasifica como traducción o codificación. Se presentan ejemplos como los siguientes (Figura 7).

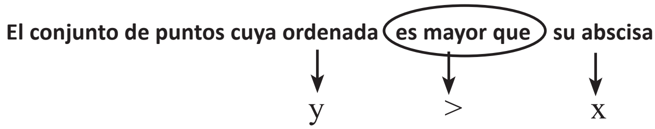


Figura 7. Conversión congruente (y > x)

Pero eso es engañoso porque una pequeña modificación puede causar el fracaso de reglas de codificación o traducción (Figura 8).

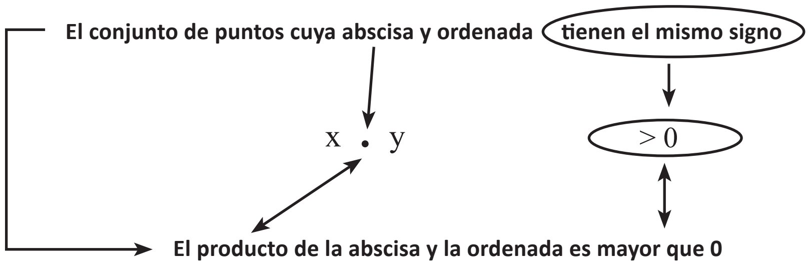


Figura 8. Conversión no congruente (> 0)

Miremos ahora un registro para el cual se puede dar explícitamente una regla de conversión. Para construir una gráfica, basta tener la siguiente regla: para cada par ordenado de números se puede asociar un punto en un plano coordenado con incrementos dados en los dos ejes. Y la construcción de gráficas que corresponden a funciones lineales parece no generar dificultades en los estudiantes. Pero solo se tiene que invertir el sentido del cambio de registro para ver que estas reglas dejan de ser operacionales y suficientes (Figura 9).

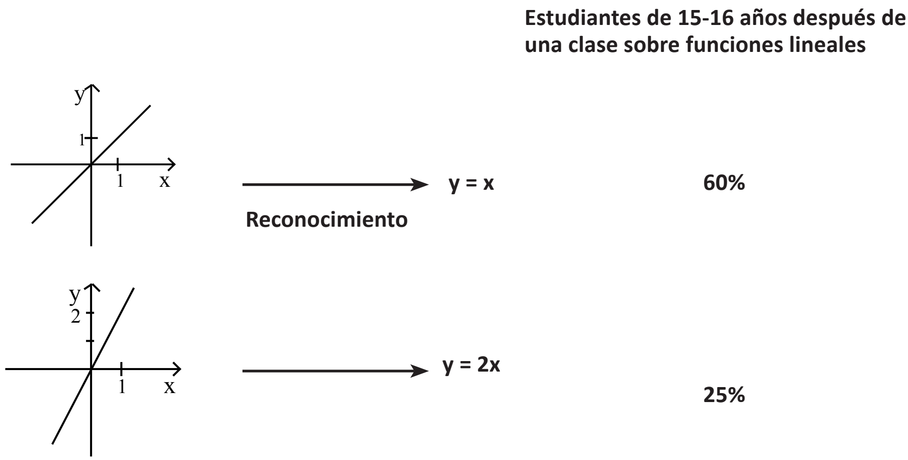


Figura 9. Una tarea de reconocimiento

La tarea propuesta fue de simple reconocimiento, no de construcción o de lectura de coordenadas de puntos: elegir entre muchas posibles expresiones (por ejemplo, entre y=x, y=-x, y=x+1), la que corresponde a la gráfica (Duval, 1988). Naturalmente, si se hubiera pedido construir las dos gráficas, el éxito habría excedido al 90% en ambos casos. En la enseñanza estándar, las tareas ofrecidas nunca son de reconocimiento, sino simplemente de lectura, lo que requiere solamente un proceso de ubicar puntos guiado por la comprensión local y no un proceso de interpretación global guiado por la comprensión de variables visuales cualitativas (Figura 19). Convertir una representación semiótica en otra no se puede considerar ni como codificación ni como tratamiento.

En estos dos ejemplos, la conversión se requiere explícitamente y parece ser que se puede reducir a situaciones transitorias para resolver algún problema particular. Pero muy a menudo, la conversión se requiere implícitamente siempre que se deban usar juntos, de manera interactiva, dos registros o incluso tres. Ya hemos mencionado el caso de la geometría. Allí, estamos enfrentando algo así como una brecha oculta entre el proceso visual del tratamiento y los varios procesos discursivos que se pueden utilizar. Y en el aula tenemos una práctica muy específica de usar simultáneamente dos registros. Se habla en lenguaje natural mientras que se escribe en expresiones simbólicas como si las explicaciones verbales pudieran volver transparente cualquier tratamiento simbólico (Duval, 2000b, pp. 150-155).

A través de los varios tipos de conversiones, más que a través de tratamientos, tocamos la complejidad cognitiva de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas y en los procesos de pensamiento específicos requeridos por la actividad matemática.

¿Cómo reconocer el mismo objeto matemático a través de dos representaciones cuyos contenidos son heterogéneos?

Al hacer una distinción entre sentido y referencia para los signos matemáticos, Frege (1971/1892, pp. 89, 102-103) enfatizó la diferencia entre el contenido de una representación y aquello a lo que esta se refiere. Entre el contenido de una representación y el objeto representado no hay otra relación que la denotación. Ahora, y esta es la consecuencia decisiva que rara vez se tiene en cuenta, el contenido de una representación depende más del registro de representación que del objeto representado (Duval, 1999b, pp. 40-46). Esa es la razón por la cual pasar de un registro a otro cambia no solo los medios de tratamiento, sino también las propiedades que se pueden hacer explícitas. Por otra parte, para las representaciones no semióticas producidas por dispositivos físicos (espejo, cámara, microscopio, etc.) o por organizaciones sensoriales y cerebrales, tenemos algo como una relación de causalidad. El contenido de una representación es el efecto indirecto del objeto, de ahí su valor "intuitivo" o más empírico (Figura 10).

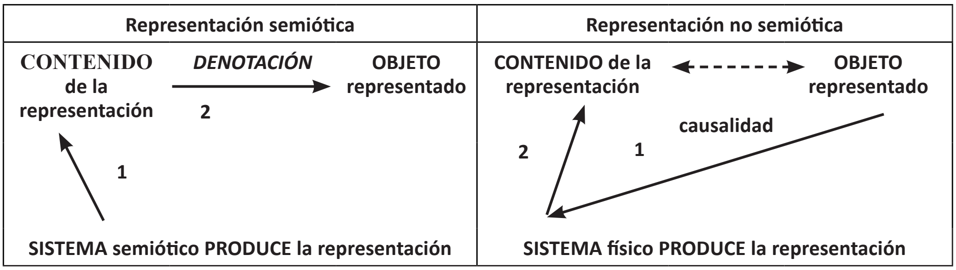


Figura 10. Los dos tipos de relación entre el contenido de la representación y el objeto representado

La relación entre el contenido de una representación y el objeto representado depende del sistema que se moviliza para producir la representación. Podemos obtener iconicidad o no iconicidad para una representación semiótica lo mismo que para una representación no semiótica. Y eso nos devuelve a la paradoja cognitiva de la comprensión en matemáticas. ¿Cómo puede el objeto representado distinguirse de la representación semiótica utilizada cuando no hay acceso al objeto matemático independiente de las representaciones semióticas? El primer problema de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas es un problema tanto de reconocimiento como de distinción.

Cuando nos enfrentamos a dos representaciones desde dos registros distintos, ¿cómo puede uno reconocer al mismo objeto representado dentro de su respectivo contenido? En otras palabras, ¿cómo puede un estudiante distinguir en cualquier representación semiótica lo que es matemáticamente importante y lo que no lo es? Ese asunto es evidente y crucial para todas las representaciones producidas dentro de registros multifuncionales. ¿También lo es para las representaciones que son producidas dentro de registros monofuncionales? En todo caso, estos problemas de reconocimiento y distinción son intrínsecos a la construcción de conexiones entre registros.

Esta paradoja cognitiva permite plantear la siguiente hipótesis (en términos matemáticos, "conjetura"): la comprensión en matemáticas supone la coordinación de al menos dos registros de representación semiótica. Y desde ya se puede plantear una primera pregunta: ¿esa coordinación de registros llega naturalmente a los estudiantes en el contexto de la enseñanza matemática?

Las dos fuentes de incomprensión en el aprendizaje de las matemáticas

Los dos tipos de transformación de representaciones semióticas son fuentes bien diferentes de dificultades recurrentes en el aprendizaje de las matemáticas. No son, en principio, dificultades particulares relativas a este o a aquel concepto matemático, sino dificultades más globales que se pueden encontrar en cualquier nivel de enseñanza y en cualquier dominio de las matemáticas. Durante cerca de veinte años se ha recogido información empírica sobre las relaciones entre procesos de pensamiento involucrados en la actividad matemática y problemas de comprensión o incluso bloqueos de la mayoría de aprendices. Y cualquiera puede obtener evidencia empírica sobre la condición de que el tratamiento y la conversión se separan metodológicamente en las tareas propuestas a los estudiantes, lo que rara vez o nunca se hace en la mayoría de estudios de investigación.

Nos limitaremos a dar algunos ejemplos con el propósito de mostrar el profundo malentendido de estos dos tipos de transformación en diferentes niveles de la enseñanza y en varias áreas de la actividad matemática.

Una primera fuente de incomprensión: la complejidad y la especificidad de los tratamientos realizados en un registro multifuncional

Hay una fuente enorme de malentendidos entre profesores y estudiantes, en particular con respecto a procesos de pensamiento básicos y complementarios, como el razonamiento y la visualización. A diferencia de los registros monofuncionales, los registros multifuncionales parecen ser común y directamente accesibles a cada estudiante. Pero esto es muy engañoso. De hecho, la manera matemática de usar los registros multifuncionales va en contra de la práctica común que se inicia con la práctica del lenguaje natural (Duval, 1995a, pp. 87-136).

Nos enfocaremos aquí más bien en las figuras de la geometría en la medida en que recurren explícitamente a la visualización y no solo al conocimiento discursivo (propiedades, definiciones, teoremas). Recuérdese que una figura en geometría siempre está arraigada en el funcionamiento de dos registros. Y si queremos captar su complejidad cognitiva, debemos analizar por separado la manera en la que los tratamientos se llevan a cabo respectivamente en el registro discursivo y en el registro visual, aunque surjan en el mismo proceso matemático. Cuando nos enfocamos en la visualización, estamos enfrentando una fuerte discrepancia entre la manera común de ver las figuras, casi siempre de una manera icónica, y la manera matemática con la que se supone deben mirarse. Si bien existen muchas maneras de "ver" (Duval, 1995b), ¿cuál es la requerida por el uso heurístico de las figuras?

Dimos antes tres ejemplos elementales del uso de las figuras en geometría (Figura 6). En estos ejemplos, "ver" consistía en discernir en la figura original las transformaciones que permiten reconfigurarla en otra: el paso de la figura original a la que es la meta hace posible comprender una relación, una fórmula de cálculo, etc. Suponiendo que se conoce el cálculo del área de un rectángulo, es posible ver cómo calcular el área de un paralelogramo y, por tanto, la de un triángulo (Figura 11).

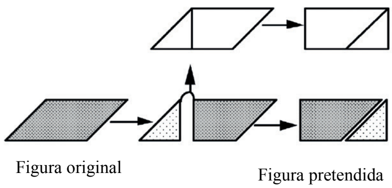


Figura que ilustra una redacción de propiedades geométricas que se refieren a ELEMENTOS UNIDIMENSIONALES de la figura (los lados y la perpendicular a la base desde un vértice)

Proceso visual subyacente de reconfiguración que requiere enfocar LA ATENCIÓN EN ELEMENTOS BIDIMENSIONALES

Figura 11. ¿La ilustración de la figura es cognitivamente congruente con la transformación visual?

¿En qué consiste el hecho de "ver" en geometría? Aunque el discurso matemático necesita ver los elementos unidimensionales de la figura, su fuerza heurística requiere que la atención se centre en los elementos de dos dimensiones. Este ejemplo se cita siempre como una demostración de una actividad espontánea, que debería ser común a los estudiantes que comienzan y a los matemáticos confirmados. En realidad, los factores que aquí dan a la figura su claridad heurística y explicativa pueden, en situaciones matemáticamente similares, impedir ver, como se puede verificar en el siguiente ejemplo (Figura 12).

Compare las áreas
de los dos triángulos
sombreados en el trapecio
de la derecha

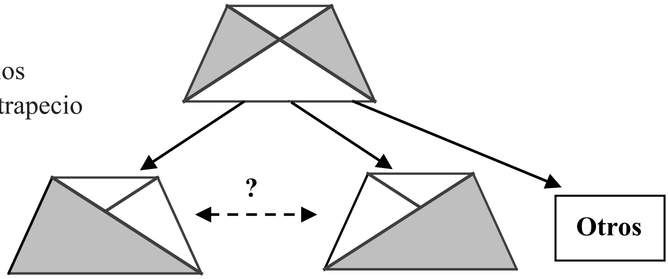
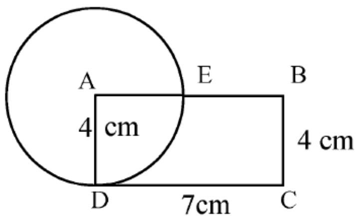


Figura 12. Primer paso de un tratamiento visual: subfiguras que se deben distinguir

La solución de ciertos problemas requiere una comparación de determinadas subfiguras posibles, obtenidas mediante reconfiguración y, por tanto, la capacidad de discernirlas rápidamente en la figura original. Existen factores que en algunos casos facilitan el reconocimiento de subfiguras relevantes y las inhiben en otros (Duval, 1995b, pp. 144, 149-150). Pero hay otras situaciones, posiblemente más interesantes, que muestran la complejidad y la dificultad de las figuras: las que involucran una circunferencia y algunas líneas rectas. Con respecto a ello, tenemos observaciones confiables disponibles en diferentes niveles de enseñanza.

En la figura que aquí se esboza a mano alzada (las verdaderas medidas de longitud están en centímetros), se representan un rectángulo ABCD y una circunferencia de centro A, que pasa por D.

Encuentre la medida de longitud del segmento [EB]



Septiembre de 1997	Una muestra de 2.604 estudiantes	Septiembre 1998	2.590 estudiantes
Respuestas matemáticas **[AE visto como un radio de 4 cm]**	**9%**	Respuestas matemáticas **[AE visto como un radio de 4 cm]**	**22,2%**
Respuestas midiendo el segmento (alrededor de 2 cm en el segmento presentado)	16%	Respuestas midiendo el segmento (alrededor de 3.5 cm en el segmento presentado)	39,6%
Respuestas por estimación visual (E alrededor del punto medio de AB, alrededor de 3.5)	26%		
Otras respuestas	30%	Otras respuestas	24,4%
No responde	16%		

Figura 13. Evaluación nacional en Francia (MEN, 1998, 1999)

Al final de la escuela primaria se propuso a todos los estudiantes franceses que entraban a la escuela media el problema que se muestra en la Figura 13. En ella también se incluye información sobre los resultados que al respecto se obtuvieron en las pruebas de 1997 y 1998. Durante varios años siguientes se propuso el mismo tipo de problema.

En realidad, para encontrar la respuesta matemática, los estudiantes tenían que ver dentro de la figura las dos subfiguras B (véase Figura 14) y no las dos subfiguras A. Porque es solo en las dos subfiguras B como uno ve los dos radios como un lado y una parte del otro lado del rectángulo. Ahora son las subfiguras A las que saltan a la vista y, por tanto, se tiende a descartar las subfiguras B.

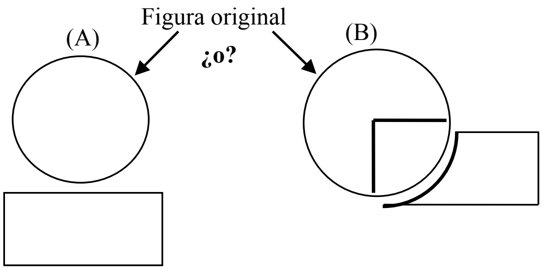
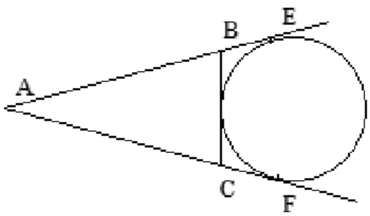


Figura 14. Dos maneras de identificar subfiguras dentro de la figura original

¿Cómo "ve" uno la figura original en la afirmación que acompaña al enunciado del problema (Figura 13)? La mayoría de estudiantes no puede distinguir la organización visual (B).

La segunda encuesta se realizó cerca del final de la escuela media. Se propuso el siguiente problema (Figura 15).

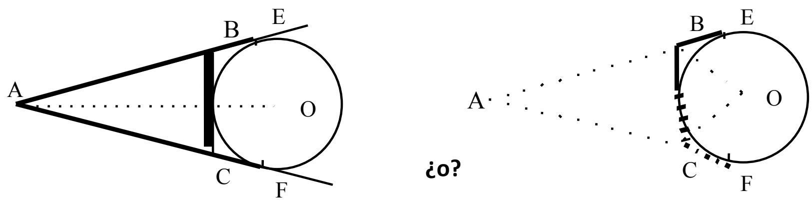


¿Es el perímetro del triángulo ABC mayor a, menor a o igual a la longitud de los dos segmentos EA y AF?

Figura 15. Problema presentado a estudiantes de catorce años (Mesquita, 1989)

Existen dos maneras de ver la figura en el enunciado del problema, pero solo una muestra la respuesta y proporciona la razón (véase Figura 16).

De la organización figural (I) a la organización figural (II) hay un salto que depende de factores visuales. La visión espontánea que se produce tiene un solo eje de simetría (organización I), mientras que la solución requiere que uno dé mayor importancia a otros dos ejes de simetría (organización II). Ahora, pasar de (I) a (II) constituye un salto que más de la mitad de los estudiantes no dio. En realidad, para poder ver que la figura tiene dos rectas de simetría OB y OC, se debe romper el elemento de la figura simple (organización I) consistente en el segmento BC en dos segmentos (organización II). Y para que la mayoría de estudiantes llegara a ver la organización (II) en la figura del enunciado, se requirió modificarlo describiendo la división del segmento BC: “Sea I el punto de intersección de AO y BC; compare BI y IC” (Pluvinage, 1990, p. 27).



Organización (I) de los elementos de la figura usando **solo la recta de simetría (AO)**

Organización (II) de los elementos de la figura usando **las dos rectas de simetría (BO y CO)**

Figura 16. Dos organizaciones figurales

Estos pocos ejemplos ilustran bien la complejidad del uso matemático de las figuras y del carácter no natural para la mayoría de estudiantes del acto de ver en geometría. ¿Cómo se debería analizar el acto de ver en geometría? ¿Cómo se debería introducir a los estudiantes a ello? En lo que concierne a las observaciones que se pueden realizar en todos los dominios de geometría, hay dos posiciones posibles.

La primera consiste en explicar las dificultades persistentes que los estudiantes encuentran con las figuras como malentendidos de las matemáticas representadas. Dicho de otra manera, sería la comprensión de las propiedades matemáticas la que debería guiar la lectura y la exploración de las figuras hacia la solución de un problema. Una buena comprensión conceptual debería conducir a ver en una figura lo que se debe ver para encontrar ahí los elementos para resolver un problema.

La segunda posición consiste en considerar que las figuras surgen en un sistema de representación que es independiente de los enunciados y de las propiedades matemáticas a las que se refieren. Eso significaría que lo que uno ve en una figura depende de factores de la organización visual: son estos factores los que determinan la distinción, es decir, el reconocimiento de ciertas formas de una, dos y tres dimensiones en una figura, y excluyen la distinción de otras posibles configuraciones y subfiguras en la misma figura.

Ahora, “ver” en geometría frecuentemente requiere que uno sea capaz de reconocer una u otra de estas otras posibles configuraciones y subconfiguraciones. Lo que tiene que ser reconocido en una figura original es una función del enunciado del problema, pero su “visibilidad”, es decir, el carácter más o menos espontáneo de su reconocimiento, depende de operaciones visuales de reorganización. Existen muchos factores que pueden inhibir o favorecer esta distinción de estas operaciones visuales. Se pueden estudiar experimentalmente (Duval, 1995b, 1998c; Rommevaux, 1998).

Otra observación hecha por Schoenfeld con estudiantes mayores, después de un semestre de trabajo en geometría, muestra la independencia de las figuras con respecto al conocimiento conceptual y a las capacidades adquiridas para probar. Se les propuso el problema de construcción que se muestra en la Figura 17. Los estudiantes trabajaron en su resolución sin mucha dificultad, pero procediendo completamente de manera empírica. Sin embargo, para ellos no hubo conexión alguna con todas las propiedades matemáticas que conocían sobre el asunto (Schoenfeld, 1986, pp. 243-244, 256).

Nótese la diferencia entre este problema de construcción y el problema precedente de comparación de longitudes (Figura 15). El éxito en este problema de construcción solo requiere tener en cuenta un eje de simetría, como en la organización (I) de la Figura 15. El éxito en el problema de comparación requiere que uno reconozca los otros dos ejes de simetría BO y CO, que están “ocultos” por el predominio visual de AO. El reconocimiento visual no depende principalmente del conocimiento conceptual de las propiedades.

Tome dos rectas que se intersequen. Sea E un punto en una de ellas. Construya una circunferencia tangente a las dos rectas, de tal manera que E sea un punto de tangencia con una de las rectas.

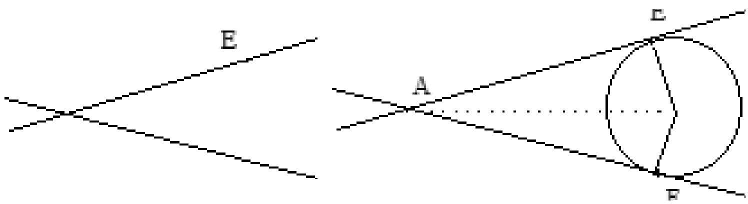


Figura 17. Problema de construcción propuesto por Schoenfeld (1986)

Ahora solo podemos mencionar el caso importante del lenguaje en geometría. Podemos observar una gran brecha entre un razonamiento deductivo válido que usa teoremas y el uso común de argumentos. Los dos son tratamientos bien opuestos, aun cuando en el nivel superficial las formulaciones lingüísticas parezcan muy similares. Un razonamiento deductivo válido funciona como un cálculo verbal de proposiciones, mientras que el uso de argumentos para convencer a otras personas funciona como la descripción progresiva de un conjunto de creencias, hechos y contradicciones. Los estudiantes solo pueden comprender lo que es una demostración cuando comienzan a diferenciar estos dos tipos de razonamiento en el lenguaje natural. Para lograr que ellos alcancen este nivel, se requiere el uso de actividad de representación transicional tal como la construcción de gráficos proposicionales (Duval, 1991, 1995a, 1998b).

Esta primera fuente de dificultad es bien conocida. Origina las observaciones recurrentes que los profesores pueden hacer sin importar en qué nivel enseñan. Más aún, es la razón de que en la enseñanza se tienda a marginar, tanto como sea posible, el recurso a registros multifuncionales y a permanecer dentro de los registros monofuncionales, en donde los tratamientos pueden tomar la forma de algoritmos. Sin embargo, no se puede evitar el uso del lenguaje natural (Duval, 2000b, 2003) y ello origina el asunto de la articulación con las representaciones producidas dentro de los registros monofuncionales. Esto requiere conversión explícita o implícita de representaciones.

Una segunda fuente de incomprensión: conversión de representaciones o cambio de registro

El segundo tipo de dificultad, a diferencia del primero, rara vez se ha notado como tal debido a que tan pronto como aparecen las dificultades de conversión, se consideran un signo de incomprensión conceptual. Más aún, para poder ver genuinamente el tamaño de las dificultades vinculadas a la conversión de representaciones, se debe desplegar un mecanismo de observación que les permita manifestarse, lo que supone, para comenzar, ¡que uno se ha hecho consciente de la diferencia entre tratamiento y conversión en un proceso matemático!

En cualquier caso, es la dificultad del segundo tipo la que limita en forma considerable la capacidad de los estudiantes para usar el conocimiento adquirido, lo mismo que su capacidad de adquirir nuevo conocimiento en matemáticas. Esto conduce muy rápidamente a un límite en el progreso de comprensión y aprendizaje para muchos estudiantes.

Las dificultades insuperables generadas por la conversión se pueden observar para los diferentes tipos de conversión, lo cual sucede para cada pareja de registros que se usen conjuntamente (flecha recta en la Figura 5). También son bien conocidos los obstáculos que surgen por la simple “traducción” de los términos de un problema que se enuncia en palabras, al convertirlo en expresiones simbólicas. Es una brecha que muchos estudiantes no pueden sobrepasar con éxito, cualquiera sea el contenido matemático (operaciones aditivas o multiplicativas sobre números relativos, enunciados para expresar en ecuaciones, etc.). Esa es la razón por la cual la mayor parte de la investigación se ha enfocado en la reorganización de representaciones auxiliares transicionales, las que los aprendices desarrollan espontáneamente o las que se introducen en la enseñanza.

En estudios anteriores (Duval, 1988, 1996b) presenté evidencia de un gran fracaso en la tarea de convertir una gráfica cartesiana en la ecuación correspondiente. Y ese fracaso es totalmente independiente de la comprensión del concepto de función. La Figura 9 presenta un ejemplo de la tarea de reconocimiento que se usó. Por tanto, podemos incrementar las observaciones sobre los problemas de conversión para cada tipo de conversión y en todas las áreas de la enseñanza de las matemáticas. La metodología para eso no requiere solo poner a los estudiantes en una situación de resolución de problemas o en una actividad de aplicación. Requiere asignarles tareas que varíen sistemáticamente, no solo como una función del registro original, sino también como una función de variaciones internas dentro de cada registro.

Se puede ver, por tanto, que no es suficiente con enfocarse en errores que se pueden observar directamente y que vuelven a ocurrir de un año al siguiente, sino que es necesario cavar más hondo en las dificultades para poder analizar problemas de comprensión de los estudiantes de matemáticas. Cuando se hace eso, se enfrentan fenómenos muy profundos y sorprendentes sobre la complejidad cognitiva de la conversión en cualquier área de la educación matemática.

Cuando, dentro de un registro fuente, se varía sistemáticamente una representación para convertirla en una representación en el registro de llegada, se puede observar una variación sistemática de desempeños. Eso ocurre como si el éxito o los errores sistemáticos dependieran de la distancia cognitiva entre el contenido de la representación fuente y el contenido de la representación de llegada. En algunos casos, es como si hubiera una correspondencia uno a uno y la representación fuente fuera transparente para la representación de llegada. En estos casos, la conversión no parece ser más que una simple codificación (Figura 7), pero en otros casos no sucede así (Figura 8). En otras palabras, puede o no haber congruencia entre una representación fuente y su representación convertida dentro de un registro de llegada. Un análisis más detallado nos permite identificar tres factores para describir este fenómeno (Duval, 1995a, pp. 49-57):

- Es posible o no una correspondencia uno a uno entre todos los constituyentes significativos (símbolos, palabras, o rasgos visuales) de los contenidos de la representación fuente y de la representación de llegada.

- La elección para cada constituyente significativo de la representación de llegada es unívoca o no lo es.

- Para los constituyentes significativos que se pueden poner en correspondencia, el orden de organización dentro de la representación fuente se mantiene o se cambia dentro de la representación de llegada.

El segundo fenómeno es el sentido en el que se hace la conversión. Cuando los roles del registro fuente y del registro de llegada se invierten dentro de una tarea de conversión de representación semiótica, el problema cambia radicalmente para los estudiantes. Puede ser evidente en un caso, mientras que en la tarea invertida, la mayoría de estudiantes fracasan sistemáticamente. Es suficiente referirnos al ejemplo dado en la Figura 9, recordando que si hubiéramos solicitado la construcción de las gráficas de las funciones *y=x* y *y=2x* o incluso *y=(1/2)x*, no habría habido una diferencia significativa en sus desempeños.

Pero la siguiente observación dentro de un dominio que parece dar muchas dificultades a los estudiantes, el álgebra lineal, proporciona un ejemplo que plantea algunas preguntas (Figura 18). ¿La comprensión en álgebra lineal no presupone que los estudiantes sean capaces de cambiar registros rápidamente de una manera implícita o explícita? ¿Su dificultad en la conversión no sería uno de los principales obstáculos que tendrían que superar? En cualquier caso, es aquí donde se puede ver la magnitud de este tipo de dificultad.

Podemos observar la magnitud de las variaciones en el éxito cada vez que se invierte el sentido en el que se hace la conversión. Más aún, ningún registro considerado aisladamente parece manejarse mejor que otro: los desempeños varían según los pares de registro fuente y registro de llegada. Aquí llegamos a la raíz del problema en el aprendizaje de las matemáticas: la capacidad de comprender y de hacer por sí mismo cualquier cambio de registro de representación. Los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático residen en la especificidad matemática y en la complejidad cognitiva de la conversión y en el cambio de representación. No es ni un asunto de codificación ni un asunto de conceptos matemáticos exclusivamente.

Esta complejidad aparece a través de dos fenómenos cuya variación depende de la naturaleza de los dos registros movilizados para una transformación de representación: la variabilidad de congruencia/no congruencia para representaciones del mismo objeto de conocimiento y la no reversibilidad. En efecto, en cualquier nivel y en cualquier área, las conversiones no congruentes son para muchos estudiantes una barrera infranqueable en su comprensión de las matemáticas y, por tanto, para su aprendizaje.

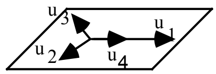
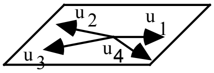
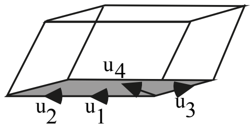
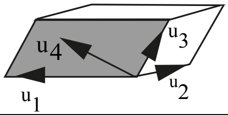
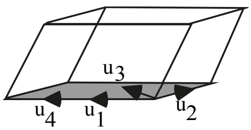
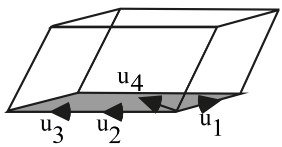
Preguntas (marzo de 1993)			Niveles de éxito
	Registro original	**Registro de destino**	**Tamaño muestra: 144**
T2→ G	$\begin{matrix}1&0&k&p\\0&1&m&0\end{matrix}$		**.83**
G → T2		$\begin{matrix}1&0&a&c\\0&1&b&d\end{matrix}$	**.34**
T3→G	$\begin{matrix}1&k&0&m\\0&0&1&n\\0&0&0&0\end{matrix}$		**.68**
G → T3		$\begin{matrix}1&0&0&a\\0&1&0&0\\0&0&1&b\end{matrix}$	**.35**
T → S	$\begin{matrix}1&0&k&p\\0&1&m&0\end{matrix}$	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = k\,u_1 + m\,u_2$ $u_4 = p\,u_1 + 0\,u_2$	**.07**
S → T	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_3$ $u_2 = k\,u_1 + 0\,u_3 ; k \in R$ $u_3 = 0\,u_1 + 1\,u_3$ $u_4 = a\,u_1 + b\,u_3 ; a \in R, b \in R$	$\begin{matrix}1&k&0&a\\0&0&1&b\end{matrix}$	**.72**
G → S		$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = k\,u_1 + m\,u_2 ; k \in R, m \in R$ $u_4 = n\,u_1 + 0\,u_2 ; n \in R$	**.05**
S → G	$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2$ $u_3 = 0\,u_1 + k\,u_2 ; k \in R$ $u_4 = a\,u_1 + b\,u_2 ; a \in R, b \in R$		**.40**

Figura 18. Una tarea de reconocimiento (Pavlopoulou, 1993)

Al enfrentar la conversión de representaciones no congruentes, los aprendices quedan atrapados en un conflicto entre el requerimiento del conocimiento matemático y la imposibilidad cognitiva:

- La conversión de representación requiere la *disociación* cognitiva del objeto representado y el contenido de la representación semiótica particular a través de la cual fue inicialmente introducida y utilizada en la enseñanza.
- Pero hay una *imposibilidad* cognitiva de *disociar* cualquier contenido de una representación semiótica y su objeto inicialmente representado, cuando el único acceso posible al objeto matemático es el semiótico.
- Ese conflicto conduce a la consideración de dos representaciones del mismo objeto como si fueran dos objetos matemáticos. La consecuencia es entonces la incapacidad de cambiar el registro y utilizar el conocimiento fuera de los contextos estrechos de aprendizaje. Los registros de las representaciones permanecen compartimentados, y solo es posible una comprensión fragmentaria y de registro único. ¿Bajo qué condiciones pueden los aprendices ser capaces de hacer tal disociación?

¿Cómo distinguir en cualquier contenido de una representación, cualquiera sea el registro usado, lo que es matemáticamente relevante y lo que no lo es?

Aquí, evidentemente, reside el asunto más crucial para el aprendizaje de las matemáticas. Tomemos el ejemplo elemental que hemos dado, relacionado con las funciones lineales (Figura 9). Observar su expresión algebraica junto con su gráfico, o saber cómo representar el gráfico a partir de la expresión algebraica, no es suficiente para reconocer la misma función a través de estos dos tipos de representación.

Se requiere una condición cognitiva más profunda: ser capaz de discernir cómo dos gráficos que visualmente son parecidos, son matemáticamente diferentes. Cuando se toman de a dos, contrastan visualmente en una o varias características. Cuando contrastan en dos (o más) características visuales, estas se funden como si fueran una sola. La distinción visual de los gráficos no es en manera alguna obvia, en particular cuando se ven muy similares en la forma y el contenido. De hecho, la capacidad de distinguir a lo que es relevante matemáticamente en cada uno, depende de la construcción implícita de una red cognitiva como en la Figura 19.

En esta red, cada característica visual corresponde a una categoría símbolo de la expresión algebraica $y = ax + b$. Por "categoría símbolo" se quiere significar una oposición cualitativa ($a>1$, $a<1$, $a=1$, o $a=+1$) y no solamente una variación numérica ($a=1,65$ o $a=2,3$). Una tal red se puede extender a todos los tipos de representación de funciones y a las representaciones de relaciones que no son funciones (Duval, 1993a, p. 46).

¿Cómo se puede ayudar a los estudiantes a darse cuenta de todas estas distinciones de representación dentro del mismo registro? Aquí debemos prestar atención a un hecho muy importante. Tenemos tantas representaciones visuales como queramos, pero no todas ellas son relevantes desde un punto de vista matemático. Más aún, no todas las variaciones en el valor numérico (aquí, de funciones lineales) son significativas para darse cuenta de esta red cognitiva.

Para hacer que los estudiantes noten las características visuales básicas de oposiciones que son matemáticamente relevantes y cognitivamente significativas, cualquier tarea de distinción de representación tiene que integrarse a una tarea de conversión. Es solo investigando variaciones de representación en el registro fuente y las variaciones de representación en el registro de llegada como los estudiantes pueden, al mismo tiempo, darse cuenta de lo que es relevante matemáticamente en una representación, lograr su conversión en otro registro y disociar el objeto representado del contenido de estas representaciones.

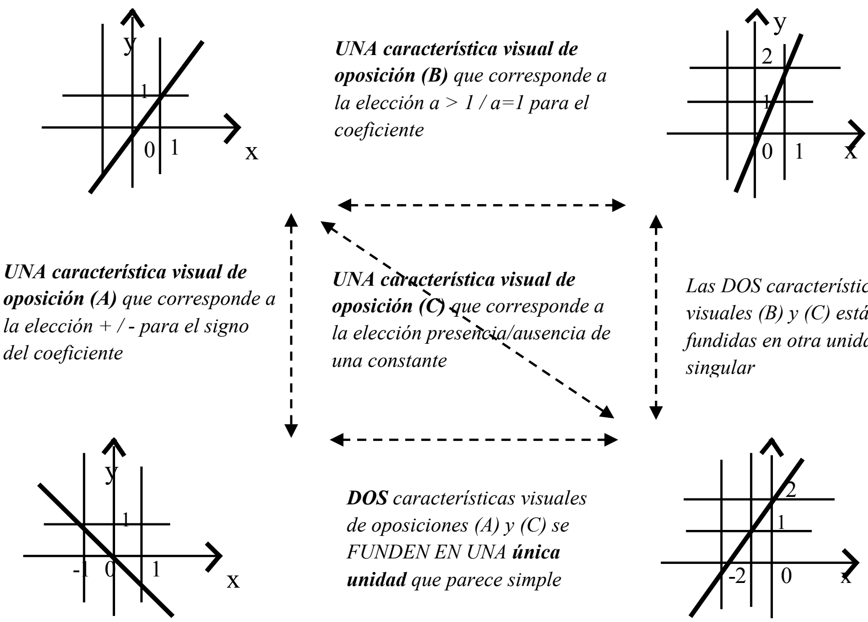


Figura 19. Primeras conexiones de una red cognitiva para la distinción de una representación gráfica

Hemos tomado un ejemplo muy elemental que es muy simple de analizar porque ahí la conversión ocurre entre dos registros monofuncionales, el no discursivo (gráficos) y el otro discursivo (escritura algebraica de relaciones). Pero el método de análisis utilizado en este ejemplo particular sirve para cualquier tipo de conversión (Figura 5), incluso para las más complejas cuando la distancia cognitiva se hace más grande, como entre un registro multifuncional (lengua materna, lenguaje natural) y registros monofuncionales (sistema simbólico). Y al menos en su modalidad implícita, este tipo de conversión se requiere continuamente en la enseñanza donde siempre tenemos una doble producción semiótica: discurso oral para dar explicaciones en el lenguaje común y escritura simbólica o diagramática para el tratamiento matemático (Duval, 2000b, pp. 152-155). Lo más sorprendente es que las representaciones auxiliares transicionales, incluso las más icónicas o concretas, ¡también requieran ser integradas con tareas sistemáticas de covariación si queremos que sean eficientes!

A partir del ejemplo podemos dar una ojeada a los procesos de pensamiento específicos que se requieren en matemáticas. Estos no solo usan sistemas de representación semiótica sino que también, y sobre todo, requieren coordinación cognitiva. Por una razón obvia, un acceso semiótico doble debe compensar la limitación cognitiva de la carencia de un acceso real doble. Esto quiere decir que la disociación entre contenido de una representación y objeto representado involucra necesariamente la coordinación entre diferentes registros de representación.

La comprensión matemática comienza cuando comienza la coordinación de registros. El reconocimiento de los mismos objetos matemáticos a través de representaciones provenientes de dos registros diferentes no es una operación local u ocasional, sino el resultado de una coordinación global de registro. Los procesos de pensamiento matemático dependen de una sinergia cognitiva de registros de representación. La coordinación de registros de representación semiótica proporciona algo así como una extensión de la capacidad mental. En esta perspectiva, parece ser una oposición engañosa la que se plantea, con frecuencia, entre la comprensión como algo conceptual o puramente mental y las representaciones semióticas como externas. De hecho, las representaciones mentales que son útiles o pertinentes en matemáticas siempre son representaciones semióticas interiorizadas.

Conclusión

Cuando analizamos la actividad matemática desde un punto de vista cognitivo, se deben tener en cuenta tres características específicas estrechamente conectadas:

1. Transcurre a través de una transformación de representaciones semióticas que involucra el uso de algún sistema semiótico.
2. Para llevar a cabo esta transformación, se pueden usar registros bien diferentes de representaciones semióticas.
3. Los objetos matemáticos nunca se deben confundir con las representaciones semióticas utilizadas, aun si no hay acceso a ellos, diferente del uso de una representación semiótica.

Por tanto, parece ser que los procesos de pensamiento en matemáticas se basan en dos tipos bien diferentes de transformaciones de representaciones. Incluso si un solo registro de representación es suficiente desde un punto de vista matemático, desde un punto de vista cognitivo, la actividad matemática involucra la movilización simultánea de por lo menos dos registros de representación, o la posibilidad de cambiar en cualquier momento de un registro al otro. En otras palabras, la comprensión conceptual en matemáticas incluye sinergia de dos registros y algunas veces sinergia de tres registros. Esa es la razón por la cual, lo que es matemáticamente simple y ocurre en la etapa inicial de la construcción de conocimiento matemático, puede ser cognitivamente complejo y requiere un desarrollo de una conciencia específica sobre esta coordinación de registros.

La distinción entre cuatro tipos de registros de representación destaca la variedad y la brecha cognitiva de la conversión de representación según el registro fuente y el registro de llegada. También hace posible definir algunas variables para analizar la complejidad cognitiva subyacente a toda actividad matemática, ya sea con un propósito de investigación o un propósito educativo. La distinción entre registro multifuncional y monofuncional muestra cómo, para todas las transformaciones que son tratamientos, la visualización y el lenguaje se pueden usar de maneras bien distintas a las usuales dentro de las otras áreas del conocimiento y de la vida cotidiana.

Las prácticas de estos registros que los estudiantes pueden tener fuera de las matemáticas parecen a menudo descartar la manera en que ellos deberían movilizarse en las matemáticas. Esto origina ambigüedad profunda en la enseñanza: por una parte, estos registros se evitan porque los estudiantes tienen gran dificultad de llevar a cabo procesos matemáticos allí y, por otra parte, se usan para dar “significado” a los procesos matemáticos que se realizan dentro de registros monofuncionales. En la enseñanza podemos observar prácticas bien opuestas de estos registros multifuncionales.

Es dentro del marco de un tal modelo cognitivo de procesos de pensamiento matemático donde podemos analizar en profundidad los obstáculos a la comprensión en matemáticas. Los tratamientos, principalmente dentro de los registros multifuncionales, y las conversiones son fuentes muy independientes de incomprensión. Pero la raíz de los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático reside en la especificidad matemática y la complejidad cognitiva de la conversión y del cambio de representación. No podemos analizar profundamente y comprender el problema de la comprensión en matemáticas para la mayoría de estudiantes si no comenzamos por separar los dos tipos de transformación de representaciones. Esto se hace rara vez, si es que se hace, ya sea porque la conversión se juzga como un tipo de tratamiento o porque se cree que depende de la comprensión conceptual, es decir, una actividad puramente "mental", asemiótica. Y siempre hay buenas razones para eso.

En primer lugar, desde un punto de vista matemático, la conversión se aísla con el propósito de elegir el registro en el que los tratamientos necesarios se pueden realizar de la manera más económica o más poderosa, o de proporcionar un segundo registro que sirva como apoyo o guía para los tratamientos que se realizan en otro registro. En otros términos, la conversión no juega un papel intrínseco en los procesos matemáticos de justificación o demostración. La razón es que estos se logran sobre la base de un tratamiento que se lleva a cabo dentro de un solo registro, principalmente uno discursivo y con mayor frecuencia algún registro monofuncional. De hecho, la conversión no se puede separar del tratamiento porque es la elección del tratamiento lo que hace pertinente la elección del registro.

En segundo lugar, la investigación en educación matemática casi siempre se enfoca en las maneras de enseñar contenidos y procedimientos conceptuales particulares para cada nivel del currículo. Lo que concierne a la actividad matemática se relega a un segundo plano o se explica bien sea mediante la comprensión conceptual (o no comprensión) o mediante un marco pedagógico común sobre la importancia de la actividad del estudiante y del papel de sus representaciones mentales para la comprensión. Esto conduce a eliminar la importancia de la diversidad de registros de representación y a actuar como si todas las representaciones del mismo objeto matemático tuvieran el mismo contenido o como si el contenido de uno se pudiera ver desde otro de manera transparente.

En otras palabras, se supone algún isomorfismo entre representaciones de dos sistemas semióticos diferentes o entre procesos realizados dentro de dos sistemas semióticos. Recuérdese que Piaget hizo de esta búsqueda de isomorfismos uno de sus principios clave de un análisis del desarrollo del conocimiento en los niños, aun cuando, posteriormente, se limitó a la búsqueda de "isomorfismos" parciales (Piaget, 1967a, pp. 73-74, 262-266), y del gran uso teórico que se hizo de ellos tanto en el análisis de la epistemología genética como en ciertos estudios didácticos. Pero, ¿el isomorfismo matemático incluye al isomorfismo cognitivo entre las representaciones semióticas utilizadas? Regresando a lo del segundo plano, las tres características específicas mencionadas antes confinan a la mayoría de los estudiantes a lo que se ha descrito como "compartimentación" del conocimiento matemático.

Cambiar el registro de representación es el umbral de la comprensión matemática para los aprendices en cada etapa del currículo. Ello depende de la coordinación de varios registros de representación y es solo en las matemáticas donde se requiere fuertemente la coordinación de registros. ¿Realmente se tiene en cuenta este requerimiento básico? Muy a menudo, las investigaciones se enfocan en cuáles son las representaciones correctas o cuál sería el registro más accesible para lograr que los estudiantes comprendan verdaderamente y usen algún conocimiento matemático particular. Con esa clase de preocupación, la enseñanza no va más allá de un nivel superficial. ¿Qué harán los estudiantes cuando estén enfrentados a otras representaciones bien diferentes o a situaciones diferentes? Incluso las representaciones auxiliares e individuales, las más icónicas o concretas, tienen que ser articuladas con las representaciones semióticas producidas dentro de sistemas semióticos. El verdadero reto de la educación matemática consiste en desarrollar primero la capacidad de cambiar el registro de representación.

Referencias

Descartes, R. (1954). *The geometry of René Descartes* (trads. D.E. Smith y M.L. Lantham en 1925). New York: Dover.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics, 14*(4), 385-414.

Duval, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

Duval, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(3), 233-261.

Duval, R. (1993a). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Duval, R. (1993b). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*, *31*, 37-61.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1995b). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Maison (eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlín: Springer.

Duval, R. (1996a). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 349-382.

Duval, R. (1996b). Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage. En A. Antibi (ed.), *Actes de la 46ème Rencontre Internationale de la CIEAEM* (pp. 3-15). Toulouse: Université Paul Sabatier.

Duval, R. (1998a). Signe et objet (I): trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences*

Cognitives, *6*, 139-163.

Duval, R. (1998b). Geometry from a cognitive point a view. En C. Mammana y V. Villani (eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999a). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (trad. M. Vega Restrepo). Cali: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (ed.) (1999b). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. Séminaire I.U.F.M., D.R.E.D., Villeneuve d'Ascq.

Duval, R. (2000a). Basic issues for research in mathematics education. En T. Nakahara y M. Koyama (eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 55-69). Hiroshima: Nishiki Print Co. Ltd.

Duval, R. (2000b). Écriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(2), 135-170.

Duval, R. (2003). Langage(s) et représentation(s) dans l'enseignement des mathématiques: deux pratiques et une troisième. En M. Kourkoulos, G. Toulis y C. Tzanakis (eds.), *Proceedings of 3rd Colloquium on the Didactics of Mathematics* (pp. 13-33). Rethymnon: University of Crete.

Frege, G. (1971). Sens et dénotation. En *Écrits logiques et philosophiques* (trad. al francés de Claude Imbert). París: Seuil. (Obra original publicada en alemán: *Sinn und Bedeutung* en 1892).

Hitt, F. (ed.) (2002). *Representations and mathematics visualization*. International Group for the Psychology of Mathematics Education North American Chapter. México: Cinvestav-IPN.

Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8*, 255-271.

Mesquita, A.M. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie: éléments pour une typologie*. Tesis de doctorado. Estrasburgo: IREM.

Pavlopoulou. K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 67-93.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers, II, Elements of Logic*. Hartshorne y P. Weiss (eds.). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Piaget, J. (1923). *Le langage et la pensée chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1926). *La représentation du monde chez l'enfant*. París: Alcan.

Piaget, J. (1967a). *Biologie et connaissance*. París: Gallimard.

Piaget, J. (1967b). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Pluvinage, F. (1990). Didactique de la résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *3*, 7-34.

Rommevaux, M.P. (1998). Le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. 6*, 27-65.

Saussure, F. de (1973). *Cours de linguistique générale*. París: Payot. (Obra original publicada póstumamente por C. Bally y A. Sechehaye en 1916, sobre los cursos de 1906 a 1911).

Schoenfeld, A.H. (1986). On having and using geometric knowledge. En J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 225-264). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.