METÁFORA Y DIAGRAMAS NUMÉRICOS EN LA ACTIVIDAD ARITMÉTICA DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO

Adalira Sáenz-Ludlow

En este artículo se presenta un análisis de la actividad aritmética y semiótica en la que participó todo un grupo de estudiantes de cuarto grado en el marco de un experimento[11] de enseñanza a lo largo de un año escolar. El análisis indica que una metáfora, conceptualizada colectivamente por ellos, medió sus reconceptualizaciones del número natural en términos de unidades y el surgimiento de estrategias numéricas para operar con ellas. Los diagramas numéricos, los argumentos numéricos verbales y otra notación idiosincrática fueron *signos* que usaron para presentar al grupo estrategias de solución.

Al comienzo del año escolar, los estudiantes tenían una *comprensión instrumental*, como la definió Skemp (1987), de la notación de valor posicional y, por tanto, las palabras numéricas y los numerales no tenían una significación cuantitativa para ellos. Como resultado, no tenían la flexibilidad para operar mentalmente con números. Además, su comprensión de los algoritmos también era instrumental; es decir, cuando usaban algoritmos, solo tenían un *reflejo simbólico,* como lo definió Wilder (1968). Para facilitar la comprensión relacional de los estudiantes con respecto a la notación del valor posicional y los algoritmos convencionales, el equipo de investigación preparó tareas aritméticas con anterioridad a la enseñanza. Al comienzo, la profesora del grupo planteó verbalmente estas tareas y las resolvieron mentalmente.

A medida que el año escolar avanzaba, las tareas aritméticas se presentaban en formatos escritos y no convencionales. Esto, junto a la presentación oral, facilitó el surgimiento de una interacción dialógica dinámica entre la profesora/investigadora y los estudiantes, y entre ellos mismos. En esta interacción verbal, llegaron a usar la palabra *partir* en contextos numéricos. Aunque esta palabra tiene connotaciones específicas dentro de la educación matemática debido a su uso por Confrey (1988, 1994), los estudiantes de este grupo usaron espontáneamente la palabra *partir* para significar la separación de un número en unidades, asemejándola a la separación de un objeto en partes. Después

11 Esta investigación fue financiada por la *National Science Foundation* a través de las becas RED 9155734 y RED 9596106 y por la *University of North Carolina* en Charlotte. Los puntos de vista y las conclusiones que se expresan aquí son de la autora y no necesariamente de las instituciones. La autora agradece a la profesora de cuarto grado Cathy Walgamuth. Sin su dedicación y colaboración, el experimento de enseñanza habría sido imposible. La autora también agradece a los revisores anónimos por sus valiosos comentarios a las primeras versiones de este manuscrito.

de que un estudiante usara la palabra *partir* en un contexto numérico, su uso permeó el discurso del grupo para expresar la descomposición de números en unidades. El uso frecuente de dicha palabra indicó que estaban viendo un parecido entre la acción física de separar un objeto en partes y la acción mental de separar un número en unidades.

No es sorprendente ver a estudiantes muy jóvenes que separan números en unidades. La noción de unidad es inherente a la conceptualización del número, y ha sido enfatizada una y otra vez por perspectivas tanto matemáticas como cognitivas. La idea del número como una "multitud de unidades compuestas" se registró primero en el Libro VII de los *Elementos* (Heath, 1956, p. 277). Posteriormente, el matemático Stevin del siglo XVI analizó la función fundamental de la unidad en la constitución del número:

> La parte es del "mismo material" que el todo. La unidad es una parte de una multitud de unidades. Por tanto, la unidad es del 'mismo material' que la multitud de unidades; pero el material de una multitud de unidades es el número. Por tanto, el material de una unidad es el número (citado en Moreno-Armella y Waldegg, 2000, p. 187).

Desde una perspectiva psicológica, McLellan y Dewey (1908) hicieron un análisis de la idea de unidad y su aplicación a métodos para enseñar aritmética. Posteriormente, Steffe, von Glasersfeld, Richards y Cobb (1983) y Steffe y Cobb (1988) investigaron la conceptualización del número natural en términos de unidades hecha por los estudiantes.

La teoría peirceana de *signos* parece ser la más útil para el propósito de explicar la metáfora de partir, hecha por los estudiantes, como un signo que medió su descomposición del número en unidades y su construcción de otros signos, como diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales. Puesto que los estudiantes usaron consistentemente la palabra *partir* para expresar el parecido entre la acción física de separar un objeto en partes y la acción mental de separar un número en unidades, esto se puede denotar como la *metáfora de partir*. El propósito de este artículo es enfocarse en la formación, el uso y el papel mediador de esta metáfora en la actividad aritmética y semiótica de los estudiantes.

Consideraciones teóricas

En el proceso de enseñar hay dos asuntos diferentes pero relacionados que tienen que ver con el hecho de trabajar con un grupo. El primero es la planeación de la enseñanza que el profesor va a realizar; el segundo es la planeación más indirecta de la organización social del escenario del aula, de manera que los pares puedan contribuirse mutuamente en el aprendizaje (Forman y Cazden,

1985). El profesor puede planear con anterioridad la coherencia general de las tareas aritméticas propuestas a los estudiantes, pero la organización social del escenario del aula solo se puede anticipar en cierta medida.

Las construcciones espontáneas de signos hechas por los estudiantes para comunicar su actividad mental y el papel de esos signos en la mediación de su actividad aritmética difícilmente pueden ser planeados o anticipados por el profesor. En consecuencia, si la interacción entre pares ha de influir en la actividad de aprender en el aula, los profesores tienen que modificar su propia agenda de enseñanza para acomodarse a la actividad sígnica que realizan los estudiantes. Para hacer esto, el profesor tiene que reconocer y valorar los avances conceptuales de los estudiantes indicados por sus maneras de hablar y sus iniciativas simbólicas.

Los estudiantes crean signos para representar objetos, ideas, eventos y relaciones. Wilder (1968) llamó *iniciativa simbólica* a la capacidad de crear espontáneamente signos y usarlos, en contraste con el *reflejo simbólico,* que es la mera capacidad de manipular y reaccionar a signos. También sostuvo que la evolución de conceptos matemáticos y la invención de algoritmos eran, de hecho, el resultado de una iniciativa simbólica. Wilder afirmó que memorizar algoritmos y manipular signos y representaciones matemáticas, sin comprender profundamente sus significados, degrada la actividad cognitiva del individuo al nivel de reflejo simbólico. En consecuencia, el individuo parece ser capaz de desempeñarse a lo largo de un continuo simbólico que va desde el nivel más bajo de reflejo simbólico (manipular y reaccionar a signos) al nivel más alto de iniciativa simbólica (crear y usar signos, lo mismo que construir relaciones entre ellos).

La iniciativa simbólica parece requerir una conciencia de: a) el objeto, la idea o el evento que se ha de representar; b) el medio (o signo) elegido para representar el objeto, y c) el efecto de ese signo sobre el propio comportamiento o el de otros. Estos tres elementos también son componentes esenciales de los signos en el sistema semiótico de Peirce.

Uno de sus logros originales estuvo en caracterizar la cognición como un proceso semiótico (Otte, 2001). Sostuvo que "el pensamiento siempre se desarrolla en forma de diálogo, –un diálogo entre diferentes fases del *ego*– de manera que, al ser dialógico, está esencialmente compuesto de signos"[12] (CP 4.6).[13] Aunque Peirce construyó una teoría sistemática de signos, no ha sido

12 El texto original es: "thinking always proceeds in the form of a dialogue—a dialogue between different phases of the ego—so that, being dialogical, [thinking] is essentially composed of signs". Agradezco a Roberto Perry, miembro del Centro de Sistemática Peirceana de Bogotá (Colombia), sus valiosas sugerencias en la traducción de las citas de la obra de Peirce. [N. T.]

13 En este artículo, las citas a los escritos de Peirce siguen esta forma estandarizada: CP 4.7 se refiere al volumen 4, parágrafo 7 de la obra *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, editado por Hartshorne, Weiss y Burks (1931-1966).

el único en reconocer su mediación cognitiva. Vygotsky consideró los signos como herramientas psicológicas dirigidas internamente y con el potencial de influir tanto en la actividad y el comportamiento interno como en el comportamiento de otro (Wertsch, 1985). Piaget (1970) definió la función semiótica de la inteligencia como "la capacidad de representar algo mediante un signo o un símbolo u otro objeto" (p. 45) y consideró que el lenguaje, los gestos, la imitación en diferido y la imaginería mental tienen funciones semióticas. También consideró a las imágenes mentales como el primer paso hacia la simbolización puesto que surgen mediadas por algún tipo de interpretación de los objetos a los que llegan a instanciar. En general, Piaget sostuvo que cualquier signo que represente a un objeto, media el paso del individuo "desde la inteligencia *actuada* hasta la inteligencia *pensada*" (p. 45, énfasis añadido).

Debido a la función que tienen los signos de mediar la actividad cognitiva del individuo, el marco teórico de Peirce parece ser muy útil en este estudio para explicar la iniciativa simbólica que surge en un escenario de aula donde los estudiantes tuvieron la libertad de experimentar con su propio pensamiento. Es decir, este marco nos permite dar cuenta, no solo de los signos creados y usados por los estudiantes de cuarto grado, sino también del papel mediador de estos signos en su actividad aritmética.

En palabras de Peirce, un Signo es "una cosa sea la que sea, real o figurada, que es capaz de adoptar una forma sensorial, es aplicable a una cosa que no sea ella, que es conocida de antemano, y que es capaz de ser interpretada en otro signo que llamo su Interpretante, de manera tal que sobre su Objeto comunica algo que puede no haberse sabido antes. Hay, por lo tanto, una relación triádica entre un Signo, un Objeto y un Interpretante",[14] [15] (MS 654.7, 1910,[16] citada en Parmentier, 1985, p. 26). Es decir, un signo no es un signo en sí mismo a menos que alguien lo interprete. Más aún, cada signo establece un Intérprete al producir en esa persona un Interpretante.

Como lo dijo metafóricamente Wiley (1994), "el Signo y el Interpretante sostienen una relación dialógica en una discusión sobre el Objeto" (p. 14). En otras palabras, para Peirce, la esencia de un Signo reside en su relación de encajamiento con su Objeto y su Interpretante. ¿Esta relación íntima entre Sig-

14 Debido a que Peirce utilizó intencionalmente letras iniciales mayúsculas para las palabras Signo, Objeto e Interpretante para darles prominencia, he conservado esa convención en este artículo.

15 El texto original es: "anything whatever, real or fictile which is capable of a sensible form, is applicable to something other than itself, that is already known, and that is capable of being interpreted in another sign which I call its Interpretant as to communicate something that may have not been previously known about its Object. There is thus a triadic relation between any Sign, an Object, and an Interpretant". [N. T.]

16 En este artículo, las citas a los escritos de Peirce en forma manuscrita siguen esta forma estandarizada: MS 654.7, 1910 se refiere al manuscrito 654, página 7, datado en 1910. La colección manuscrita reside en la *Harvard University* y está organizada en el *Annotated catalogue of the papers of Charles S. Peirce*, editado por R.S. Robin (1967).

no, Objeto e Interpretante permanece estática o evoluciona? Un Interpretante es simplemente una representación interna del signo inicial, que ya es en sí mismo una representación de su Objeto. Así que, un Interpretante es una representación de una representación en la mente del Intérprete que le permite ver el Objeto inicial de una manera nueva. Cuanto más refinada sea la secuencia de los Interpretantes, el Objeto se hará menos contextualizado y más abstracto para el Intérprete.

Sin embargo, los Signos no producen el mismo Interpretante o la misma secuencia de Interpretantes en todos los Intérpretes. Si ese fuera el caso, la comunicación, en general, y la enseñanza de las matemáticas, en particular, sería una empresa directa que no ofrecería desafíos para el profesor y los estudiantes, quienes serían capaces de interpretar los mismos significados para el mismo signo de una vez. Thom (1973) señaló que una expresión que tiene sentido para X podría ser incomprensible para Y debido a la diversidad fundamental de sus universos semánticos. Así que, el desafío en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas parece residir en esta secuencia en curso de Interpretantes, a medida que los signos fluyen en las mentes de los Intérpretes en un continuo que va desde el reflejo simbólico hasta la iniciativa simbólica (usando expresiones de Wilder, 1968).

De manera inherente, los Signos son procesos de representación y significación (Otte, 2001; Sáenz-Ludlow, 2002) en los que Signos e Interpretantes futuros surgirán potencialmente a partir de los existentes que en el proceso se hacen más abstractos para el Intérprete. La potencialidad y la fluidez de los Interpretantes dan cuenta del proceso de *abstracción hipostática* en términos de Peirce, o de *abstracción reflexiva* en términos de Piaget, y de *internalización* en términos de Vygotsky. La interrelación evolutiva entre Objetos, Signos e Interpretantes constituye el proceso de semiosis.

Morris (1938) define la semiosis como un "tener-en-cuenta-mediado" en el que los *mediadores* son Signos, los *tener-en-cuenta-mediados* son Interpretantes, y aquello que se *está teniendo en cuenta* es el Objeto o Clase de Objetos que el Signo puede denotar. En la semiosis, los Intérpretes son los agentes del proceso de representación y significación. Puesto que la misma idea o noción se puede representar a través de signos en diferentes sistemas semióticos, la semiosis también da cuenta de la transformación de signos de un sistema semiótico a otro. Estas transformaciones indican la flexibilidad del proceso de significación (o semiosis) del Intérprete y, por tanto, la flexibilidad de la comprensión resultante.

En consecuencia, la actividad de enseñanza-aprendizaje se puede ver como un proceso de semiosis en el que profesor y estudiantes juntos se convierten en agentes activos (i.e., intérpretes y contribuyentes).

En nuestro caso, las tareas aritméticas que se debían resolver fueron el Objeto de los signos. Los Interpretantes fueron las estrategias de solución generadas por los estudiantes, las cuales fueron mediadas y realizadas por los Signos creados espontáneamente por ellos (metáfora, diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales); y los Intérpretes fueron los estudiantes y la profesora. Concomitante con el proceso de significación de los estudiantes, surgió el proceso de significación de la profesora/investigadora para interpretar la actividad aritmética de los estudiantes; estos dos procesos dependieron uno del otro de manera sinérgica.

Los Signos, según Peirce, son de diferentes clases, dependiendo del tipo de relación que tienen con los objetos a los que representan. Algunos signos se asemejan mucho a sus objetos (*Íconos*), otros tienen solamente un parecido arbitrario y atribuido (*Símbolos*), y otros más tienen alguna suerte de asociación con sus objetos dependiendo del contexto o de algún tipo de conexión (*Índices*). Como lo explica Peirce (1893-1913):

> Los *Íconos* sirven para representar a sus objetos solamente en la medida en que, de suyo, se asemejan a ellos; los Índices representan a sus objetos en independencia de cualquier semejanza con ellos, solo en virtud de conexiones reales con ellos; los *Símbolos* representan a sus objetos en independencia tanto de cualquier semejanza como de cualquier conexión real, solo gracias a que disposiciones o hábitos hechizos de sus intérpretes aseguran que se los entenderá en forma tal (pp. 461-462).17

Peirce caracterizó al signo como un ícono cuando este representa alguna cosa o alguna idea meramente debido a su parecido. Sostuvo que muchos de estos íconos no se basan en la semejanza en el sentido ordinario de la palabra; por ejemplo, los diagramas se parecen a sus objetos, no en la apariencia, sino con respecto a las relaciones de sus partes (Peirce, 1976). Es decir, la iconicidad incluye no solo semejanzas físicas sino también semejanzas de relaciones abstractas. Él distinguió tres tipos de íconos con grados decrecientes de iconicidad: imágenes, diagramas y metáforas. Las imágenes son icónicas inmediatamente y representan a sus objetos por medio de una simple semejanza cualitativa; los diagramas son íconos esquemáticos de relaciones lógicas posibles pero también tienen funciones indéxicas y simbólicas; y las metáforas se consideran como íconos más sofisticados (metaíconos) cuya iconicidad se basa en la semejanza de dos relaciones abstractas (Peirce, 1906a).

Los índices se consideran signos con una función indicativa (señalamiento, ostensión, *deixis*), que es un modo de significación indispensable para la co-

17 El texto original es: "Icons serve to represent their objects only in so far as they resemble them in themselves; Indices represent their objects independently of any resemblance to them, only by virtue of real connections with them; Symbols represent their objects independently alike of any resemblance or any real connection only because dispositions or factitious habits of their interpreters ensure their being so understood". [N. T]

municación, porque ellos llaman la atención sobre objetos particulares pretendidos sin describirlos (Sebeok, 1995; Wertsch, 1981, 1985). Peirce no ha sido el único en dar importancia prominente a los signos indéxicos (Sebeok, 1995). Vygotsky, quien analizó la función indicativa del discurso, consideró que estos signos juegan un papel importante en la cognición, puesto que le permiten al oyente compartir la experiencia del hablante, y median la transición desde el funcionamiento interpsicológico al funcionamiento intrapsicológico, promoviendo en el individuo la descontextualización de situaciones particulares para lograr la generalización (Wertsch, 1985).

Finalmente, un símbolo es diferente de un ícono y de un índice. Un símbolo es un nombre general o una descripción general que significa a su objeto por medio de una asociación de ideas o una conexión atribuida entre el símbolo y el carácter significado. "Los Símbolos nos proporcionan el medio de pensar sobre los pensamientos en formas en las que de otro modo no nos los podríamos imaginar. Nos permiten, por ejemplo, crear Abstracciones, sin las cuales careceríamos de un gran motor de descubrimiento"[18] (CP 4.531).

Cualquier argumento numérico verbal es un ejemplo de símbolo porque sirve funcionalmente para establecer un cierto tren de pensamiento o un hábito para lidiar con números. Cualquier argumento verbal está constituido por términos y proposiciones. Los términos (este, aquel o cualquier palabra suelta) usualmente sirven para evocar una idea, y se consideran Íconos. Las proposiciones se usan para establecer hechos y, por tanto, se consideran Índices. Un argumento, una línea de razonamiento transmitida por términos y proposiciones, es en sí misma un símbolo que transmite una regla de acción o evoca reglas generales (Corrington, 1993; Otte, 2001). En general, se puede decir que los signos no son puramente icónicos, indéxicos o simbólicos, sino que pueden compartir más de una función.

Metodología

Experimento de enseñanza

La metodología conocida como experimento de enseñanza, tal como fue inicialmente conceptualizada por Steffe y sus colegas (Cobb y Steffe, 1983; Steffe, 1983), abarca la interacción social entre estudiante e investigador, aunque en perspectiva se enfoca solamente en el análisis de la actividad aritmética del estudiante. Cuando esta metodología se extiende al aula y cuando se considera el factor social al unísono con la actividad aritmética de los estudiantes (Cobb

18 El texto original es: "Symbols afford the means of thinking about thoughts in ways in which we could not otherwise think of them. They enable us, for example, to create Abstractions, without which we should lack a great engine of discovery". [N. T.]

y Yackel, 1995), el análisis del razonamiento aritmético de los estudiantes ya no se enfoca en especificar los comportamientos cognitivos sino en caracterizar la calidad de sus experiencias aritméticas (Cobb, 2000a) al tener en cuenta los aspectos sociales y culturales de su actividad (Bauersfeld, 1995; Steffe y Thompson, 2000; Van Oers, 2001).

Los patrones de uso de signos y de construcción de signos propios de los estudiantes son inherentes a su experiencia matemática (Ernest, 2002; Godino y Batanero, 2003; O'Halloran, 2003; Sáenz-Ludlow, 1997; Sáenz-Ludlow y Walgamuth, 2001). Esta metodología mantiene su dinámica en la formulación continuada de hipótesis sobre las maneras de entender de los estudiantes, sobre sus acciones matemáticas y sobre sus patrones de uso y creación de signos. Es así, sin importar que el profesor/investigador interactúe con un estudiante, con grupos pequeños o grandes. La esencia de la metodología es facilitar e impulsar la interacción entre estudiante y profesor y entre estudiantes y, en consecuencia, proporcionar muchas oportunidades para que los estudiantes construyan, simbolicen y expliquen sus estrategias numéricas.

Siguiendo la metodología de experimento de enseñanza en el aula, similar a la de Cobb y colegas (Cobb y Steffe, 1983; Cobb, 2000a), condujimos un experimento de enseñanza durante un año con todo un grupo de estudiantes de cuarto grado: seis niñas y ocho niños, que iban a una escuela elemental, considerada de bajo rendimiento académico, en la que la mayoría provenía de un estrato socioeconómico bajo. Más aún, el desarrollo numérico de estos catorce estudiantes estaba por debajo de lo prescrito por los lineamientos curriculares de tercer grado y su clasificación en la prueba estandarizada que presentaron en tercer grado fue muy baja.

El experimento de enseñanza en el que participaron los estudiantes de cuarto grado consistió en episodios diarios de enseñanza en el aula y en entrevistas semanales en pequeños grupos. La profesora de cuarto grado y el equipo investigador formado por la profesora y la investigadora enseñaron la clase de aritmética, y la investigadora condujo las entrevistas semanales en grupos pequeños. Las interacciones dialógicas entre profesora y estudiante y entre estudiantes caracterizaron cada episodio de enseñanza. En cada episodio de enseñanza se prestó especial atención al cambio de los estudiantes al pasar del reflejo simbólico (la reacción pasiva a signos) a la iniciativa simbólica (la creación de signos dinámicos y el uso de signos); también se atendió a la mediación de signos idiosincráticos y convencionales en la reconceptualización que los estudiantes hicieron de número, palabras numéricas, estructura del valor posicional de los numerales y operaciones con números.

Además, en cada episodio de enseñanza, la profesora/investigadora hizo un esfuerzo para ver las estrategias de solución de los estudiantes desde las

perspectivas de ellos. Este esfuerzo hizo posible que la profesora/investigadora planteara preguntas que los estudiantes pudieran interpretar de acuerdo con sus propias experiencias numéricas, y que los animara a formular preguntas por su cuenta y a plantearlas al grupo. Esta estrategia pedagógica está apoyada por la afirmación de Vygotsky (1986/1934) según la cual "el marco del niño es puramente situacional, con la palabra vinculada a algo concreto, mientras que el marco del adulto es conceptual" (p. 133). En consecuencia, para comprender las conceptualizaciones que los estudiantes hacían de las tareas aritméticas, la profesora tuvo que interpretar en paralelo sus propias acciones aritméticas y las de los estudiantes para "ver" la solución de ellos desde la perspectiva de ellos y sostener una interacción dialógica significativa con los estudiantes.

Como parte del proyecto de investigación, la profesora colaboradora participó en un intensivo campo de verano para profesores y niños en el que se usó la metodología de experimento de enseñanza. Durante el año escolar, la profesora colaboradora participó también en cursos enseñados por la investigadora con miras a comprender las bases socioconstructivistas de la metodología. Diariamente, la investigadora y la profesora se involucraron en conversaciones sobre la naturaleza y el propósito de las tareas aritméticas que se propondrían a los estudiantes, las estrategias numéricas de ellos, su uso de los signos y su creación de signos, lo mismo que el papel mediador de esos signos en sus conceptualizaciones.

Actividad matemática en el aula

La enseñanza de la aritmética que estos estudiantes recibieron en los años escolares anteriores se podría caracterizar como tradicional en el sentido de que se esperaba que realizaran cálculos aritméticos usando solo los algoritmos convencionales explicados y modelados por la profesora. Al comienzo del año escolar, tendían a esperar instrucciones específicas o buscaban la aprobación de la profesora, pero cuando ella no les daba tales instrucciones, comenzaron a confiar en su propio razonamiento. Una práctica común en el experimento de enseñanza fue la presentación oral y escrita de tareas aritméticas para que los estudiantes las resolvieran individualmente.

Después de darles tiempo adecuado, la profesora procedía a la discusión con todo el grupo y explicaban y justificaban sus estrategias de solución lo mismo que las maneras que les habían permitido llegar a sus respuestas. Se esperaba que cada estudiante escuchara cuidadosamente la solución de los demás y expresara su acuerdo o desacuerdo con la correspondiente justificación. Pronto los estudiantes comenzaron a asumir la responsabilidad de su pensamiento, y también comenzaron a cambiar las normas sociales y sociomatemáticas del aula (Yackel y Cobb, 1996).

La interacción dialógica mejoraba a medida que los estudiantes percibían que sus contribuciones se tenían en cuenta y sus soluciones eran aceptadas y validadas por los demás. La satisfacción de los estudiantes con el nuevo entorno de enseñanza-aprendizaje en el aula se manifestó en su voluntad de plantear al grupo problemas aritméticos generados por ellos, interpretar estrategias de solución de otros, e incluso imitar algunas de esas estrategias.

Tareas de enseñanza y recolección de información

El equipo de investigación generó tareas de enseñanza con anterioridad al experimento de enseñanza. Sin embargo, algunas tareas se modificaron y se generaron unas nuevas para acomodarse a las necesidades cognitivas de los estudiantes. En general, la generación de tareas de enseñanza y la actividad investigativa evolucionaron conjuntamente de una manera sinérgica. El principio guía para la preparación de tareas de enseñanza fue facilitar a los estudiantes su conceptualización amplia de los números naturales en términos de unidades. Las tareas tenían la intención de ayudarles a construir una comprensión relacional entre la notación del valor posicional y las palabras numéricas, y a reconceptualizar los algoritmos convencionales que ya conocían, lo mismo que a construir, desde la perspectiva de sus propias estrategias numéricas, los que todavía no conocían.

Para analizar la actividad aritmética que evolucionaba en el aula, las estrategias de solución de los estudiantes, su uso de signos y creación de signos, día a día se registraron en video las clases y un observador tomó notas de campo. También se recogieron las hojas de tareas, de borrador y las copias de las transparencias usadas. Toda la información se organizó de manera cronológica.

Análisis

La metodología de experimento de enseñanza sustentó el surgimiento de estrategias numéricas de los estudiantes para resolver tareas aritméticas y animó a los estudiantes a presentar aquellas estrategias al grupo usando lenguaje natural y otros signos idiosincráticos. Las estrategias de los estudiantes fueron validadas cuando otros estudiantes y la profesora las interpretaron, y cuando se aceptaron sin cuestionamiento las explicaciones y representaciones dadas. Es decir, la metodología de experimento de enseñanza promovió y apoyó la actividad semiótica y cognitiva de los estudiantes para reconceptualizar los números y para cambiar su comprensión instrumental por una más relacional.

En los episodios que se analizaron, *P* representa a la profesora/investigadora y una letra mayúscula seguida por una minúscula es la abreviatura del seudónimo de un estudiante (e.g., *Am*), y aparece en letra cursiva en el cuerpo del artículo para evitar confusiones con otras palabras. Para seguir el orden cronológico de los episodios de enseñanza, es importante saber que el año escolar transcurrió desde la mitad de agosto hasta la mitad de junio del año siguiente.

Surgimiento de la metáfora de "partir"

Según el currículo escolar de matemáticas, se enseña a los estudiantes de tercer grado los algoritmos generalmente aceptados para la adición y la sustracción con dos y tres dígitos. En cuarto grado se espera que operen con números de varios dígitos comenzando con unidades de mil. En el estudio que se reporta aquí, era natural indagar sobre las habilidades de cálculo de los estudiantes, y su comprensión de número y de valor posicional. De acuerdo con esto, diseñamos actividades exploratorias como: 1) contar hacia adelante y hacia atrás de diez en diez y de cinco en cinco a partir de cualquier número; 2) aumentar y disminuir de diez en diez, números de dos y de tres dígitos; 3) calcular cuántos dieces, cincos o doses hay entre dos múltiplos de diez; 4) escribir y leer numerales, y 5) hacer cálculos mentales con números de dos y de tres dígitos.

A medida que los estudiantes participaban en estas actividades, llegó a ser evidente que aunque pudieran leer numerales de dos y tres dígitos, sumarlos y restarlos vía el algoritmo generalmente aceptado, y transformar algunas palabras numéricas en numerales, no habían desarrollado un sentido para números mayores a 150. De hecho, al aumentar un número de diez en diez como 23, muchos podían hacerlo hasta llegar a los noventas, en este caso a 93, pero no podían pasar de la centena para llegar a 103. Al agregar cada decena, muchos contaban de uno en uno con los dedos; muy pocos habían construido secuencias de palabras numéricas para apoyar su comprensión numérica.

También nos dimos cuenta de que podían escribir numerales de tres dígitos en cuanto pudieran identificar a partir de las palabras numéricas los dígitos que ocuparían los lugares de las centenas, las decenas y las unidades, como en el caso de doscientos treinta y nueve. Sin embargo, palabras numéricas como doscientos siete presentaban dificultades porque no escuchaban una palabra asociada con el dígito de las decenas. Por consiguiente, varios estudiantes escribían 2007 o 27, en vez de 207.

Nuestra primera meta era proporcionarles experiencias que les permitieran construir relaciones numéricas significativas. Para tal propósito, enfatizamos el conteo y el cálculo mental. También desarrollamos una secuencia de tareas de enseñanza relacionadas con dinero para apoyar las construcciones de unidades

de diez y otras unidades. Estas tareas proporcionaron contextos de la vida real, como la descomposición de 247 dólares en 2 billetes de cien dólares, 4 de diez y 7 de un dólar, u otras combinaciones, como 24 billetes de diez dólares y 7 de un dólar, o 247 billetes de un dólar, o 49 billetes de cinco dólares y 2 de un dólar.

Al comienzo del año escolar se presentaron cálculos numéricos verbales o se usaron formatos escritos no familiares para evitar recuerdos instantáneos de algoritmos memorizados. Entre los formatos utilizados estaban los arreglos rectangulares de 2 por 2. Los números se ubicaban en tres de ellos, mientras que el cuarto rectángulo quedaba vacío para que escribieran la suma o para que encontraran un número faltante cuando se daba la suma.

Al mismo tiempo que los estudiantes se ajustaban a las nuevas expectativas del aula y establecían sus propias maneras de hablar e interactuar, el discurso del aula tomaba nuevos rumbos. La profesora esperaba pensamiento individual y los estudiantes esperaban que ella se interesara de manera auténtica en su pensamiento aritmético. Estas expectativas mutuas los impulsaban a verbalizar no solo sus propias estrategias de solución, sino también sus interpretaciones de las estrategias de solución de otros estudiantes. A la vez, esperaban preguntas de la profesora y de sus pares y las respondían de manera voluntaria.

Hacia la mitad de la tercera semana de clases se les pidió encontrar mentalmente la suma de los números 80, 5 y 15. Se presentaron estos números en un arreglo rectangular y se planteó la tarea usando el retroproyector. Después de darles tiempo de llegar a sus resultados, la profesora procedió a la discusión con todo el grupo. Mientras tanto, experimentaban con lo que pudiera aceptarse como explicación válida y se esforzaban en crear representaciones de sus estrategias de solución para comunicarlas al grupo. Aun cuando podrían haber utilizado el tablero para explicar sus soluciones usando algún tipo de simbolización convencional, decidieron usar solamente lenguaje natural. En el intermedio, la profesora/investigadora no estaba segura de si todos los estudiantes estaban dando sentido a los argumentos verbales presentados y decidió simbolizarlos usando notación convencional que conocían.

Episodio del 8 de septiembre

5	15
80	

P: Por favor, sumen mentalmente estos números. Cuando sientan que están listos para explicar su solución, levanten la mano.

Am: 80 más 5 es 81-82-83-84-85 [contando de uno en uno con los dedos hasta cinco], 85 más 15 es 100.

P: [Escribe 80 + 5 = 85, 85 + 15 = 100 mientras *Am* describe su solución]. ¿Cómo sumaste 85 y 15?

Am: 85 más 5, más 5, más 5. Eso da 15 [mostrando 3 dedos].

P: [Escribe 85 + 5 + 5 + 5 = 100, mientras *Am* describe su solución].

Ra: *Partes* el 15 en 5, 5 y 5.

St: 5 y 15 es 20. 80 y 20 es 100.

P: [Escribe 5 + 15 = 20, 80 + 20 = 100, mientras *St* describe su solución].

Pr: 80 y 15 es 95. 95 y 5 es 100.

P: [Escribe 80 + 15 = 95, 95 + 5 = 100, mientras *Pr* describe su solución].

P: [*Ra* levanta una mano] Bueno *Ra*, ¿qué hiciste?

Ra: 80 más 15 es igual a 95. Parto el 15 en 5, 5 y 5. Entonces 95 más 5 es igual a 100.

P: [Escribe la solución de *Ra* 80 + 15 = 95, 95 + 5 = 100].

Ra, la palabra *partir* es muy buena para hablar de números.

En este episodio vemos a los estudiantes generar sus propias estrategias para sumar números. Esto se debió, en parte, a la falta de instrucciones explícitas para seguir un orden particular para sumar números. El episodio ilustra dos eventos de aprendizaje y enseñanza interrelacionados. Las estrategias que aplicaron para sumar números mentalmente sin usar el algoritmo convencional para la suma indica el evento de aprendizaje. El evento de enseñanza está indicado por el esfuerzo intencional de la profesora para simbolizar argumentos verbales a través de igualdades numéricas convencionales conocidas por los estudiantes a partir de sus experiencias escolares anteriores y por el diagrama numérico espontáneo realizado por la profesora para simbolizar la interpretación que hizo *Ra* de la palabra *partir* en un contexto numérico. Es importante observar que las explicaciones verbales (creación de signos), el diagrama numérico (creación de signos) y la notación aritmética (uso de signos) son signos dentro de tres sistemas semióticos diferentes: el sistema del lenguaje natural, el sistema visual espacial y el sistema de notación matemática.

Una parte significativa del episodio es la interpretación dada por *Ra* al término *partir*. *Ra* interpretó la manera en que *Am* actuó sobre el número 15 como

un partir a 15 en 5, 5 y 5. Luego usó la palabra *partir* en la descripción de su propia estrategia de solución. Finalmente, la profesora intentó espontáneamente simbolizar el "Partes el 15" de *Ra* a través de una suerte de simbolización visual. La profesora también reconoció la introducción que *Ra* hizo de la palabra *partir* en el discurso aritmético del aula. Para darle el crédito, la profesora no solo respetó la contribución de *Ra* sino que también, indirectamente, le hizo saber al grupo que su contribución era valiosa y apreciada.

En este punto es necesario hacer dos observaciones. En primer lugar, solamente en retrospectiva vimos el efecto duradero del uso de la palabra *partir* para generar, interpretar o describir estrategias numéricas y el establecimiento de *partir* como metáfora (metasigno icónico) que medió las maneras de pensar de los estudiantes sobre los números. En segundo lugar, el diagrama numérico simple utilizado por la profesora, en un esfuerzo para aclarar a todos los estudiantes la explicación de *Ra*, llegó a ser imitado por todos, e incluso superado por diagramas numéricos que realizaron de maneras no pretendidas ni imaginadas por la profesora.

A partir del episodio anterior vienen a la mente varias preguntas. ¿Verían otros estudiantes, incluso *Am*, la observación que hizo *Ra* de la semejanza entre el significado de la palabra *partir* en el mundo físico (separación de un objeto en partes) y en el mundo numérico (separación de un número en unidades)? ¿Generarían los estudiantes sus propios diagramas numéricos para representar y comunicar sus propias estrategias de solución?

Las siguientes secciones presentan un análisis de las estrategias de solución de los estudiantes para tareas de adición, división y multiplicación propuestas por la profesora y por ellos. Los episodios elegidos son representativos de la actividad aritmética y semiótica que evolucionaba en este grupo de cuarto grado. El análisis de estos episodios indica que los estudiantes: a) llegaron espontáneamente a usar la palabra *partir* para expresar la idea de separar un número en unidades; b) generaron sus propios diagramas numéricos, y c) muy pocas veces usaron otras palabras para expresar sus acciones mentales de separar un número en unidades. El análisis también indica que la observación de *Ra* sobre la semejanza entre separar objetos en partes y separar números en unidades llegó a ser una metáfora colectiva para mediar las estrategias numéricas de los estudiantes.

Metáfora, diagramas numéricos y adición de números

Tan pronto como la profesora reconoció el uso de la palabra *partir* en la corriente del discurso del aula y los estudiantes comenzaron a ver la semejanza planteada por *Ra* entre la acción física de separar en partes a un objeto y la acción mental de separar en unidades a un número, el uso de la palabra *partir*

llegó a prevalecer, aunque algunos estudiantes esporádicamente utilizaron palabras como *quitar* o *romper*. Esto indica que utilizaron la semejanza planteada por *Ra* (i.e., metáfora de partir) como un recurso de mediación para actuar sobre números, lo mismo que un vehículo para comunicar sus estrategias de solución. Más aún, la metáfora de *partir* disparó el surgimiento de diagramas numéricos idiosincráticos como recurso para producir o comunicar sus estrategias de solución.

En la teoría peirceana de signos, la metáfora y los diagramas numéricos se consideran íconos de diferentes grados de iconicidad. La metáfora de *partir* que usaron los estudiantes fue un ícono para la relación intangible entre la acción física de separar un objeto en partes y la acción mental de separar un número en unidades. Los diagramas numéricos fueron íconos materiales que representaron relaciones numéricas hechas por los estudiantes, pero también tuvieron funciones indéxicas y simbólicas: funciones indéxicas porque indicaron en el mundo físico la lógica de esas relaciones numéricas, y funciones simbólicas porque acarrearon los significados atribuidos a ellos por sus creadores. En otras palabras, los diagramas numéricos se consideran como signos de naturaleza icónica, indéxica y simbólica que representan objetos conceptuales (e.g., relaciones numéricas que surgen de tareas aritméticas).

El siguiente episodio ilustra cómo la metáfora de *partir* medió las conceptualizaciones de los estudiantes acerca de unidades de diez, de veinte y de veinticinco para hallar la suma de 26 y 25 sin usar el algoritmo de adición. También podemos observar los primeros intentos de los estudiantes por transformar argumentos numéricos en diagramas numéricos.

Episodio del 20 de octubre

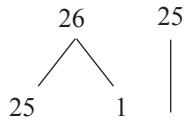
P: Si les pido sumar mentalmente 25 y 26, ¿qué harían?

[Varias manos se levantan inmediatamente].

Mi: 6 y 4 es 10 unos, se puede hacer un diez. 2 dieces y 2 dieces es 4 dieces, luego eso es 5 dieces; es decir 50. 50 y 1 es 51.

Pr: *Parto* 20 en 2 dieces y 20 en 2 dieces; 6 y 5 es 11. 5 dieces es 50 y 1 es 51.

Ra: 25 y 25 es 50 y 1 es 51. Voy a mostrarles [pasa al tablero y hace el siguiente diagrama numérico]



Li: 5 más 6 es 11. 2 dieces y 2 dieces es 4 dieces, otro 10 es 50. 1 más es 51.

St: Quito 6 de 26 y quito 5 de 25. 20 y 20 es 40. 6 y 4 es diez. 1 más es 51.

En el episodio anterior, algunos estudiantes separaron los números 26 y 25 en unidades de diez y uno; otros estudiantes conceptualizaron los mismos números en unidades de veinte, veinticinco y uno. Aunque no todos los estudiantes usaron la palabra *partir* para describir su separación de los números en unidades, la consistencia y la claridad de sus explicaciones y de sus énfasis orales sobre las unidades que usaron indican que la metáfora de *partir* estaba mediando sus acciones mentales. En otras palabras, dicha metáfora fue un recurso de conceptualización para los estudiantes.

Finalmente, en este episodio *Ra* transformó su argumento numérico verbal en un diagrama numérico para indicar la separación de 26 y la no separación de 25. Hasta este momento, *Ra* era el único estudiante que se estaba moviendo claramente a través de sistemas semióticos, es decir, el sistema del lenguaje natural y el sistema visual y espacial. También parece como si *Ra* estuviera tratando de imitar el diagrama numérico de la profesora. La transformación de un signo en otro es importante porque cuando los estudiantes lo hacen, esto indica no solo la flexibilidad de su comprensión sino también su capacidad intelectual de ver la misma estrategia de solución incorporada en dos sistemas diferentes de signos.

Para consolidar más las conceptualizaciones del número que tenían los estudiantes en términos de unidades, aumentamos el tamaño de los números en nuestra rutina diaria de cálculo mental. El siguiente episodio muestra diferentes maneras en las que sumaron mentalmente 260 y 60.

Episodio del 27 de octubre

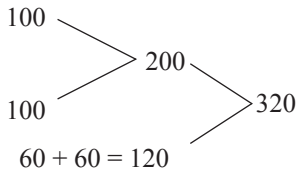
P: Así que, niños, doscientos sesenta y sesenta más, ¿cuánto es? Háganlo mentalmente. [Después de aproximadamente un minuto, se levantan varias manos para indicar que ya tienen sus resultados. La profesora se desplaza por el salón y los estudiantes le dicen en voz baja sus respuestas. Ella da de inmediato a cada uno algún tipo de retroalimentación verbal. Luego la profesora les pide que expliquen sus estrategias de solución al grupo].

Mi: Tomo 2 sesentas para tener ciento veinte. Sumo cien [de ciento veinte] con los 2 cientos [de doscientos sesenta] y se obtiene 3 cientos. Veinte más es trescientos veinte

Ra: Rompí a 260 en 60 y 200. 60 y 60 es 120. Sumo 120 y 200. 100 y 200 eso sería 300 y con el 20 sería 320

Ho: 260 es 200 y 60. *Parto* a 60 en 30 y 30 y el otro 60 en 30 y 30. 30 y 30 es 60 y 30 es 90 y 30 es 120. 200 y 120 es 320

Ri: *Parto* a 260 en 100 y 100 y 60. 60 y 60 es 120. 100 y 100 es 200. 200 y 120 es 320 [va al tablero y hace el siguiente diagrama numérico].



En este episodio, las acciones de partir y reunir que los estudiantes realizan parecen estar mediadas por la semejanza que han conceptualizado entre las acciones físicas de separar un objeto en partes y reunir esas partes para constituir un nuevo objeto y las acciones mentales de separar dos números en unidades y reunirlas para constituir su suma. De nuevo, en este episodio los estudiantes pusieron un énfasis oral en las unidades de diez, de cien, de sesenta y de treinta, indicando su flexibilidad para ver los mismos números 260, 120, 60 y 320 como constituidos por unidades en más de una manera. Esto indica que en las mentes de los estudiantes, las unidades no eran entidades estáticas que constituyeran números de alguna manera predeterminada sino que los números, por el contrario, se podían reconceptualizar una y otra vez en términos de diferentes unidades, de acuerdo con metas autogeneradas para construir estrategias particulares de solución.

Es interesante observar que el diagrama numérico de *Ri* representa no solo a sus acciones de partir sino también a sus acciones de partir y reunir. Los otros estudiantes también estaban partiendo y reuniendo de acuerdo con sus metas autogeneradas, pero no representaban estas acciones por medio de diagramas numéricos. *Ri* también tradujo su argumento numérico verbal en un diagrama numérico.

Una pregunta que surge es si la conceptualización del número en términos de unidades media o dificulta la conceptualización de otras operaciones como la división y la multiplicación. Las siguientes dos secciones indican que la metáfora de partir medió tales operaciones e incluso contribuyó a anticipar los algoritmos convencionales para la división y la multiplicación.

Metáfora, diagramas numéricos y división de números

Dada la familiaridad de los estudiantes con el sistema monetario del dólar, preparamos una variedad de materiales didácticos y tareas aritméticas usando el concepto de dinero, tanto para facilitar la conceptualización del número en términos de unidades, como para comprender mejor el sistema de notación del valor posicional y su relación con los algoritmos convencionales. Tan pronto como los estudiantes llegaron a confiar en sus propias estrategias numéricas y maneras de comunicar su pensamiento al grupo, no fue sorprenderte verlos proponiendo problemas.

En el siguiente episodio, *Pr* toma un facsímil de un billete de mil dólares de uno de los "bancos" (un banco es una caja plástica que contiene facsímiles de billetes organizados por denominación) y pide a sus compañeros encontrar el número de billetes de cincuenta dólares por los cuales se podría cambiar este billete. En realidad, a través de la noción de cambio, *Pr* pidió implícitamente

que los demás reconstituyeran multiplicativamente a mil dólares en términos de unidades de cincuenta o que dividieran a mil por cincuenta. La pregunta de *Pr* indica una gran intuición numérica de parte suya, dado que la multiplicación y la división son operaciones inversas. Decimos intuición porque no creemos que él fuera consciente de este hecho.

Se animó a los estudiantes para que respondieran la pregunta de *Pr* usando lápiz y papel. Después de trabajar en sus puestos durante cinco minutos, presentaron sus soluciones. Estas soluciones fueron mediadas por el conteo doble usando billetes y dedos lo mismo que diagramas numéricos. A continuación, se describen algunas de dichas soluciones.

Episodio del 28 de octubre

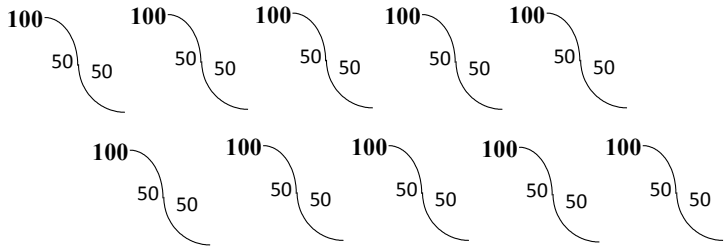
Pr: Señora W, tengo una pregunta para el grupo. Si uno va al banco y cambia un billete de mil dólares, ¿cuántos de cincuenta recibirá?

P: *Pr* ¡esa es una buena pregunta! ¿Qué tal si todos tratamos de resolverla? Usen lápiz y papel si quieren.

Am: 100 es 1, 200 es 2, 300 es 3, 400 es 4, 500 es 5, 600 es 6, 700 es 7, 800 es 8, 900 es 9, 1.000 es 10. 10 cientos es un mil [mostrando las dos manos extendidas]. Dos cincuentas hacen un ciento. Dos es 1 [levantando el dedo meñique de su mano izquierda], cuatro es 2 [levantando el dedo anular de su mano izquierda], seis es 3 [levantando el dedo del corazón de su mano izquierda], ocho es 4 [levantando el dedo índice de su mano izquierda], diez cincuentas es 5 cientos [levantando el dedo pulgar de su mano izquierda]. [Mira su mano derecha] lo duplicas hasta 20 cincuentas en 10 cientos. Así que hay 20.

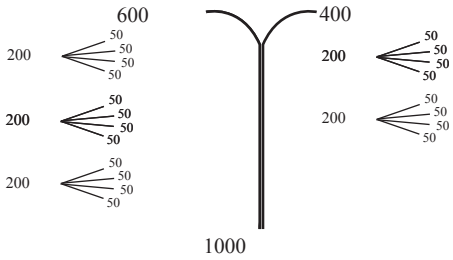
Js: Bueno, sé que puedo *partir* a mil en 10 cientos [toma 10 billetes de cien dólares de su "banco"]. 2 cincuentas [pone su primer billete de cien dólares], 4 [pone su segundo billete de cien dólares], 6 [pone su tercer billete de cien dólares], …, 18 [pone su noveno billete de cien dólares], 20 [pone su décimo billete cien dólares]. 20 cincuentas es mil.

Ra: Voy a pasar al tablero [dibuja su diagrama]



Parto mil en 10 cientos [mostrando los cientos en los diagramas numéricos] y cada ciento en 2 cincuentas [mostrando los cincuentas en cada 100 del diagrama numérico]. Hay 2-4-6-8-10 cincuentas aquí [mostrando los cincuentas de la primera fila de su diagrama numérico] y 10 más aquí [mostrando los cincuentas de la segunda fila de su diagrama numérico], es decir, 20 cincuentas.

Ri: [Dibuja el siguiente diagrama en el tablero]



Parto 1 mil en 6 cientos y 4 cientos. 6 cientos es 2 cientos, 2 cientos y 2 cientos. 4 cientos es 2 cientos y 2 cientos. Hay 4 cincuentas en 2 cientos. 4-8-12 [mostrando los cincuentas en el lado izquierdo de su diagrama numérico]. 4-8 aquí [mostrando los cincuentas en el lado derecho de su diagrama numérico]. 12 y 8 es 20. 20 cincuentas.

Las estrategias de solución de los estudiantes indican que ellos parten secuencialmente o cambian mil dólares en 10 cientos o en 5 doscientos, cada ciento en 2 cincuentas, y cada doscientos en 4 cincuentas. Sin embargo, fueron diferentes los medios que usaron para presentar la acción de partir o cambiar un billete de mil dólares. *Am* indicó verbalmente la acción de partir un billete de mil dólares en billetes de cien y usó los dedos para conteo doble. Hizo conteo doble de los cincuentas hasta llegar a 500 (usando la mano izquierda) y luego duplicó su conteo doble cuando se dio cuenta de que los dedos de la mano derecha le servían para seguir contando los grupos de cien que hay en mil. Por su parte, *Js* indicó que podría partir un billete de mil dólares por medio de un cambio real en diez billetes de cien y también partir cada billete de cien en dos billetes de cincuenta mediante conteo doble, usando los billetes de cien para llevar la cuenta.

Las estrategias de solución de *Am* y *Js* fueron mediadas por la metáfora de *partir* y el uso de dedos o billetes. El *movimiento* real de dedos y billetes fueron signos indéxicos que asociaron los dedos y los billetes con los registros del conteo. Estas estrategias de solución se presentaron en la forma de argumentos numéricos verbales (signos de naturaleza simbólica) mediados por la metáfora de *partir*.

Aunque *Ra* usó un diagrama numérico para comunicar su estrategia de solución, esta es, en esencia, similar a las de *Am* y *Js*. La descomposición que hizo *Ra* de un billete de mil dólares en 10 cientos también estuvo mediada por la metáfora de *partir*, pero en vez de usar dedos o billetes, representó los 10 cientos haciendo un diagrama numérico con dos filas de 5 cientos cada una. En vez de conteo doble para contar los cincuentas, utilizó segmentos curvos que salían de cada ciento. Los dos espacios determinados por cada segmento se usaron para representar dos cincuentas. Finalmente, contó los cincuentas de una fila y duplicó ese número ya que la segunda fila tenía tantos cientos como la primera.

La estrategia de solución de *Ri* es un poco diferente de la solución de los demás. Utilizó recursivamente la metáfora de partir y creó un diagrama numérico. Primero, separó mil en una unidad de seis cientos y una unidad de cuatro cientos. Luego, partió de nuevo la unidad de seis cientos en 3 unidades de dos cientos y la unidad de cuatro cientos en 2 unidades de dos cientos; finalmente, partió cada unidad de dos cientos en 4 unidades de cincuenta. En los diagramas numéricos de *Ri* y *Ra*, los espacios, las líneas y los numerales jugaron papeles simbólicos y también indéxicos.

Ra y *Ri* presentaron primero sus estrategias de solución a través de diagramas numéricos; luego, tradujeron sus diagramas numéricos en argumentos numéricos verbales. Sus transformaciones de signos de un sistema semiótico a otro indican tanto su capacidad de coordinar dos representaciones diferentes de la misma estrategia de solución como la flexibilidad de su comprensión. En general, estas estrategias de solución no son más que la construcción de Interpretantes autodirigidos, arbitrados por su propia iniciativa simbólica, es decir, la metáfora de partir, diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales.

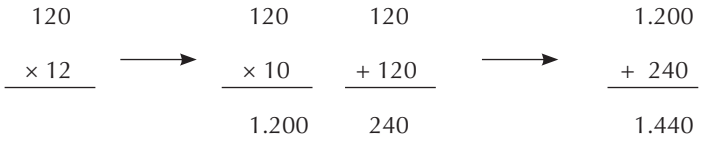
Metáfora, diagramas numéricos y multiplicación de números

Los problemas enunciados en palabras fueron un componente esencial de las tareas de enseñanza generadas para el experimento de enseñanza. En algunos casos, la profesora pidió a los estudiantes generar problemas enunciados en palabras, similares a los que se les propusieron. En otros casos, se les planteó un problema enunciado en palabras, y se les pidió formular preguntas usando la información dada. Por ejemplo, la profesora les dijo: "La guía telefónica de una aldea tiene 120 nombres en cada página". Luego de una discusión, estuvieron de acuerdo en preguntar sobre "el número de nombres en 12 páginas". La profesora escribió luego el siguiente problema en el retroproyector. "La guía telefónica de una aldea tiene 120 nombres en cada página. ¿Cuántos nombres hay en 12 páginas?".

A continuación se analizan cuatro de las soluciones a este problema. Todos trabajaron por su propia cuenta usando papel y lápiz, y después usaron el tablero para presentar sus soluciones a todo el grupo. Las explicaciones de los estudiantes indican que sus estrategias de solución estuvieron mediadas por la metáfora de partir.

Episodio del 4 de mayo

Solución de *Ri:*



Sé que tengo que multiplicar a 120 por 12. Pero 12 es 10 y 2. Sé que 10 por 120 es 1.200. 2 por 120 es 120 y 120. Eso es 240. Luego sumé 1.200 y 240.

P: ¿Cómo sabes que 10 por ciento veinte es mil doscientos?

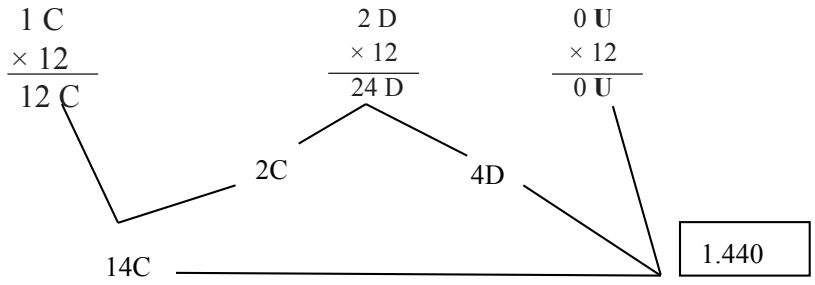
Ri: *Parto* a ciento veinte en cien y veinte. 10 cientos es mil. 5 veintes es 1 ciento y 10 veintes es 2 cientos. Es decir, mil doscientos.

P: ¿Cómo sumaste mil doscientos y doscientos cuarenta?

Ri: Mil doscientos y doscientos es mil cuatrocientos. Cuarenta más es mil cuatrocientos cuarenta.

Ri partió primero el multiplicador 12 en 10 y 2 y luego tomó diez veces a 120; también sumó 120 dos veces para encontrar dos por 120. Luego sumó los dos resultados anteriores. El acto de *Ri* de partir el multiplicador lo condujo a hallar el resultado en tres pasos representados en su diagrama numérico. También usó el acto de partir el multiplicando, 120, en 100 y 20 para describir su estrategia para encontrar el producto de 10 y 120. Al partir el multiplicador, anticipó la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición y la usó para hallar su resultado final sumando los dos productos. Esta anticipación intuitiva de la propiedad distributiva también lo condujo a anticipar una versión inicial del algoritmo convencional para la multiplicación. *Ri* representó su estrategia de solución usando signos de dos sistemas semióticos diferentes. El primer signo fue su diagrama numérico y el segundo su argumento numérico verbal que fue expuesto posteriormente cuando interactuó con la profesora. Estos dos signos y la transformación del primero en el segundo indican la iniciativa simbólica de *Ri* para multiplicar dos números sin necesidad de una regla memorizada.

Solución de *Ho*:



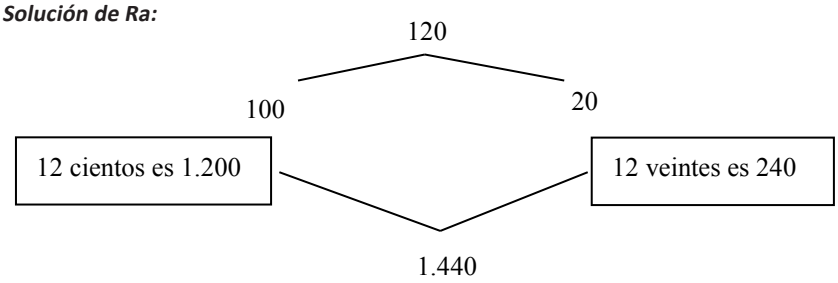
P: ¿Podrías explicarnos lo que hiciste?

Ho: *Partí* a ciento veinte en 1 ciento [1C], 2 dieces [2D] y 0 unos [0 U]. 12 por cien es 12 cientos. 12 por 2 dieces es 24 dieces [24D]. 12 por 0 unos es 0 unos [0 U]. Como ves, 24 dieces es 2 cientos [2C] y 4 dieces [4D] porque 10 dieces es 1 ciento. En total, tengo 14 cientos [14C], 4 dieces [4D] y 0 unos [0 U]. Diez cientos es mil. O sea, mil, cuatrocientos cuarenta unos.

A diferencia de *Ri*, *Ho* partió el multiplicando en vez de hacerlo con el multiplicador. Usó una notación acordada por los estudiantes en clases anteriores para referirse a unidades de cien como C, unidades de diez como D, y unidades de uno como U. *Ho* encontró tres productos y los sumó utilizando su conocimiento consolidado sobre unidades. Descompuso a 120 en 1 ciento (1C), 2 dieces (2D), y 0 unos (0U), multiplicó cada una de estas unidades por 12 y obtuvo 12C, 24D y 0U. Finalmente, partió 24 dieces (24D) en 2 cientos (2C) y 4 dieces (4D), y representó su acto de partir por medio de un diagrama numérico. También usó diagramas numéricos complementarios para representar la reunión de 12 cientos (12C) y 2 cientos (2C) en 14 cientos (14C), lo mismo que la reunión de 14 cientos (14C), 4 dieces (4D) y 0 unos (0U) en 1.440. Esos resultados indican que tenía una idea clara y básica de multiplicación que iba más allá de la simple memorización de las tablas de multiplicar.

Después de presentar su sofisticado diagrama numérico, él pudo transformarlo en un argumento numérico verbal mediado por la metáfora de partir. Su capacidad de transformar su diagrama numérico (signo de naturaleza icónica, indéxica y simbólica) en un argumento numérico verbal (signo simbólico) indica su profunda comprensión de número en términos de unidades, lo mismo que su iniciativa simbólica. *Ho* también pudo anticipar intuitivamente tanto la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición como una versión inicial del algoritmo convencional para la multiplicación.

Solución de Ra:



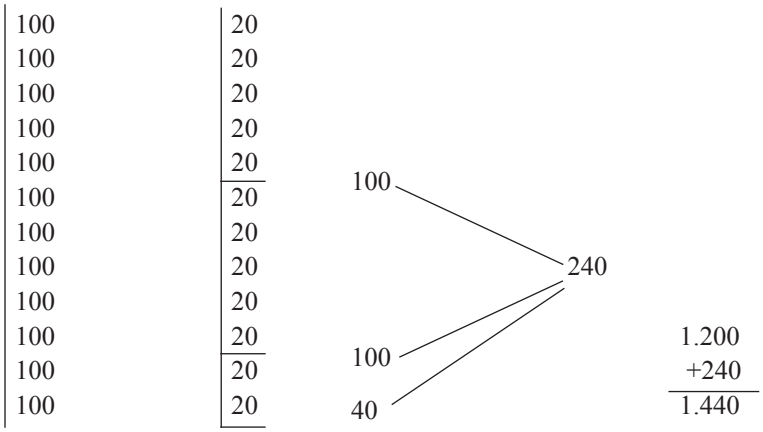
P: ¿Podrías explicarnos lo que hiciste?

Ra: *Partí* a 120 en 100 y 20. 12 cientos es mil doscientos porque 10 cientos es mil. 12 veintes es… (permanece en silencio durante varios segundos), 5 veintes es 100, 10 veintes es 200, 2 veintes es 40. Es 240. 1.200 y 240 es 1.400 y 40 más. Esto es 1.440.

La solución de *Ra* es similar a la de *Ho* porque él también partió el multiplicando. Tal acto de partir lo condujo a hallar el resultado final sumando dos productos. Esta estrategia también indica la noción intuitiva de *Ra* de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. Su diagrama numérico fue más simplificado y abstracto que los de *Ri* o *Ho* porque él sabía tanto el resultado de iterar a 100 doce veces como el resultado de iterar a 20 doce veces. Su diagrama numérico y su argumento numérico verbal estuvieron mediados por su metáfora de partir. Su argumento numérico verbal (signo simbólico) transforma las relaciones numéricas sintetizadas en su diagrama numérico. La transformación de *Ra* de un signo en otro indica su iniciativa simbólica y su flexibilidad para expresar la misma estrategia de solución usando signos en dos sistemas semióticos.

Para resolver el mismo problema, *Js* separó a 120 en un 100 y un 20 e iteró estas unidades para sumar finalmente los dos resultados.

Solución de *Js:*



> *Partí* a 120 en 100 y 20. 12 por ciento veinte es 12 cientos y 12 veintes. [Él muestra la columna de doce cientos] … 100-200-300-…-1.000-1.100-1.200. [Muestra la columna de doce veintes]… 20-40-60-80-100; 20-40-60-80-100; 20-40. 100-200-240. Suma 1.200 más 240. 0 unos y 0 unos es 0 unos; 0 dieces y 4 dieces es 4 dieces; 2 cientos y 2 cientos es 4 cientos; 1 mil es 1 mil. Eso da mil cuatrocientos cuarenta.

Js presentó su diagrama numérico y su argumento numérico simultáneamente. Partió a 120 en unidades de un 100 y un 20 e iteró a 100 doce veces y a 20 doce veces por medio del conteo. Tan pronto como escribió los cientos y los veintes, su diagrama numérico medió su conteo. Más aún, su descripción de la adición de 1.200 y 240 indica que usó el algoritmo convencional haciendo énfasis en las unidades representadas por dígitos específicos. Parece ser que *Js* también tenía una conciencia intuitiva de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. El diagrama numérico y el argumento numérico verbal de *Js* se mediaron mutuamente de manera sinérgica para construir su estrategia de solución.

La iniciativa simbólica de *Js* parece ser algo menos sofisticada que la de *Ri*, *Ho* y *Ra*. Su estrategia de solución se basó en conteo y adición, y su diagrama numérico y argumento verbal no eran independientes entre sí. En contraste, los diagramas numéricos sofisticados de *Ri*, *Ho* y *Ra* no requerían argumento verbal alguno y llegaron a ser objeto de transformación en argumentos numéricos verbales.

En resumen, los diagramas numéricos de los estudiantes eran signos (con funciones icónicas, indéxicas y simbólicas) que representaban sus estrategias de solución. Estos signos eran icónicos porque representaban sus acciones de partir y reunir; eran indéxicos porque indicaban la lógica de las estrategias mentales de los estudiantes; y simbólicos porque representaban la síntesis del pensamiento numérico de los estudiantes. Sus argumentos numéricos verbales eran de naturaleza simbólica con componentes icónicos e indéxicos (i.e., términos y frases, respectivamente).

Aunque al comienzo del año escolar, los estudiantes expresaron sus estrategias de solución solo a través de argumentos numéricos verbales, más bien pronto comenzaron a construir diagramas numéricos. Al comienzo, estos diagramas tenían una relación simbiótica con los argumentos numéricos verbales, pero gradualmente se generaron independientes entre sí, y se convirtieron en objeto de transformación. La transformación de signos entre sistemas semióticos indicó la sofisticación de la actividad cognitiva y semiótica de los estudiantes. A través de su propia creación de signos, los estudiantes manifestaron su iniciativa simbólica (en el sentido de Wilder, 1968) y el papel de estos signos para mediar un cambio desde una comprensión instrumental de los números a una más relacional.

Discusión

Las expectativas de la profesora/investigadora con respecto a la responsabilidad del pensamiento individual y del trabajo individual fomentaron un cambio progresivo y positivo en el discurso del aula y en la actividad aritmética y semiótica de los estudiantes de cuarto grado. En medio de la interacción entre estudiantes y de la profesora con ellos, uno incorporó la palabra *partir* para describir la estrategia de solución de otro. El estudiante usó esta palabra, que evoca la acción física de separar un objeto en partes, para describir la acción mental de separar un número en unidades. Esta semejanza entre las acciones físicas y mentales se propagó en el grupo, y la noción de partir se convirtió en una metáfora (metasigno icónico) que medió la descomposición de números en unidades. Esta metáfora fundamentó las estrategias de solución de los estudiantes para las tareas aritméticas y medió la creación de diagramas numéricos (signos de naturaleza icónica, indéxica y simbólica) y los argumentos numéricos verbales (signos de naturaleza simbólica).

Vale la pena observar que al comienzo del año escolar la profesora/investigadora usó un diagrama numérico simple para facilitar la comprensión de los estudiantes de un argumento numérico verbal presentado por otro estudiante. Aunque el diagrama numérico de la profesora tenía un propósito explicativo más que de enseñanza, parece ser que influyó en los estudiantes, quienes llegaron a generar diagramas más sofisticados que superaron la simplicidad de aquél. Además, tradujeron diagramas numéricos en argumentos numéricos verbales. Esto indica su capacidad de presentar la misma estrategia de solución a través de signos en diferentes sistemas semióticos y al mismo tiempo el surgimiento de su comprensión relacional.

La creación de la metáfora de partir y de los signos subsiguientes por parte de los estudiantes constituye su iniciativa simbólica. La metáfora de partir medió la separación mental de números en unidades y el surgimiento de diversas y flexibles estrategias de solución que posteriormente se representaron a través de signos como diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales. Es decir, la iniciativa simbólica de los estudiantes fue en esencia el componente semiótico de su actividad aritmética.

Permitirles la libertad de conceptualizar y comunicar sus propias estrategias de solución usando su propia iniciativa simbólica fue productivo porque estimuló su actividad cognitiva en vez de aceptar soluciones prefabricadas, separadas de sus propias experiencias numéricas. Esto no quiere decir que el simbolismo convencional y los algoritmos no tengan lugar en el discurso del aula o que todos deban operar por medio de la metáfora de partir, diagramas numéricos y argumentos numéricos verbales. Lo que el análisis indica es que cuando la

profesora apoya la iniciativa simbólica de los estudiantes, ellos son capaces de cambiar su comprensión instrumental (mediada por un reflejo simbólico) por una comprensión relacional (mediada por su propia iniciativa simbólica).

El análisis también indica que cuando el discurso aritmético del aula está basado en el diálogo en vez del monólogo, el grupo construye signos (metáforas, diagramas numéricos y argumentos numéricos) espontáneamente que llegan a mediar sus conceptualizaciones. Por otra parte, cuando la profesora facilitó y tuvo en cuenta la iniciativa simbólica de ellos, se cambió la actividad de enseñanza de ella por una actividad colaborativa de enseñanza-aprendizaje que los involucró a todos. La transformación de los signos de un sistema semiótico a otro, realizada por los estudiantes, fue en esencia el nivel más sofisticado de su iniciativa simbólica y actividad aritmética.

En general, puede decirse que la iniciativa simbólica (i.e., actividad semiótica autogenerada) de este grupo de bajo rendimiento de estudiantes de cuarto grado puede tener lugar también en escenarios de aula en los que prevalezca la interacción dialógica entre estudiantes y profesor, y en los que el profesor reconozca, valore y apoye las metáforas y signos idiosincráticos que surjan como resultado de la participación y la colaboración activa de todos.

Referencias

Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in mathematics classrooms: Their function and their effect. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meanings* (pp. 271-291). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. (2000a) Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (2000b). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematics learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17-36). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Steffe, L.P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, *14*(2), 83-94.

Cobb, P. y Yackel, E. (1995). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. En D.T. Owens, M.K. Reed y G.M. Millsaps (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-29). Columbus, OH: ERIC/CSMEE.

Confrey, J. (1988). Multiplication and splitting: Their role in understanding exponential functions. En M. Behr, C. LaCampagne y M. Wheeler (eds.), *Proceedings of the Tenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 250-259). DeKalb, IL: Northern Illinois University.

Confrey, J. (1994). Splitting, similarity, and rate of change: A new approach to multiplication and exponential functions. En G. Harel y J. Confrey (eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 291-330). Albany, NY: State University of New York Press.

Corrington, R.S. (1993). *An introduction to C.S. Peirce*. Boston: Rowman & Littlefield Publishers.

Ernest, P. (2002, julio). *A semiotic perspective of mathematical activity*. Ponencia presentada en el Grupo de Discusión "Semiotics in Mathematics Education Research" en 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Norwich, UK.

Forman, E.A. y Cazden, C. (1985). Exploring Vygotskian perspectives in education: The cognitive value of peer interaction. En J.V. Wertsch (ed.), *Culture communication and cognition: Vygotskian perspectives* (pp. 323-347). Nueva York: Cambridge University Press.

Godino, J. y Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 149-168). Ottawa, Ont.: Legas.

Heath, T.L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (traducción del texto de Heiberg, con introducción y comentario; 2ª ed. revisada). Nueva York: Dover Publications.

McLellan, J.A. y Dewey, J. (1908). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. Nueva York: D. Appleton and Company.

Moreno-Armella, L.E. y Waldegg, G.C. (2000). An epistemological history of number and variation. En V. Katz (ed.), *Using history to teach mathematics: An international perspective* (pp. 183-190). MAA Notes 51. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Morris, C.V. (1938). *Writings on the general theory of signs*. Chicago: Chicago University Press.

O'Halloran, K.L. (2003). Implications of mathematics as a multisemiotic discourse. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 185-214). Ottawa, Ont.: Legas.

Otte, M. (2001, julio). *Mathematical epistemology from a semiotic point of view*.

Ponencia presentada en el Grupo de Discusión "Semiotics in Mathematics Education Research" en 25th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Utrecht, The Netherlands.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 11-38.

Parmentier, R.J. (1985). Signs' place in medias res: Peirce's concept of semiotic mediation. En E. Mertz y R.J. Parmentier (eds.), *Semiotic mediation: Sociocultural and psychological perspectives* (pp. 23-48). Orlando, FL: Academic Press.

Peirce, C.S. (1867). Questions concerning certain faculties claimed by man. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (1991, pp. 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Peirce, C. S. (1893-1913). *The essential Peirce: Selected philosophical writings* (vol. 2; editado por *Peirce Edition Project*). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1903). *The three normative sciences*. *The essential Peirce* (vol. 2, 1893-1913; editado por *Peirce Edition Project*, pp. 196-207). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1906a). Prolegomena to an apology for pragmaticism. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (pp. 249-252). Chapel Hill, North Carolina: The University of North Carolina Press.

Peirce, C.S. (1906b). Pragmatism in retrospect: A last formulation. En J. Buchler (ed.), *Philosophical writings of Peirce* (1955) (pp. 269-289). Nueva York: Dover Publications.

Peirce, C.S. (1908). Excerpts from letters to Lady Welby. En Peirce Edition Project (ed.), *The Essential Peirce* (vol. 2, pp. 478-491). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers*, *vol. II, Elements of Logic*. (editado por C. Hartshorne y P. Weiss). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1956). The essence of mathematics. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, (vol. 3, pp. 1773-1783). Nueva York: Simon and Schuster.

Peirce, C.S. (1976). The new elements of mathematics (NEM), (vol. 4, *Mathematical Philosophy*, editado por Carolyn Eisele). The Hague: Mouton and Co. B. V. Publishers.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Nueva York: Columbia University Press.

Sáenz-Ludlow, A. (1997). Iconic means in children's understanding of the division algorithm. En C.W. Spinks y J. Deely (eds.), *Semiotics* (pp. 118-130). Toronto, Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (2002). Sign as a process of representation: A Peircean perspective. En F. Hitt (ed.), *Representations and mathematics visualization* (pp. 277-296). México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.

Sáenz-Ludlow, A. y Walgamuth, C. (2001). Question-and diagram-mediated mathematical activity: A case in a fourth-grade classroom. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *23*(4), 27-40.

Sebeok, T. (1995). Indexicality. En K.L. Ketner (ed.), *Peirce and contemporary thought* (pp. 222-242). Nueva York: Fordham University Press.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steffe, L.P. (1983). The teaching-experiment methodology in a constructivist research program. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (eds.), *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education* (pp. 469-471). Boston, Massachusetts: Birkhäuser.

Steffe, L.P. y Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetic meanings and strategies*. Nueva York, New York: Springer-Verlag.

Steffe, L.P. y Thompson, P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L.P., von Glasersfeld, E., Richards, J. y Cobb, P. (1983). *Children's counting types: Philosophy, theory and applications.* Nueva York: Praeger.

Thom, R. (1973). Modern mathematics: Does it exist? En G. Howson (ed.), *Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education* (pp. 194-212). Cambridge: Cambridge University Press.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 59-85.

Vygotsky, L.S. (1986). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. (Obra original publicada póstumamente en ruso en 1934 y en inglés en 1962).

Wertsch, J.V. (1981). *The concept of activity in Soviet psychology*. Armonk, NY: Sharpe.

Wertsch, J.V. (1985). *Vygotsky and the social formation of the mind*. Cambridge,

Massachusetts: Harvard University Press.

Wilder, R. (1968). *Evolution of mathematical concepts*. Milton Keynes, England: The Open University Press.

Wiley, N. (1994). *The semiotic self*. Chicago, Illinois: The University of Chicago Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

Este artículo ha sido publicado en inglés con el título: *Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class*, en la revista *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(1), pp. 34-56, 2004. Se agradece el director de la revista y a la editorial por el permiso de traducir y publicar en esta ocasión.