JUEGOS DE INTERPRETACIÓN EN EL AULA: CONSTRUCCIÓN EVOLUTIVA DE SIGNIFICADOS MATEMÁTICOS [19]

Adalira Sáenz-Ludlow

La naturaleza inmaterial de los objetos matemáticos requiere que se expresen a través de variadas representaciones físicas (i.e., signos matemáticos) para ser compartidos socialmente. Desde la antigüedad, la simbolización de las entidades matemáticas ha sido una experiencia tanto personal como social, influida por factores culturales, condicionada por requerimientos contemporáneos de la sociedad y orientada por estímulos de eventos no matemáticos (Cajori, 1974/1928; Wilder, 1968; Menninger, 1969). Por tanto, el aprendizaje de las matemáticas implica tanto la interpretación de signos matemáticos como la construcción de significados matemáticos a través de la comunicación con otros.

Estas interpretaciones y estos significados no se construyen de manera inmediata. Más bien, evolucionan de una manera continua, una manera que resulta de la exposición del individuo a una variedad de experiencias estrechamente interrelacionadas dentro de diferentes contextos matemáticos, sociales y físicos. En tales experiencias se combinan múltiples sistemas semióticos (e.g., lenguaje, signos matemáticos y gestos) para fundamentar una interpretación continua y evolutiva de los significados matemáticos. Puesto que la comunicación es posible solo a través de signos (Peirce, CP 4.7), los actos de comunicación son en sí mismos actos de interpretación.

Las interacciones en el aula entre profesor y estudiantes y entre estudiantes son actos de comunicación en dos niveles: actos de comunicación con *uno mismo* y actos de comunicación con *otros*. Aquí sostengo que los *juegos de interpretación* tienen en cuenta la interdependencia entre pensamiento y comunicación, a la vez que explican los procesos de construcción de significado desde una perspectiva semiótica, la perspectiva peirceana. Ilustraré esta noción de juegos de interpretación analizando como tal un episodio de enseñanza en el aula con estudiantes de tercer grado y una duración de cincuenta minutos.

19 Esta investigación fue apoyada por la University of North Carolina en Charlotte y por la National Science Foundation mediante las becas RED 9155734 y RED 9596106. Los puntos de vista y las conclusiones que aquí se expresan son de la autora y no necesariamente de la Fundación o de la Universidad.

Comunicación y lenguaje

La importancia de la comunicación en el aula a través de signos lingüísticos y no lingüísticos ha sido enfatizada en la investigación (Barnes, 1992/1976; Edwards y Mercer, 1987; Ellerton y Clements, 1991; Steinbring, Bartolini Bussi y Sierpinska, 1998; Sfard, 2001) lo mismo que en documentos curriculares. El documento *Principles and standards for school mathematics* (*National Council of Teachers of Mathematics*, 2000) afirma que "la comunicación puede apoyar a los estudiantes en el aprendizaje de nuevos conceptos matemáticos cuando ellos escenifican una situación, dibujan, usan objetos, hacen recuentos verbales y explicaciones, usan diagramas, escriben y usan símbolos matemáticos" (p. 61).

El documento también reconoce la comunicación como un proceso en el que las ideas se vuelven objetos de reflexión, discusión y correcciones, propiciando la construcción de significados matemáticos privados que en el proceso se vuelven públicos y se exponen a justificación y validación. Para que esto ocurra, el profesor tiene que construir gradualmente el aula como una comunidad en la que se aboga por la indagación, y los estudiantes se sienten libres de exponer su pensamiento y sus interpretaciones.

La importancia del lenguaje en la comunicación no se ha cuestionado. Los aspectos socioculturales y lingüísticos de la comunicación se han estudiado profusamente. Véanse los trabajos de Saussure (1959/1916), Wittgenstein (1991/1953), Foucault (1972), Habermas (1984), Vygotsky (1986/1934), Bakhtin (1986/1979) y Bourdieu (1999/1981), entre otros. La comunicación matemática en el aula conlleva más que aspectos puramente lingüísticos. Implica, entre otras cosas, notación matemática, gestos, lenguaje corporal y disposiciones que influyen en cómo los participantes del aula actúan y reaccionan.

El lenguaje natural como recurso para mediar la comunicación no es *neutral* (Kanes, 1998), pero tampoco lo es el sistema de notaciones matemáticas. Kanes comenta que el lenguaje natural "en el peor de los casos, distorsiona la formación de ideas" y "en el mejor de los casos, hace posible la construcción de conceptos y la comunicación" (p. 135). Por la misma razón, las notaciones matemáticas, en el peor de los casos, distorsionan los significados matemáticos si no son interpretadas en contexto y no se tienen en cuenta distinciones que no son familiares; y, en el mejor de los casos, nos permiten establecer explícitamente lo que queremos afirmar, eludiendo las ambigüedades que la estructura del lenguaje natural no tiene manera de evitar (Nagel, 1956).

La comunicación como actividad semiótica

La comunicación matemática involucra lenguaje natural, notación matemática, gestos y lenguaje corporal entre otros sistemas semióticos. Así que, la comunicación en el aula exhibe una naturaleza semiótica reconocida, directa o indirectamente, por matemáticos, educadores matemáticos y psicólogos (Wilder, 1968; Piaget, 1970; Vygotsky, 1978/1930; Skemp, 1987; Pimm, 1987; Walkerdine, 1988; Vile y Lerman, 1996; Vile, 1997; Whitson, 1997; Sáenz-Ludlow, 1997; Otte, 1998, 2006; Steinbring, 2006; Duval, 1999a, 2006; Cobb, 2000b; Dörfler, 2000; Van Oers, 2001; Ernest, 2003; Radford, 2003; Hoffmann, 2004, 2005).

Cualquier actividad semiótica del individuo supone la existencia de interacción social (Peirce, 1906b; Whitehead, 1985/1927; Vygotsky, 1986/1934; Dewey, 1963/1938), pero el debate continúa con respecto a si el papel de la interacción social en los procesos de pensamiento es primario o secundario. Para Piaget, la actividad cognitiva del individuo es primaria en la construcción del conocimiento, en tanto que la interacción social permanece en un lugar irremplazable aunque secundario (Piaget, 1970, 1973).

En contraste, para Vygotsky (1986/1934), la interacción social mediada por herramientas simbólicas- juega un primer papel fundamental en la actividad cognitiva del individuo. Para los interaccionistas simbólicos y los socioconstructivistas, el conocimiento es un producto social construido a medida que la gente interactúa (Blumer, 1995; Bauersfeld, 1995; Cobb y Yackel, 1995).

Desde una perspectiva semiótica, ni la actividad cognitiva del individuo ni su interacción social es primaria; ambas coexisten y coactúan de manera sinérgica para apoyar el proceso evolutivo de interpretación de signos y la construcción de significado.

Ambos, pensamiento y comunicación (tomada, en su sentido más amplio, como interacción social) parecen ser paralelos y estar interrelacionados simultáneamente. Coexisten como las dos caras de la misma moneda y aunque se puede hablar de cada cara de la moneda como una entidad por derecho propio, ellas no se pueden separar entre sí (cf. Sfard, 2001). Interpreto la comunicación en su sentido más amplio y la uso de manera intercambiable con la interacción social. Por una parte, ambas comprenden no solo comunicación de un mensaje, sino también un enunciador o proponente, un intérprete, y una pluralidad de sistemas semióticos. Por otra parte, ambas comprenden un contexto conceptual y social, un hacer (conceptual y social), observar, hablar, escuchar, leer, escribir, interpretar y pensar.

La semiótica de Peirce proporciona elementos únicos para comprender la interdependencia entre pensamiento y comunicación cuando los signos son interpretados y transformados en nuevos signos. El desarrollo de los significados matemáticos en el aula surge en la interpretación de signos (semiosis), cuando profesores y estudiantes cruzan el umbral de su propia individualidad en la interacción social. Por consiguiente, considero que la interpretación de signos y el uso de signos son en esencia *juegos de interpretación* continuos y evolutivos en los que profesor y estudiantes se constituyen como sujetos intencionales, capaces de interpretar signos lingüísticos, matemáticos y de otros tipos. Este proceso de interpretación da origen a significados privados sujetos a modificación y refinamiento a través de una sucesión de actos colaborativos de interpretación y comunicación, y aquí llamados *ciclos de interpretación*.

Dewey nota la relación de entrelazamiento entre individuos que se comprometen en la comunicación y el efecto positivo de la comunicación en el proceso de educación.

> No solo la vida social se identifica con la comunicación, sino que toda comunicación (y, por tanto, toda vida social genuina) es educativa. Ser receptor de una comunicación es tener una experiencia engrandecida y modificada. Uno *participa* en lo que otro ha pensado y sentido y hasta cierto punto modifica su actitud de una manera moderada o amplia. Quien comunica, tampoco deja de afectarse (1997/1916, p. 5; énfasis agregado).

A partir de trabajos de Peirce, Liszka sintetizó cómo los procesos de comunicación constituyen exactamente procesos de construcción de significado.

> Como proceso, el significado es *comunicación* (cf. LW 196 s.), bien sea entre agentes que interpretan signos (como la comunicación humana) o entre pensamientos dentro del mismo agente (comunicación intraagencial)… El *producto* de la comunicación es *información*; el *efecto* de la comunicación es *comprensión*, en el sentido de una comprensión común compartida, en el caso de la comunicación interhumana (cf. LW 197). (Liszka, 1996, p. 81; énfasis en el original).

Así que, para Peirce, pensamiento, signo, comunicación y construcción de significado están inherentemente correlacionados. El resultado de procesos individuales y colectivos de uso de signos e interpretación de signos (actividad semiótica o semiosis) arraigados en la interacción social es la construcción de significados privados. Estos significados privados se modificarán continuamente y, a la postre, se refinarán para converger hacia aquellos significados convencionales ya establecidos *en* la comunidad y *por* la comunidad. La constitución de estos significados privados y subjetivos y su convergencia hacia significados más objetivos es lo que los *juegos de interpretación* intentan abordar usando la relación triádica del signo de Peirce.

Los individuos interpretan los signos según sus propias redes conceptuales y su interpretación conlleva consecuencias epistemológicas que están latentes o manifiestas. Otte (1998) sostiene que "Un signo es un general, un *tipo*, cuyo modo de ser consiste en que tiene una gran variedad de *réplicas* o *copias*, que pueden influir o determinar al intérprete de tan diferentes maneras como para conducirlo a diferentes desarrollos" (p. 447). La construcción continua de significados matemáticos a través de la interpretación de signos matemáticos en actos de comunicación con uno mismo y con los demás parece ser la esencia de la enseñanza y el aprendizaje. Esta continuidad en la construcción de significado conduce hacia la abstracción y la generalización, características del pensamiento matemático que Peirce (1956) considera como las más importantes. La pregunta es cómo los individuos construyen estos significados de una manera continua a través de un proceso de interpretación. La semiótica de Peirce proporciona una respuesta en su *principio de continuidad* y su relación triádica del signo.

En la siguiente sección expondré la noción de signo, de significado, y el principio de continuidad según Peirce, hasta donde estas nociones se requieren para formular los *juegos de interpretación*. Es bien sabido que la conceptualización de signo debida a Peirce evolucionó durante años en una doctrina global. Él tiene un espectro de definiciones de signos que son complementarias y se clarifican una a otras. Estas definiciones ejemplifican una profunda sensación de la dificultad de expresar la naturaleza de los signos en una definición única y global.

La relación triádica del signo según Peirce

Peirce ubica la actividad sígnica dentro del yo y sus comunidades que, para él, están ubicados dentro de un universo que evoluciona y es profuso en signos. Él define su relación triádica de signo como constituida por *objeto*, *signo* e *interpretante*.

> Defino un *Signo* como cualquier cosa que por una parte está determinada por un *Objeto* y por otra parte determina una idea en la mente de una persona; estas determinaciones son tales que la última, a la que denomino el *Interpretante* del Signo, se ve determinada de manera mediata por el Objeto del Signo. Un Signo, por consiguiente, tiene una relación triádica con su Objeto y con su Interpretante.[20] (Peirce, 1906b, p. 276; énfasis en el original).

20 El texto original es: "I define a Sign as anything which on the one hand is so determined by an Object and on the other hand so determines an idea in a person's mind, this later determination, which I term the Interpretant of the Sign, is thereby mediately determined by that Object. A Sign, therefore, has a triadic relation to its Object and to its Interpretant". Agradezco a Roberto Perry, miembro del Centro de Sistemática Peirceana de Bogotá (Colombia), sus valiosas sugerencias en la traducción de las citas de la obra de Peirce. [N. T.]

Adicionalmente, Peirce considera que un signo no es un signo a menos que sea interpretado o transformado en otro signo que está más completamente desarrollado (CP 5.594). Los signos, en su relación triádica del signo, tienen la función epistemológica de representar *objetos* para un *interpretante* y mediar entre *objeto* e *interpretante* para hacer accesibles los objetos a la mente. Es decir, el signo es algo irreductible entre su objeto y su interpretante. En esta transformación, los signos se interpretan en nuevos signos y, de manera concomitante, en la mente del intérprete surgen interpretantes y objetos más sofisticados (véase Figura 1). Peirce también considera que el significado surge en una tal transformación: "el significado de un signo es aquel signo en el que el primero tiene que transformarse"[21] (CP 4. 132) y "el significado… [es] en su acepción primaria la transformación de un signo en otro sistema de signos"[22] (CP 4.132). Así que, el significado surge cuando los signos son transformados en nuevos signos.

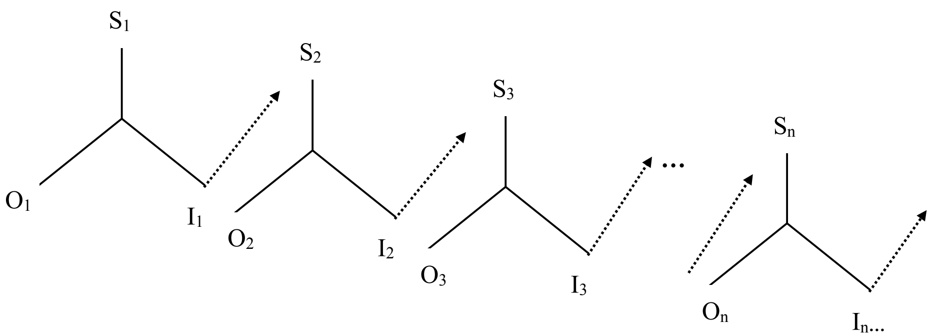

Figura 1. Significado que surge en la transformación de signos en nuevos signos

Puesto que para Peirce la relación triádica del signo es *genuina* y "los tres elementos que la constituyen los liga [a ella] en forma tal que [ella] no consiste en complejo alguno de relaciones diádicas"[23] (CP 2.274), entonces el interpretante (en su sentido más amplio) se puede entender como la *transformación* de un signo en un nuevo signo (véase Figura 1). Esta *transformación* de signos es inmediatamente un *producto* que es el resultado de un *proceso de semiosis* y que tiene algún *efecto* sobre el agente del signo (intérprete o proponente). Esta noción de *transformación* reconcilia las varias definiciones de interpretante dadas por Peirce. Él define interpretante como:

21 El texto original es: "the meaning of a sign is the sign it has to be translated into" [N. T.]
22 El texto original es: "meaning … [is] in its primary acceptation the translation of a sign into another system". [N. T.]
23 El texto original es: "its three members are bound together by it in a way that does not consist in any complexus of dyadic relations". [N. T.]

i) otro signo que resulta de otros signos (CP 5.483; 5.484) o como el producto de la semiosis (CP 4.536); o

ii) el proceso mismo de semiosis o una regla de transformación del signo (CP 5.483; 5.484); o

iii) el efecto esencial sobre el intérprete aportado por la semiosis del signo (CP 5.473; 5.484; 8.191).

El interpretante es la relación del signo con su objeto semiótico con respecto a su intérprete o agente del signo. El *agente del signo* es la persona (enunciador/proponente o intérprete) que se hace cargo del *interpretante* y lo modifica hasta el punto de crear nuevos interpretantes. No hay límite al número de interpretantes reales o posibles creados por el intérprete, y el interpretante está siempre en un estado de llegar a ser, en un proceso de modificación (semiosis ilimitada).

A partir de la transformación continua de signos en nuevos signos, una secuencia concomitante de interpretantes evoluciona originando el surgimiento del significado. Este proceso de transformación es en sí mismo un proceso de interpretación a través del cual los signos llegan a ser transformados en signos menos contextualizados y, por tanto, más generalizados en las mentes de los agentes del signo (intérprete o proponente). Para Peirce, "el interpretante del signo es todo lo que está explícito en el signo mismo que no es ni su contexto ni las circunstancias en que se lo enuncia"[24] (1906b, p. 276). Él considera varios tipos de interpretantes, cada uno con funciones diferentes. Más aún, él reconoce que los interpretantes no solo pueden ser de diferentes grados de complejidad, sino que también pueden ser de diferentes tipos. Aquí consideramos los interpretantes intencional, efectual, comunicacional y lógico. (Véase Hoffmann (2006) y Buchler (1955) con respecto a otros interpretantes y sus interrelaciones).

> Existe el Interpretante *Intencional*, que es una determinación de la mente del enunciador; el Interpretante *Efectual*, que es una determinación de la mente del intérprete, y el Interpretante *Comunicacional,* o digamos el *Cominterpretante*, que es una determinación de aquella mente en la que se tienen que fundir las mentes de enunciador e intérprete para que tenga lugar cualquier comunicación. Esta mente puede llamarse la *co-mente*. [La *co-mente*] es todo lo que es, y debe quedar, comprendido cabalmente entre enunciador e intérprete, desde el comienzo, para que el signo en cuestión cumpla su función.[25] (Peirce, 1908, p. 478; énfasis en el original).

24 El texto original es: "the interpretant of the sign is all that is explicit in the sign itself apart from its context and circumstances of utterance". [N. T.]

25 El texto original es: "There is the Intentional Interpretant, which is a determination of the mind of the utterer; the Effectual Interpretant, which is a determination of the mind of the interpreter; and the Communicational Interpretant, or say the Cominterpretant, which is a determination of that mind into which the minds of utterer and interpreter have to be fused in order that any communication should take place. This mind may be called the commens. [The commens] is all that is, and must be, well understood between utterer and interpreter, at the outset, in order [for] the sign in question [to] fulfill its function". [N. T.]

El interpretante *intencional* motiva al enunciador (proponente) a seleccionar un signo con el propósito de enviar un mensaje. Mientras que el enunciador (proponente) produce un interpretante intencional, el intérprete interpreta y produce, según Peirce, un interpretante *efectual*. El interpretante *efectual* produce una acción sobre el mundo interno del intérprete (un esfuerzo mental) que puede o no producir una acción mental o física. Finalmente, el interpretante *comunicacional* es el pensamiento producido conjuntamente y *compartido en la comunicación* por el enunciador/proponente y el intérprete del signo, o lo que Peirce denomina *cominterpretante* de los agentes del signo.

En otras palabras, el cominterpretante se puede entender como el proceso de las mentes individuales de los agentes del signo, el producto de ellas y el efecto sobre ellas (Liszka, 1996, p. 81). Los agentes del signo también construyen interpretantes lógicos; estos interpretantes se denominan lógicos porque plantean conjeturas y planes de acción que tienen sentido para los agentes del signo dentro de sus propias redes conceptuales. Estos interpretantes lógicos están sujetos posteriormente a modificaciones y correcciones en comunicaciones subsiguientes.

> En el siguiente paso de pensamiento, aquellos primeros Interpretantes *Lógicos* nos estimulan a varios desempeños voluntarios en el mundo interno y procedemos a trazar las líneas alternativas de conducta que las conjeturas nos hubieran abierto. Más aún, somos conducidos por la misma actividad interna, a considerar diferentes maneras en las que nuestras conjeturas pudieran ser ligeramente modificadas. Los interpretantes lógicos deben, por consiguiente, estar en un tiempo verbal relativamente futuro.[26] (Peirce, 1906b, p. 280).

Peirce sostiene que aunque la existencia de interpretantes lógicos depende de la existencia de los interpretantes intencional y efectual, los interpretantes lógicos son más dinámicos y ponen de manifiesto la creatividad en el mundo interior. El elemento temporal presente, pasado y futuro en la red de interpretantes habla directamente de los refinamientos sucesivos de interpretantes existentes, de la construcción potencial de unos nuevos, y de la naturaleza continua de la construcción de significado a través del proceso de interpretación de signos. Desde la perspectiva semiótica de Peirce, la red de interpretantes da cuenta del significado de un concepto matemático. "El problema de qué es el 'significado' de un concepto intelectual solo se puede resolver mediante el estudio de interpretantes o del propio efecto significado de los signos"[27] (CP 5.475).

26 El texto original es: "In the next step of thought, those first Logical Interpretants stimulate us to various voluntary performances in the inner world and we proceed to trace out the alternative lines of conduct which the conjectures would have opened to us. Moreover, we are led by the same inward activity, to remark different ways in which our conjectures could be slightly modified. The logical interpretants must, therefore, be in a relatively future tense". [N. T.]

27 El texto original es: "The problem of what the 'meaning'of an intellectual concept is can only be solved by the study of interpretants or proper significate effect of the signs". [N. T.]

Estas redes de interpretantes constituyen la columna vertebral de la actividad de interpretar y conocer que llevan a cabo los participantes del aula que juegan el papel de enunciador/proponente o intérprete en el proceso de interpretar signos matemáticos. En esta actividad, profesor y estudiantes se entienden entre sí como sujetos intencionales y como sujetos interpretadores cuyas actividades individuales concomitantes son esenciales en los procesos de construcción de significado. Tal actividad tiene que ver primariamente, no solo con la transformación de signos en signos más desarrollados, sino también con los efectos importantes que tales signos tienen sobre los agentes que interpretan el signo (profesor y estudiantes). Es decir, construir interpretantes significa estructurar significados matemáticos a través de actos subjetivos de interpretación que de *ninguna manera* son transferencias simplistas de información del profesor al estudiante.

Los conceptos matemáticos constituyen uno de los principales componentes del universo del discurso del aula. Estos conceptos, con el tiempo, han sido validados por diferentes comunidades de matemáticos a través de diferentes culturas y, por tanto, han alcanzado el estatus de *co-mentales*. La meta final de la interpretación del signo en el aula es aproximarse a los significados de estos conceptos matemáticos tanto como sea posible, por medio de redes sucesivas de interpretantes generadas individualmente con la colaboración de los participantes del aula. En este proceso, profesor y estudiantes intercambian sus papeles de proponentes e intérpretes. Esta intercambiabilidad implica un esfuerzo colectivo dirigido hacia la determinación del consenso, que no es más que la constitución de *cominterpretantes*. La aproximación de significados matemáticos privados hacia los significados matemáticos convencionales es un proceso que se realiza con los estudiantes en su formación matemática.

Continuidad en el proceso de interpretación

Las matemáticas, su aprendizaje y su comunicación

La naturaleza de las matemáticas escolares está necesariamente conectada con lo que son las matemáticas. Sin embargo, dicha naturaleza no es solo un problema educativo; es principalmente un problema filosófico con el que filósofos y matemáticos han luchado durante largo tiempo desde diferentes perspectivas filosóficas.

En general, parece haber consenso en que las matemáticas son una actividad sofisticada, arraigada en el razonamiento y la comunicación. Por ejemplo, Peirce (1956) considera que las matemáticas tienen algunas características impactantes. Entre ellas están el aspecto esquelético de sus proposiciones, la generalidad de sus resultados, el uso extraordinario de abstracciones y el énfasis en el razonamiento. Rotman (1988) sostiene que las matemáticas son una actividad y una práctica que tiene maneras formales e informales, escritas y verbales de comunicación. "Si uno observa a sus participantes [los matemáticos], sería perverso no inferir que durante largos periodos están comprometidos en el proceso de *comunicarse* consigo mismos y con otros" (p. 6, énfasis agregado). Sierpinska (1994) caracteriza la actividad matemática "como un juego dialéctico entre libertad y restricciones, invención y descubrimiento; entre la libertad de elecciones iniciales y el confinamiento dentro de leyes de un sistema elegido deliberadamente; entre la creación libre de objetos y la lucha por comprender sus propiedades y significación" (p. 30).

Desde un punto de vista didáctico, se han propuesto varias nociones sobre el aprendizaje de las matemáticas. Muchas de las perspectivas se enfocan en la naturaleza de la actividad matemática de los estudiantes. Por ejemplo, Skemp (1987) considera que los aprendices de matemáticas deberían estar involucrados no solo en una comprensión instrumental (manipulación de marcas en papel, carentes de significado) sino también en una comprensión relacional para aprehender los significados de los conceptos matemáticos. Van Oers (2001) considera que aprender matemáticas tiene que ver con "estructurar las estructuras" a través de la resolución de problemas usando herramientas simbólicas, y con participar en prácticas culturales preexistentes. Sfard (2000) y Dörfler (2000) consideran que los aprendices de matemáticas deberían ser inducidos al discurso matemático y ubican la actividad de los estudiantes como actos de participar en prácticas comunales.

En contraste, Bauersfeld (1995) llama nuestra atención hacia la actividad real de interpretación de los estudiantes. Él comenta que usualmente se les deja solos con sus propios procesos de interpretación, y sus significados privados rara vez se expresan de manera pública para ser modificados o validados. Cuando no comparten sus propios procesos de interpretación con otros, tarde o temprano tales interpretaciones se hacen públicas en su trabajo escrito y algunas de ellas se etiquetan como *concepciones erróneas o errores*. Tales concepciones erróneas parecen ser procesos truncados de interpretación de lo que debería ser una progresión continua de ajuste hacia la generalización y la abstracción como elementos esenciales del pensamiento matemático. La interpretación de conceptos matemáticos debería ser un proceso continuo mediado por la comunicación colaborativa entre profesor y estudiantes y entre estudiantes.

Como lo señala Rotman (1988), la *comunicación* es esencial a la actividad creativa de los matemáticos y, por ende, la *comunicación* debería ser esencial a la actividad matemática de profesor y estudiantes en el aula. La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debería consistir en interpretar conceptos matemáticos mediante la resolución de problemas y el uso de signos; tal interpretación debería ser mediada por la comunicación intencional y recíproca entre los participantes del aula. Por tanto, la *comunicación* se debería tomar como una *herramienta de enseñanza-aprendizaje* para interpretar conceptos matemáticos bien establecidos a través de procesos continuos, colaborativos y sinérgicos de interpretación que son intrasubjetivos e intersubjetivos. En estos procesos, las interpretaciones personales llegan a ser modificadas, validadas y generalizadas y, a lo largo de ello, surgen significados matemáticos en la mente de los intérpretes.

Esta comunicación intencional y recíproca en el aula entre profesor y estudiantes, que permite la *conciencia* y el *compromiso activo* en los procesos de interpretación de los estudiantes, es lo que denomino *juegos de interpretación*. Los juegos de interpretación son una actividad semiótica transformadora que implica la interpretación y el uso de signos matemáticos convencionales y la generación de signos idiosincráticos para registrar y comunicar significados matemáticos que están en desarrollo. Las marcas escritas, mediadas por juegos de interpretación, se transforman en símbolos matemáticos (en el sentido de Peirce) dotados de significados matemáticos que se aproximan a los significados de conceptos matemáticos ya establecidos. Este proceso transformador de interpretación y construcción de significado se integra a la actividad matemática y constituye un aspecto esencial, no solo del desarrollo sociohistórico de los conceptos matemáticos, sino también de la interpretación individual y evolutiva de estos conceptos.

Los conceptos matemáticos que deben aprenderse son estáticos en tanto que los procesos de interpretación son dinámicos. Existen maneras formales de hablar sobre los conceptos matemáticos, como también maneras idiosincrásicas e informales de hablar en los procesos de interpretación. Los significados de los conceptos matemáticos están ya abstraídos, validados y generalizados, mientras que los significados matemáticos en los procesos personales de interpretación se encuentran en un estado de llegar a ser abstraídos, validados y generalizados. Los conceptos se consideran como objetos matemáticos bien formados en tanto que las concepciones en los procesos de interpretación se encuentran en un estado provisional de metamorfosis. De todas maneras, en los procesos de interpretación, los significados matemáticos privados se deberían aproximar a los significados establecidos de los conceptos matemáticos; y tales aproximaciones deberían ser promovidas y sostenidas por la comunicación colaborativa del aula o los *juegos de interpretación*.

Juegos de interpretación

En la comunicación en el aula es central no solo *qué* conceptos sino también de *quién* son los significados y de *quién* las interpretaciones. Cuando el profesor se concentra solamente en lo *que* está enseñando y pasa por alto (o deja casi olvidado) *quién* está interpretando y *quién* está dando significado, el diálogo entre profesor y estudiantes se hace asimétrico. Pero cuando el profesor tiene en cuenta las interpretaciones de los estudiantes y continuamente trata de interpretar cómo están ocurriendo los procesos de construcción de significado por parte de los estudiantes, el diálogo se vuelve simétrico.

Si bien, enseñar implica un papel *directivo* (Dewey, 1997/1916; Freire, 2001/1970), lo que debería estar en el centro de la práctica de enseñanza es la naturaleza y las características de este papel directivo. Por una parte, el profesor podría transformar el pensamiento de los estudiantes en las meras sombras de su pensamiento; por otra parte, el profesor podría usar su papel directivo para facilitar el crecimiento constante de la capacidad de interpretar de los estudiantes.

Idealmente, un profesor que considera la *comunicación* como una *herramienta para enseñar y aprender* debería estar inclinado a tener una relación asimétrica-simétrica con los estudiantes. La relación debería ser asimétrica en la actividad previa a la enseñanza en cuanto el profesor usa su conocimiento para estructurar las clases que va a enseñar y las estrategias de enseñanza que va a usar para comprometer a los estudiantes en un diálogo que facilite sus estrategias de pensamiento, sus interpretaciones y sus maneras de comunicar. Sin embargo, cuando el profesor los invita al diálogo en el aula, los cuestiona y les pide explicaciones y justificaciones, conscientemente transforma la relación autoritaria y asimétrica entre profesor y estudiantes en una relación simétrica en la que ambos colaboran en la experiencia de enseñanza-aprendizaje. En otras palabras, los profesores enseñan y aprenden, y los estudiantes aprenden y enseñan, complementándose los papeles de cada uno.

Hacer un esfuerzo por mantener una relación asimétrica-simétrica con los estudiantes constituye en esencia una solución a la contradicción profesor-estudiante planteada por Freire (2001/1970). Él sostiene que proyectar la ignorancia absoluta en los estudiantes niega su educación y conocimiento como procesos de indagación. Invitar al diálogo es reconocer a los estudiantes como *sujetos* que *actúan* más que como *objetos* de las acciones del profesor.

En una relación en el aula que sea simétrica entre profesor y estudiante, el profesor permite a los estudiantes participar en un diálogo y asumir un papel activo en su propio aprendizaje en cuanto ellos interpretan, explican, justifican y modifican sus interpretaciones originales. Esto quiere decir, que el profesor, por cuanto es un individuo más capaz, favorece las acciones comunicativas e interpretativas que tienen como resultado que los estudiantes expresen sus propios interpretantes (i.e., transformando sus interpretantes en nuevos signos para ser interpretados por otros). Esta relación simétrica entre profesor y estudiantes le permite examinar sus interpretantes de las interpretaciones de los estudiantes (i.e., expresiones de los interpretantes de los estudiantes), las conceptualizaciones de los estudiantes y sus procesos de construcción de significado.

La conceptualización de significados matemáticos objetivos incrustados en signos matemáticos convencionales no proviene de recibir esos significados y almacenarlos. Por el contrario, la conceptualización surge de los esfuerzos de los aprendices por recrear y reinventar tales significados a través de sus propios actos de interpretación. Desde un punto de vista semiótico, los signos (entre ellos, la notación matemática y el lenguaje natural) juegan un papel esencial en el aprendizaje de las matemáticas porque el conocimiento matemático depende, entre otras cosas, de a) la capacidad de representar para comunicar (Otte, 1998, 2006; Sfard, 2001; Ernest, 2006); b) la capacidad de tratar simultáneamente con varios sistemas semióticos (Duval, 1999a; Ernest, 2006); c) la capacidad de reconocer un objeto matemático (concepto) encarnado en diferentes representaciones sin fundir el objeto con ninguna de sus representaciones (Otte, 1998); d) la capacidad de transformar representaciones de objetos matemáticos dentro de sistemas representacionales y entre ellos (Duval, 2006), y e) la capacidad de construir e interpretar significados mediados por signos (Dörfler, 2000; Radford, 2006).

La interpretación de conceptos matemáticos va más allá de la interpretación de un signo particular en un contexto matemático particular. Como lo señala Otte (2006), un signo matemático es un *tipo* (un general, una clase) y, por tanto, podría ser materializado en una diversidad de *sustitutos*. Para comprender realmente el(los) significado(s) de un signo matemático, este ha de ser interpretado en una variedad de contextos de construcción de significado que deberían ser proporcionados por el profesor. En este sentido, los signos matemáticos, lo mismo que las palabras, podrían acarrear diferentes significados según el contexto en el que se usen (Sáenz-Ludlow, 2003a).

La comunicación entre profesor y estudiantes y entre estudiantes facilita considerablemente la interpretación de signos. La semiótica peirceana es muy útil para explicar la comunicación como una herramienta para enseñar y aprender porque implica: 1) la presencia de enunciadores/proponentes e intérpretes (profesor y estudiantes indiscriminadamente tomarán uno u otro papel); 2) el algo que ha de ser interpretado por el enunciador/proponente e intérprete (conceptos matemáticos), y 3) la continuidad en el proceso de interpretación del signo y la continuidad de los procesos de construcción de significado.

Las interacciones sociales entre profesor y estudiantes y entre estudiantes son *actos de comunicación* que se constituyen en dos niveles: actos de comunicación con *uno mismo* y actos de comunicación con *otros*. Como se afirmó antes, estos dos niveles solo se pueden separar para el propósito de conceptualización porque ellos coexisten de manera sinérgica. Más aún, los actos de comunicación con *uno mismo* solo se pueden inferir a partir de actos de comunicación de *uno mismo* con *otros*. Puesto que la comunicación es posible solo a través de signos (Peirce, CP 4.7), la comunicación es en esencia un proceso continuo de interpretación de signos (semiosis ilimitada) en el que los interpretantes se construyen y se transforman en nuevos signos (véase Figura 1). Así que cada *acto de interpretación* implica la generación de un interpretante y su transformación en un nuevo signo para expresarlo (e.g., argumento matemático, diagrama, expresión verbal, gesto, o cualquier otro signo visible).

A este proceso en el que los participantes del aula construyen conjuntamente una interpretación lo denomino *juego de interpretación*. Los juegos de interpretación son en esencia procesos con elementos de aleatoriedad, creatividad, sorpresa e impredictibilidad (Sáenz-Ludlow, 2003a). Consideremos la comunicación entre profesor y estudiantes o entre estudiantes desde la perspectiva de los juegos de interpretación. Cuando los participantes interactúan y se autorreflejan, modifican y refinan viejas interpretaciones y surgen unas nuevas. Algunas interpretaciones generan *interpretantes lógicos* que se transforman en argumentos que son compartidos con otros. Otras interpretaciones generan *interpretantes efectuales* que pueden o no permanecer suspendidos esperando refinamientos futuros y pueden o no generar interpretantes lógicos. Otras interpretaciones generan incluso *interpretantes intencionales* para sostener la comunicación. Los *cominterpretantes* se generan cuando los interpretantes subjetivos de los participantes se han transformado en nuevos signos interpretados por otros y sobre los cuales hay acuerdo en la comunicación (véase Figura 2).

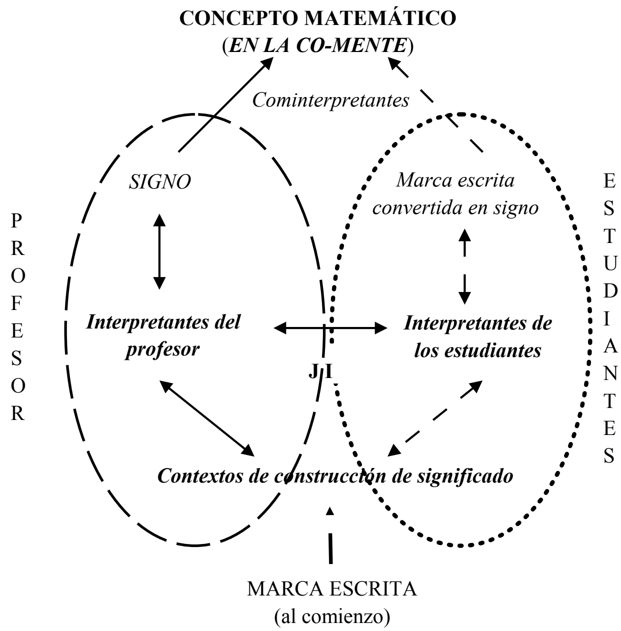

Figura 2. Juegos de interpretación (JI) que median la transformación de marcas escritas en signos matemáticos en las mentes de los estudiantes

Los juegos de interpretación dan cuenta de la actividad cognitiva construida conjuntamente que tiene lugar en el aula cuando los participantes se comprometen intencionalmente en una interacción a través del lenguaje natural, los signos matemáticos y otros tipos de signos. Al comienzo, los signos matemáticos pueden tener el estatus de símbolos (en el sentido de Peirce) para el profesor, pero para los estudiantes pueden parecer simples marcas escritas vacías de significado. Mediados por juegos de interpretación (JI), se generan interpretantes para atribuir, en la mente de los estudiantes, significados matemáticos a estas marcas escritas (Figura 2). Es decir, mediadas por juegos de interpretación, las marcas escritas llegan a dotarse de significados privados y provisionales, sujetos a modificación y refinamiento. A medida que el juego de interpretación continúa, los significados provisionales se hacen cada vez menos subjetivos, se generan cominterpretantes y, en últimas, se aproximan a los significados convencionales objetivos de los conceptos matemáticos (en la co-mente).

La dinámica de la interacción dialógica entre profesor y estudiantes moldea a y es moldeada por los interpretantes de los participantes que se transforman en argumentos matemáticos (válidos o inválidos). Estos argumentos apoyan y sostienen la dotación de marcas escritas con significados generalizados y menos subjetivos (más objetivos) que se aproximan (convergen asintóticamente) a los significados objetivos, estandarizados y convencionales de los conceptos matemáticos. Como resultado de estos argumentos, las marcas escritas toman significados cada vez más ricos y complejos, significados que evolucionan dirigidos por las reglas de la sintaxis, la gramática y la semántica de las notaciones matemáticas y del lenguaje como sistemas semióticos ya constituidos.

Cuando las marcas escritas se dotan de significados matemáticos, se elevan al estatus de símbolos matemáticos. La metamorfosis de las marcas escritas en símbolos, en la mente del aprendiz, está mediada por juegos de interpretación a través del lenguaje natural (formal e informal), de la notación matemática (convencional e idiosincrática), de gestos y de otros signos. Se considera que los juegos de interpretación están constituidos por *ciclos de interpretación* como su unidad de análisis elemental. En estos ciclos, los *significados interpretados* se anclan y dan forma, de una manera sinérgica, a los *significados pretendidos*. Cada ciclo media la constitución de algún tipo de significado que prepara la escena para un ciclo subsiguiente, en el cual surgen nuevos significados que se modifican y luego se refinan.

La Figura 3 representa la estructura de los ciclos de interpretación en el proceso de construcción de significado. El comienzo de un ciclo iniciado por el profesor está representado por los dígitos localizados cerca de la flechas; es decir, este ciclo sigue las flechas en el orden 1, 2, 3, 4. El comienzo de un ciclo iniciado por el estudiante sigue las flechas indicadas por las letras a, b, c, d, localizadas cerca de los dígitos que indican el ciclo iniciado por el profesor. En cada ciclo de interpretación, cada intención está fundamentada en alguna interpretación previa que genera un interpretante particular de una marca escrita dentro de un contexto matemático particular. Es decir, cada ciclo de interpretación está constituido a través de interpretación, intención, transformación de interpretantes en nuevos signos (i.e., expresión de interpretantes), y el surgimiento final de alguna suerte de significado matemático consensual o cominterpretante. Los cominterpretantes evolucionan y, en últimas, se aproximan a conceptos matemáticos (en la co-mente).

Consideremos un ciclo en el que el profesor es el participante que actúa primero. Los actos de interpretación del profesor generan un interpretante intencional (P-i) que está anclado en su propio interpretante efectual (P-I) de un signo matemático. El profesor expresa su interpretante intencional (P-i), que el estudiante interpreta para generar un interpretante efectual (E-I). A su vez, el interpretante efectual (E-I) ancla un interpretante intencional (E-i) expresado por el estudiante. Luego, el profesor interpreta el interpretante intencional expresado por el estudiante y genera un interpretante efectual (P-I´) que ancla un interpretante intencional (P-i’) que es de nuevo expresado por el profesor. Este último interpretante intencional es interpretado por el estudiante quien genera un interpretante efectual (E-I′) que ancla un interpetrante intencional (E-i′) que es de nuevo expresado por el estudiante. Así, mientras profesor y estudiantes en sus propios procesos de interpretación construyan y expresen interpretantes efectuales e intencionales (que pueden o no generar interpretantes lógicos), continúa el ciclo hasta cuando se genere y exprese alguna suerte de cominterpretante o significado consensual. El carácter relativamente cerrado, o mejor, la relativa apertura de cada ciclo prepara la escena para un nuevo ciclo que sostiene la continuidad de los procesos de construcción de significado con los cuales se hace el acercamiento al concepto matemático (en la co-mente).

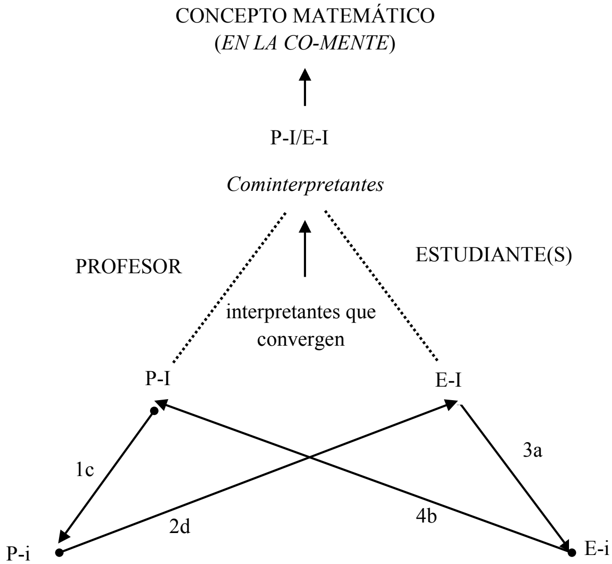

Figura 3. Ciclos de signos mediando la construcción de interpretantes y su aproximación a los conceptos matemáticos

Comprometer a los estudiantes en una interpretación (i.e., juegos de interpretación) es uno de los mayores retos que enfrenta la enseñanza de las matemáticas. Los juegos de interpretación permiten la construcción continua y correctiva de interpretantes (intencional, efectual o lógico), la expresión de aquellos interpretantes en signos posteriores y la constitución de significados provisionales que posteriormente se refinan y, en últimas, convergerán a aquellos significados objetivos otorgados a los símbolos matemáticos. La actividad de interpretar que realizan los participantes favorece la generalidad y, por tanto, la fluidez en el uso de signos matemáticos convencionales para que los estudiantes funcionen matemáticamente.

ejemplo de un juego de interpretación en un aula de tercer grado

El escenario del aula y el método de enseñanza

Los estudiantes de tercer grado que participaron en el episodio que se va a analizar estaban colaborando en un experimento de enseñanza de un año de duración. La escuela en la que tuvo lugar el experimento de enseñanza se consideraba una escuela de bajo rendimiento académico. El grupo de estudiantes de tercer grado estaba conformado por cinco niñas y nueve niños, todos ellos hijos de trabajadores de fábricas.

El experimento de enseñanza consideró la comunicación como una herramienta para enseñar y aprender. El método de enseñanza usado abogaba por la interacción intelectual y colaborativa entre profesor y estudiantes. Esto destacó las complementariedades entre compañerismo e individualidad, intersubjetividad e intrasubjetividad, convencionalidad e idiosincrasia, enseñanza y aprendizaje. La profesora y los estudiantes, trabajando en colaboración, crearon un ambiente de aula en el que todos se sentían constituyentes activos de una comunidad en la que se esperaba escuchar, interpretar, explicar y justificar. La profesora valoraba genuinamente la presencia de cada quien y reconocía que cada uno podía contribuir e influir en el pensamiento de los otros miembros del aula.

Este método de enseñanza puso sobre los hombros de la profesora un nuevo conjunto de expectativas y obligaciones consigo misma y con los estudiantes, debido a que tenía que enfocarse en el surgimiento y evolución de los significados matemáticos del grupo y conjeturar continuamente sus actos de interpretación. Para hacerlo, la profesora aprendió a notar y a diferenciar sus propias acciones personales de las de los estudiantes. Aprendió a hipotetizar y evaluar lo que ellos interpretaban, lo mismo que a proyectar líneas de cuestionamiento. Así mismo, aprendieron a pensar por su propia cuenta, a comparar, explicar y validar su razonamiento. Este método requería: a) que los estudiantes se involucraran en construir su comprensión matemática en interacción con otros, y b) que los profesores respondieran a las interpretaciones y medios de conocer de los estudiantes, y también que enseñaran en armonía con la comprensión real del grupo. En esta manera de enseñar, la profesora no solo enseñaba sino que también aprendía, y los estudiantes no solo aprendían sino que también enseñaban. Enseñar y aprender fueron procesos realmente complementarios.

El experimento de enseñanza consistió en episodios diarios de enseñanza cinco veces a la semana a lo largo del año escolar. Cada día, la profesora y la investigadora se involucraban en conversaciones (en forma de diálogos simétricos) sobre la naturaleza de las interpretaciones aritméticas de los estudiantes y de la profesora, el propósito de las tareas aritméticas de acuerdo con la comprensión real del grupo, y el papel mediador del lenguaje (formal e informal) y de las notaciones matemáticas (convencionales o idiosincráticas) en el continuo despliegue del proceso de interpretación.

Para analizar la semiosis de la actividad aritmética en el aula, se registraron en video las clases y la investigadora tomó notas de campo diariamente. Los enunciados de las tareas, los papeles escritos por los estudiantes y las copias de las transparencias usadas por ellos también se recogieron. Toda la información se organizó cronológicamente.

Sobre la profesora y su enseñanza

La profesora que colaboró en el experimento de enseñanza durante dos años contaba con veintiún años de práctica de enseñanza y afianzada en sus formas de enseñar aritmética a los niños de manera instrumental (en el sentido de Skemp). Antes del primer año del experimento de enseñanza, la profesora participó en un campo de verano con otros profesores. En este campo, la investigadora utilizó la comunicación como una herramienta para enseñar y aprender de manera que los profesores pudieran vivenciar de primera mano la influencia de la interacción social y la interpretación en el proceso de enseñanza-aprendizaje. También utilizó con ellos secuencias de tareas aritméticas preparadas para el experimento de enseñanza con estudiantes de tercero y cuarto grados, y grabaciones de niños que resolvían las mismas actividades propuestas a los profesores.

Así que tuvieron la oportunidad de resolver tareas aritméticas novedosas, hacer sus propias interpretaciones, colaborarse mutuamente, explicar y justificar sus soluciones, lo mismo que las de los estudiantes. Con esta experiencia metodológica común previa, la profesora y la investigadora enseñaron en equipo el curso de aritmética de cuarto grado durante el primer año del experimento de enseñanza. En este primer año, la profesora se convenció de la creatividad y la ingeniosidad de los niños con los números cuando se les anima a pensar por su propia cuenta, a hacer sus propias interpretaciones y a explicarlas a los otros. Durante el segundo año, la profesora enseñó a los estudiantes de tercer grado y la investigadora solo fue una observadora participante. El episodio que se va a analizar proviene de este segundo año del experimento de enseñanza.

Análisis

La tarea que se va a analizar se planteó a los estudiantes cuando el experimento de enseñanza estaba en su quinto mes del segundo año. Por esa época, el grupo conceptualizaba los números en términos de unidades, lo cual les permitió la flexibilidad para sumar números mentalmente usando estrategias idiosincráticas. La profesora les propuso una oración numérica abierta, les dio tiempo para pensar y luego inició un diálogo abierto. Este diálogo se analiza aquí como un *juego de interpretación* entre profesor y estudiantes. La interacción dialógica comenzó cuando los estudiantes leyeron la oración numérica, la interpretaron y trataron de encontrar el número que se podría colocar en el espacio en blanco sin alterar la igualdad. En este proceso de interpretación, la profesora infirió los interpretantes de los estudiantes y sus líneas de razonamiento a partir de signos expresados por ellos, con el propósito de facilitar la construcción de un nuevo significado para el signo igual. Al parecer, en este proceso, los estudiantes comenzaron a anticipar algo sobre la propiedad conmutativa de la adición.

El diálogo duró cincuenta minutos y en el análisis retrospectivo se subdividió en cinco ciclos de interpretación, cada uno de los cuales da cuenta del surgimiento de algún tipo de significado y del logro de alguna clase de consenso, ya fuera de acuerdo o de desacuerdo. En el diálogo, *P* representa al profesor, *E* a un estudiante no identificado, *Ee* a más de un estudiante no identificado, y las abreviaturas indicadas por una letra mayúscula seguida de una vocal o una consonante representan los nombres de estudiantes (e.g., *Da*, *Sh*). Estas abreviaturas se notan en letra cursiva en el cuerpo del texto para evitar confusión. Adicionalmente, la marca puntos suspensivos (…) representa la suspensión de voz.

Ciclo # 1. Interpretaciones iniciales de los estudiantes sobre el signo igual

		¿Qué número hará verdadera la oración numérica?
		246+14=__+246
1	*P:*	*Da*, por favor, lee la pregunta del tablero.
2	*Da:*	¿Qué número hará verdadera la oración numérica?
3	*P:*	Bien, *Da*. Ahora léeme la oración numérica.
4	*Da:*	Doscientos cuarenta y seis más catorce es igual a…
5	*P:*	… algo …
6	*Da:*	Más doscientos cuarenta y seis.
7	*P:*	*Kr*, ¿qué significa ese signo igual?
8	*Kr:*	Es igual… ¿es igual a algo?
9	*P:*	*Sh*, ¿qué significa “es igual a algo”?
10	*Sh:*	Es… es cuando se suma algo. El signo igual está ahí para poder poner la respuesta al lado del signo igual.
11	*P:*	Entonces, ¿me estás diciendo que al otro lado del signo igual tienes que tener la respuesta?
12	*Sh:*	Pues sí, porque el signo igual es para cuando se suma algo y el igual está ahí para poder escribir la respuesta.
13	P:	Bueno. ¿Alguien más tiene una explicación?

14	Ka:	El signo igual es la suma. Es como si se sumara doscientos cuarenta y seis más catorce, la suma es doscientos sesenta.
15	P:	Mmm hmm… Entonces, ¿eso es lo que aquí significa el signo igual?

A través de preguntas, la profesora interpretó el significado construido por los estudiantes para el signo igual. Las líneas 4-5-6 indican la interpretación de la profesora sobre la dificultad de Da para leer un espacio vacío en el contexto dado. En cambio, las líneas 7-14 muestran cómo la profesora guió el diálogo usando los interpretantes lógicos expresados por el estudiante (i.e., el signo igual como una orden para escribir la respuesta). El cuestionamiento intencional de la profesora la condujo a hipotetizar que los estudiantes estaban lejos de ver el signo igual en la igualdad dada como algo que indica que el orden de los sumandos no es importante en el resultado de la adición.

En la línea 15, la profesora expresó la interpretación que los estudiantes daban al signo igual como una orden para hallar "la respuesta" y el espacio en blanco como el lugar para "escribir la respuesta". La última afirmación de la profesora marcó un cierre temporal para este primer ciclo. La interacción dialógica en este ciclo indica que los estudiantes expresaron un interpretante lógico para el signo igual que era consistente con el significado transmitido por el signo en las tareas aritméticas que ellos habían encontrado hasta este momento. Hasta este momento, el cominterpretante inferido para este signo era que el signo igual representaba una orden para realizar la operación indicada.

De las interacciones dialógicas anteriores entre profesora y estudiantes vienen a la mente dos preguntas. ¿Cómo contribuirá la profesora a la modificación de la interpretación del signo igual por parte de los estudiantes? ¿Se influirán progresivamente los estudiantes entre sí y, finalmente, lograrán un consenso sobre el significado del signo igual en este contexto? El siguiente ciclo indica que los estudiantes comenzaron a modificar sus interpretantes del signo igual y trataron de dar un ejemplo incompleto. La profesora lo recogió y lo reconstruyó para ejemplificar un caso más fácil y evidente de la igualdad dada. Usando este caso particular, la profesora involucró de nuevo a los estudiantes en la discusión.

La profesora modificó el ejemplo incompleto producido por *Da* y lo puso en el contexto de la pregunta inicial (la línea 18 indica la expresión del interpretante intencional de *P*). La respuesta negativa de *Sh* y la respuesta de *Da* en términos inciertos fueron sustentadas por *Ka* con su propia "demostración" numérica (las líneas 23, 25, 31 indican el interpretante lógico de *Ka* en la forma de su argumento numérico). *Ka* pudo ver la validez de la igualdad $6+6=6+6$ teniendo en mente el resultado de la suma en ambos lados del signo igual, y sin la necesidad de ver el resultado escrito. Sin tener en cuenta el argumento numérico de *Ka* (línea 23), *Sh* continuó luchando con su propia concepción (la línea 28 indica la expresión del interpretante lógico de *Sh*). Para *Sh*, repetir los números no era lo mismo que realizar la adición y escribir la respuesta. La profesora interpretó el interpretante expresado por *Sh* y utilizó el argumento dado por *Ka* para tratar de convencer a *Sh* de la verdad de la igualdad $6+6=6+6$ (línea 32). La profesora generó y expresó un interpretante intencional para involucrar a *Sh* en la recreación del argumento numérico de *Ka* (líneas 35-38). Este argumento podría haber sido presentado por la profesora de una manera unilateral, pero ella decidió mantener el diálogo simétrico. Como resultado, *Sh* llegó a dudar de su propia interpretación aunque no la modificara en ese momento (línea 39).

Ciclo # 2. Los estudiantes comienzan a modificar sus interpretaciones iniciales del signo igual

16	*P:*	*Da,* tú quieres decir algo, ¿qué es?
17	*Da:*	Umm, creo que el signo igual te está preguntando algo como cuánto es seis más seis.
18	*P:*	¿Qué pasa si digo seis más seis es igual a seis más seis? ¿Es verdadera esta oración?
19	*Sh:*	No.
20	*P:*	Entonces, ¡seis más seis no es igual a seis más seis!
21	*Da:*	En realidad sí lo es. Es como lo mismo.
22	*P:*	¡Cómo lo mismo!
23	*Ka:*	Así es. Puedo demostrarlo porque es a lo que es igual. Seis más seis es igual a doce y se podría decir que seis más seis es igual a seis más seis porque ambos son iguales a la misma cantidad.
24	*P:*	[Escribe en el tablero 6+6=6+6.]
25	*Ka:*	Y son iguales a lo mismo.
26	*Sh:*	No estoy de acuerdo.
27	*P:*	Dime por qué *Sh*.
28	*Sh:*	Porque igual no quiere decir que se ponga seis más seis otra vez. Se supone que tienes que sumar los números y escribir la respuesta. Eso es lo que quiere decir igual.
29	*P:*	Bueno, ¿entonces estás diciendo que igual significa que tienes que tener una respuesta en el otro lado? Por tanto, seis más seis no es igual a seis más seis.
30	*Sh:*	Sí.
31	*Ka:*	Sí, sí lo son porque ambos lados son iguales a la misma cantidad.
32	*P:*	¿Puedo escribir 6+6=6+6?
33	*Ka:*	Sí.
34	*Mi:*	Sí.
35	*Sh:*	No. Seis más seis es igual a doce.
36	*P:*	*Sh*, seis más seis es doce [cubre el lado izquierdo de la igualdad]. ¿Qué es este seis más seis [cubriendo el lado derecho de la igualdad]?
37	*Sh:*	Doce.

38 *P:* [Escribe el tablero]
6+6=6+6
12 12
¿Me estás diciendo que doce no es igual a doce?

39 *Sh:* Sí … no… No lo capto. Es igual… Pero, ¿cómo haces el seis más seis? ¿Seis más seis es igual a seis más seis? No se puede hacer eso porque seis más seis es doce. Si escribes seis más seis en lugar de doce, solo estás repitiendo seis más seis otra vez.

En resumen, el interpretante lógico del signo igual expresado por *Sh* (en el contexto introducido por *Da* y modificado por la profesora para ajustar la tarea que se tenía entre manos), siguió estando fuertemente fundamentado en su interpretación del signo igual como una orden para realizar una operación. En contraste, *Ka* pudo construir y expresar un nuevo interpretante lógico del signo igual en este nuevo contexto (compárense los interpretantes de *Ka* expresados en las líneas 14 y 23) para dar cuenta de la operación de adición y de un equilibrio numérico dado que "ambos [lados] son iguales a la misma cantidad". La duda de *Sh* marcó un punto de ruptura en el juego de interpretación, ya que se había alcanzado algún consenso.

¿Llegará un estudiante con un argumento que convenza a *Sh* (y quizá a otros estudiantes) de modificar su interpretante lógico del signo igual para determinar el número faltante que hará verdadera la oración numérica? El siguiente ciclo indica que *Ka* pudo crear un argumento numérico por contradicción para tratar de convencer a *Sh* de que el número en el espacio en blanco debería ser 14 en vez de 260.

Ciclo # 3. Argumento numérico intuitivo por contradicción expuesto por Ka

40 *P:* ¿Cuál es el número que hará verdadera la igualdad 246+14=__246?

41 *Ka:* [Pasa al tablero] Se podría poner la respuesta aquí [escribe 260 en el espacio en blanco de la igualdad original] 246+14= 260 +246. Ahora, no sería lo mismo en ambos lados del símbolo igual porque doscientos sesenta más doscientos cuarenta y seis no es lo mismo que doscientos cuarenta y seis más catorce. Pero si en cambio de doscientos sesenta se escribe catorce, entonces eso sí sería lo mismo.

42 *P:* Por tanto, ¿es doscientos cuarenta y seis más catorce igual a doscientos sesenta más doscientos cuarenta y seis una oración numérica verdadera?

43 *Ee:* No. No es una oración verdadera.

44 *P:* Bueno, ¿cómo podemos hacer que esta [la igualdad escrita por *Ka* en el tablero] sea una oración verdadera? [Borra el 260 que *Ka* escribiera en el espacio en blanco.]

45 *Sh:* Escribiendo otra vez doscientos cuarenta y seis, o escribiendo catorce.

46 *P:* ¿Por qué?

47 *Sh:* Seis más seis es igual a seis más seis. Doscientos cuarenta y seis más catorce es igual a doscientos cuarenta y seis más doscientos cuarenta y seis.

48 *Ka:* Pero si escribes 246 en el espacio en blanco, entonces 246+14= 246 +246. Si pones estos dos juntos [se refiere a los números que están en el lado derecho de la igualdad], entonces va a ser cuatrocientos noventa y dos.

49 *Sh:* ¡No se suman!

50 *P:* Sí se suman; dice más. El lado izquierdo es doscientos sesenta; sabemos eso. *Ka* dice que el lado derecho es cuatrocientos noventa y dos. ¿Es esta una oración numérica verdadera?

$$\underset{260}{246+14} = \underset{492}{\underline{246}+246}$$

51 *Ke:* ¿Puedo mostrarte algo?

52 *P:* Uhh huh

53 *Ke:* [Pasa al tablero y borra el 246 del espacio en blanco] Todo lo que se está haciendo es igualar a doscientos sesenta para hacer que este [se refiere al lado derecho de la igualdad] sea igual a doscientos sesenta. Entonces, todo lo que se está haciendo es poner 14 atrás [escribe 14 en el espacio en blanco]

$$246+14=\underline{14}+246$$

54 *P:* Así que, ¿ahora estás tratando de decirnos que doscientos cuarenta y seis más catorce es lo mismo que catorce más doscientos cuarenta y seis?

55 *Ke:* Sí.

La profesora, consciente de las interpretaciones de los estudiantes, intencionalmente dirigió la atención del grupo a la pregunta inicial (la línea 40 indica la expresión del interpretante intencional de *P*). *Ka* creó un argumento numérico por contradicción (la línea 41 indica la expresión del nuevo interpretante lógico de *Ka*). El nuevo interpretante de *Ka* fue original porque este tipo de argumento numérico no se había usado en esta aula antes de esta ocasión. Es importante notar la secuencia correctiva de interpretantes expuesta por *Ka* cuando contrastamos este nuevo interpretante con sus interpretantes iniciales del signo igual (compárense las líneas 14 y 23 con la línea 41).

En la línea 42, la profesora usó intencionalmente el nuevo argumento numérico de *Ka* para plantear preguntas a los estudiantes con el propósito de mantener el diálogo. En esta interacción dialógica, la profesora llegó a hipotetizar que *Sh* había sobregeneralizado la oración numérica $6+6=6+6$ (líneas 45 y 47). Sin embargo, fue *Ka* quien abordó la sobregeneralización de *Sh*. *Ka*, con su capacidad para jugar con argumentos por contradicción, tomó la interpretación de *Sh* de repetir uno de los números y modificó su argumento por contradicción (línea 48). Esta vez *Ka* fue más explícita en su explicación. En la línea 50, la profesora usó el argumento de *Ka* con la intención de hacer aún más explícita la contradicción.

Es importante notar que *Sh* no intervino inmediatamente; quizá ella construyó un interpretante efectual que no estaba listo para ser expresado. Los interpretantes lógicos de *Ka* y *Sh* son de tipo diferente; sin embargo, son lógicos dentro de sus propias redes conceptuales. Esto quiere decir que los interpretantes lógicos son relativos a las redes conceptuales de los intérpretes aunque en todos los casos están potencialmente abiertos a modificaciones.

En la línea 53, *Ke*, un estudiante que no había intervenido en la discusión hasta este punto, llegó con la idea de usar 14 en el espacio en blanco para “igualar” los resultados de las adiciones en ambos lados del signo igual. Esto, para él, era lo mismo que escribir los mismos sumandos al lado derecho de la igualdad pero “atrás”. Hasta este momento, *Ke* y *Ka* parecían ser los únicos dos estudiantes que explícitamente habían llegado a ver tres cosas simultáneamente: a) el cambio en el orden de los sumandos, b) la adición efectiva, y c) el equilibrio cuantitativo entre los dos lados del signo igual. Las líneas 54 y 55 marcaron un punto de ruptura temporal en el juego de interpretación por cuanto la profesora resumió verbalmente el argumento de *Ke* y *Ke* estuvo de acuerdo. El consenso expresado y convergente de estos dos estudiantes (cominterpretante) marcó un punto de ruptura en la interacción dialógica.

En este ciclo, no solo observamos el argumento por contradicción hecho por *Ka* (i.e., un nuevo signo que expresa su interpretante lógico), sino también su voluntad de usarlo para refutar el interpretante lógico expresado de *Sh*. Además, *Ke* también expresó su propio interpretante lógico. También es evidente que la sofisticación del argumento lógico por contradicción de *Ka* y la interpretación del signo igual hecha por *Ke* no habrían sido posibles sin las interpretaciones (válidas o inválidas) de los otros estudiantes. Que este fue el caso quedó indicado por la falta de este tipo de argumento de parte de los estudiantes cuando interpretaron inicialmente la igualdad. En otras palabras, podemos decir que fueron posibles una secuencia progresiva de interpretantes y sus transformaciones en nuevos signos, debido a la interacción dialógica intencional entre profesora y estudiantes que los condujo a la modificación de sus interpretantes iniciales del signo igual.

Dos preguntas siguen sin respuesta. Una de ellas es si *Sh* podrá o no modificar su interpretante lógico del signo igual como orden para realizar una operación, de manera que incluya la preservación de un equilibrio cuantitativo cuando se cambia el orden de los sumandos. La otra pregunta alude a si otros estudiantes hicieron o no activamente sus propias interpretaciones y construyeron sus propios interpretantes, aunque no lo hayan expresado abiertamente hasta este punto. En el siguiente ciclo, las respuestas a estas dos preguntas parecen ser afirmativas.

Se podría suponer que el juego de interpretación terminó en la línea 55, dado que se había obtenido la respuesta a la pregunta propuesta por la profesora. Sin embargo, la profesora continuó el diálogo porque otros estudiantes estaban deseosos de participar ahora y no habían participado antes. *Me*, por ejemplo, no solo estaba de acuerdo con la conclusión de *Ke,* sino que también hizo su propia hipótesis sobre las interpretaciones de otros estudiantes (líneas 57 y 61).

Por otra parte, *Sh* quería participar de nuevo y qué agradable sorpresa fue esa. *Sh* modificó su interpretante lógico inicial y ahora comenzó a suponer que el número en el espacio en blanco era 260 y recreó el argumento por contradicción expuesto por *Ka*. Finalmente, *Sh* concluyó que el número en el espacio en blanco debería ser 14 (las líneas 64 y 66 son las expresiones de los interpretantes lógicos modificados de *Sh*) para que la oración numérica fuera verdadera. *Sh* incluso fue un paso más allá y creó una cadena de igualdades.

Esta cadena indica que *Sh* había llegado a modificar su primer interpretante. *Sh* sumó los números para ser consistente con su interpretante inicial del signo igual como una orden para "hallar la respuesta y escribirla", pero ahora ella también usó el signo igual para simbolizar un equilibrio cuantitativo. El argumento lógico de *Sh* indica un consenso de parte de los estudiantes sobre el número que debería ir en el espacio en blanco para que la oración numérica fuera verdadera. Es decir, los estudiantes han construido y expresado un consenso o cominterpretante. No es claro qué efecto podría haber tenido la intervención de *Me* en el pensamiento de *Sh*. Podría haber sido que la transformación que hizo *Me* de su propio interpretante en un argumento verbal fuera todo lo que necesitara en este punto para que *Sh* modificara su interpretante.

El ciclo anterior indica que los estudiantes, a través de sus esfuerzos de interpretación, pudieron modificar sus interpretantes lógicos iniciales del signo igual como *sustituto* para una orden de realizar una operación, y usarlo como *sustituto* de una equivalencia cuantitativa.

Ciclo # 4. Me interviene y Sh recrea el argumento numérico por contradicción expuesto por Ka

56 *P:* [Se da cuenta de que *Me* está alzando la mano] Veamos lo que tiene que decir *Me*.

57 *Me:* Pienso esto. Doscientos cuarenta y seis más catorce es igual a catorce más doscientos cuarenta y seis. Así que, digo lo mismo que *Ke*. Es catorce.

58 *P:* ¿Por qué piensas que es catorce? Eres la tercera persona que dice eso. Tres personas dijeron catorce y dos dijeron doscientos sesenta.

59 *Me:* Bueno, otras personas piensan que es doscientos sesenta. Umm… No quiero estar en desacuerdo pero lo estoy.

60 *P:* ¿Por qué? ¿Por qué estás en desacuerdo?

61 *Me:* Bueno, lo que yo creo que ustedes están pensando es que cuando ustedes ponen estos dos juntos [refiriéndose a los números del lado izquierdo del símbolo igual] es doscientos sesenta; así que ustedes piensan poner doscientos sesenta aquí [refiriéndose al espacio en blanco al lado derecho del símbolo igual] y entonces doscientos sesenta más doscientos cuarenta y seis será doscientos sesenta. Eso es lo que creo que algunos de ustedes están pensando. Pero, yo creo que en el espacio en blanco debería ir catorce.

62 *Sh:* ¿Puedo decir algo?

63 *P:* Huh uhh.

64 *Sh:* [Va al tablero] Es así. Doscientos cuarenta y seis más catorce es doscientos sesenta. Si ponemos doscientos sesenta ahí [se refiere al espacio en blanco] entonces tenemos que sumar doscientos sesenta y doscientos cuarenta y seis y eso sería quinientos seis. Así

246+14=260+246

260 506

65 *P:* Entonces, ¿crees que esta es una oración verdadera? ¿Pondrías doscientos sesenta en el espacio en blanco?

66 *Sh:* No estoy de acuerdo con eso. Es algo así [borra 260 y lo reemplaza por 14]. Es como si el signo igual estuviera aquí y lo pones aquí. Es como si estuvieras separando esto

246+14=14+246=260

260 260

67 *P:* Bien. Ella tiene una idea interesante porque quiere ver lo que considera que es la respuesta.

68 *Sh:* Sí, me gusta ver la respuesta.

También parece que los estudiantes se alejaron con una sensación de que los sumandos se pueden intercambiar sin afectar tal equivalencia. La sensación acerca de la propiedad conmutativa de la adición solo estaba surgiendo. Para consolidar los últimos interpretantes lógicos del signo igual expresados por los estudiantes se generaron nuevas tareas aritméticas de manera que ellos pudieran dar sentido a esta propiedad en el contexto de la adición y también en el contexto de la multiplicación. Volveré sobre este asunto en la conclusión.

El siguiente ciclo, el último de este juego de interpretación, se generó debido a que los estudiantes tuvieron la iniciativa de reflexionar sobre su interpretación inicial del signo igual. Fue sorprendente ver a *Sh* (la estudiante que más luchó) iniciar un ciclo para reflexionar sobre las diversas interpretaciones de los estudiantes.

Ciclo # 5. Los estudiantes reflexionan sobre sus interpretaciones del signo igual

69 *Sh:* ¿Por qué estuvimos apegados a la respuesta?

70 *P:* Es la manera como casi siempre se ve en sus libros de matemáticas, ¿verdad?

71 *Ka:* Sí.

72 *P:* Ustedes casi siempre lo ven donde hay algo que se tiene que hacer a este lado [lado izquierdo] y en este lado [lado derecho] solo hay un espacio para un número.

73 *Sh:* ¿Por qué lo hacen así? … Es raro. Porque lo hacen a uno pensar así… y uno… se apega a eso.

74 *P:* Eso está muy bien *Sh* porque eso entra en los cerebros de los niños y ustedes se apegan a ello y se quedan siempre en lo mismo. Pero ahora estamos aprendiendo que con nuestros números podemos hacer muchas cosas.

75 *E:* ¡Oh, es cosa de los libros!

76 *P:* De los libros, sí. En los libros hay cosas que ustedes han visto siempre, prácticamente desde que comenzaron a estudiar.

77 *Sh:* Porque es incorrecto.

78 *Ee:* Eso no es incorrecto.

79 *P:* Eso no es incorrecto, pero es tan solo una manera.

80 *Sh:* Sí, hay muchas maneras de hacer eso. Se puede hacer eso de miles de maneras.

81 *P:* Bien, hoy estuvo bastante movido.

Sh comenzó a cuestionar la causa de su interpretación y la profesora, después de un rápido análisis del evento, trató de explicar la causa de la primera interpretación que los estudiantes hicieron sobre el signo igual. La profesora consideró que los libros de matemáticas (i.e., los libros de aritmética elemental) usan el signo igual para significar la realización de operaciones y, por consiguiente, los estudiantes llegan a interpretar el signo en ese sentido. Uno de los estudiantes, *Ka*, aprueba la explicación de la profesora aunque *Sh* considera que esto causa, en un sentido, obstáculos cognitivos que el grupo tiene que superar (línea 73). La profesora hizo más explícita la idea de *Sh* en la línea 74 donde ella parafraseó (i.e., tradujo en un nuevo signo) la idea de *Sh*. *Sh* también consideró que usar el signo igual de una sola manera era "incorrecto", aunque otros estudiantes estuvieron en desacuerdo con su juicio.

Parece que en esta argumentación entre los estudiantes, se referían a dos significados diferentes de "incorrecto". Al parecer, *Sh* se estaba refiriendo a "incorrecto" en algún sentido ético o moral, mientras que los otros estudiantes parecían estarse refiriendo a "incorrecto" en un sentido lógico. Al parecer, la profesora combinó los dos sentidos de "incorrecto" en su intervención (línea 79) e impulsó a *Sh* a hacer un enunciado más amplio sobre sus nuevas maneras de ver los números y las operaciones entre ellos. Parece que el enunciado de *Sh* se basa, no solo en este episodio, sino en la manera como ella y otros estudiantes habían comenzado a conceptualizar número como resultado de participar en el experimento de enseñanza.

Conclusión

Es importante notar que el episodio anterior ocurrió en un aula en la que la *comunicación* se tomó como *herramienta para enseñar y aprender,* y en la que profesora y estudiantes construyeron un ambiente en el que estaban igualmente comprometidos con la indagación y la interpretación. Estas interpretaciones moldearon la comunicación en el aula y fueron moldeadas por ella. La profesora, después de un año y medio de colaborar en el experimento de enseñanza, se sintió cómoda involucrando a los estudiantes en un diálogo simétrico y haciendo interpretaciones de los interpretantes expresados por los estudiantes para apoyar y sostener la evolución de su construcción de significados aritméticos.

La profesora también entendió que las interpretaciones que dio el grupo sobre los significados matemáticos eran subjetivas y transitorias, pero estaban en proceso de llegar a ser más refinadas y objetivas. Los estudiantes, por otra parte, se sintieron cómodos haciendo sus propias interpretaciones, generando sus propios interpretantes, transformando estos interpretantes en nuevos signos, infiriendo los interpretantes de otros cuando eran expresados, y generando consenso a través de la construcción de cominterpretantes.

La oración numérica propuesta por la profesora facilitó un *juego de interpretación* que medió la construcción de interpretantes, bajo su guía intencionada aunque indirecta. El diálogo simétrico que se analizó aquí indica que profesora y estudiantes contribuyeron a la creación de un espacio de intervención y a una construcción progresiva de interpretantes (intencional, efectual y lógico) que produjeron un cominterpretante sobre el número que haría verdadera la oración numérica. La semiosis de este juego de interpretación tuvo la dinámica de una bola de pimpón entre profesora y estudiantes y entre estudiantes, arraigada en sus propios *actos de interpretación* (i.e., generación de interpretantes y transformación a nuevos signos).

Es importante observar que habría sido imposible para los participantes en el juego de interpretación ser conscientes de los ciclos y de los puntos de ruptura en la construcción de significado mientras participaban en él. De manera análoga, es imposible que ciclistas o nadadores paren sus movimientos para reflexionar sobre la lógica de ellos en vez de concentrarse en su realización. Sin embargo, en un análisis retrospectivo es posible diferenciar tales ciclos y observar los actos de interpretación de profesor y estudiantes, y sus efectos.

El análisis de este episodio de enseñanza como juego de interpretación nos permite "ver" la interdependencia entre pensamiento y comunicación en los *actos de interpretación* de estudiantes y profesor. Los participantes más activos en el diálogo fueron *Kr*, *Da*, *Sh*, *Ka*, *Ke*, *Me* y *P*; los demás solo hicieron intervenciones monosilábicas. Los que expresaron sus interpretantes en forma de argumentos (válidos o no), influyeron en la construcción y modificación de los interpretantes de otros estudiantes. Por ejemplo, se podría inferir que los interpretantes de *Sh* estaban influidos por los de *Ka*, *Ke*, y probablemente *Me*. Al mismo tiempo, los interpretantes de *Sh* parecen haber influido los de *Ka*, *Ke*, e incluso *Me,* quien parece haber tomado el reto de moldear los actos de interpretación de *Sh* del signo igual en la oración numérica dada.

Los juegos de interpretación en el aula constituyen un modelo explicativo, basado en la semiótica de Charles Sanders Peirce, para analizar la comunicación en el aula (tomada en su sentido más amplio) como herramienta para enseñar y aprender. Los juegos de interpretación reúnen las dimensiones social e individual de la comunicación y la actividad matemática, lo mismo que las dimensiones pública y privada de los procesos de construcción de significado. Es decir, los juegos de interpretación destacan procesos de construcción colaborativa y evolutiva de significados matemáticos.

Para que los juegos de interpretación se conviertan en herramientas de enseñanza-aprendizaje, también deberían llegar a ser herramientas de indagación.

Para que esto suceda, es necesario construir ambientes de aula en los que surja de manera natural una relación comunicativa entre profesor y estudiantes, que tenga resultados intelectuales mediatos e inmediatos. Es decir, ambos deberían estar igualmente comprometidos en el establecimiento de una relación comunicativa en la que el uso de signos, la interpretación de signos y la indagación se conviertan en un estado continuo de cosas.

Para usar juegos de interpretación como una herramienta de enseñanza-aprendizaje, el profesor debería considerar seriamente su actividad de enseñanza como constituida por dos partes: la actividad anterior a la enseñanza y la actividad misma de enseñanza. La primera debería basarse en una relación asimétrica con los estudiantes, puesto que el profesor reflexiona sobre su propia comprensión de los conceptos matemáticos y prepara tareas matemáticas y estrategias de enseñanza para comprometer la capacidad inquisitiva de los estudiantes. En la actividad misma de enseñanza, el profesor (la mayor parte de las veces) debería mantener un diálogo simétrico con los estudiantes sin olvidar su papel directivo, pero sin transformarles el pensamiento en las sombras del suyo (cf. Freire, 2001/1970). Por tanto, es necesario que el profesor aprenda a diferenciar sus interpretantes de aquellos que infiere de las expresiones que los estudiantes hacen de sus interpretantes para apoyar y sostener la transformación continuada de los interpretantes de los estudiantes en signos más refinados.

Cuando la construcción de interpretantes y la transformación de interpretantes en nuevos signos ocurren en la comunicación (interacción social), el *yo* y el *otro* traen a primer plano niveles más altos de interpretación, construcción y transformación. Esto se debe al hecho de que en un *acto de interpretación* aparecen dos interpretantes concomitantes: el interpretante del *yo* que propone y expresa, y el interpretante del *otro* que interpreta y construye. Para comunicarse, el *yo* y el *otro* tienen que transformar sus interpretantes en nuevos signos que representan alguna suerte de significado común. Estos interpretantes (transformados en nuevos signos) entran en una interacción animada trayendo con ellos los aspectos público y privado de los procesos de construcción de significado. A través de interpretantes convergentes, la construcción personal y transitoria de los significados matemáticos tiende a ser generalizada y encapsulada en cominterpretantes que convergen hacia los significados matemáticos convencionales de conceptos matemáticos.

Debido a la naturaleza inmaterial de los conceptos matemáticos, hacer conscientes a los estudiantes de sus propios procesos de uso de signos e interpretación de signos y comprometerlos en ellos es un proceso necesario aunque desafiante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Percatarse de las construcciones continuas y evolutivas de los interpretantes de los estudiantes y de los significados matemáticos personales de ellos, lo mismo que de la constitución de cominterpretantes que convergen asintóticamente a los conceptos matemáticos establecidos, es comprender la interdependencia entre pensamiento y comunicación, y el proceso de enseñanza-aprendizaje como una experiencia conceptual, colaborativa, evolutiva y social.

Referencias

Bakhtin, M. (1986). The problem of speech genres. En C. Emerson y M. Holquist (eds.), *Speech genres and other late essays* (pp. 60-102). Austin, TX: University of Texas Press.

Barnes, D. (1992). *From communication to curriculum* (2ª ed.). Portsmouth, NH: Boynton/Cook Publishers. Bauersfeld, H. (1995). "Language games" in mathematics classrooms: Their function and their effect. En P. Cobb y H. Bauersfeld (eds.), *The emergence of mathematical meanings* (pp. 271-291). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Blumer, H. (1995). *Symbolic interactionism*. Berkeley, California: University of California Press.

Bourdieu, P. (1999). *Language and symbolic power* (trad. G. Raymond y M. Adamson). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Buchler, J. (1955). *Philosophical writings of Peirce*. Nueva York: Dover Publications.

Cajori, F. (1974). *A history of mathematical notations: Notations in elementary mathematics* (vol. 1). La Salle, IL: Open Court.

Cobb, P. (2000a) Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A.E. Kelly y R.A. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P. (2000b). From representations to symbolizing: Introductory comments on semiotics and mathematics learning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 17-36). Mahway, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P. y Yackel, E. (1995). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. En D.T. Owens, M.K. Reed y G.M. Millsaps (eds.), *Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-29). Columbus, OH: ERIC/CSMEE.

Dewey, J. (1997/1916). *Democracy and education: An introduction to the philosophy of education*. New York: The Free Press.

Dewey, J. (1963/1938). *Experience and education*. Nueva York: Collier.

Dörfler, W. (2000). Means for meaning. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 99-131). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (1999a). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (trad. M. Vega Restrepo). Cali: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (Ed.) (1999b). *Conversion et articulation des représentations analogiques*. Séminaire I.U.F.M., D.R.E.D., Villeneuve d'Ascq.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103-131.

Edwards, D. y Mercer, N. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom*. Nueva York: Routledge.

Ellerton, N. y Clements, M. (1991). *Mathematics in language: A review of language factors in mathematics learning*. Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Ernest, P. (2003). The epistemic subject in mathematical activity. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 81-106). Ottawa, Ontario: Legas.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case on number. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 67-101.

Freire, P. (2001/1970). *Pedagogy of the oppressed*. Nueva York: Continuum.

Foucault, M. (1972). *The archeology of knowledge*. Londres: Tavistock.

Habermas, J. (1984). *The theory of communicative action*. Boston: Beacon Press.

Hoffmann, M. (2004). How to get it. Diagrammatic reasoning as a tool of knowledge development and its pragmatic dimension. *Foundation of Science*, *9*(3), 285-305.

Hoffmann, M. (2005). Signs as means for discoveries. Peirce and his concepts of "Diagrammatic Reasoning," "Theorematic Deduction," "Hypostatic Abstraction," and "Theoric Transformation". En M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (eds.), *Activity and sign: Grounding mathematics education* (pp. 45-56). Nueva York: Springer.

Hoffmann, M. (2006). What is a "semiotic perspective", and what could it be? Some comments on the contributions of this Special Issue. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 279-291.

Kanes, C. (1998). Examining the linguistic mediation of pedagogical interaction in mathematics. En H. Steinbring, M.G. Bartolini-Bussi y A. Sierpinska (eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 120-139). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Liszka, J.J. (1996). *A general introduction to the semiotic of Charles Sanders Peirce*. Bloomington, Indiana: Indiana University Press.

Menninger, K. (1969). *Number words and number symbols: A cultural history of numbers*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Nagel, E. (1956). Symbolic notation, haddocks' eyes and the dog-walking ordinance. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics* (vol. 3, pp. 1576-1590). Nueva York: Simon and Schuster.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Otte, M. (1998). Limits of constructivism: Kant, Piaget, and Peirce. *Science and Education, 7*, 425-450.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 11-38.

Peirce, C.S. (1867). Questions concerning certain faculties claimed by man. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (1991, pp. 34-53). Chapel Hill: The University of North Carolina Press.

Peirce, C. S. (1893-1913). *The essential Peirce: Selected philosophical writings* (vol. 2; editado por *Peirce Edition Project*). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1903). *The three normative sciences. The essential Peirce* (vol. 2, 1893-1913; editado por *Peirce Edition Project*, pp. 196-207). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1906a). Prolegomena to an apology for pragmaticism. En J. Hoopes (ed.), *Peirce on signs* (pp. 249-252). Chapel Hill, North Carolina: The University of North Carolina Press.

Peirce, C.S. (1906b). Pragmatism in retrospect: A last formulation. En J. Buchler (ed.), *Philosophical writings of Peirce* (1955) (pp. 269-289). Nueva York: Dover Publications.

Peirce, C.S. (1908). Excerpts from letters to Lady Welby. En Peirce Edition Project (ed.), *The Essential Peirce* (vol. 2, pp. 478-491). Bloomington, IN: Indiana University Press.

Peirce, C.S. (1931). *Collected Papers, vol. II, Elements of Logic*. (editado por C. Hartshorne y P. Weiss). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1931-1966). *Collected Papers* (CP) (editado por C. Hartshorne y P. Weiss, vols. 1-6, y A.W. Burks, vols. 7-8). Cambridge, Massachusetts: Belknap Press/Harvard University Press.

Peirce, C.S. (1956). The essence of mathematics. En J.R. Newman (ed.), *The World of Mathematics*, (vol. 3, pp. 1773-1783). Nueva York: Simon and Schuster.

Peirce, C.S. (1976). The new elements of mathematics (NEM), (vol. 4, *Mathematical Philosophy*, editado por Carolyn Eisele). The Hague: Mouton and Co. B. V. Publishers.

Peirce, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (elección de textos, traducción de G. Deledalle). París: Seuil.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Nueva York: Columbia University Press.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in the classrooms*. Londres: Routledge.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2006). The anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 39-65.

Rotman, B. (1988). Towards a semiotics of mathematics. *Semiotica, 72*(1-2), 1-36.

Sáenz-Ludlow, A. (1997). Iconic means in children's understanding of the division algorithm. En C.W. Spinks y J. Deely (eds.), *Semiotics* (pp. 118-130). Toronto, Canada: Peter Lang.

Sáenz-Ludlow, A. (2003a). Classroom mathematics discourse as an evolving interpreting game. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V. Cifarelli (eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 253-284). Ottawa, Canada: Legas Press.

Sáenz-Ludlow, A. (2003b). A collective chain of signification in conceptualizing fractions: A case of a fourth-grade class. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 181-211.

Saussure, F. de (1959). *Course of general linguistics* (trad. W. Baskin). Nueva York: McGraw-Hill Book Company. (Obra original publicada póstumamente por C. Bally y A. Sechehaye en 1916, sobre los cursos de 1906 a 1911).

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being – Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 13-57.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. Londres: The Falmer Press.

Skemp, R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Steinbring, H. (2006). What makes a sign a *mathematical sign*? – An epistemological perspective on mathematical interaction. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 133-162.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M.G. y Sierpinska, A. (Eds.) (1998). *Language and communication in the mathematics classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Oers, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics, 46*(1), 59-85.

Vile, A. (1997). From Peirce towards a semiotic of mathematical meaning. En J.F. Quesada (ed.), *Logic, semiotic, social and computational perspectives on mathematical languages* (pp. 64-76). Sevilla, España: SAEM Thales.

Vile, A. y Lerman, S. (1996). Semiotics as a descriptive framework in mathematical domains. En L. Puig y A. Gutiérrez (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 389-402). Valencia, España: Universidad de Valencia.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society* (edit. y trad. por M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner y E. Souberman a partir de distintas obras originales publicadas en ruso de 1930 a 1960). Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Vygotsky, L.S. (1986/1934). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason*. Londres: Routledge.

Whitehead, A.N. (1985). *Symbolism: Its meaning and effect*. Nueva York: Fordham University Press.

Whitson, J.A. (1997). Cognition as a semiosic process: From situated mediation to critical reflective transcendence. En D. Kirshner y J.A. Whitson (eds.), *Situated cognition: Social, semiotic, and psychological perspectives* (pp. 97-149). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Wilder, R. (1968). *Evolution of mathematical concepts*. Milton Keynes, Inglaterra: The Open University Press.

Wittgenstein, L. (1991/1944). *Philosophical investigations*. Oxford: Basil Blackwell.