< 2

Énfasis

PENSAMIENTO, EPISTEMOLOGÍA Y LENGUAJE MATEMÁTICO

Compiladora

Olga Lucía León

Autores

Gloria Inés Neira Sanabria

Pedro Javier Rojas Garzón

Jaime Humberto Romero Cruz

Jorge Orlando Lurduy Ortegón

Edgar A. Guacaneme

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Énfasis

Libros de los énfasis del

Doctorado Interinstitucional en Educación

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Énfasis

Libros de los énfasis del Doctorado

Interinstitucional en Educación

Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático

Educación matemática

Olga Lucía León

(Compiladora)

Gloria Inés Neira Sanabria

Pedro Javier Rojas Garzón

Jaime Humberto Romero Cruz

Jorge Orlando Lurduy Ortegón

Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá, Colombia - Agosto de 2012

Facultad de Ciencias y Educación
Doctorado Interinstitucional en Educación

ISBN: 978-958-8782-21-8
e-ISBN: 978-958-8782-85-0

Primera edición, 2012

Preparación Editorial
Doctorado Interinstitucional en Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
http://die.udistrital.edu.co
eventosdie@distrital.edu.co

Fondo de publicaciones
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Cra. 19 No. 33-39. Piso 2.
PBX: (57+1) 3238400, ext. 6203

Corrección de estilo
Luisa Juliana Avella Vargas

Diagramación y diseño de carátula
Juan Camilo Corredor Cardona

Impreso en Javegraf

Bogotá, Colombia, 2012

Contenido

Al 1er volumen de la Colección Pedagogía y Didáctica del Énfasis en Educación Matemática

Texto original en italiano

Traducción: Dra. Martha Fandiño

Este libro quiere iniciar una tradición de publicaciones internas en el Doctorado Interinstitucional en Educación, en particular en el énfasis en Educación Matemática. De hecho, los doctorandos son invitados a contribuir en la creación de un volumen consignando un artículo de investigación o una reflexión sobre el marco teórico relativo a su propia tesis, o profundizando un seminario que han seguido y que consideran particularmente interesante.

Un volumen así concebido ofrece un panorama cultural que dice muchas cosas acerca de la investigación de los doctorandos en didáctica de la matemática, y obviamente no pretende ser exhaustivo; ofrece, eso sí, la posibilidad de evaluar las potencialidades expositivas de los doctorandos, su capacidad para formalizar sus avances, sus marcos teóricos, sus reflexiones que, de alguna manera, los ayudarán en el camino de la redacción de sus tesis.

La elección de los argumentos, por tanto, no es neutra ni casual, sino que, por el contrario, da a conocer la dirección que está tomando el énfasis en Educación Matemática y sus intenciones temáticas proyectadas hacía un futuro inmediato.

Este primer volumen propone temáticas clásicas, pero analizadas en clave moderna; leyendo los artículos, se descubren las direcciones específicas en las cuales los autores se están desplazando.

El primero se centra en el pasaje no banal –ni del punto de vista didáctico, ni del punto de vista epistemológico– del álgebra al cálculo; la pregunta –que no tiene nada de retórico– que se plantea la autora, Gloria Inés Neira Sanabria, es si se trata en verdad de un pasaje o si, por el contrario, debe asumirse más como una ruptura en el sentido de Bachelard, idea tomada después por Brousseau. La bibliografía internacional en este campo es, por decir poco, extensísima; sorprende y al mismo tiempo es placentera la idea de un ulterior punto de vista en esta dirección. La tesis de la doctoranda, sin duda portará una nueva luz en este denso tema.

Una de las controversias más célebres de la historia es aquella a distancia entre Jean Piaget y Lev Vygotski, sobre la cual todos nosotros hemos tenido necesidad de reflexionar y escribir; esto, porque trata de las relaciones entre *pensamiento* y *lenguaje*, dos de los pilares sobre los cuales se funda cada uno de los aspectos evolutivos y culturales relativos a la humanidad. Lo afrontan aquí los doctorandos Pedro Javier Rojas Garzón y Jaime Humberto Romero Cruz, quienes enriquecen su texto –que profundiza un seminario sobre el mismo tema– reportando las intervenciones de destacados estudiosos que discuten algunos detalles de la cuestión.

Uno de los debates –aparentemente superficial– que por decenios ha animado el campo de la investigación en didáctica de la matemática, es el relativo a esquemas más o menos idóneos para representar, en forma resumida pero eficaz, algunos componentes de esta disciplina. Por ejemplo, el triángulo de la didáctica nace a finales de los años 70 como un instrumento que permite esquematizar las situaciones de aula, y es hoy uno de los modelos de referencia de mayor difusión. El doctorando Jorge Orlando Lurduy Ortegón propone en su texto dos elementos de análisis didácticos de los procesos de estudio de la matemática: el *Sistema Didáctico* y el *Tetraedro Didáctico*, siendo este último caracterizado por cuatro polos, a saber, *profesor* (didáctico), *entorno, estudiante* (cognitivo) y *epistémico* (saber), en la misma dirección de los últimos estudios de Brousseau. Esta contribución ofrece muchas oportunidades de reflexión y de desarrollo, incluso porque se inserta en una dirección de gran relevancia internacional, como el Instituto de Orientación Psicológica EOS.

Edgar Alberto Guacaneme Suárez afronta los significados de los conceptos *razón* y *proporción* en el libro V de los *Elementos*, uno de los documentos más estudiados desde la antigüedad remota, el que más debates ha generado, el más controvertido y sin embargo sorprendente, no obstante el clásico y profundo análisis de Proclo de Constantinopla y el estudio mucho más cercano a nosotros de James Michael Hill, al inicio del siglo XX. También este doctorando se sirve de los potentes instrumentos del EOS, reivindicando a su estudio intereses ya sea en el campo didáctico o en el epistemológico.

La variedad de los temas tratados es un valor al cual un énfasis doctoral no puede renunciar; esta diversidad trae como consecuencia discusiones académicas que involucran a todos los doctorandos y sus directores de tesis, así como también a expertos extranjeros que aportan útiles contribuciones a la formación cultural y profesional, una de las verdaderas riquezas de las escuelas doctorales no estériles y no cerradas en sí mismas, como lo es la nuestra, que puede ostentar aportes –por demás diferenciados y extraordinariamente válidos– de estudiosos, entre los más destacados internacionalmente.

Característica de estas publicaciones, también en futuro, quiere y debe ser la absoluta libertad temática que se concede a los autores, lo que implica una carga de responsabilidad que, lejos de facilitar, es rica de espinosos caminos culturales porque pone a prueba la capacidad de batirse entre las infinitas bibliografías que hoy definen y acompañan nuestros campos de indagación.

Bruno D'Amore

Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica

Gloria Inés Neira Sanabria[1]

> *Si la ruptura numérico/algebraico se identificó de forma clara en las investigaciones sobre la comprensión del álgebra, la ruptura álgebra/cálculo, por el contrario, se ha trabajado muy poco hasta el presente en las investigaciones sobre la comprensión del cálculo.*
> *(Artigue, 1995, p. 115)*

Descripción del problema

Lo que se encuentra en una primera aproximación informal a los escenarios propios del trabajo universitario inicial del cálculo es incomprensión de los conceptos, un inadecuado manejo de los razonamientos, además de una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas. Los cursos se suelen desarrollar en forma mecánica y el trabajo descansa en lo puramente algorítmico y en el álgebra, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Todo lo cual revela que la reflexión profunda acerca de la comprensión de los conceptos fundamentales en el trabajo inicial del cálculo en la universidad es necesaria, fundamental y urgente en el ámbito de la educación matemática, en la línea del aprendizaje y enseñanza del cálculo diferencial e integral.

La evidencia de los problemas de comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del cálculo diferencial es tan fuerte que ha desencadenado –en diferentes partes del mundo– reformas curriculares, innovaciones didácticas, propuestas con el uso de la tecnología, programas dirigidos a los profesores y a la enseñanza (Tall, 1996; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992), y hasta se ha cuestionado si se debe enseñar cálculo en la educación media; y en caso de que la respuesta fuera afirmativa, de qué manera y con qué grado de rigor.

Por otra parte, basta echar una mirada a algunos "*handbooks*" de investigación, desde el *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, editado por Grouws en 1992, hasta los más recientes; a las memorias

1 Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE) Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: gneira@udistrital.edu.co; nicolauval@yahoo.es; gerarlopez3@hotmail.com

de las reuniones anuales del PME[2] o de recientes eventos de Educación Matemática como el ICME o Ciaem,[3] a los reportes de investigación presentados en las últimas Relme[4], por ejemplo, para darse cuenta de lo actual y presente de las investigaciones didácticas en el campo del cálculo.

Según Artigue (1995), no existe un paso natural del álgebra al cálculo, no existe un progreso continuo y regular del conocimiento matemático, sino que se da un desarrollo caótico: una *ruptura* frente a la cual se debe emprender una investigación que se ubique en ese trabajo inicial y que impacte en una mejor comprensión de los conceptos básicos del cálculo diferencial, pues generalmente se han atacado dichos problemas de incomprensión con reformas e innovaciones al interior del cálculo mismo.

Artigue enfatiza que, mientras la ruptura numérico/algebraico no sólo se ha identificado, sino que ha desencadenado numerosas investigaciones que aportan respecto a la comprensión del pensamiento numérico y algebraico, no ha sucedido algo similar con la ruptura álgebra/cálculo: no existe una multiplicidad de investigaciones sistemáticas ni posturas paradigmáticas sobre lo que distingue esos dos pensamientos, esas prácticas escolares, ni se sabe cómo tender el puente y alistar el camino para iniciar el trabajo en el cálculo diferencial. Tampoco se tiene conciencia sobre la importancia de estudiar esa transición, esas prácticas escolares del trabajo inicial del cálculo como otra manera de entender los problemas de comprensión de esta disciplina, ya sea en los cursos de educación secundaria, media o bachillerato (o como se llame en cada país), o en los primeros semestres de la educación superior.

La reflexión acerca del paso, transición o ruptura del álgebra escolar al cálculo diferencial y de las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en dicha transición, en esas prácticas escolares iniciales, categorías todas cargadas semántica y teóricamente y que han generado diversas tendencias, constituye un punto crucial en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en la educación media y superior, punto central de este ensayo.

Del fenómeno didáctico de algebrización del cálculo diferencial escolar, ya detectado por Artigue (Contreras, 2000), que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo, emerge un interés urgente y fundamental por la actividad matemática que se realiza en las aulas de clase, por las prácticas escolares, por la dimensión de significación y sentido de

2 Psychology of Mathematics Education.
3 Comité Interamericano de Educación Matemática.
4 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

estas prácticas, que toca también las dimensiones didáctica y matemática. Detectar, comprender y describir las rupturas o continuidades, los obstáculos, conflictos o facilitadores en el paso del pensamiento algebraico al pensamiento analítico, y por tanto, comprender cómo se establecen esas relaciones de ruptura o de continuidad, de obstáculo o de facilitador, de hecho aportará a la problemática que a diario viven maestros y estudiantes con el cálculo.

Artigue reagrupa las dificultades que presentan los estudiantes en la transición álgebra-cálculo en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, entre otros, objetos que están precisamente en construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de *límite*, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

En esta última categoría, lo radical del término "*ruptura*" se puede ejemplificar mediante el tratamiento que se da en el cálculo a las desigualdades e inecuaciones, a la alternancia de cuantificadores, a las aproximaciones, al simbolismo, al lenguaje, a los razonamientos y, en particular, a las demostraciones, todo lo cual rompe con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del cálculo escolar, por ejemplo en los cursos de álgebra.

Los intentos de identificar, describir, comprender y explicar los obstáculos que pueden inferirse a partir de las prácticas escolares universitarias de iniciación del trabajo del cálculo diferencial en esa transición del álgebra al cálculo, constituye una exploración novedosa dado que se instauran en analizar el paso a unas prácticas, a una semiótica, a una semántica propia del cálculo para explicar, describir y comprender si las causas de tantos problemas con la comprensión del cálculo no están solamente al interior de cualquiera de las prácticas llamadas "*cálculo*" en la universidad, sino en la iniciación del trabajo en él, más específicamente en ese paso, transición o ruptura del álgebra al cálculo. En adelante las Prácticas Escolares Universitarias se identificarán con la sigla PEU, y las Prácticas Escolares Universitarias vinculadas a la iniciación del Cálculo Diferencial, con la sigla PEUC.

Emerge entonces una mirada diferente que pretende aportar otros elementos constitutivos a la hora de describir, analizar y comprender los problemas de aprehensión de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial escolar, dado que toma su lugar principal en el paso, en el camino, en el puente que del álgebra lleva al cálculo, para luego sí posicionarse al interior de éste, con toda su problemática y teniendo en cuenta los diversos actores que participan en él.

En síntesis, en este escrito se plantea un abordaje descriptivo-analítico de las dificultades que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del cálculo diferencial en la universidad. También se propone decidir cómo se describen mejor esa práctica escolar y esa dificultad: si como barrera, ruptura, refundición, revolución, cambio, conflicto u obstáculo, o como un problema de semiosis de un cierto pensamiento variacional con la mediación de uno o más registros que ya tienen unas restricciones y limitaciones nada fáciles de superar, para lo cual, en este ensayo, se intenta construir un marco explicativo inicial que permita hacer interpretaciones y tomar decisiones para caracterizarlas.

Al iniciar los cursos de cálculo se debe concebir la *función* como un objeto, como una entidad sujeta a las operaciones que otros procedimientos efectúen sobre ella, cuando lo que se concebía en cursos de álgebra, por ejemplo, era una noción de función presentada como un procedimiento aplicado a ciertos objetos llamados números; ahora ese mismo concepto, el de función, deviene en objeto al ser operado bajo otros procesos como el límite, la diferenciación o la integración, y se convierte en un sujeto sobre el cual se predican propiedades como la existencia de límite, la continuidad, la diferenciabilidad o la integrabilidad. No en vano ha sido nominado como el concepto fundamental de la llamada matemática moderna.

El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los principales rasgos que caracterizan al pensamiento variacional. Pero para que los alumnos logren un acercamiento a esta forma de pensamiento es necesario que superen la idea de función como correspondencia entre dos valores y que comiencen a visualizar una situación cambiante. Según Cantoral y Farfán (2000), sabiendo que el significado y el sentido acerca de la variación se establecen a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios son los referidos a fenómenos de variación y cambio, se propicia el desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto de los conceptos como de los procesos, basados siempre en ideas variacionales.

La propuesta básica que plantean es, para el nivel que corresponda, el desarrollo de los contenidos del currículo relacionados con las variables, las funciones y el cálculo desde un enfoque variacional, considerando el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprenda el contenido temático. A través de experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes, Cantoral, Farfán y sus coinvestigadores han constatado que, en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, los estudiantes suelen manejar la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación, se hará más posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones.

Aproximación histórica a los obstáculos epistemológicos

Desde la tradición filosófica

El término *obstáculo epistemológico* fue construido por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard, quien postula que la naturaleza no nos es dada y nuestras mentes nunca son vírgenes en frente de la realidad, pues sea lo que sea que veamos, digamos u observemos, está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver (Bachelard, 1938/2004, p. 15).

Algunos de estos pensamientos, creencias y conocimientos pueden funcionar como un obstáculo a la propia comprensión de los fenómenos. Nuestras generalizaciones pueden estar sesgadas por la particular tendencia a armonizar el conocimiento con unas pocas leyes o principios de explicaciones que funcionan adecuadamente, como "*todos los cuerpos caen*" o "*la luz se propaga en línea recta*", o sobre metáforas preestablecidas, como "*el aire es una esponja*".

Según Bachelard, frente a lo real el alma no puede mostrarse ingenua; lo que cree saberse obstaculiza lo que debiera saberse y no es posible hacer tabla rasa de los conocimientos anteriores:

> *Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado (Bachelard, 1938/2004, p. 16).*

Para Bachelard, el obstáculo es un tipo de conocimiento ya disponible, usualmente instalado desde hace mucho tiempo en nuestra mente y que ya no percibimos como tal. Lejos de ser una dificultad mental, resulta de una facilidad intelectual que nos otorgamos, muy a menudo sin ser ya conscientes de ello. Y... el obstáculo está confortablemente asentado, de tal forma que se vuelve a él constantemente.

Enunció algunos obstáculos en su obra: la experiencia básica o conocimientos previos, el conocimiento general, el obstáculo verbal, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo sustancialista y el animista. No dio una definición explícita de obstáculo epistemológico, aunque sí muchos ejemplos; sin embargo, ninguno de ellos se aplica a las matemáticas, como él mismo lo advirtió.[5]

Bachelard construye este aporte a la epistemología en 1938, pero solo en el año 1976 Guy Brousseau lo incorpora a la investigación en educación matemática en el marco de su *Teoría de las Situaciones Didácticas*, de la *Ingeniería Didáctica* y de todo ese fenómeno didáctico que se da en Francia en la década de los 70. A continuación se describe brevemente el tránsito de esta noción hacia el campo específico de la investigación en educación matemática, que se tarda alrededor de 38 años.

Desde la educación matemática

La noción de obstáculo epistemológico, tomada de Bachelard, hizo su aparición en la educación matemática (más precisamente en la didáctica francesa de las matemáticas) gracias a Guy Brousseau, quien la hizo manifiesta en el primer texto de didáctica de las matemáticas presentado en 1976 por él mismo en la conferencia de la CIEAEM, en Louvain la Neuve.

Brousseau ya veía –en particular en la noción de obstáculo– el medio de cambiar el estatuto del error, mostrando que:

> *El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo de sentido del conocimiento adquirido.*

5 *En efecto, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce pausas. Ella no conoce los periodos de errores. Ninguna de las tesis que sustentamos en este libro apunta hacia el conocimiento matemático. No se refieren sino al conocimiento del mundo objetivo* (Bachelard, 1938/2004, p. 25).

Y esta idea muy pronto empezó a funcionar como una categoría, entendiendo *categoría* como una noción que aunque no está en el desarrollo de un dominio científico, es suficientemente general y potente para direccionar el pensamiento y determina un campo de investigación a su alrededor.

Y eso es precisamente lo que pasó con la noción de obstáculo epistemológico: empezó a direccionar el pensamiento; todo un programa de investigación comenzó a desarrollarse a su alrededor, mientras que se llevaban a cabo debates entre los teóricos acerca de la naturaleza de tales obstáculos, sus posibles definiciones y la coherencia y racionalidad de importarlos de las ciencias naturales a la matemática.

Ejemplos de investigación al respecto son la tesis sobre el aprendizaje de la noción de límite, sustentada por B. Cornu en 1983, y los trabajos de Sierpinska que la prolongan. A partir del debate que desató la incorporación del concepto a la educación matemática, se empezó a creer que sí tenía sentido hablar de obstáculos epistemológicos en matemáticas, y que podían ser la explicación para eso que a diario se detectaba como obstaculizante en los aprendizajes de los estudiantes. Se buscaba un fundamento teórico para el nuevo concepto, pero transferirlo de las ciencias naturales a las matemáticas requería adaptaciones cuidadosas y profundas reflexiones filosóficas acerca de la naturaleza de estas últimas.

Se concluyó que en vez de tratar de reemplazar el conocimiento errado de los estudiantes por el correcto, el esfuerzo de los profesores debía ser invertido en la invención de problemas especiales, en los cuales los estudiantes experimentaran un conflicto mental que los hiciera conscientes de que dichas formas de comprensión habituales posiblemente no son las únicas y que no son universales.

Según Sierpinska (1994, p. 133)[6], las investigaciones se enfocaron en el diseño de situaciones de enseñanza que proveyeran condiciones favorables para la superación de obstáculos epistemológicos y posibilitaran así una mejor y más profunda comprensión de los conceptos matemáticos. En esa tendencia se identificó *comprensión* con *superación de obstáculos*.

En la búsqueda de explicaciones acerca de las dificultades de comprensión en matemáticas que se evidencian en los estudiantes, se concluyó que éstas no dependen solamente de la falta de experiencia con esta disciplina ni de las habilidades o destrezas que puedan o no tener, ni de la idiosin-

6 La obra de mayor interés en este capítulo es *Understanding in Mathematics*. Fue publicada en inglés en 1994. La autora de este escrito ha elaborado ya una traducción, en particular del capítulo IV.

crasia de su pensamiento aún inmaduro, sino también de la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos y de la cultura en la cual éstos han sido desarrollados.

Con este supuesto de base, se abre la puerta para la investigación acerca de los obstáculos epistemológicos: formas de comprensión basadas en algo inconsciente, esquemas de pensamiento culturalmente adquiridos, creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas. Dicho constructo creó interrogantes como ¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos pero se revela inadecuada en otros? ¿Es una actitud de la mente que permite tomar opiniones por hechos, y unos pocos casos de evidencia por leyes generales?

Sierpinska (1994) entonces postula una teoría para explicar la comprensión en matemáticas basada en la teoría de los obstáculos epistemológicos. El primer supuesto que enuncia al respecto es que de un nivel de conocimiento y comprensión a otro hay necesidad de integración y reorganización. Afirma que la cognición no es un proceso acumulativo, pues las nuevas comprensiones pueden solamente ser parcialmente construidas sobre caminos de desarrollo previos. Por ejemplo, cuando se pasa de los números naturales a los enteros o de la aritmética al álgebra, debemos hacer –para el "arrepentimiento intelectual"– una reorganización de entendimientos previos.

El otro supuesto de la filosofía de los obstáculos epistemológicos que enuncia es que no podemos hacer metafísica de la comprensión científica, lo cual significa que estos obstáculos son inevitables. Nuestras creencias acerca de la naturaleza del conocimiento científico, las visiones de mundo que tenemos, imágenes que tomamos y que están impresas en el lenguaje que usamos, esquemas de pensamiento, todo ello forma un punto de partida para nuestro manejo de los problemas científicos, tanto que ellos desvían nuestros acercamientos y soluciones. Se vuelven apoyos pero también obstáculos para un buen entendimiento. Su superación requiere una reconstrucción de comprensiones fundamentales.

Sierpinska (1994) argumenta una y otra vez que la comprensión no es independiente del desarrollo ni del lenguaje en el que se comunica, ni tampoco de la cultura en la cual se socializa. Las creencias, las normas cognitivas y las visiones del mundo pueden ser todas fuentes de obstáculos para comprender la estructura teórica del conocimiento científico. Tanto en la instrucción como en el desarrollo hay momentos críticos: esos momentos gobiernan lo que precede y también lo que sigue.

Mediante un cuidadoso estudio de la cultura, concluye que aquello considerado obvio y natural puede imprimirse como un esquema de pensamiento, como un hábito tan natural que se vuelve parte de nosotros mismos, y plantea que el progreso hacia otro nivel requiere siempre superar rutinas intelectuales y todo aquello que hemos considerado verdades infalibles.

Nociones epistemológicas relacionadas con la ruptura epistemológica

De otro lado, y continuando con consideraciones de tipo epistemológico acerca de los dos constructos importantes planteados aquí –obstáculo y ruptura epistemológica–,[7] Vasco (1991) analiza los conceptos de revolución científica, ruptura epistemológica y otros relacionados con ellos, tomados de la historia y de la epistemología de la física, para estudiar su aplicabilidad a la constitución de las disciplinas matemáticas. Discute y concluye las siguientes tres tesis:

- En cada una de las disciplinas matemáticas la ruptura epistemológica, si tiene sentido identificarla con la conformación de la respectiva disciplina, se da una sola vez.
- En cada una de las disciplinas matemáticas, una vez conformada, no se dan propiamente revoluciones científicas en el sentido de Kuhn, sino solo refundiciones de esas disciplinas.
- Los intentos de unificación de las disciplinas matemáticas en una sola ciencia llamada "la Matemática" –en singular y con mayúscula– no solo no son ni revoluciones ni rupturas epistemológicas, sino que puede decirse que han fracasado, y que las matemáticas, con o sin mayúscula, continúan, y previsiblemente continuarán siendo plurales.

Fichant y Pécheux (1969/1975) definen *ruptura epistemológica* como el origen o comienzo de una ciencia, en el momento que Kuhn llamó "*revolución científica*". Estos autores consideran la ruptura constitutiva de esa ciencia, que deviene en un nuevo paradigma. Podría plantearse que las revoluciones científicas constituyen un acercamiento más sociológico que

7 La *ruptura epistemológica* es un concepto introducido por el filósofo y poeta Gastón Bachelard (27 de junio de 1884, Bar-sur-Aube – 16 de octubre de 1962, París) en Filosofía de las Ciencias (posteriormente desarrollado en el ámbito de la sociología en 1975), a raíz de un ensayo publicado en Francia por Pierre Bourdieu, Chamboredon y Passeron, titulado *El oficio de sociólogo*. El concepto de *ruptura epistemológica* alude a la necesidad, en la praxis sociológica, de alcanzar una fisura que permita ir más allá de la evidencia, de las prenociones en sociología. Supone, en otros términos, superar los espacios de tópicos y lugares comunes para hacer "*verdadera ciencia*", para "*conquistar el objeto contra la ilusión del saber inmediato*".

epistemológico al problema de los cambios científicos. El término *ruptura epistemológica* marca, en cambio, el punto de no retorno[8] a partir del cual comienza una nueva ciencia; en particular es todo el hecho epistemológico que sucedió con la constitución de la física científica desde Copérnico hasta Newton. Pero una vez constituida la nueva ciencia o disciplina después de la ruptura, quedan aún muchas regiones del campo teórico abierto por esa ruptura, en las cuales se mantiene un agregado de proposiciones teóricas que pretenden ser científicas, a pesar de estar formuladas todavía con lenguaje ambiguo. El trabajo de elaboración de los nuevos conceptos, las propuestas de respuestas a las nuevas preguntas y la búsqueda de coherencia conceptual llevan a periódicas revisiones de esas sub-regiones que constituirían las *refundiciones* o cortes intracientíficos, terminología que se atribuye también a Regnault (Fichant y Pécheux, 1969/1975, p. 12, definición III y nota 6).

En este sentido, no se podría afirmar propiamente que, al pasar del álgebra al cálculo en la organización curricular y cognitiva, lo que se da sea una ruptura epistemológica en el sentido aquí planteado, pero sí se afirma como posición inicial, que hay una ruptura en cuanto a prácticas, simbolismo, lenguaje, modos de demostración y argumentación, respecto a lo que habitualmente se hace en los cursos de álgebra y lo que se empieza a trabajar en el cálculo.

Existen otras miradas o tendencias relacionadas con la noción de obstáculo epistemológico:[9] Michelle Artigue utiliza el término *concepción*; Díaz-Godino habla de *conflictos semióticos;* D'Amore reivindica el término *misconcepción*; Radford reconoce los obstáculos en cuanto culturales y didácticos; Luis Rico desarrolla su teoría acerca de los *errores*; Luis Moreno habla de *obstrucciones*; tendencias que revelan además la necesidad de una teoría que explique esas dificultades en general, y particularmente en lo relativo a ese paso, transición, refundición, ruptura del álgebra al cálculo.

Una primera aproximación a una conceptualización de los obstáculos

De este panorama posible: obstáculo epistemológico, concepciones, obstáculos culturales, obstáculos didácticos, conflictos semióticos, epistémicos, cognitivos e interaccionales, misconcepciones, podemos ver que, reconociendo sus diferencias sustanciales, han existido en la literatura distintos modos de enunciar esas dificultades, errores, caídas, tropiezos que

8 Expresión atribuida a F. Regnault que usan Fichant y Pécheux para describir la ruptura epistemológica, en un curso en 1967-1968 en París, según aparece en la advertencia inicial de Oscar Landi al libro de Fichant y Pécheux (1969/1975, pp. 7-8; ver definición I, p. 9, y la nota 6 de la p. 12).

9 Tendencias que se analizan en otro artículo de la misma autora del presente escrito.

los maestros detectamos en nuestros estudiantes en las aulas de clase, en todos los niveles de escolaridad, en toda clase de instituciones, de diferentes maneras, y se ha focalizado el interés de los investigadores por indagar lo que subyace a tales dificultades con el afán de proponer categorías de análisis para explicarlas potencialmente.

Tener en cuenta ese panorama de miradas y de perspectivas es importante para caracterizar las tendencias actuales alrededor de los obstáculos y conflictos, y sobre todo para "construir" un enfoque propio que se sustente con conocimiento de las diferentes miradas y perspectivas, y que sea lo suficientemente potente para dar cuenta de las "dificultades" detectadas.

Un inconveniente concreto que se presente en algún tema y que se revele en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o a que los que se tienen dificultan el trabajo. A diferencia del que falta, el conocimiento que sí está pero que provoca dificultades y conflictos, dudas y errores, es síntoma de la existencia de conocimientos previos –presentes o ausentes– que entorpecen y/o dificultan el aprendizaje.

Esta misma diferencia se plantea en el tipo de errores detectados: accidentales, ocasionales, *lapsus* y errores sistemáticos, que se deben a algo… ¿a qué?

Planteamos como supuesta una contraposición entre el conocimiento ausente (ignorancias) y el presente, pero que a la vez es un factor dificultante, que son los obstáculos.

La noción de obstáculo será entendida en el presente documento como un conocimiento y no como su ausencia o como una equivocación; un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce "errores".

Se conciben los errores como síntomas, indicadores de la posible existencia de obstáculos. Aquí la palabra error no se entiende como juicio calificador de un comportamiento o respuesta errónea del estudiante, sino como aquella conducta que no sigue las reglas institucionales.

Se reconoce creatividad en los errores que cometen los estudiantes, comprensiones divergentes de las preguntas formuladas. Se trata de no cargar la palabra semánticamente con la tradición que la asocia al enjuiciamiento peyorativo y calificativo hacia los estudiantes. Los errores –mirados de esa manera– se convierten en la fuente de indagación más importante, pues los obstáculos pueden inferirse a partir de estos en las prácticas y de la dificultad experimentada por los que participan en ellas.

Si la conducta errática se repite sistemáticamente, se le ha de buscar la etiología en algo que no se reduce a la habilidad motora incipiente. Esa conducta, error, equivocación, violación de la regla institucional, es un síntoma de que ahí hay un obstáculo que no depende de falta de habilidades; vendrá entonces la caracterización para precisar su naturaleza.

Enseguida se plantean y profundizan algunas ideas específicas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo en particular, propósito fundamental de esta reflexión.

Dificultades identificadas en el aprendizaje del cálculo

Las investigaciones sobre los errores y dificultades en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utilizan indistintamente las expresiones *dificultad* y *obstáculo*. En todo caso, los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de éstos. Se citan algunas dificultades que se reportan bajo distintas nominaciones.

Se advierte que la palabra *dificultad* está más asociada a una tradición de la psicología del aprendizaje, pero en este escrito se quiere abrir su campo semántico, presentar un panorama desde la investigación en didáctica de la matemática y citar referentes iniciales mínimos que posteriormente sean objeto de un análisis mayor.

Mediante la observación de dos parejas de alumnos preparando la identificación de la tangente como límite de una secante variable, para encontrar la ecuación de la tangente de una curva representativa de la función seno en el origen, Sierpinska (1994) propone una lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite:

- El llamado "horror al infinito", que reagrupa los obstáculos ligados con el rechazo al estatuto de operación matemática para el paso al límite: la transferencia automática de los métodos del álgebra propuestos para manipular magnitudes finitas a las magnitudes infinitas, la transferencia de las propiedades de los términos de una serie convergente a su límite, y finalmente el obstáculo que consiste en asociar el paso al límite con un movimiento físico, con una aproximación.
- Los obstáculos ligados al concepto de función: ocultación de la noción de función subyacente, restricción a una sucesión de valores, reducción monótona, no distinción de la noción de límite y de extremo inferior o superior.
- Los obstáculos geométricos: la intuición geométrica se convierte en "un obstáculo serio en la formulación de una definición rigurosa, tanto al impedir la determinación de aquello que quiere comprenderse como la

diferencia de dos magnitudes, como por un apego de la noción de límite a la noción de extremo de un conjunto".

- Los obstáculos lógicos: ligados a la eliminación de los cuantificadores o de su orden.
- El obstáculo de símbolo: ligado a la reticencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite.

Sierpinska confirma, además, lo que ya había sido señalado por Bachelard: que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico, es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, así como la observación de concepciones análogas en los alumnos.

Artigue (1995) también resalta que el uso común de la palabra *límite* evoca las ideas de lo no traspasable, lo no alcanzable o de fin de un proceso. Señala también una segunda dificultad relacionada con la doble naturaleza –estructural y operacional– que tiene el concepto de límite, y enfatiza la dificultad proveniente de la necesidad de disociar el objeto límite del proceso que permite construirlo, asociándolo con el obstáculo señalado por Sierpinska en relación con la consideración del infinito. La formalización de la noción de límite es otra dificultad, que consiste en mostrar que en ella se concibe un solo proceso, en tanto los estudiantes parecen ver dos, uno que se efectúa sobre la variable y otro sobre los valores de la función.

Como ya fue reseñado anteriormente, Artigue (1995) reagrupa las dificultades en tres categorías, dando respuesta a la pregunta: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿qué requiere para acceder al cálculo? Las posibles respuestas (Neira, 2000) involucran entidades como funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, nociones que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación, los que además están en construcción precisamente en este estadio de desarrollo cognitivo y conceptual, cuando se inicia el trabajo en el cálculo.

Con respecto a las funciones, en el álgebra se manejan muy dependientes de su representación gráfica o tabular, o de los procesos que las engendran, y ahora se deben trabajar como entes conceptuales sobre los cuales se van a aplicar nuevas nociones. El tema de funciones tiene su propio campo de estudio y es él mismo un núcleo de investigación en educación matemática; es, además, el eje central de toda la investigación sobre pensamiento variacional.

Vale la pena recordar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representación con sus representaciones semióticas

(Duval, 1992, 1998) y reconocer en todas el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza por parte de los estudiantes la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma "y = 4", porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x o de función como variación; en cambio, si se presenta gráficamente por la asociación "recta = función", se presentan menos errores.

Aquí hay que destacar el doble estatus de los objetos matemáticos: el operacional (dinámico) y el estructural (estático). En la historia de los conceptos, el primer estatus precede al segundo, aunque luego se vuelve un proceso dialéctico, y las investigaciones realizadas muestran que en la comprensión individual sucede lo mismo. A ese salto cualitativo que se refiere al paso de una concepción en estatus dinámico a estatus estructural, se le ha denominado "encapsulación" o "reificación". D. Tall ha designado "proceptual" al carácter de las nociones matemáticas que representa a la vez los objetos y los procesos. Aquí se presenta un problema: esa flexibilidad es condición necesaria en la comprensión del cálculo, pero a la vez se evidencia la dificultad que hay para desarrollarla individualmente.

En cuanto a los números reales, ¿será que los estudiantes tienen una clara distinción de los diferentes referentes numéricos? Algunas investigaciones (como la de Artigue, 1995) muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, por ejemplo las expresiones para π, $\sqrt{2}$... Entonces, en ese estadio, ¿los números decimales son iguales a los números reales? También se han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de *college* o de primeros semestres de universidad en los Estados Unidos, como que entre 3.25 y 3.26 no hay ningún número, o que 3.138 es mayor que 3.4, o que $(3.4)^2$ es igual a 9.16, situaciones que muestran la complejidad de estas simbolizaciones. No es difícil hacer un sondeo entre nuestros estudiantes para confirmar que adolecen de los mismos vacíos conceptuales respecto a estos referentes.

Para abordar el segundo de los problemas enunciados por Artigue, tomaré una idea de David Tall (1996), quien afirma que si bien la noción de función es el núcleo y centro de la matemática moderna, es el concepto de límite el que significa un paso a un plano más avanzado de pensamiento matemático y es el jalonador de procesos de desarrollo del pensamiento: sabemos bien que el concepto de límite no solo es fundamental en la historia y evolución del cálculo, sino que lo es también en la enseñanza del mismo.

Las dificultades que conlleva el concepto de límite tienen varias connotaciones, entre ellas una de tipo lingüístico, pues en la cotidianidad, dicho término en general tiene significados que no favorecen la idea matemática:

es entendido como algo que nunca puede ser alcanzado, el último término de un proceso, etc., nociones que refuerzan concepciones erradas del concepto matemático. El límite aparece en variados contextos matemáticos: de sucesiones, de series, de funciones, en la noción de continuidad, de diferencial, de integral; es pertinente, entonces, diferenciar entre estos tipos de límites, por ejemplo el carácter discreto del límite de una sucesión (a_n) y el carácter continuo del límite de una función f(x), categorías que han de tenerse claras para ganarle a las dificultades inherentes que conlleva el concepto.

Hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes respecto a los límites. Por ejemplo, que el límite de la sucesión 0.9, 0.99, 0.999, … debe ser menor que 1; que 0.9, 0.99, 0.999, … no tiende a 1 pero tiene límite 1; que 0.999, que es menor que 1, por más nueves que se le agreguen, siempre será estrictamente menor que 1; aceptan que nunca puede pasar de 1 (porque "tiende a tener" la propiedad de los números como 0.9999 que nunca pueden pasar del límite 1). Estas ideas se han catalogado como el *principio de continuidad* (Leibniz) o *generic limit property*, que consiste en creer que cualquier propiedad común a todos los términos de una sucesión también la tiene el límite.

Algunas consideraciones acerca de las prácticas escolares universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial

Las prácticas escolares universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial –PEUC– de los estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital incluyen las prácticas discursivas y no discursivas usuales con que estudiantes y maestros "viven" las clases, con las que participan en el aula alrededor de las temáticas propias de la disciplina. Contienen, entre otras, las formas de "hacer tareas", de discutir con otros, de estudiar individualmente y en grupo, y de participar.

Se indaga la entrada al mundo del cálculo diferencial –en un curso más formal que el acercamiento que da el bachillerato– como fuente rica de información acerca de los obstáculos epistemológicos, semióticos, culturales, didácticos o de la naturaleza que sea, precisamente en ese trabajo inicial, porque se empieza a construir un lenguaje, una forma de nominar, un rigor, un hacer que permea la práctica. Porque se empiezan a tratar funciones como objetos, sobre los cuales se van a definir límites, continuidad y derivadas. Porque se habla, se escribe y se significa de una cierta manera: es ahí donde se ubica esta reflexión, que parte del supuesto de que ese trabajo inicial es fuente de indagación importante.

Se concibe la práctica configurada por los desempeños de los sujetos, el contexto, el medio, el "currículo oculto" y el explícito por el que transita un curso.

La práctica escolar propone la apropiación de rutinas, cuyo sentido está dado por la práctica misma, y crea una cultura propia. En general, afirman Baquero y Terigi (1996), las prácticas escolares suponen un quiebre en la cotidianidad de los sujetos, pues la escolarización implica que el sujeto se apropie de una rutina específica. Las prácticas escolares se caracterizan porque constituyen una realidad colectiva, delimitan un espacio específico, actúan en unos límites temporales determinados, definen roles, predeterminan y sistematizan contenidos y proponen formas de aprendizaje descontextualizado.

En la escuela no solo se desarrollan contenidos formales y saberes explícitos, sino que la actividad sistemática incita a los alumnos a construir sus propios procesos intelectuales, compartiendo medios semióticos como la escritura o formales como las matemáticas.

Se describen a continuación algunos elementos constitutivos de esas prácticas, como los esquemas de clases, los textos usados, las tareas y ejercicios, las evaluaciones, los planes de estudio, los perfiles de profesor y el tratamiento más o menos general de algunas nociones. Descripción informal aún, pero basada ya no solo en la experiencia personal y la observación, sino confirmada a través de diálogos, entrevistas con un número significativo de maestros del ciclo básico de ingeniería, además de consultas con documentos curricularmente institucionalizados en el área de matemáticas de la facultad de ingeniería.

Acerca de los esquemas de clase. Las clases de introducción al cálculo diferencial en la universidad colombiana, en la Universidad Distrital y, específicamente, en su Facultad de Ingeniería, son clases tradicionales[10] en las que el profesor explica los contenidos inscrito en el esquema convencional: definiciones, teoremas,[11] ejemplos, ejercicios generalmente basados en un texto guía o de consulta, en los que el tratamiento de las temáticas es

10 Se reconoce que hay esfuerzos individuales innovadores y también algunos mediados por la tecnología. Pero la generalidad, la institucionalidad del enfoque del área y del ciclo básico de ingeniería está diseñado sobre una metodología tradicional.

11 Los teoremas tienden a desaparecer de la clase tradicional, no sus enunciados, sino sus demostraciones formales; a cambio, lo que generalmente se hace son "mostraciones" argumentadas del hecho que enuncia el teorema.

usualmente el mismo. Hay espacios para elaboración de talleres y trabajos en grupo.

Acerca de los textos guía y de consulta. Cálculo o Introducción al Cálculo, de autores como Stewart, Thomas, Swokowski, Purcell, Leithold, Protter, Larson, son libros que han reinado como textos guía según se vuelvan paradigmáticos en algunas facultades, como las de la Universidad Nacional, las de Los Andes, la Escuela Colombiana de Ingeniería… Todos ellos comparten un enfoque tradicional de por lo menos 50 años.[12]

Acerca de las tareas y ejercicios. Lo usual es que cada profesor disponga de un repertorio o archivo personal referente a ejercicios que ilustran mejor una situación, comúnmente tomados de los libros, de los solucionarios o generados en grupos de trabajo de docentes. Esto se puede corroborar en las notas de clase que publican algunos maestros por medio de la Oficina de Publicaciones de la Universidad Distrital, como también en las guías dejadas en las fotocopiadoras de las facultades.

Que el tratamiento sea clásico, convencional o tradicional, no significa que no se haga un buen trabajo, comprometido, responsable y guiado hacia lo que se considera juega un rol importante en el desarrollo conceptual de los estudiantes.

Acerca de las evaluaciones. Hay parciales y exámenes conjuntos, lo cual lleva al necesario consenso acerca de contenidos, enfoques, temáticas y metodologías. Los profesores llevan propuestas de evaluación y se conforma así la prueba, que se convierte en un verdadero calvario para los estudiantes, pues la "mortalidad" es significativamente alta en estas pruebas conjuntas: se vuelven todo un reto.

Acerca del currículo general de ingeniería en la Universidad Distrital. Hay un ciclo básico en matemáticas que comprende cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal, lógica, cálculo multivariado y ecuaciones diferenciales.[13]

Consultados los planes de estudio de facultades de ingeniería de varias universidades –Nacional, Distrital, Andes, La Salle, Central, Gran Colombia, Piloto, Antonio Nariño, UIS, América, Autónoma, Javeriana, Escuela Colombiana de Ingeniería, UPTC– hay un consenso general acerca de los

12 Por citar un ejemplo, la primera edición del Cálculo de Thomas es de 1952, y van en la 12a edición. Si comparamos la edición de 1945 y la de 1995, podemos efectivamente confirmar su enfoque tradicional.

13 Se consultará a Acofi y a Conaces con el fin de dar cuenta, de manera oficial, del currículo del ciclo básico de las ingenierías.

contenidos de los cursos que constituyen el Cálculo I (diferencial) y el Cálculo II (integral); en muchos casos los mismos profesores dictan los cursos en unas y otras universidades.

Tipos de profesor en ingeniería. En general, el perfil requerido es matemático o licenciado en matemáticas con posgrado en el área. Se encuentran profesores egresados de las Universidades Nacional, Distrital y de los Andes, quienes usualmente dictan cátedra en más de una institución; muchos de ellos cuentan con maestría en matemáticas o en áreas de la ingeniería; muy pocos tienen especializaciones o estudios en educación o en educación matemática. Ni en el área de matemáticas –ni en ningún área del ciclo de especialización en ingeniería– la pedagogía y la didáctica son consideradas un problema, pues se parte del hecho de que saber la materia es suficiente para saber enseñar.

Acerca del tratamiento de algunas entidades conceptuales. Al entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

Ya ha sido reseñado en Neira (2000) que, en el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura a(x) = b(x) en una sucesión de escrituras:

$$a\ 1\ (x) = b\ 1\ (x)$$

$$a\ 2\ (x) = b\ 2\ (x)$$

$$\dots$$

$$a\ i\ (x) = b\ i\ (x),$$

hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. En cambio, en el cálculo se hace un encaje con la proposición "Si $\delta > 0$, y $0 < |a - x| < \delta$", lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar, por ejemplo, que en la vecindad de un punto *a*, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro *a* en donde tal desigualdad se pueda garantizar mediante aproximaciones y estimaciones. Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos, como la noción de función como expresión algebraica, la x como representación de la función idéntica, las constantes como representaciones de las respectivas funciones constantes (Vasco, 1995) y otros casos semejantes.

La noción de tangente proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas:

1. no corta al círculo,
2. lo toca solo en un punto
3. y en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común.

Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas. Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Acerca de la organización curricular en la educación básica y media

Curricularmente, el modo como ocurre la instrucción en la escolaridad institucional es así: dos cursos de algebra en 8º y 9º grado y un curso de cálculo en 11º grado, es decir, se presenta el álgebra como un dominio, como práctica anterior al cálculo; y no solo anterior, sino como prerequisito para entrar a él posteriormente. En la universidad, en primer semestre de ingeniería, el estudiante debe tomar un curso de cálculo diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de fundamentos de matemática o matemáticas básicas, repaso del álgebra y de las funciones, para suplir los vacíos que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de cálculo. Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que este primer acercamiento, paso o transición, significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el álgebra y el cálculo escolar.

En la práctica pedagógica de la organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año entre el álgebra y el cálculo (trigonometría y geometría analítica). De facto, se encuentra el 10º grado, que configura un estadio de transición escolar, del que podría discutirse si tiene alguna razón matemática o pedagógica, o solo de tradición escolar. Nos interesa la transición del algebra al cálculo en el sentido de lo que cambia semántica, sintáctica y semióticamente para el estudiante una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo.

Se asumirá como supuesto inicial que hay un paso o transición y no una ruptura –que es un término que instaura de entrada una postura radical– para que la investigación misma arroje más claridad acerca de ese camino, de ese tránsito. Voy a decir “paso”, no “paso curricular” ni “cognitivo”, entendiendo que curricularmente se pone primero el álgebra y después el cálculo; que el álgebra se considera prerequisito para el cálculo; que para compartir las prácticas del cálculo se requiere, en gran medida, manejar las del álgebra. Hay un paso que algunos dan de una vez; otros se devuelven; hay quienes permanecen un poco ambiguos por un tiempo y otros tal vez nunca pasen, pero cualquiera de las situaciones confirma que este paso también se llama correctamente “transición”. Dicha transición puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, pero se advierte, eso sí, que no se está trabajando desde el punto de vista antropológico ni desde el punto de vista del análisis del discurso.

Tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece ser la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve, ante todo, por la ausencia de la composición; por el entendimiento del exponente menos uno (–1) como recíproco, no como inverso de la función; por el uso del apóstrofe para la derivada; por la manera de entender las igualdades que empiezan por "y =…" como funciones; por la yuxtaposición de letras –sin indicar multiplicación– en los nombres de las funciones (como "*lnx*"). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

Tenemos la conjetura de que la notación para la geometría analítica de décimo grado no es la misma que la del álgebra escolar ni la del cálculo. En geometría analítica, los términos "no significan nada"; sólo las igualdades –que también llamamos "*ecuaciones*"– significan algo, aunque en ellas no se trata de averiguar una raíz o un conjunto solución (o conjunto de soluciones). No importa que las gráficas cartesianas determinadas por esas ecuaciones sean funcionales o no. No se usa la composición ni la derivada. Podría, pues, haber otra transición del álgebra escolar a la geometría analítica y otra al cálculo, pero en este trabajo nos interesa la que va del álgebra al cálculo, entre otras cosas, porque en el cálculo de la universidad, la geometría analítica es una unidad más o una herramienta para las llamadas "*funciones trascendentes*".

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado los estudiantes nunca vieron una "o" pequeña entre dos términos algebraicos como 2x y x^2, pues no representaban dos funciones: la que duplica, *d(_)*, y la que eleva al cuadrado, *c(_)*, sino los números resultantes. En cálculo habría que escribir $c_{\circ}d(x)$ o $d_{\circ}c(x)$, que no es lo mismo. Los objetos del cálculo son, pues, muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q^+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez "porque no hace nada". La *x* se considera como incógnita, como variable o como indeterminada, pero no como función (representa la función idéntica en los reales).

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre *función parcial* y *función totalmente definida*, ni entre *función en ("into")* y función *sobre o sobreyectiva ("onto")*. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Algunas consideraciones sobre el álgebra escolar, el cálculo diferencial y el caso del límite

El tema central que abordaremos en esta sección es si el álgebra de octavo y noveno grados es solo aritmética genérica o generalizada sin pretensiones adicionales, o si las tiene, qué es lo que pretende. Creemos que es lo primero. Precisamente cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, todavía los términos reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico. Aquí pueden ser útiles las ideas de Ed Dubinsky en su Teoría APOE (*"APOS Theory"*).

Para la transformación sintáctica de expresiones a lápiz es más sencilla y rápida la notación del álgebra escolar con variables uniliterales y omisión de los símbolos de multiplicación y elevación a potencias. ¿Cuándo y para qué se empieza a utilizar la transformación sintáctica de expresiones algebraicas? Ahí es muy clara la importancia de pensar en la conversión y en el tratamiento según Raymond Duval: primero se hace la conversión del registro verbal natural al registro algebraico escolar, y luego, un tratamiento de la representación semiótica algebraica internamente en el registro algebraico escolar. En el tratamiento de una representación algebraica no se necesita pensar en lo que representa, sino pensar en las reglas y en sus restricciones para no equivocarse. Solo al final se vuelve a hacer una conversión al lenguaje natural.

Se consideran el álgebra y el cálculo como dos sistemas conceptuales diferentes, con registros semióticos para diferentes sistemas: diferente semántica, sintaxis casi igual. Como se señaló arriba, una diferencia en la sintaxis del cálculo (pero no del álgebra) es el uso del redondelito de la función compuesta. Una diferencia en la semántica es la interpretación de la x como función idéntica, que ciertamente no es del álgebra, dominio simbólico escolar que sirve para representar regularidades que se repiten en patrones y que se asocia con el pensamiento variacional, categorizado para sistemas algebraicos y analíticos. En el cálculo los tópicos más importantes que se suelen estudiar son el de razón o tasa de cambio, los límites, las derivadas, la continuidad, las integrales, nociones que giran alrededor del concepto de límite.

Desde nuestro punto de vista, el caso del área y del perímetro del círculo en los primeros grados de básica secundaria son ya casos del límite como proceso, aunque no estén aún axiomatizados o formalizados a la manera de Weierstrass. El obstáculo es la formalización: ¿por qué se pone valor absoluto y no se dice explícitamente que "x es distinto de x_o y que está en una vecindad de longitud dos delta (2δ) alrededor de x_o"? Puede ser mucho más claro decir esto que decirle al estudiante algo así como "cero es menor que equis menos equis-sub-cero valor absoluto es menor que delta" y escribir:

"$0 < |x - xo| < \delta$".

Se está poniendo el obstáculo en donde no es: en tratar de resumir dos desigualdades en una sola, suponiendo que el estudiante sí es consciente de que x_o puede ser cualquier número positivo o negativo, pero fijo, y que x es ahora variable, pero dentro de esa "vecindad perforada". ¿Podemos suponerlo?

Desde este marco conceptual, así como la longitud de la circunferencia, el área del círculo y otros problemas de cuadratura involucran ya el concepto de límite en el sentido que se quisiera lo manejara el estudiante de cálculo. Lo mismo puede decirse respecto a los decimales infinitos: ¿será que 0,9 periódico es igual a 1 o diferente de 1? Ahí está presente el concepto de límite como nosotros lo vamos a entender en el marco teórico: sin absolutamente ninguna preparación sobre sucesiones, series, límites y desigualdades, sin construcción de los números reales ni conciencia de su completitud, etc.

Para caracterizar lo que llamamos *"el caso del límite"*, es necesario citar la aproximación geométrica que tradicionalmente se presenta. *"La tangente es el límite de la secante (o de las secantes)"*, se dice en el tratamiento tradicional. Hay que plantear el límite de la secante como la tangente, pues eso se hace en los cursos: se traslada el problema al terreno geométrico, pero ese es otro tipo de límite, que no tiene ε ni δ; es bueno para mostrar que el profesor está usando una noción de límite que no es la que se define con ε ni δ, y también para llamar la atención sobre otro punto poco explicitado: el profesor utiliza la palabra *tangente* en dos sentidos: uno, con el significado del final de décimo grado, cuando se habla de las funciones trigonométricas, y otro, en el sentido de la primera parte del décimo grado, cuando se habla de la tangente a las gráficas; luego, ahí el que está poniendo un obstáculo didáctico es el profesor. Está tendiendo una trampa que distingue dos usos que el enunciador sabe que son diferentes, pero el estudiante no. El profesor debería decir: "*la tangente del ángulo que forma la recta tangente con el eje horizontal*". El concepto de pendiente como inclinación puede medirse por el ángulo, por el seno del ángulo o por la tangente del ángulo, y esto es más coherente que tratar de definirla como razón de dos variaciones $\Delta y/\Delta x$. ¿Dónde está la tangente?

En las expresiones simbólicas que involucran el símbolo de infinito, como

$$\text{Lim } x = \infty$$
$$x \to \infty$$

suele haber una inconsciencia en los estudiantes, pero también en el profesor, quien usa igual sintaxis y vocabulario cuando dice que "*la x que tiende a infinito es una variable y la otra x es una función*". Precisamente ahí hay un ejemplo de ese paso del álgebra al cálculo: en el álgebra, la *x* representa variables en el sentido de incógnitas para averiguar o de números genéricos, pero en el cálculo representa la función idéntica.

En Euclides ya se habla de límite y hay una diferencia entre segmento finito, semirrecta y recta indefinidamente larga. Para los profesores de educación media y de universidad, "cálculo" es lo que aparece en los textos sobre cálculo. La conceptualización básica involucra el estudio de los límites, las derivadas, las integrales… y el caso del límite lo conforman todas aquellas situaciones que requieren aproximaciones y vecindades; el mismo profesor en su lenguaje utiliza expresiones como "*acercarse más y más*", "*acercarse tanto como se quiera*", "*tender hacia*", "*infinitamente cercanas*", que involucran entidades como lo infinito y lo infinitesimal. Esquematizando, tenemos:

Algebra	Cálculo	Geometría Analítica	Análisis
Como tratamientos en un registro simbólico para la aritmética generalizada.	Como tratamientos en un registro simbólico para el análisis.	Como conversiones entre dos registros simbólicos de ecuaciones y gráficas.	Como sistema conceptual cuyos elementos son las funciones reales de valor real.

Hay tres operadores sobre funciones que son los que caracterizan el trabajo analítico que se suele hacer en el cálculo: el límite (L), la derivada (D) y la integral (∫).

El siguiente cuadro muestra en la primera columna cada operador analítico por sí solo y el mismo aplicado a su argumento, (que es una función reificada como objeto, como aparece en la segunda columna); en la tercera columna, el valor de esa función cuando se aplica a su propio argumento genérico (que es un número real); luego el argumento aparte (que es un número real todavía no determinado) y un caso particular de un número real.

Operador		Argumento del op	Valor	Argumento	Caso particular
L	L(f)	f	f(x)	x	1
D	D(g)	g	g(y)	y	2/7
∫	∫ (h)	h	h(z)	z	π

Tres elementos fundamentales: "*Procepts, reification, APOS theory*"

Tall y Vinner (1981, en Vasco, 2009) y Fischbein[14] propusieron dos tipos de nociones intermedias entre las nociones vagas y los conceptos científicos (en inglés los llamaron "*concept image*" y "*procept*").

"*Concept image*" ("*imagen conceptual*"). Para comparar el concepto con la imagen conceptual, Vasco propone pensar como ejemplo en el concepto de curva en geometría diferencial; el concepto matemático de curva difícilmente puede separarse de la imagen conceptual de una línea curva, aunque dicho concepto se refiere a una función que proyecta un intervalo de R en un espacio de dos o más dimensiones, no a la imagen del intervalo bajo la función, que es la que mantenemos indisociablemente ligada a la curva. La

14 Los autores se remiten a una idea de Fischbein, Tirosh y Hess de 1979 sobre las intuiciones del infinito y a una ponencia de Vinner y Hershkowitz de 1980 en el PME IV.

imagen conceptual es un conglomerado de todas las estructuras, imágenes, procedimientos y relaciones asociadas con el concepto, y muchas de sus regiones pueden estar muy alejadas y aun contradecir la definición formal del concepto, ya institucionalizada.

La palabra inglesa "*procept*" se podría traducir directamente por "procepto", en el sentido de concepto procedimental, pues se relaciona más con los procesos, procedimientos o algoritmos que con los objetos o las relaciones, pero oscila de uno a otro. Por ejemplo, el estudiante de primaria y secundaria suele rechazar la distinción entre *adición* y *suma*, pues no conceptualiza propiamente la operación binaria de adición, sino que la confunde con la manera como hace las sumas, sin distinguir la operación del resultado, ni éstos del algoritmo que aprendió (por ejemplo el algoritmo usual para sumar varios numerales decimales dispuestos en columna). En símbolos, $a+b$ puede significar sumar a con b, o el resultado de ese proceso.

Otro ejemplo es el del concepto de igualdad. Un estudiante promedio, aún "exitoso", puede pasarse todo el bachillerato sin configurar el concepto de igualdad como relación de equivalencia entre expresiones simbólicas que se refieren al mismo objeto y que permite la sustitución de la una por la otra. Le basta el procepto de igualdad, que condensa el proceso de obtener un resultado y la relación estática de igualdad. Este procepto le permite leer el símbolo "=" como "da", aunque se pierda la propiedad simétrica. Va a creer, por ejemplo, que la ecuación "$0 = x^2 - 1$" está "mal escrita". Pero la idea de Tall es que esa oscilación o confusión entre proceso y concepto no es rechazable, más aún, es una ambigüedad muy conveniente en el pensamiento de orden superior y los expertos también la utilizan sin darse cuenta de que a veces se refieren al proceso y a veces al producto conceptual de ese proceso.

Las palabras *reificación* o *cosificación*, según Vasco, son dos traducciones del inglés *reification*, que se extendió en la educación matemática con los primeros trabajos de Anna Sfard. En latín, "*res*" significa "cosa", y "hacer de algo, que no es cosa, una cosa", se puede decir *cosificación* o *reificación*.

La noción inicial de cosificación o reificación es la de formar mentalmente un objeto de lo que era un proceso, una acción, una operación o una relación. Por eso se encuentra a veces la palabra *objetivación*. Como toda palabra terminada en "*ción*", *cosificación, reificación* u *objetivación* a veces se refiere a la operación mental y a veces al resultado de esa operación.

Vasco enumera algunas pistas sobre la ocurrencia de la reificación de un nuevo producto mental:

- Separarlo de y contrastarlo con otras cosas, objetos, elementos o componentes.
- Operar sobre el nuevo producto.
- Nombrarlo con un sintagma nominal.
- Atribuirle predicados unarios o monádicos.
- Relacionarlo con otros y atribuirle predicados binarios, ternarios, etc.

La propuesta inicial de Anna Sfard, afirma Vasco, era que el progreso en la conceptualización matemática con frecuencia consistía en cambiar de una manera de concebir un proceso o procedimiento como algo activo, que ocurre en el tiempo, a una consolidación y detención del mismo como un nuevo objeto o cosa sobre la cual se empieza a actuar. Para el caso del análisis, se podría pensar en que el estudiante toma las expresiones del álgebra de bachillerato solo como instrucciones para calcular un resultado; por ejemplo, entendería el término "$x^2 - 1$" como "*eleve el número al cuadrado y quítele uno*". Es una comprensión limitada, porque no permite pasar a la función respectiva, pero es correcta. Por eso puede tener éxito en aprobar dos años de álgebra sin construir el concepto de función, pues ese concepto requiere una reificación del procedimiento de calcular el resultado. Si no se reifican las funciones como objetos, no puede construirse un sistema analítico en el que los elementos u objetos sean las funciones reales de valor real. Aquí podría estar la diferencia entre el álgebra de bachillerato y el análisis real.

En este caso Vasco plantea que la reificación es muy cercana al paso del procepto de Tall, Vinner y Fischbein al concepto respectivo. Así lo ha utilizado Ed Dubinsky en experimentos de enseñanza de la teoría de grupos. Pero no es el único caso. Por ejemplo, las relaciones simbolizadas por los signos "<" y ">", que los estudiantes leen *menor* y *mayor,* suelen quedarse en una comparación entre dos números y no pasan a configurar un sistema de relaciones con sus propiedades, su composición, su inversión, etc., pues esas relaciones no han sido reificadas, cosificadas u objetivadas. No se puede trabajar con un sistema cuyos elementos sean las relaciones si los estudiantes no las reifican, es decir, si no las vuelven cosas u objetos mentales.

Aquí también puede haber una barrera para el paso al análisis desde el álgebra de bachillerato y el estudio de pre-cálculo y cálculo con funciones como instrucciones o como relaciones, sin reificarlas. Mientras no se logre la reificación, el estudiante no puede pasar a los sistemas analíticos, cuyos elementos son las funciones como operaciones unarias reificadas. Tanto los estudiantes como muchos de sus profesores siguen pensando que el sistema simbólico que aprendieron en el álgebra de bachillerato representa lo mismo cuando se usa en el cálculo, pues en ambas asignaturas basta saber operar con algunas reglas que se refieren solo a los símbolos, sin tener que pensar en los conceptos.

Conclusiónes

A través del estudio de los obstáculos y dificultades detectadas en la transición del álgebra al cálculo diferencial, se espera aportar a los formadores de profesores, a los profesores y a los estudiantes tanto en la caracterización y explicación de la estructura y funcionamiento del obstáculo en el sistema didáctico, como en herramientas teóricas y metodológicas para el mejoramiento de su práctica docente y de su aprendizaje en el cálculo diferencial, en distintos niveles de escolaridad. En síntesis se pretende aportar herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial escolar en estudiantes universitarios, que han de servir también, por supuesto, para todo aquel que esté transitando del álgebra escolar al cálculo diferencial escolar, y dotar de elementos de profundización, sustentación y fundamentación epistemológica y metodológica a la investigación sobre obstáculos, conflictos y dificultades que se presentan al iniciar el estudio del cálculo diferencial escolar.

Asimismo, se esperan impactos a partir del uso de los resultados de investigación en lo institucional, en relación con la investigación en didáctica de las matemáticas y en la formación de profesores de matemáticas, con las comunidades de investigadores y con las políticas educativas. Se espera plantear propuestas didácticas para superar los obstáculos caracterizados y para desarrollar prácticas escolares que conduzcan a una transición más continua del conocimiento superando las rupturas y los obstáculos; una mayor sustentación teórica y metodológica en el área de matemáticas del ciclo básico de ingeniería para la evaluación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas y una ampliación de la base teórica y metodológica de los investigadores, grupos de investigación, formadores de profesores, profesores en ejercicio en la línea de investigación concerniente a la formación de profesores de matemáticas que tengan en cuenta la caracterización de las PEUC y los obstáculos inferidos a partir de su estudio.

Los acercamientos descritos anteriormente han de permitir obtener algunos resultados prometedores para la investigación que profundizará la tesis doctoral en esta dirección. Consideramos que estos favorecen la discusión y elaboración de propuestas. Hemos encontrado que la detección de dificultades, obstáculos y rupturas, y su clasificación en semióticos, didácticos, epistemológicos, culturales, etc., plantean un gran número de problemas no triviales. Cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos, lo cual es necesario pero no suficiente: lo evidenciamos todos los días en las aulas de clase, y en los "errores" persistentes en los exámenes y evaluaciones.

Se espera haber señalado varios elementos de análisis en dirección a elaborar reflexiones de orden epistemológico y didáctico en cuanto a comprender, interpretar y quizá aportar en la solución, de una manera más amplia, de las dificultades y obstáculos detectados en la comprensión del cálculo diferencial. El trabajo empírico, la recolección y análisis de datos, nos confirmarán las bondades y también las limitaciones de este acercamiento.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (1938/2004). *La formación del espíritu científico* (25ª ed.). México: Siglo XXI. (Obra original publicada en francés en 1938).

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Módulo de Educación Matemática #1*. Buenos Aires: Embajada de Francia en la Argentina/Universidad de Buenos Aires.

______________ (1983/1998). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8*; Sevilla. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. et al. (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En: N. de los A. Climent; L. C. Contreras y J. Carrillo (Eds.). *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 71-86). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Actas EMA (Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla, pp. 305-320).

Duval, R. (1992). *Gráficas y ecuaciones. Antología de la Educación Matemática* (Trad. Parra, M., del original en francés: *Graphiques et equations. L'Articulation de deux registres, 1988. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, pp. 125-139). México: Cinvestav-IPN.

_____________ (1998). Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 Century. En: C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Geometry from a cognitive point of view* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer.

Ferrini-Mundy, J. y Guadard, M. (1992). Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus. *Journal of Research in Mathematics Education*, 23(1), 56-71.

Fichant, M. y Pécheux, M. (1975). *Sobre la historia de las ciencias* (2ª ed.). México: Siglo XXI. (Obra original publicada en francés en 1969).

Kilpatrick, J. A. (1992). History of research in Mathematics Education. En: D. Grouws (Ed.). *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: MacMillan.

Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Ingeniería* (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), n. 1, 87-92.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. [Studies in Mathematics Education Series]. London: The Falmer Press.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En: D. Grouws (Ed.), *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 495-510). New York: MacMillan.

Vasco, C. E. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. En: D. Perkins; J. Schwartz; M. Maxwell y M. Stone (Eds.). *Software goes to school. Teaching for understanding with new technologies* (pp. 54-69). New York/Oxford: Oxford University Press.

__________ (1991). ¿Hay revoluciones o rupturas epistemológicas en las matemáticas? *Revista de la Facultad de Ciencias* (Universidad Javeriana), 1(4), 29-52.

__________ (2009). Acerca de "concept-image, procept, reification". En: *Seminario de investigación del DIE-UD*. Bogotá: DIE-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Pensamiento y lenguaje: sobre la controversia Piaget-Vygotski[1]

Pedro Javier Rojas Garzón
Jaime Humberto Romero Cruz[2]

Introducción

La relación entre *pensamiento y lenguaje* ha generado diversas controversias y es reconocida como una temática extensa y compleja. En este escrito se presenta una síntesis de la controversia entre Piaget y Vigotski, centrada en los siguientes componentes:

1. Propuesta de Piaget[3] en torno a pensamiento y lenguaje.
2. Crítica de Vygotski[4] a la propuesta de Piaget.
3. Generalidades sobre el planteamiento de Vygotski en torno a pensamiento y lenguaje.
4. Respuesta de Piaget a la crítica de Vygotski.

A manera de contextualización, resulta de interés reconocer procesos de interacción al interior de diversos grupos de animales, los cuales podrían considerarse como indicios de una relación entre pensamiento y lenguaje. Por ejemplo, existe registro fílmico sobre una forma de comunicación entre suricatos, mamíferos de la familia de las mangostas, en el que se presentan evidencias de que estos animales no solo hacen "llamadas" con significados, que en esencia son "palabras sin lenguaje", para aludir a depredadores como el águila, el chacal o la serpiente, sino que también son llamadas diferenciadas que se corresponden con cada tipo de animal que es reconocido como una amenaza. Para algunos investigadores, este hecho constituye un indicio de que los animales poseen un pensamiento abstracto. No obstante, otros investigadores resaltan las limitaciones de la inteligencia de los

1 Protocolo realizado en el marco del Seminario *Tres teorías sobre el conocimiento y el lenguaje,* dirigido por el Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe, septiembre 18 de 2008, con base en la relatoría realizada por Cristina Cifuentes, Sergio Briceño y Ruth Molina.

2 Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

3 Jean Piaget (1896-1980, Suiza), biólogo de formación, psicólogo experimental y epistemólogo de profesión. Reconocido por su teoría del desarrollo cognitivo y considerado el creador de la epistemología genética.

4 Lev Vygotski (1896-1934), psicólogo ruso. Reconocido por sus trabajos sobre psicología del desarrollo, en los que se destaca el concepto de *Zona de Desarrollo Próximo*.

suricatos, pues si bien reconocen que como muchos otros animales ellos se comunican con sus congéneres de vez en cuando, no puede perderse de vista que sus mensajes son muy limitados, pues no pueden inventar palabras ni asignar nuevos nombres para cualquier objeto o acontecimiento, como sí lo puede hacer el ser humano.

En el desarrollo de este escrito se intentará establecer algunas relaciones entre aspectos como los referidos en esta introducción y cada una de las secciones.[5]

Propuesta de Piaget en torno a Pensamiento y Lenguaje[6]

En 1923 Piaget publica su libro *El lenguaje y el pensamiento en el niño*;[7] la crítica realizada por Vygotski a este texto, titulada "El problema del lenguaje y el pensamiento del niño en la teoría de J. Piaget", fue divulgada inicialmente en 1932 como prólogo de la edición rusa de dicho texto. En 1934, esta crítica se publicó como segundo capítulo del libro de Vygotski titulado *Pensamiento y Lenguaje*, en el que se agrupa una colección de sus artículos; este texto se considera nuclear en el trabajo de investigación de Vygotski y su grupo de colaboradores: Leóntiev, Luria, Zaporózhets, Sájarov, Shif, Bozhóvich, Morózova, Slávina, Soloviov, Zankov y Pashkóvskaia, entre otros.

La presentación del trabajo de Piaget se hace a través de algunas preguntas que el autor intenta contestar en el desarrollo de su obra.[8]

¿Cuáles son las necesidades que el niño de edad más avanzada tiende a satisfacer cuando habla?

Piaget, apoyado tanto en el trabajo de algunos psicoanalistas como en el elaborado por Stern y en el realizado con niños pequeños,[9] plantea que el

5 Los aportes en este protocolo se reducen a la organización de los aspectos abordados en las distintas presentaciones y a la sugerencia de documentos para ampliarlos, a la redacción de algunos apartes de dichas presentaciones y a la incorporación de ciertos comentarios o referencias, varios de ellos como nota a pie de página.

6 Sección basada en las ideas presentadas por *Cristina Cifuentes*, participante en este seminario.

7 Original en francés, titulada *Le langage et la pensée chez l´enfant*.

8 En esta presentación solo se hace referencia a los planteamientos de Piaget en la obra citada de 1923, es decir, en uno de sus primeros trabajos.

9 Al parecer hace referencia al matrimonio alemán que a principios del siglo XX publicó el libro *El habla de los niños*. Para estos autores, según lo plantea Vygotski (2001, p. 81), hay tres raíces del lenguaje, de las cuales solo la tercera constituye un rasgo del lenguaje propiamente humano:
(1) la tendencia expresiva,
(2) la tendencia social a la comunicación y

habla no solo tiene la función de comunicar el pensamiento; sostiene que esto sucede en muchos casos en que los adultos hablan solos, y que lo mismo ocurre con los niños. Se pregunta entonces cuáles son las necesidades que satisface este tipo de habla; así empieza su estudio sobre la lógica infantil a través del análisis de las funciones del lenguaje. Inicia su obra presentando datos de enunciaciones y conversaciones de dos niños cuando hablan libremente. Sistematiza los datos y categoriza sus enunciados en dos grandes grupos: *lenguaje egocéntrico y lenguaje socializado*. En el grupo del lenguaje egocéntrico ubica aquellas frases que el niño enuncia sin intención de ejercer una acción sobre el otro. En este caso encuentra tres sucesos diferenciados, las tres primeras categorías en el lenguaje infantil que considera egocéntricas: por una parte, dos tipos de *monólogos*: individuales y colectivos; cuando los niños están trabajando, por lo general van acompañando su acción con el habla, sin sentir la necesidad de estar comunicando su pensamiento a otra persona; por otra parte, la *repetición* de palabras o ecolalia, lo que parece ser una herencia del balbuceo.

Para Piaget se trata de lenguaje egocéntrico en tanto el niño habla de *sí* mismo y *para* sí mismo; en los casos en que no lo hace, no tiene la intención de ejercer una acción sobre el otro ni de que el otro lo entienda;[10] este lenguaje egocéntrico cumple la función de acompañar o reemplazar la acción, tiene un carácter más de tipo lúdico (placer del habla) y –en el caso del monólogo colectivo (el niño en presencia de otro empieza a hablar)– le ofrece el placer de vincular a otro sujeto a su acción sin necesidad de que este tenga una respuesta; el niño se siente el "centro del universo" y desde allí hace todas sus interpretaciones.

En palabras de Piaget:[11]

> *Al pronunciar las frases del primer grupo, lenguaje egocéntrico, el niño no se preocupa de saber a quién habla y si es escuchado; habla ya para sí, ya por el placer de asociar a cualquiera a su acción inmediata. Este lenguaje es egocéntrico, en primer lugar, porque el niño no habla*

---

(3) la tendencia "intencional" (en tanto orientación a un sentido determinado).
Para Vygotski, estos autores asumen un punto de vista personalista-genético y –en relación con el desarrollo del lenguaje–, hacen énfasis en la importancia del factor lógico. También encuentran que, próximo a los 2 años, el niño hace uno de los descubrimientos más importantes de toda su vida: descubre que "a cada objeto le corresponde un patrón de sonido que lo simboliza, que sirve para designarlo y comunicarlo, es decir, cada cosa tiene su nombre" y atribuye al niño en esta edad "el despertar de la conciencia a los símbolos y a la necesidad de ellos" (p. 82). Para el desarrollo del habla surgen entonces tanto las preguntas sobre los nombres de objetos como un aumento permanente del vocabulario del niño.

10 Habla sin dirigirse a nadie, como si pensara en voz alta.

11 Como lo resalta Vygotski (2001, p. 46), para Piaget, "*el adulto piensa de modo socializado incluso cuando está solo y el niño menor de 7 años piensa y habla egocéntricamente aun estando en sociedad*".

sino de sí mismo, pero sobre todo porque no trata de ponerse en el punto de vista de sus interlocutores. El interlocutor es el primero que llega, el niño no le pide sino un interés aparente, que se haga evidente la ilusión de que es oído y comprendido; no experimenta la necesidad de actuar sobre el interlocutor, de informarle verdaderamente algo.

En el caso del lenguaje socializado, en el que Piaget ubica las críticas, las burlas, las órdenes, los ruegos, las amenazas, las preguntas, las respuestas y la información adaptada (que para este autor es uno de los rasgos más fuertes, aunque aún incipiente en el niño), se tiene la intención de ejercer una acción sobre otro sujeto, bien sea pedirle, preguntarle o comunicarle algo de su pensamiento a través de dicha información adaptada (en tanto se corresponde con la realidad). Para este autor el único tipo de enunciado que hace el niño y que tiene la función de comunicar su pensamiento es la información adaptada.

Sin embargo, parece haber una paradoja: ¿por qué los niños piensan y actúan de un modo más egocéntrico que el adulto, pero tienen incontinencia verbal, esto es, parecen más socializados y aparentemente necesitan estar socializando todo el tiempo? Para Piaget el pensamiento infantil es egocéntrico pero es incapaz de intimidad, mientras que el pensamiento adulto es socializado pero capaz de intimidad. La falta de intimidad del pensamiento infantil puede ser entendida como una ignorancia del niño de la intimidad del yo; en otras palabras, según este autor, el niño no está individualizado –pero tampoco está socializado, como lo está el adulto– debido a su reducida vida social[12] o a la ausencia de la misma.

Esta falta de intimidad es la que genera el pensamiento egocéntrico;[13] ante la imposibilidad de diferenciar entre el yo y el otro, el niño no se preocupa por si es o no comprendido, pues habla desde sí mismo y para sí mismo. Este autor establece un coeficiente de egocentrismo, calculado como la razón entre la cantidad de frases que el niño enuncia (monólogos individuales, monólogos colectivos y ecolalia) sobre la cantidad de frases

12 Este autor, según lo plantea Vygotski (2001, p. 47), considera que antes de los 7 u 8 años el niño no tiene una vida social consistente y que el "verdadero" lenguaje social del niño, el que utiliza en el juego, visto como actividad fundamental, no es solo palabras, también incorpora movimientos, gestos y mímica.

13 Puede decirse que esta manera de pensamiento del niño tiene una doble naturaleza:, por una parte está orientada a la satisfacción de los deseos, y por otra, hacia la realidad (a la adaptación mental); el carácter egocéntrico del pensamiento del niño, que Piaget considera necesariamente ligado a la naturaleza psicológica de éste y lo ubica hasta la edad de 7 u 8 años, da lugar a los fenómenos de sincretismo (vistos como uniones o conciliaciones de aspectos o puntos de vista diferentes sin una coherencia sustancial). Para él, este pensamiento no es completamente consciente y en el pensamiento infantil predomina aún la lógica de la acción.

espontáneas.[14] Piaget, en sus investigaciones empíricas, encuentra que a medida que el niño crece dicho coeficiente disminuye, y si bien reconoce que éste no desaparece, considera que se disipa después de los 7 u 8 años, edad a partir de la cual empieza a dominar el pensamiento abstracto, y de alguna manera el pensamiento egocéntrico "se atrofia".

Piaget propone una hipótesis sobre desarrollo humano: el niño transita entre el pensamiento autístico y el pensamiento inteligente o dirigido, pasando por una serie de fases intermedias que constituyen el pensamiento egocéntrico. Para este autor, el pensamiento autístico –que retoma de los estudios de Freud– es:

> *lo inconsciente* [subconsciente]*; no está adaptado a la realidad exterior sino que se crea a sí mismo una realidad imaginaria o de sueño; tiende a no establecer verdades sino a satisfacer deseos y permanece estrictamente individual sin ser en sí mismo comunicable por el lenguaje; en efecto, procede ante todo por las imágenes, y para comunicarse debe recurrir a procedimientos indirectos evocando por medio de mitos y símbolos los instintos que lo guían.*

Por su parte el pensamiento dirigido es, en cierta manera, lo contrario: es consciente, persigue fines que están presentes en el espíritu del que piensa, es inteligente, es decir, está adaptado a la realidad, es susceptible de verdad y de error (diferencia entre verdad empírica y verdad lógica) y es comunicable por el lenguaje.

Para cada uno de los pensamientos, tanto para el egocéntrico como para el dirigido, Piaget asocia una lógica. Para el pensamiento egocéntrico es más sincrética, los juicios van de un salto desde las premisas a las conclusiones sin ningún tipo de conector, simple y llanamente se exponen los hechos; mientras que para el pensamiento dirigido la lógica es más deductiva y trata de explicar los lazos entre las proposiciones usando conectores lógicos. El pensamiento egocéntrico no insiste en la prueba o demostración; no controla las proposiciones; usa esquemas personales de analogía y recuerdos del razonamiento anterior, sin que las influencias se expliciten y sin que aparezcan las relaciones de causalidad; usa esquemas visuales. En tanto se asumen los juicios de valor personal, este pensamiento es considerado subjetivo. Por su parte, el pensamiento dirigido insiste en la prueba, se remplazan los esquemas de analogías y los visuales –que no son comunicables– por esquemas deductivos, los cuales juegan un papel fundamental en las demostraciones; en tanto los juicios no son personales, sino juicios de valor colectivo, este pensamiento se asume como objetivo.

14 No incluye para su cálculo las expresiones generadas mediante preguntas de los adultos, pues si hay muchas preguntas al niño, este coeficiente se puede modificar sustancialmente.

Consideremos ahora otra de las preguntas de Piaget, que al parecer está asociada con el trabajo anterior[15] y tiene que ver con su interés de confirmar si las categorías de tipos de lenguaje o de habla que él había propuesto se evidencian en estos niños de edades entre 3 y 7 años, y si encuentra en ellos un coeficiente de egocentrismo elevado.

¿En qué medida se comunican los niños con sus coetáneos, sus padres u otros adultos?

Plantea que en el intercambio entre niños de 3 o 4 años y los adultos o padres, se evidencia una mayor frecuencia de episodios de lenguaje egocéntrico en relación con la frecuencia del mismo lenguaje en su interacción con coetáneos. Entre infantes hay una mayor cantidad de expresiones de lenguaje socializado que entre el niño y el adulto-padre (coeficiente que es susceptible de variación dependiendo del "tipo" de padre). Para el niño, los adultos (padres) son a la vez superiores y están próximos a él por su simpatía envolvente. Así, el niño oscila entre una actitud de ruego o solicitación, preguntas o lenguaje egocéntrico. Los niños de 3 a 4 años inician con un coeficiente de lenguaje egocéntrico elevado, a la vez que incrementan el lenguaje socializado con el adulto, pero no se trata de cualquier tipo de lenguaje socializado; por lo general, el menor deja de hablar egocéntricamente para dar paso a la pregunta "¿por qué?". El niño se encuentra entre una actitud de solicitación y una de comunión hecha de confusión entre el yo y el otro. Sin embargo, en ninguno de estos casos sale de su propia perspectiva para coordinarla con la de los demás; de ahí la prominencia del lenguaje egocéntrico entre los pequeños y el adulto cuando éste no impone por la autoridad una alteración de estas relaciones (por ejemplo, no se interpela a los niños cuando están en sus monólogos colectivos).

En el intercambio de los niños con sus coetáneos, como se mencionó anteriormente, se evidencia una mayor presencia de lenguaje socializado en relación con los intercambios con adultos. ¿Por qué esta diferencia? Porque el compañero, por el contrario, en tanto individuo a la vez diferente e igual, plantea un problema nuevo, el de la disfunción continua entre el yo y el otro, y la reciprocidad de estas dos perspectivas. De allí el rol esencial de la cooperación entre iguales; sus relaciones tienden a ser más simétricas, por lo que es fuente para que se dé un mayor nivel de lenguaje socializado y se posibilita la cooperación. Plantea la ley de la evolución del egocentrismo verbal.

15 Hacen referencia a dos trabajos en los que se apoya Piaget, uno en Cambridge, con 154 niños (realizado por una pareja de esposos) y otro en Hamburgo, con 4 niños (de Kindergarten), uno de los cuales es hijo de la investigadora.

Ahora bien, en tanto trabaja con un mayor número de niños, calcula sus coeficientes de egocentrismo y encuentra que son elevados, pero que hay un estadio semi-estacionario entre los 6 y 7 años en que este coeficiente poco disminuye, aunque hacia los 7 u 8 años, y de manera abrupta, tal coeficiente cae; se dice entonces que el niño se encuentra en la etapa de *egocentrismo verbal*. Para Piaget, el egocentrismo verbal es simplemente un caso particular del egocentrismo cognitivo. No es capaz de diferenciar entre el objeto –bien sea éste un objeto físico u otra persona– y el objeto que aprende. Para salir de este egocentrismo, dice este autor, es necesario, por una parte, que el niño tome conciencia de sí como sujeto y que desligue el sujeto del objeto, y por otra, que sea capaz de coordinar su punto de vista con el de otros, de relativizar su perspectiva. Así, el niño transita hacia un pensamiento más dirigido, más objetivo.

Como se mencionó anteriormente, Piaget encuentra en el análisis de las conversaciones entre los niños, que existen ciertos estadios y se pregunta:

¿Cuáles son los tipos de estadios de conversaciones entre los niños de 4 a 7 años?

Para estudiar la lógica infantil, este autor se basa en las formas de diálogo. Reconoce tres tipos de estadios de conversación, el primero entre los 3 y 4 ó 5 años, el segundo, que inicia hacia los 5 ó 5 años y el tercero, hacia los 7 años, cada uno de ellos con ciertos rasgos característicos; por ejemplo, en el último aparece la colaboración en el pensamiento abstracto debido a los acuerdos que los niños hacen frente a las opiniones o deseos. En el primero, en las conversaciones predominan los monólogos colectivos; posteriormente aparecen dos estadios, uno como respuesta a los acuerdos y otro como respuesta a los desacuerdos. Para Piaget las disputas pueden ser tanto choques de acciones o afirmaciones contrarias como discusiones primitivas, que son choques de afirmaciones motivadas y que conllevan a las discusiones verdaderas; lo mismo pasa cuando los niños están de acuerdo, lo que llevaría a la colaboración en el pensamiento abstracto, que corresponde a un tercer estadio.

Otra de las preguntas está relacionada con el problema de la comprensión:

¿Cuando los niños hablan entre sí, se comprenden?

Al respecto Piaget encuentra, por una parte, que la comprensión que se da entre niños es muy inferior a la que se da entre niños y adultos, y por otra, que los niños comprenden mejor las explicaciones mecánicas que las narraciones. Veamos un ejemplo. Se les dice a los niños que van a jugar a quién cuenta mejor una historia, para lo cual se dispone de un “explicador” y unos “reproductores”. El explicador cuenta historias de hadas o brujas a los niños, en las cuales hay varias relaciones causales y hechos relacionados, así como explicaciones mecánicas, como la manera en que funciona una jeringa o la manera en que funciona una llave de un grifo; para estas explicaciones no solo se usa información verbal, sino también imágenes en la que se les muestra, en términos globales, cómo funcionan dichos mecanismos sin entrar en detalles; después se le pide a cada niño, el “reproductor”, que cuente dichas historias a otro niño, el cual a su vez deberá reproducir la historia que el anterior niño le explicó. Se juega, pues, a quién cuenta mejor una historia y se encuentra que las exposiciones de los niños carecen de orden en los relatos y que no plantean conexiones causales lógicas entre los hechos y los acontecimientos señalados. Como mencionamos anteriormente, se evidencia que los niños entienden mejor las explicaciones mecánicas que las narraciones de historias. Según este autor, tanto el orden de los relatos como las discusiones verdaderas y el incremento en el porcentaje de comprensión, son contemporáneos y definen un nuevo estadio. Todo esto se explica por el egocentrismo –el niño como centro del universo– ya que la conversación entre niños no es suficiente para sacar a los interlocutores de su egocentrismo, pues cada uno de ellos, tanto al intentar explicar su pensamiento como al intentar entender el de los demás, queda encerrado en su propio punto de vista.

Finalizamos esta primera sección abordando la siguiente pregunta:

¿Hay un sincretismo en el pensamiento como lo hay en la percepción y en la conciencia lingüística?

Piaget retoma los trabajos sobre percepción y algunos de lingüistas para decir que allí hay sincretismo. Acude a caracterizar, en cierta forma, qué se entiende como sincretismo del razonamiento, el cual considera producto del sincretismo de la comprensión. Plantea que, en su origen, el sincretismo de razonamiento es la asimilación de dos proposiciones por el solo hecho de que tienen un esquema de conjunto en común y entran, de buen grado o por la fuerza, en el mismo todo: *A* entra en el mismo esquema de *B*, luego *A* implica *B*. Por ejemplo, les pide a los niños establecer relaciones entre proverbios y explicar el porqué de dichas relaciones; resalta que para ellos siempre hay una necesidad de justificación a todo precio, la cual considera una ley de la inteligencia del niño. Dice que todo hecho está ligado por el sincretismo: todo se debe a todo, todo es percibido a través de esquemas de conjuntos construidos por la imaginación gráfica, por las analogías del detalle, por las circunstancias contingentes; es natural que la idea de azar o de lo arbitrario no exista en la mentalidad sincrética.

A lo primero, Piaget lo llama razonamiento pre-causal; a lo otro, un razonamiento que podría llamarse pre-aleatorio (término que no es usado por este autor). Hay sincretismo en el razonamiento en tanto lo hay en la comprensión. El sincretismo en la comprensión consiste en el hecho de que la comprensión del todo refiere a la comprensión del detalle y que en la comprensión del detalle no se opera con o sin ella más que en función del esquema del todo. Por ejemplo, en la comprensión de frases que contienen palabras desconocidas por el niño, este deja escapar todas las difíciles; luego relaciona las que ha comprendido hasta construir un esquema de conjunto que luego le permite interpretar las palabras no conocidas. Si bien puede llevar a múltiples errores, se constituye en un mecanismo eficiente.

A manera de síntesis, puede plantearse que así como hay una evolución del pensamiento autístico (no dirigido) al pensamiento racional (dirigido), también hay una evolución del pensamiento simbólico al pensamiento lógico, en la cual existe una fase intermedia denominada pensamiento sincrético; dicha fase está entre la condensación –que es un rasgo del pensamiento simbólico freudiano– y la generalización –que es un rasgo del pensamiento lógico– y va desde el desplazamiento en tanto mecanismo pre-lógico –también de origen freudiano– a los mecanismos lógicos de la abstracción, en una especie de tránsito. Es importante destacar que todos los rasgos del pensamiento del niño planteados por Piaget son evidenciados desde el habla, a través de las formas, de las relaciones que establece y de los conectores que usa, deduciendo que su pensamiento es egocéntrico y se caracteriza por el sincretismo, por la subjetividad y por la ausencia de causalidad, entre otros. La función primordial del habla es la de acompañar la acción.

Crítica de Vygotski a la propuesta de Piaget[16]

En la crítica que Vygostki (2001) hace a Piaget,[17] reconoce que si bien este establece unas características propias del pensamiento infantil, como "*el egocentrismo del lenguaje y el pensamiento del niño, el realismo intelectual, el sincretismo, la no comprensión de las relaciones, la dificultad de la toma de conciencia, la incapacidad para la introspección*", etc., es el pensamiento egocéntrico del niño[18] lo más importante y la base del planteamiento

16 Sección basada en las ideas presentadas por Sergio Briceño.

17 Esta sección está basada en el capítulo 2 del libro *Pensamiento y Lenguaje*, pp. 29-80 [obra publicada originalmente en ruso en 1934].

18 Visto como forma de transición que se ubica desde el punto de vista genético, funcional y estructural, entre el pensamiento autista y el racional dirigido. Según Vygotski, desde la teoría de Piaget, el "eslabón central que permite unificar todas las particularidades aisladas del pensamiento infantil" consiste en el carácter egocéntrico del pensamiento del niño, en tanto las otras características, en cierta forma, se desprenden de esta particularidad fundamental (pp. 33-34).

que hace Piaget, su piedra angular; sin embargo, se pregunta Vygotski, en qué consiste este carácter egocéntrico del pensamiento infantil y cuál es su relación con las otras características, cuál es la singularidad propia del lenguaje del niño en comparación con lo que sucede con el adulto. Reitera, pues, la imposibilidad de restringirse, como pretendía Piaget, al análisis de los datos, ya que al intentar establecer relaciones se debe necesariamente acudir a una teoría; es imposible hacerlo al margen de ella.

Otras de las preguntas que hace respecto del trabajo realizado por Piaget están relacionadas con lo metodológico, pues plantea que si todo se centra en el pensamiento egocéntrico y este no se explica desde sus relaciones con las otras características o elementos propuestos por él, de alguna manera su planteamiento podría quedarse "sin piso". Hay así dos aspectos fuertes en la crítica formulada por Vygotski, uno que tiene que ver con la ausencia de relaciones objetivas entre esos elementos del pensamiento infantil y otro con el método utilizado que entraría en crisis. Resulta importante tener en cuenta que en ese momento el pensamiento psicológico estaba en crisis, ya que existía una permanente tensión entre las miradas materialistas y las idealistas, y que, precisamente, la causa fundamental de esta crisis se da por las tensiones y posibles contradicciones "*entre la base empírica de las teorías y las construcciones teóricas edificadas sobre dicha base*" (pp. 31-32).

Reconoce que Piaget, encerrándose en el círculo de los resultados, de los hechos empíricos, pretende escaparse un poco de ese dualismo poco seguro del momento (quizá se daba a que para analizar los nuevos datos y sus relaciones, sus nuevos métodos, se creaban nuevas teorías) y ve en el empirismo puro (introduciendo el método clínico) un terreno seguro, aunque le cuestiona su pretensión de hacer análisis desligándose de una teoría de base, lo cual considera imposible en tanto, dice, "*quien analiza los hechos, lo hace indefectiblemente a la luz de una teoría*" (p. 32). No obstante, respecto al método de Piaget reconoce un aporte importante en relación con las peculiaridades del pensamiento infantil, en cuanto éste pasa de estudiar en sus investigaciones iniciales lo que no había en el niño, las carencias que tenía, aquello que no podía resolver, lo que le faltaba para ser adulto (por ejemplo, que no es capaz para el pensamiento abstracto, para la formación de conceptos, para razonar los juicios ni para deducir), a estudiar en las nuevas investigaciones lo que el niño puede hacer, lo que está presente en él, lo que lo caracteriza, las peculiaridades y propiedades de su pensamiento, reconociendo así que no es un adulto en miniatura y su mente no es la mente en pequeño de un adulto (idea que retoma de Rousseau).

Respecto a los planteamientos de Piaget sobre el desarrollo humano, Vygotski considera que la etapa inicial del niño no es el pensamiento autista,[19] como éste lo planteaba, e incluso considera que dicho término es equívoco, para lo cual retoma los trabajos de Bleuler.[20] Este último fue uno de los primeros que resaltó las dificultades del término "pensamiento autista", en tanto genera posibles confusiones con el autismo esquizofrénico o una indebida identificación con el pensamiento egoísta, y considera más apropiado el término "pensamiento irreal"[21]. Para Vygotski (2001), el pensamiento autista no necesariamente es inconsciente; de hecho, muestra evidencia de experimentos con niños que abordan una actividad determinada, a la que se le incorpora cierta dificultad adicional,[22] en la cual el lenguaje se convierte en un recurso del pensamiento; es decir, la dificultad potencia el pensamiento autista:

> *Aparte de su función puramente expresiva y de descarga, y que sólo acompaña la actividad infantil, pronto se convierte en un recurso del pensamiento propiamente dicho; es decir, comienza a cumplir la función de planificar la resolución del problema surgido durante la actividad.*

Para argumentar el cuestionamiento que hace del planteamiento de Piaget respecto a asumir que el pensamiento del niño pequeño es autista, alejado de la realidad, Vygotski afirma que ni desde la ontogénesis ni desde la filogénesis del pensamiento puede desconocerse "*que la forma primaria de actividad intelectual es el pensamiento activo, práctico, orientado hacia la realidad, que representa una de las formas básicas de adaptación a condiciones nuevas, a las cambiantes situaciones del medio exterior*" (p. 42). Ahora bien, si se cae su idea de que el pensamiento inicial es autista, se caería la estructura que fundamenta la hipótesis piagetiana sobre el desarrollo humano. Vygotski se apoya en los trabajos de Bleuler, quien señala

19 Para Vygotski (2001, p. 40), este pensamiento no solo no es la primera fase en el desarrollo mental del niño, una función primitiva, o la forma inicial de la que parten todas las demás (como lo expone Freud y lo adopta Piaget), sino que tampoco es la primera fase en el desarrollo de la humanidad.

20 Fue uno de los primeros psiquiatras seguidores de Freud. Con él, Piaget quiso trabajar para aprender a entrevistar a los niños y, como parte de su formación, hacerse un psicoanálisis [Comentario realizado por el Dr. Carlos Vasco].

21 Del trabajo de Vygotski, plantea el expositor, se destaca su capacidad para desarrollar nuevas ideas a partir de otras que toma de un autor, ajustando ciertos postulados y articulándolo con observaciones, experimentos, conceptos y teorías que desarrolla dentro de su trabajo de investigación.

22 Por ejemplo, un niño al que haciendo un dibujo de un tren se le rompe el lápiz, o que cuando se dispone a realizar la actividad "*no tiene a mano el lápiz de color, el papel o la pintura que necesitaba*" (p. 50). Vygotski plantea que en estos casos, tales dificultades o alteraciones en el curso normal de la actividad son uno de los principales factores que originan el habla egocéntrica y que, en situaciones similares a las planteadas por Piaget [incorporando una dificultad], el lenguaje egocéntrico aumenta, pues «*el niño trataba de entender y remediar la situación hablando y razonando consigo mismo: "¿Dónde está el lápiz?, ahora necesito uno azul; no importa, pintaré con el rojo y lo mojaré con agua, se pondrá oscuro y parecerá azul"*» (p. 50).

"*la inconsistencia biológica de la idea del carácter primario y original del autismo*" y dice que "*el pensamiento autista puede ser, en principio, tanto consciente como inconsciente*" (pp. 42-44).

Generalidades sobre el planteamiento de Vygotki en torno a Pensamiento y Lenguaje[23]

Como introducción de esta sección, los expositores proyectan otro vídeo sobre el comportamiento animal, en el que se hace una referencia especial a los delfines. Plantea el narrador de este video que la fuerza motriz que hay detrás de la inteligencia del delfín es el mundo social en el que vive. Relacionan este estudio con los estudios realizados por más de 30 años con chimpancés, y plantean que se llega a una conclusión parecida:

> *para aquellos animales que poseen un gran cerebro y que viven en grupo, la inteligencia es importantísima, porque cada uno de los individuos del grupo tiene su personalidad y necesita saber con exactitud quién es quién para comportarse de la forma apropiada; no solo deben conocer su propia relación con los demás, sino que también deben conocer las relaciones que hay entre ellos.*

De modo que las complejidades de la vida social pueden exigirles a algunos animales un nivel de inteligencia mayor; no solo los chimpancés y los delfines viven en mundos sociales complejos como lo hacemos nosotros, sino también los loros, cuervos y urracas. La inteligencia es tan solo un aspecto de la mente animal.

Revisemos ahora los principales elementos que trabajó Vygotski en torno al problema de la relación entre lenguaje y pensamiento. Fundamentalmente, decía él, en el análisis genético del pensamiento y del lenguaje se ha encontrado que "*la relación entre ambos procesos no es constante a lo largo de su desarrollo, sino variable*" (p. 91), pues no necesariamente son paralelos, es decir que pensamiento y lenguaje pueden tener un origen diferente, aunque en algunos momentos se entrecrucen. Plantea específicamente que, en los animales, el pensamiento y el habla proceden de distintas raíces genéticas, como lo mostró Köhler en sus investigaciones. A partir de estas premisas empieza a indagar, en los trabajos de diferentes autores, cómo ven esta relación y qué plantean sobre la inteligencia. Por ejemplo, aborda trabajos de psicólogos que realizaron estudios sobre inteligencia en animales, como los presentados en el vídeo, en los que se destaca cómo el proceso social determina algún tipo de inteligencia, aunque ésta no necesa-

23 Sección basada en las ideas presentadas por Ruth Molina

riamente se correlaciona con un lenguaje, al menos como el manejado por los humanos. En sus trabajos con chimpancés, Köhler encuentra que si bien aparece una inteligencia embrionaria en los animales, esto no determina que haya una relación directa con el lenguaje, pues aunque existan algunas expresiones fonéticas, estas se deben a elementos de carácter motivacional-emocional más que a manifestaciones completamente objetivas, por decirlo de alguna manera. Introduce el término "*insight*" (en alemán "*Einsicht*") para nombrar una de las operaciones intelectuales que parecen accesibles a los chimpancés.

Köhler, por su parte, reconoce que las acciones de los chimpancés están completamente desconectadas del lenguaje. Plantea que hay unos gestos indicadores que señalan que existe un paso entre lo emotivo y lo objetivo dentro del repertorio de gestos que maneja un grupo de chimpancés. Aunque estos animales tienen un aparato fonador, no imitan sonidos, y si tenemos en cuenta que no hay ninguna diferencia entre el aparato fonador de estos animales y el de los humanos, se evidencia que el problema no es de carácter biológico y que el lenguaje tiene otra raíz. Basado en estos autores, Vygotski plantea que el pensamiento y el lenguaje definitivamente tienen diferentes raíces genéticas; son funciones que se desarrollan a lo largo del tiempo y con líneas diferentes, independientes, y no existe, como se planteó arriba, una correlación definitiva y constante entre ellas. Reconoce que los antropoides ponen de manifiesto una inteligencia similar a la de los humanos en ciertos aspectos, referidos casi exclusivamente al uso de las herramientas; pero que, con respecto al lenguaje del hombre, no hay algo que se le parezca, aunque hay una función de descarga de emociones a través de ciertos gestos que tienen una función de carácter social.

Como se puede evidenciar en registros de vídeo sobre el comportamiento de los chimpancés, estos tienen una estructura social, y si bien hay cierta comunicación entre ellos, no poseen propiamente un lenguaje. Hay una estrecha correspondencia, entonces, entre las características que han permitido a algunos etólogos y psicólogos analizar el posible pensamiento de los chimpancés y el comienzo del pensamiento en el hombre, por lo menos hasta cierta edad, reconociendo que ese desarrollo filogenético apreciable en los chimpancés se replica ontogenéticamente en los niños. Vygotski empieza a mirar cómo se presenta ese desarrollo en los infantes y cuáles son sus características; por esto plantea que la existencia de una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento infantil solo se ha corroborado recientemente. Dice que los niños pasan por una etapa, en sus primeros meses de vida, que Köhler llamó "la edad del chimpancé", con unos procesos y líneas separadas entre pensamiento y lenguaje, con comunicaciones emotivas, pero no necesariamente objetivas. El lenguaje aparece relacionado, inevitablemente, con la intención de hacer algún tipo de cosa. Revisa en otros autores la función social del lenguaje en los menores y encuentra que los niños de dos años muestran un deseo de conquistar el habla a partir de que descubren que cada cosa tiene un nombre y esa motivación empieza a "disparar" en ellos un proceso de asociación del lenguaje con la identificación de los objetos.

Un aspecto que vale la pena destacar es que dichos estudios le permiten a Vygotski plantear que el desarrollo del pensamiento en los niños tiene una etapa pre-verbal, mientras que el desarrollo del lenguaje tiene una etapa pre-racional. ¿Cómo ve esto? Vygotski comienza por hablar de lo que es el lenguaje interiorizado. Cuando se llega a cierto punto del desarrollo de los niños, pasan del cuchicheo o balbuceo a un lenguaje interiorizado que puede desarrollarse simultáneamente con el externo, según dice Watson, o puede que uno se dé después del otro. Sin embargo, cuando se da todo el proceso del habla egocéntrica, Vygotski entiende esta última como paralela al habla interiorizada en sus funciones. Esas funciones son sociales en el sentido en que los adultos usan el lenguaje para regular la conducta del niño. El lenguaje interiorizado y el egocéntrico son modos del habla íntimamente unidos con el ordenamiento de la conducta infantil, es decir, pareciera que el lenguaje es un proceso que se interioriza primero desde el proceso psicológico que desde el físico. El eslabón que hay entre el lenguaje externo y el lenguaje interiorizado, según Vygotski, radica en el lenguaje egocéntrico que propone Piaget. Así, diferencia dos tipos de lenguaje, uno externo y uno interiorizado, y dice que la única manera de mirar la relación entre los dos es considerar que continuos y que se puede explicar el paso de uno a otro mediante la existencia del lenguaje egocéntrico. En tal sentido acude a los trabajos de Piaget y reconoce su importancia, pero plantea que este lenguaje cumple funciones que van más allá del carácter expresivo aparentemente no comunicativo que observó Piaget, puesto que tiene también un carácter liberador y una función de comunicación de la acción por parte del mismo niño, aspecto en el que enfatiza más, pues argumenta que desde el momento en que se evidencia que hay un planeamiento de la actividad, se revela que hay un pensamiento propiamente dicho.

Ahora bien, existen diferencias funcionales y estructurales entre el lenguaje interiorizado y el externo que no permiten afirmar que puedan coexistir o que se entrelacen por el lenguaje murmurado. El eslabón entre el lenguaje interiorizado y el externo –o sea el lenguaje egocéntrico de Piaget– ayuda a identificar que el desarrollo del pensamiento y el lenguaje tiene ciertas características y pasa por algunas etapas antes de llegar al pleno dominio del lenguaje externo y del interiorizado. Vygotski plantea que primero hay una etapa primitiva de lenguaje pre-intelectual y de pensamiento pre-verbal; luego hay una fase psicológica simple, donde se evidencia el dominio, primero de la palabra y luego de la lógica, es decir, hay un control inicial de la gramática que luego se asocia con procesos lógicos; después hay una fase egocéntrica del lenguaje donde existen signos y operaciones externas que le sirven al niño para empezar a solucionar problemas que ha encontrado o identificado internamente. Plantea que hay un proceso de crecimiento a partir de lo que él ha llamado una "operación interna" y una "memoria lógica".

Por lo tanto, Vygotski reafirma que, en el curso del desarrollo de la inteligencia, el pensamiento inicialmente es no verbal o pre-verbal, y que el lenguaje es no intelectual o pre-intelectual. En esa etapa, la palabra es más una propiedad de las cosas que un símbolo del objeto. En los experimentos que realizó con niños se evidenció que las palabras identificaban un objeto y que ellos establecían una relación directa entre palabra y objeto. Por ejemplo, cuando se le plantea al niño que a un perro lo vamos a llamar "vaca", cambia el nombre pero el referente sigue siendo el mismo, la imagen del perro; si luego se le pregunta: "*¿Tiene cuernos la vaca*?", el niño contesta que sí. Cuando se le recuerda que "vaca" es otro nombre para el perro y se le pregunta ahora: "*¿Acaso el perro tiene cuernos*?", responde que sí, pues si se llama "vaca", debe tener cuernos: "*El perro que se llama vaca debe tener unos cuernos pequeños*" (p. 302). Allí mismo dice Vygotski que en la edad preescolar el niño explica el nombre de los objetos a partir de sus atributos: «*Una vaca se llama "vaca" porque tiene cuernos*». El intercambio de los nombres significa algo así como el intercambio de las propiedades de una cosa a otra. Al intercambiar los nombres "vaca" y "perro", el niño acepta que el perro tiene cuernos y que por tanto dará leche. El referente sigue siendo la palabra asociada con la imagen del objeto, y así cambie la palabra, la imagen del objeto no cambia, persiste.[24] Hay un uso funcional de la palabra, precedido de la aprehensión de toda la estructura de los signos, y tanto el lenguaje externo como el lenguaje interiorizado se desarrollan a través de acumulaciones de cambios funcionales y estructurales.

Consideramos importante resaltar que cuando el autor se refiere a las funciones sociales y egocéntricas del lenguaje, afirma que si bien el lenguaje interiorizado es un pensamiento para sí mismo, de todas maneras no se separa del proceso social de intercambio con el otro. Cuando mira la relación entre pensamiento y palabra, dice que "*el significado de la palabra es un fenómeno del pensamiento mientras éste esté encarnado en el lenguaje, y del habla solo en tanto esté relacionado con el pensamiento iluminado por*

24 Se evidencia, dice Vygotski (pp. 302-303), que para el niño resulta imposible "*separar el nombre de las cosas de sus propiedades y cómo en las transferencias las propiedades del objeto siguen al nombre*". Usa ejemplos como este para ilustrar su tesis, según la cual "*el aspecto sonoro y auditivo de la palabra representa para el niño una unidad directa, indiferenciada y no consciente*". Resalta además que un aspecto muy importante que se da en el desarrollo del lenguaje del niño es que dicha unidad se va diferenciando y comienza a ser consciente.

él". El significado de la palabra está sujeto a un proceso evolutivo y esto implica un cierto cambio en relación con lo que los psicólogos de la época habían planteado en cuanto a la inmutabilidad de los significados: para ellos una palabra no cambiaba; cuando se emitía, era esa misma palabra y no había cambios en su significado. Contrariamente, para Vygotski las relaciones entre la palabra y el significado tienen unos elementos que cambian y otros que permanecen; por ejemplo, cambian las conexiones entre la palabra y el objeto; el significado puede extenderse a un campo más amplio o puede restringirse, o puede sufrir cambios cualitativos internos o cambios externos, pero de todas maneras la relación entre la palabra y el objeto va cambiando a medida que se modifican los procesos culturales. Hay un elemento de contexto que se empieza a introducir, mientras que la naturaleza psicológica sigue siendo más o menos la misma.

Para el análisis de esta relación entre palabra y objeto, Vygotski contrastó tres escuelas psicológicas: (1) Para la teoría asociacionista, el significado es la relación entre el sonido y la palabra, y su contenido –el desarrollo del significado de una palabra– se reduce entonces a los cambios de las conexiones entre las palabras y los objetos; puede ser que haya otros objetos que se asocien a determinadas palabras, pero no cambia el término; la relación entre pensamiento y palabra se reduce a un elemento de carácter estructural. (2) La escuela de Edimburgo plantea que no se puede reducir el pensamiento a un juego de asociaciones, sino que hay una serie de elementos que configuran leyes que gobiernan esas asociaciones que se dan entre los objetos y las palabras; la relación entre pensamiento y palabra es de carácter eminentemente espiritual.[25] (3) La teoría de la Gestalt cuestiona que estas escuelas no reconocen el hecho fundamental de que el pensamiento es, ante todo, una generalización, y estudian la relación entre la palabra y el objeto, pero no la relación que se puede dar en un proceso evolutivo de construcción. Plantea que los significados de las palabras son dinámicos, cambian con el tiempo y de acuerdo con los procesos de desarrollo que tiene el niño; el significado no es el mismo en sus etapas iniciales que en las más avanzadas: aunque la palabra sea la misma, la construcción de significado que hace el niño no necesariamente lo es.

Respuesta de Piaget a la crítica de Vygotski

La respuesta de Piaget a la crítica de Vygotski fue realizada solo hasta principios de la década de los 60, pues no supo de su existencia durante cerca de 30 años, debido a que en los países fuera de la URSS la obra de Vygotski se conoció muy tardíamente; vale decir que las tesis de su teoría histórico-

25 Afirmación que se basa en el análisis de los planteamientos de Platón al respecto.

cultural también fueron fuertemente debatidas dentro de la URSS por las escuelas psicológicas soviéticas, y que su trabajo fue objeto de censura no solo por parte de las autoridades soviéticas, sino también por profesores e instituciones universitarias en el resto de países de Occidente. Por esta razón, es posible que el conocimiento que en su momento Piaget tuvo de la obra de Vygotski haya sido muy parcial, entre otras cosas, porque las primeras publicaciones en Occidente fueron selecciones y compilaciones en versiones muy recortadas.

Ahora bien, la síntesis presentada en las secciones anteriores se constituye en punto de referencia para orientar la interacción entre los participantes de este Seminario. Este diálogo se inicia con la intervención del director del evento, y posteriormente las participaciones de otros asistentes, de las cuales se presenta un resumen a continuación.

Intervención del director del seminario, doctor Carlos Vasco

Recalca la importancia de acudir directamente a las fuentes, en este caso a los escritos de Vygotski, y de conocer directamente sus planteamientos, por cuanto lo que dicen los neo-vygotskianos u otros autores sobre dichas propuestas puede variar de un autor a otro, dependiendo de la interpretación dada a las obras de Vygotski y posiblemente puede diferir de lo que en realidad dice este autor. Por ejemplo, en el caso del lenguaje egocéntrico que se trató en esta sesión, se suele decir que Vygotski lo rechazó, pero quedó claro que acepta no solo todos los hechos que aduce Piaget, sino muchas de sus explicaciones. No solo no las rechaza, sino que más bien las completa. No rechaza, por ejemplo, lo que dice Piaget respecto a que el lenguaje egocéntrico no tiene intención comunicativa, por lo menos globalmente, sino que señala una función adicional de apoyo a la planeación de la actividad del mismo niño, la cual procede por interiorización de una función social del lenguaje que usan los adultos para regular la conducta de los menores, hecho que, por supuesto, acepta Piaget años más tarde.

Otro aspecto interesante de lo visto en esta sesión es cómo la crítica de Vygotski a Piaget puede experimentarse hoy día como muy extraña, por cuanto nadie ha criticado a Piaget desde entonces –hace más de ochenta años– por empirista y por no tener una teoría global de fondo para interpretar la pluralidad de los hechos. Al contrario, muchos lo critican por ser demasiado estructuralista y por tratar de encuadrar todos los datos en su teoría genética de la *equilibración*. Hay que tener en cuenta que la crítica que hace Vygotski se refiere a planteamientos formulados en los primeros libros de Piaget, respecto a sus investigaciones iniciales en la década de los años 20, recién llegado al Instituto Rousseau en Ginebra. Por tanto, estaba apenas buscando estudiar estos fenómenos que había observado en las respuestas dadas por los niños en París, en donde trabajó con las pruebas de Binet, y se dio cuenta de que lo más interesante no eran dichas respuestas sino las explicaciones que inventaban para justificarlas, lo que le permitía describir finamente los cambios que observaba y ver su relación con el desarrollo infantil. Después de esos primeros libros, Piaget va a desarrollar la teoría genética en el sentido de la *equilibración* como proceso de adaptación, con las dos fases o aspectos dialécticos de la asimilación y la acomodación. Ese proceso de *equilibración* es distinto del *equilibrio* como un estado metaestable que después se va a disolver o "desbaratar" otra vez para iniciar unas nuevas oscilaciones de desequilibración y un nuevo proceso de reequilibración, en el cual también van a aparecer la asimilación y la acomodación; en ese sentido es más dialéctico Piaget que el mismo Vygotski.

Así como se suele criticar a Piaget por ser un exponente del individualismo burgués muy propio de Suiza, no se puede olvidar que también Vygotski, por razones políticas, estaba muy interesado en mostrar que los aspectos sociales de la teoría marxista –sobre todo de Marx y Engels– sobre el desarrollo de la humanidad debían primar sobre el desarrollo psicológico individual; se ve cómo a partir de los mismos hechos que Vygotski trata desde el punto de vista social, del trabajo y del lenguaje, son abordados por Piaget desde el desarrollo ontogenético de cada niño y desde el psicoanálisis, que había conocido por lecturas de Freud y personalmente a través de Bleuler, a quien él mismo llama su maestro; con esa mirada encuentra que en las propuestas de Freud hay algo importante que va mucho más allá del asociacionismo empirista, aunque precisamente Vygotski sea quien va a criticar a Piaget por empirista.

En relación con los documentos de Piaget conocidos por Vygotski, se duda si conocía el libro *El juicio moral en el niño*,[26] pues hay una frase en la que Vygotski menciona la moralidad de los niños en el juego; si en realidad lo conoció, debió ser lo último que leyó de Piaget, pues esta obra se publica justamente en el año en que muere Vygotski, en 1932. Debió conocer solo *El juicio y el razonamiento en el niño (Le jugement et le raisonnement chez l'enfant)* de 1924 y *La representación del mundo en el niño (La representation de monde chez l'enfant)* de 1926.

En relación con las críticas que le hizo Vygotsky, Piaget contesta que acepta ciertas limitaciones que él anota, pero reconoce que algunas de ellas tienen que ver precisamente con el hecho de que éste no pudo conocer todo el desarrollo posterior de su teoría de la equilibración y todas sus obras

26 El libro se titula en francés *Le jugement moral chez l'enfant*. Se tradujo al castellano en 1971 con el título *El criterio moral en el niño* [Traducción de Nuria Vidal].

sobre la psicología y la epistemología genética publicadas en los 30 años siguientes. También acepta que la palabra "*egocentrismo*" pudo llevar a engaño a las personas que leen ahí "*egoísmo*" (y –añadió el profesor Vasco– que creen ver ahí el individualismo, la burguesía y el capitalismo de Europa Occidental), y considera que si él hubiera llamado a este tipo de orientación hacia sí mismo "*centrismo*", posiblemente nadie lo hubiera criticado, pues no aparece allí la palabra "*ego*" que pudo haber inducido a error. Reconoce que el aporte principal de Vygotski es que señala el aspecto social comunicativo que ya está en el "lenguaje" infantil anterior al egocéntrico, donde todavía no hay palabras sino expresiones, gestos, llanto y otro tipo de intentos comunicativos. En ese sentido de expresarse para buscar un contacto social, así como en el sentido de asumir las funciones regulativas del lenguaje adulto, es obvio que el lenguaje egocéntrico también es social y tiene una función comunicativa, pero mucho más velada que en el lenguaje anterior. En su visión del desarrollo del lenguaje, tiene razón Piaget, fuera de este complemento muy valioso de Vygotski, como lo reconoce él mismo.

También hay que tener en cuenta que en el libro *Pensamiento y Lenguaje* de Vygotski no aparece por ningún lado lo que se dice en ciertos libros de divulgación de su obra respecto a que para él "*el lenguaje es lo único importante porque es social y que el pensamiento es apenas lenguaje internalizado*". Más bien hemos visto que en realidad dice prácticamente lo contrario: que hay dos tipos de pensamiento, uno pre-lingüístico, del que habla Piaget, y después otro que ha sido orientado y refinado ya por el lenguaje internalizado; pero ninguna parte identifica el lenguaje internalizado con el pensamiento; más bien lo entiende como el instrumento con el cual se va desarrollando el pensamiento, y en eso estaría de acuerdo Piaget. Vygotski muestra que también hay un habla pre-intelectual, podríamos decir "anterior al pensamiento", que es todo aquello que él ve que sucede cuando el niño está tratando de comunicarse con un adulto –lo que hasta ahora hacía con llanto y gestos– y que en algún momento se vuelve palabra. Eso no permite inferir que el niño ya tenga pensamiento, sino que es el adulto el que tiene que decidir si esa palabra vale como una frase declarativa, como una pregunta o como una petición. Todavía no hay evidencia de un pensamiento que se esté coordinando con el lenguaje; si acaso, como lo propone el mismo Vygotski, habría un pensamiento pre-lingüístico. Es decir, dice todo lo contrario de lo que dicen algunos críticos de Piaget respecto a que Vygotski comprobó que no hay pensamiento sin lenguaje y que el pensamiento era solo lenguaje internalizado.

Para concluir, el profesor Vasco insiste de nuevo en la importancia de acudir a las fuentes en los escritos de ambos autores. Propone revisar bien los textos donde Vygotski critica a Piaget y la respuesta de este para ver, por ejemplo, que si en lugar de decir "*egocentrismo*" hubiera dicho "*centrismo*", o tal vez mejor, si hubiera podido decir "*falta de descentración*", tal vez no hubiera habido equívocos ni se hubiera dado una crítica negativa, sino un complemento. Incluso, es conveniente revisar en cada caso qué expresión usó Piaget en francés y qué expresión usó Vygotski en ruso, pues la primera vez que se dio la confrontación 30 años después de la muerte de Vygotski, fue a propósito de una traducción del ruso al inglés, y Piaget no hablaba muy bien inglés. En las traducciones que se hacen, muchas veces se transcribe una misma palabra rusa de dos o más maneras diferentes, como el caso de "lengua", "lenguaje" y "habla"; pero también al revés, se traducen dos palabras rusas diferentes con una misma expresión castellana, francesa o inglesa, lo cual lleva a confusiones como las antes referidas.

Intervenciones de otros participantes

Prof. César Delgado (Universidad del Valle)

Plantea que desea agregar algo a la observación que el profesor Vasco acaba de realizar respecto a la posición de Piaget, relacionado con lo que se gana consultando las fuentes y evitando los intermediarios y las interpretaciones que ellos hacen de estas obras, así como respecto a la importancia de construir una posición propia, de discutirla, corregirla y avanzar en la comprensión de este problema fundamental del papel del lenguaje en relación con el pensamiento. Lo que el profesor Delgado quiere agregar es que cuando se habló del egocentrismo en Piaget, Cristina Cifuentes hizo alguna precisión que le gustaría recalcar. Cuando Piaget habla de egocentrismo, se refiere a la indiferenciación inicial entre el sujeto y el objeto, y para él (y en eso es profundamente dialéctico), sujeto y objeto son dos contrarios que se constituyen mutuamente y son indisociables, pero al principio aparecen como un todo indiferenciado. Inicialmente, el mundo y el sujeto son una misma cosa y solo gradualmente se va conquistando esa diferenciación que nunca se termina de realizar, pues como decía Piaget, la objetividad es aquel límite que nunca es posible alcanzar, pero sobre el cual es posible construir ideas cada vez más objetivas.

Otro tema relacionado con el mismo punto de la indiferenciación y con ese progreso gradual de la diferenciación sujeto-objeto tiene que ver con el problema de la primacía de las afirmaciones sobre las negaciones en los primeros desarrollos del niño. La centración en las afirmaciones y el descuido de las negaciones, o lo que es lo mismo, la descompensación entre afirmaciones y negaciones, hace que en el proceso de construcción de los primeros esquemas, el sujeto tienda a forzar acciones muy distintas en un mismo esquema, aunque *a posteriori*, en la medida en que surjan contradicciones, empieza a desplegar regulaciones y a alcanzar compensaciones para refinarlos. Eso no es otra cosa que la modificación mejorante de los esquemas a través de ese mecanismo de asimilación y acomodación que él muy bien describe en su libro *Equilibración de las estructuras cognitivas*. Esa modificación se da en tres niveles: el primero es el nivel sujeto-objeto; el segundo, el nivel entre sistemas y subsistemas, y el tercero, el nivel entre diferenciaciones e integraciones. Este debería ser un punto de mira de las personas que estén interesadas en profundizar en estos aspectos. Otro texto que recomienda el profesor Delgado es el de *Investigaciones sobre la contradicción*. Ambos son textos que iluminan mucho el problema que se está tratando en este seminario.

Prof. Carlos Vasco (Universidad Distrital)

El comentario del profesor César Delgado me hace pensar en una de las citas presentadas por los relatores, respecto a cómo el niño, desde el punto de vista de la fonética, parte de los fonemas o pedacitos de emisión de voz y va armando las totalidades que llamamos "palabras", y con ellas las totalidades que llamamos "frases"; pero desde el punto de vista de la comprensión, arranca de la frase global y va desagregando las unidades de significado. Por eso, cuando el niño se encuentra con una palabra que no entiende, parece que se la salta y no le hace caso, y prefiere formarse una comprensión de la globalidad de la frase, que logra armar con lo que sí entiende, lo cual ha resultado ser muy importante para la didáctica del lenguaje. Por ejemplo, el hecho de pedirle a los estudiantes consultar una palabra en un diccionario –que los profesores solicitan en el momento en que aparece un término que se considera "raro"–, parece no ser una jugada didáctica tan potente como dejar que, en primera instancia, cada niño trate de "adivinar" qué significa la palabra, leyendo varias veces toda la frase, y solo después de que varios niños expresen unas cuantas opiniones sobre lo que quiere decir la palabra, entonces sí buscarla en el diccionario. Resulta ser una estrategia que permite aprender mucho más rápido, tanto una lengua materna como una lengua extranjera, que la estrategia que uno cree más útil, que es buscar primero la palabra en el diccionario.

Luis Recalde (Universidad del Valle)

Quisiera preguntar a los expositores acerca de la última crítica que hace Piaget con respecto a la crítica anterior que le había hecho Vygotski. No tengo mucha claridad sobre la manera como estos procesos de adaptación, asimilación y acomodación tienen relación con los planteamientos de la cooperación en la relación entre niños y de ellos con los adultos, que era la propuesta de Vygotski. No tengo claro si hay ahí diferenciación o no, y si hay una relación con la asimilación y acomodación.

Ruth Molina (Universidad Distrital)

La respuesta que da Piaget a esa crítica que plantea Vygotski es que posteriormente se hicieron muchos más estudios de seguimiento para mirar si efectivamente se podían establecer diferencias entre el lenguaje egocéntrico y el habla cooperativa, y que los resultados fueron positivos; pero en la explicación dada por Piaget no es claro cuáles serían específicamente. Desde los planteamientos de Piaget y desde los elementos propuestos por Vygostski, se podría decir que en los niños no hay expresiones individuales no comunicativas, ni siquiera cuando se habla del lenguaje egocéntrico y del lenguaje interiorizado, pues la intención de esas expresiones es eminentemente comunicativa en todos los casos; tal vez, con base en esto, se podría decir que –aun en el caso de los monólogos colectivos– hay un principio de cooperación entre los sujetos para armar significados comunes y para entender de una misma manera elementos que surgen en medio de los intentos de resolver algún tipo de problema de manera conjunta; pero –la verdad sea dicha– eso no es explícito en la respuesta de Piaget.

Prof. Carlos Vasco (Universidad Distrital)

La respuesta de Piaget a la última crítica hace referencia más a señalar que el hecho de crear un índice estadístico y contar eventos [se refiere al coeficiente de egocentrismo comentado anteriormente] no es solamente un problema empírico-estadístico, como parece creer Vygotski en su crítica; esas observaciones plantean un problema de fondo: se trata de ver por qué existe este fenómeno que no se había documentado en estudios anteriores; en realidad, no se había notado que existía el lenguaje egocéntrico, pues los adultos creen que los niños efectivamente están conversando entre sí, y se requiere oírlos con mucho cuidado para ver que en realidad no se están comunicando, sino que están "hablando solos", aunque haya varios niños jugando juntos. Un problema de fondo es identificar cuáles son las relaciones entre los distintos tipos de lenguaje –llámese lenguaje autista, egocéntrico o adulto– entre los distintos tipos de pensamiento y entre los distintos tipos de percepción. El problema es que hay que explicar unos fenómenos que son innegables, y por ello Vygotski los acepta todos. Él simplemente inventa otros experimentos para mostrar que a veces disminuye el índice en vez de aumentar, como pensaba Piaget, y allí encuentra indicios de otras funciones del lenguaje egocéntrico; pero no se trata de ver si estadísticamente fue inválida la muestra tomada por Piaget o si no fue significativa la diferencia encontrada por él, sino que se trata de aceptar que hay unos fenómenos extraños que requieren interpretación. La crítica de Vygotski apunta más a que Piaget trata de armar explicaciones parciales, heterogéneas, que no están enmarcadas dentro de una gran teoría de la evolución del lenguaje en las comunidades animales y en las sociedades.

Debemos tener en cuenta que, en sus trabajos posteriores, Piaget va a tomar el asunto de la filogénesis y ontogénesis mucho más en serio que en sus primeros libros; por su parte, en ese momento Vygotski tampoco está hablando de la zona de desarrollo próximo ni de la interacción entre adultos y niños; él está hablando del niño que parece hablar solo, de algo que empíricamente se observa como un fenómeno de desconexión, de aislamiento de los demás niños que están ahí en el mismo lugar. Vygotski propone que, en el fondo, aun el lenguaje egocéntrico sí tiene un papel comunicativo, y además que se va desarrollando precisamente desde y hacia el lenguaje comunicativo. Vygotski reconoce que el lenguaje infantil va adquiriendo también esas funciones comunicativas y de desarrollo psicológico, además de la de apoyo a la planeación de la actividad; por lo tanto, acepta que hay lenguaje egocéntrico, aunque señala que al principio del desarrollo del lenguaje (a los 3 o 4 años) esto no era así. Es decir, también toma en cuenta las edades, como lo hacía Piaget, y en esto no hay diferencia entre los dos.

Podríamos decir que en la actualidad los niños dejan el lenguaje egocéntrico antes de lo que encontraron Piaget y Vygotski, lo cual es explicable si tenemos en cuenta que actualmente van al preescolar desde los dos años, y obviamente han tenido más ocasiones de jugar con otros niños, así como de hablar solos mientras juegan juntos, sea que los otros niños les entiendan o no. En cambio, un niño de aquella época se quedaba en la casa hasta los 7 años; de hecho, las abuelas decían que hasta los siete años el niño no adquiría "el uso de razón". Si observan en los cuadros presentados por los expositores, tanto para Vygotski como para Piaget claramente hay un cambio del lenguaje infantil al lenguaje adulto a los siete años; otra cosa es que hoy en día ese cambio se esté dando a los cinco o seis años, sobre todo en los niños altamente estimulados con los preescolares, a los que asisten forzados más bien por la necesidad de trabajar que tienen las mamás que por la del desarrollo psicológico de los mismos niños. Es claro, pues, que así se producen aceleraciones en el desarrollo del lenguaje.

Por lo anterior, hay que tener en cuenta que la importancia de los estadios –de los que hablan tanto Vygotski como Piaget– no se basa tanto en la edad en que se dan, sino en la secuencia y en la imposibilidad de reversarlos o de acelerarlos tanto que desaparezca uno de los estadios intermedios; por lo cual, decir que antes de los seis o siete años los niños ya dejan el lenguaje egocéntrico no muestra nada respecto de la teoría de Piaget ni de la de Vygotski, más allá de decir que hubo más estimulación social y que esos niños sobreestimulados recorrieron esos estadios de una manera más acelerada.

Teresa Pontón (Universidad del Valle)

Quisiera preguntar a los expositores, quienes han hecho una revisión tan minuciosa y rigurosa tanto de Piaget como de Vygotski, cuál es la relación que plantean estos dos autores frente a lo que es el lenguaje escrito y el pensamiento. Esto lo digo porque las preguntas han sido centradas sobre todo en la parte comunicativa, en el lenguaje oral y en las necesidades de comunicación y de participación en el aula; pero, ¿cuáles son las distancias o los acercamientos teóricos de estos dos importantes autores respecto a lo que es la escritura y su relación con el pensamiento como tal?

Cristina Cifuentes (Universidad Distrital)

Se puede ver en el trabajo de Piaget y en Vygotski, en su libro *Pensamiento y Lenguaje*, que ellos no se preocupan en ningún momento por el problema de la escritura en el niño, y eso es claro. Por lo tanto, Piaget no establece ninguna relación entre el pensamiento egocéntrico y la escritura del niño a esa edad; más aún, puedo decir que en lo que hemos estudiado de Piaget, él no se preocupa por el fenómeno de la escritura y su relación con el pensamiento. Por su parte, Vygotski alcanza a hacer unas pequeñas aproximaciones, pero es algo muy secundario.

Sergio Briceño (Universidad Distrital)

Es importante aclarar que si bien hemos hecho una revisión rigurosa del trabajo de estos dos autores, ha sido en un contexto histórico específico, sin abordar, por ejemplo, los avances realizados por Piaget en los 40 o 50 años posteriores a la crítica de Vygotski.

Ruth Molina (Universidad Distrital)

Con respecto a los trabajos de Vygotski (2001), en los capítulos de su libro encontramos el lenguaje escrito citado solo dos veces; la primera, cuando dice que existen dos distinciones funcionales importantes en el lenguaje, una que es el diálogo y otra que es el monólogo (p. 185), asumiendo la parte del diálogo como lenguaje oral y la del monólogo como lenguaje escrito,[27] y en ese momento plantea que como en el lenguaje escrito el

27 Para expresar un pensamiento en lenguaje escrito se requieren más palabras que las que se emplearían en el lenguaje oral, pues el interlocutor no está presente; no puede apoyarse en medias palabras, se debe ser más explícito y asumir los significados formales de las

tono de voz y el conocimiento del tema en cuestión están excluidos, nos vemos obligados a usar muchas palabras y de un modo más exacto. La segunda cita es cuando dice que el lenguaje escrito es la forma más elaborada del lenguaje y reconoce su complejidad.[28] Quizás esta escasez de citas respecto al lenguaje escrito, tanto en los trabajos de Piaget como en los de Vygotski, se deba a que el interés fundamental en esta etapa de sus respectivas obras está encaminado a mirar la evolución del lenguaje y del pensamiento en etapas muy tempranas del desarrollo del niño. Si en esa época se daba la escolarización hacia los 7 años, los procesos de escritura se daban a esa edad. Como lo decía el profesor Vasco, es precisamente en ese momento en el que, tanto en una obra como en la otra, cesa el análisis del tipo de relación entre lenguaje y pensamiento. Habría que mirar en obras posteriores qué se plantea al respecto.

Jaime Romero (Universidad Distrital)

Recuerdo que cuando Vygotski habla de la construcción de los conceptos científicos, plantea dos cosas: una, referida a la "desaparición" del lenguaje egocéntrico a los siete años –más en el sentido de que no es usado con tanta frecuencia– pues dice que el colegio le impone esa norma al estudiante. Otra, referida a una discusión que hace de las ideas de Piaget, pues dice que no tiene en cuenta que hacia los siete años ocurren varios hechos alrededor del niño, relacionados con entrar a estudiar como acto canónico; y narra un trabajo, que creo es de María Montessori, quien plantea que cada disciplina tiene un "momento" para ser enseñada y que la edad de enseñarle a los niños a leer y escribir es hacia los 5 años. Vygotski plantea que esos momentos coinciden con lo que él ha venido encontrando cuando mira la "zona de desarrollo próximo". Montessori plantea que cuando se enseña a escribir a esa edad, se da lo que ella llama la "explosión de la escritura", que es algo análogo a cuando el niño se da cuenta de que cada cosa tiene un nombre y se puede referir a ella con él, y se da una "explosión" de la construcción del lenguaje externo. Luego sí plantea que hay unos cambios estructurales y de función entre el lenguaje hablado y

palabras. En general, no puede asumirse por parte del interlocutor el conocimiento del tema abordado. En el lenguaje escrito la expresión suele ser no inmediata y premeditada, en tanto está relacionado con la conciencia y con la intencionalidad. "*A diferencia de la simplicidad estructural del diálogo, el monólogo* [especialmente escrito] *supone una cierta complejidad, lo cual atrae sobre los actos del lenguaje el foco de la conciencia, concentrando mayor atención en ellos*" (p. 327).

28 En realidad existe otra cita. En ella hace referencia a la enseñanza escolar y la zona de desarrollo próximo: "*Si el lenguaje escrito exige voluntariedad, abstracción y otras funciones todavía inmaduras en el escolar, habrá que aplazar la instrucción hasta que estas funciones comiencen a madurar. Pero la experiencia universal ha mostrado que la enseñanza de la escritura es una de las asignaturas más importantes de la instrucción escolar en el comienzo de la escuela, ya que favorece el desarrollo de todas las funciones que aún no han madurado en el niño*" (p. 242).

el lenguaje escrito; desde lo que conozco no encuentro otros pronunciamientos de él al respecto.

Prof. Carlos Vasco (Universidad Distrital)

Está bien anotado que en el tiempo de los dos primeros libros de Piaget ni siquiera había entrado todavía en los preescolares el método de María Montessori, porque esto se da solo hacia los años 30. Otra cosa es que cuando empiezan a extenderse los preescolares, las jardineras no querían forzar a los niños a escribir –como se hace ahora en muchos preescolares– sino que les daban tiempo para desarrollar su motricidad de otras formas, sin obligarlos a hacer "palitos" y "bolitas" para preescritura. Creo que Piaget consideraba que la escritura solo podía venir una vez se desarrollaba el pensamiento y el lenguaje, por lo tanto ya no era de su interés. Hubo que esperar a que Bärbel Inhelder, su discípula y a su vez maestra de muchos otros piagetianos y postpiagetianos, empezara a trabajar la lectura y la escritura, en particular del lenguaje de los niños con retardo o de los ciegos y sordos. Ella y sus discípulas documentaron muchos casos que mostraban que sí había un desarrollo de la lectura y la escritura mucho antes de lo que parecía, desarrollo que se asignaba al comienzo de la edad escolar hacia los siete años. Pero hubo que esperar hasta que Emilia Ferreiro y Ana Teberosky –y después sus discípulas Liliana Tolchinski y Ana María Kauffman– empezaran a estudiar ese fenómeno de la aparición de la escritura, y en cierto sentido le veían razón a María Montessori al decir que sí había una conciencia del medio escrito en los niños de cinco años y que aparecían intentos de escribir con rayas y garabatos, pero que llamarlo "escritura" era demasiado "proyectivo" del adulto sobre el niño.

Por ejemplo, cuando el niño empieza a escribir una tarjeta para el día de la madre, pinta un corazón y hace unas rayas que, según él, dicen muchas cosas. Pero Montessori tuvo que esperar largo tiempo antes de que se empezara a mostrar con observaciones sistemáticas y cuidadosas esa maravilla del surgimiento de la escritura en los niños y se documentara que lo que los niños hacen no es, como se creía, ir asimilando –en el sentido corriente de la palabra "asimilar", no en el sentido piagetiano– lo que les enseñan los adultos, sino que ellos generan sus propios códigos y trazos. Obviamente eso lo hacen porque ellos ven que los adultos escriben o leen, pero los niños producen otras inscripciones sorprendentes. También parece que las observaciones de Montessori se debían a su trabajo con los niños de grupos muy privilegiados, cuyos padres los empezaron a enviar a aprender a leer y a escribir antes de la escuela formal. Pero eso no dice mucho respecto a la relación entre el pensamiento y el lenguaje escrito.

Para eso creo que hay que esperar a que se empiece a desarrollar el tema de la influencia de la imprenta sobre el pensamiento occidental a partir de los años 1450 a 1500. Para aclarar ese tema hay que esperar los trabajos de Walter Ong y de Marshall McLuhan en los años 60, para tener la conciencia que tenemos hoy día de la relación entre pensamiento y lenguaje escrito, pues hasta ese momento realmente no se le concedía mucha importancia a la escritura en el desarrollo ni en el refinamiento del pensamiento, ni siquiera del pensamiento científico, precisamente porque los antropólogos habían mostrado la presencia de "cuerpos de saberes" muy desarrollados en los brujos, los payés y los chamanes de culturas ágrafas, o sea las que tienen un lenguaje muy desarrollado pero que no se escribe. También se había documentado que había lenguajes en la misma Europa, como el finlandés y el vascuence, en regiones donde había una altísima cultura y un desarrollo muy amplio de la poesía y la narrativa oral, pero que no se escribía, y por lo tanto no se podía llamar propiamente "literatura". En consecuencia había una cierta consideración de que la escritura era una especie de lujo que había surgido unos 3000 años antes de Cristo, cuando ya estaba muy desarrollada la cultura, el lenguaje oral, etc. Hoy día vemos mucho más la importancia de lo escrito, que también creo que en Piaget no se encuentra, aunque Vygotski lo evidencia de alguna forma cuando habla del desarrollo de los conceptos científicos en los niños; pero aún así, no creo que él haya previsto estas teorías posteriores sobre la relación del pensamiento con la escritura.

Myriam Vega (Universidad del Valle)

Estoy un poco en desacuerdo con ese último punto [refiriéndose a lo planteado por el profesor Vasco sobre Vygotski]. Yo creo que hay que pensar en forma diferente el lugar que tuvo en el pensamiento de Vygotski incluir la escritura para entender y asumir el lenguaje como tal. Es posible que eso no se vea claro solo en su libro *Pensamiento y Lenguaje*, sino, sobre todo, en el de la *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. Si uno se toma el trabajo de leer este extenso libro, puede identificar que la hipótesis que está en la base para dar cuenta del desarrollo de la memoria, de su paso de función básica a función superior –que luego va a llamar "memoria lógica"–, y por esa vía, del desarrollo de las otras funciones psíquicas superiores, es que estas están en buena medida marcadas, teñidas, impactadas por la escritura. Lo dice breve pero claramente, no como si lo hubiera tenido claro desde la primera vez, sino como resumen de las reflexiones que ha hecho en los últimos años sobre el lenguaje escrito: que la escritura, por tener una estructura distinta del lenguaje oral y porque cumple unas funciones –no solo sociales sino otras específicas– es la que impulsa el desarrollo psicológico en sus etapas superiores. Obviamente, Vygotski no lo hace como se realiza actualmente en los estudios sobre escritura –puntualmente en estos análisis microgenéticos de lo que está ocurriendo en el salón de clase– sino como un posicionamiento global en la historia del desarrollo del pensamiento.

Al contrario de la impresión que me da lo que acaba de decir el profesor Vasco, uno de los temas transversales en la obra de Vygotski es precisamente el que tiene que ver con el lenguaje escrito como una estructura distinta, que tiene un papel central en las funciones psíquicas superiores; incluso, quizás por la manera que encontró para desarrollar su teoría sobre la memoria, el tema del lenguaje escrito es el inspirador de todo lo que tiene que ver con los instrumentos y las mediaciones. Desde allí lo he leído y creo que es posible vislumbrarlo desde ese ángulo. En desarrollos posteriores nos vamos a encontrar con cuestiones muy semejantes, por ejemplo, tesis fuertes como los planteamientos de Walter Ong, en el sentido de que la escritura produce unos cambios en términos de funcionamiento cognitivo que son irreversibles, no solo a nivel individual sino sobre todo a nivel social y cultural. La racionalidad es de un orden distinto cuando se extiende a la escritura, toda vez que podemos ampliar de tal manera la memoria, dejándola consignada allá afuera e incluso funcionando independientemente de los intereses anteriores que yo tuve al escribir. Entonces, no lo veo como un tema que fue apenas tocado, que fue aproximado, que no lo trató mucho; como lo dije anteriormente, lo encuentro como un tema transversal en la obra de Vygotski.

Prof. Carlos Vasco (Universidad Distrital)

Acepto con gusto y con interés esa observación; sin embargo, habría que mirar los textos mismos e interpretarlos. Mi interpretación es que este planteamiento de Vygotski se refiere más bien al desarrollo de la cultura, es decir, que él encuentra que las sociedades que tienen lengua escrita se desarrollan con otras estructuras lógicas, con otras estructuras de memoria; pero respecto al desarrollo de la memoria en los niños y jóvenes hay otro planteamiento contrario, y es que en ese tiempo se consideraba más bien que la escritura iba en detrimento de la memoria; es un tema muy antiguo, que está en Platón muy claramente, en el mito egipcio del rey de Tebas que rechazó el regalo de las letras de la diosa Tetis porque la gente iba a confiarse en la escritura e iba a perder la memoria. Esa es una consideración que reaparece en distintos autores de 1850 hasta 1950, que más bien la escritura va en detrimento de la memoria como facultad subjetiva. Pero, por supuesto que la escritura sí acumula saberes y sirve de memoria colectiva. Sin embargo, me parece una tarea importante la que propone Myriam

Vega. Podríamos revisar una de las nuevas traducciones del libro sobre el desarrollo de las funciones psíquicas superiores, para ver si se puede interpretar como un tema transversal sobre el desarrollo del pensamiento en el niño –yo diría que no– o si es más bien un tema central del desarrollo de la cultura o de las culturas y las sociedades –yo diría, por supuesto, que sí–. Pero para la cuestión del desarrollo del pensamiento y el lenguaje en los niños habría que mirar las citas concretas y ver cómo las interpretamos.

Considero que también es muy importante lo que sugiere Myriam respecto de sacar la discusión de los dos únicos libros de Vygotski que conocí –en sus traducciones al inglés– cuando estuve trabajando estos temas, que fueron *Pensamiento y Lenguaje* y *Mente en sociedad,* y del primer tomo de las obras completas en castellano publicadas por *Visor* de Madrid. En estos tres libros no encuentro ese tema transversal que ella propone, pero posiblemente estas últimas traducciones que han aparecido del libro de la *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores* y los demás tomos de las obras completas nos pueden dar un panorama mucho más amplio de lo que puede ser esta discusión. Le agradezco la observación y la referencia a la nueva traducción de ese libro que habrá que leer con cuidado.

Prof. Dora Inés Calderón (Universidad Distrital)

Con respecto a la intervención de Myriam Vega, me parece muy importante destacar ese elemento, sobre todo si nos estamos preguntando específicamente por la escritura; en lo que alcanzo a ver no encontraríamos una teoría de la escritura en Vygotski, pero sí estaría articulado en la teoría de este autor un tema que podría tomarse para el desarrollo de la escritura, que tiene que ver con lo que Myriam señala sobre el pensamiento y las funciones psicológicas superiores; creo que si no es específicamente el tema de la escritura, lo que sí es importante ahí es considerar la teoría de las mediaciones semióticas de Vygotski, pues ésta va a permitir considerar qué tipo de mediación semiótica es la escritura; entonces, la escritura va a ser tomada como una de las formas de mediación semiótica que, además, va a generar desarrollos psicológicos de las que él denomina "funciones superiores". En este sentido es muy importante la propuesta vygotskiana del desarrollo del lenguaje y del pensamiento, y la de la relación con las mediaciones semióticas. Me parece que ese es el punto de anclaje para considerar, posiblemente, qué pasa con la escritura, pero, insisto, no encontraría una teoría de la escritura en Vygostski. Por supuesto esto tiene relaciones después, ahora sí, en teorías de la escritura, como tener en cuenta que la escritura es ante todo un fenómeno cultural y que como tal genera un producto cultural, que es claro que está relacionado con la lengua, con la oralidad, pero que sigue siendo un artefacto cultural nuevo.

Prof. Carlos Vasco (Universidad Distrital)

Así lo considero; por ejemplo, habría que mirar el lenguaje de señas de los sordos, que no tiene escritura, aunque hay algunas propuestas de escritura no muy difundidas ni aceptadas por los sordos mismos. En ese sentido, no vamos a pedirle a Vygotski que muestre la diferencia entre el desarrollo del pensamiento de los niños sordos y de los que hablan articuladamente, oralmente. No puede pedírsele que en tan poco tiempo que tuvo de vida académica haya tratado todos los temas que nos interesan hoy en día. Más bien debemos admirar la cantidad de temas que sí trató, y la manera tan seria como lo hizo.

A manera de cierre

Pedro Javier Rojas y Jaime Humberto Romero

Queremos retomar una cita de Vygotski, que incluimos antes como pie de página, relacionada con la importancia de la escritura, que no fue comentada en la sesión de seminario y puede ser de interés para la interpretación sugerida de otro de sus documentos:

> *Si el lenguaje escrito exige voluntariedad, abstracción y otras funciones todavía inmaduras en el escolar, habrá que aplazar la instrucción hasta que estas funciones comiencen a madurar. Pero la experiencia universal ha mostrado que la enseñanza de la escritura es una de las asignaturas más importantes de la instrucción escolar en el comienzo de la escuela, ya que favorece el desarrollo de todas las funciones que aún no han madurado en el niño* (2001, p. 242).

Para finalizar, retomamos las siguientes palabras de Vygotski, de las cuales subrayamos unas frases en las que se puede evidenciar que la posible "distancia" de este autor con Piaget, respecto a la relación entre pensamiento y lenguaje, es menor de lo que a veces se plantea:

> *La relación entre el pensamiento y la palabra es un proceso vivo de génesis del pensamiento en la palabra. La palabra desprovista de pensamiento es ante todo una palabra muerta […]. <u>En el inicio no fue la palabra. Primero fue la acción. La palabra está más cerca del final que del inicio del desarrollo. La palabra es el final que culmina la acción</u> […] la palabra tiene un papel destacado no sólo en el desarrollo del pensamiento sino también en el de la conciencia en su conjunto […]. La conciencia se refleja en la palabra lo mismo que el sol en una pequeña gota de agua […]. La palabra significativa es el microcosmos de la conciencia humana* (2001, pp. 345-346).

Piaget, J. (1971). *El juicio moral del niño*. Barcelona: Fontanella [Original publicado en 1932, *Le jugement moral chez l'enfant*, Paris: Alcan].

Vigotski, L. (2001). Pensamiento y lenguaje. En: *Obras escogidas*, 2.ª ed., Tomo II (pp. 10-348). Madrid: A. Machado libros [J. Bravo, Trad., publicada en ruso en 1982].

_________ (2007). *Pensamiento y Habla*. Buenos Aires: Colihue [A. González, Trad., original publicado en ruso en 1934].

Bibliografía complementaria recomendada

Bruner, J. (1983). *Juego, pensamiento y lenguaje*. Disponible en: http://www.sdbaro.org.ar/files/formacion/pedagogia/documentos/juego_pensamiento_lenguaje.pdf

Frauenglass, M. y Díaz, R. (1987). La función autorreguladora del habla privada infantil: un análisis crítico de las recientes discusiones de la teoría de Vygotsky. *Infancia y Aprendizaje*, 37, 103-114.

García, I. (2004). *La obra de Vygotski y sus impactos en la educación*. Centro de Investigaciones Psicológicas y Sociológicas, La Habana (Cuba). Disponible en: http://bibliotecavirtual.clacso.org.ar/ar/libros/cuba/ivetgar.rtf

Ibáñez, N. (1999). ¿Cómo surge el lenguaje en el niño? Los planteamientos de Piaget, Vygotski y Maturana. *Revista de Psicología*, 8(1), 42-56.

Luria, A. R. y Yudovich, F. (1978). *Lenguaje y desarrollo intelectual en el niño*. Madrid: Pablo del Río [Original de 1956].

Romero, J. (1999). La adquisición del lenguaje y la noción de realidad. *Revista de Psicología*, 8(1), 33-41.

Santamaría, A. (2003). La interiorización como punto de encuentro entre pensamiento y lenguaje. Un debate conceptual. *Revista Latina de Pensamiento y Lenguaje*, 11 (2), 143-163.

Sisto, V. (1998). *Del signo al sentido. Aproximaciones para un estudio semiótico de la conciencia*. U. Arcis, Santiago de Chile. Disponible en: http://sala.clacso.org.ar/gsdl/cgi-bin/library

El sistema didáctico y el tetraedro didáctico[1]
Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas

Jorge Orlando Lurduy Ortegón[2]

A partir de los desarrollos investigativos en la formación de profesores de matemáticas –implementados en el programa de formación de profesores de la Universidad Distrital de Bogotá– y las conceptualizaciones logradas en ellos, este escrito plantea una reflexión sobre los componentes epistemológicos del sistema didáctico y sobre una propuesta de modelación de los elementos, hechos y fenómenos didácticos (*tetraedro didáctico*). Particularmente se ofrecen herramientas para una reflexión epistemológica sobre las configuraciones y relaciones ónticas, epistémicas de dicho modelo, para finalmente analizar algunos de los procesos de estudio sobre objetos didácticos (*ruta docente*) en la formación de profesores de matemáticas, en la perspectiva de contribuir a la descripción-conceptualización de sus procesos de formación inicial y continuas.

El sistema didáctico: el "tetraedro didáctico" como modelo para el análisis y la reflexión didáctica

Entendemos por modelo una representación que pretende simbolizar un fenómeno o suceso. En este sentido, el Sistema Didáctico y el Tetraedro Didáctico son un modelo para describir fenómenos didácticos que no propende simplificación sino aumento de complejidad del fenómeno didáctico con respecto de su descripción y análisis, y por tanto, dicha representación (tetraedro) se construye como resultado de las construcciones teóricas anteriores (triángulo didáctico), y la emergencia y juntura de nuevas relaciones (semiosis didáctica, competencias didácticas y procesos de estudio en la formación de profesores) (Lurduy, 2009).

1 Este escrito hace parte integral de los desarrollos provisionales de tipo teórico-metodológicos logrados en el trabajo de investigación doctoral desarrollado en el Doctorado Interinstitucional en Educación DIE-UD-UV-UPN, en el énfasis en Educación Matemática, realizado por el profesor Lurduy (2007-2009) y denominado *Evaluación de las competencias para el análisis y la reflexión didáctica en estudiantes para profesor de matemáticas. El caso LEBEM-UD* y dirigido por el profesor Juan D. Godino.

2 El profesor Lurduy es docente, investigador en la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Este trabajo es el producto intermedio de los realizados con estudiantes y profesores de LEBEM en el grupo de Práctica Docente. Dirección de correo electrónico: jolurduy@udistrital.edu.co

En nuestra construcción de esta noción de sistema didáctico y su ontología didáctica asociada, complementada con los desarrollos del Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición y la instrucción matemática, (Godino y colaboradores, 1991-2009), se posibilitan explicaciones de los procesos de estudio en la formación de profesores. Con la noción de sistemas de prácticas y mediante el estudio de la ecología de los significados de los objetos didácticos, se facilita describir y explicar fenómenos didácticos (cognitivos, epistémicos, interaccionales, de mediación e instruccionales) más globales en la formación de profesores de matemáticas, cuando los Estudiantes para Profesor de Matemáticas (EPM) participan en la construcción de objetos didácticos, en nuestro caso, en el programa de formación de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas (LEBEM), de la Universidad Distrital.

Para nosotros, la reflexión y auto reflexión sobre la experiencia vivida como profesores y formadores de profesores nos posibilita la modelación y se convierte en una epistemología: el mundo en el cual vivimos no nos es ajeno; somos observadores y observados simultáneamente en el hecho pedagógico y didáctico. Es en el mundo de la investigación y la reflexión sobre la formación de profesores de matemáticas donde hemos construido nuestra experiencia pedagógica, formativa y formadora, didáctica e investigativa.

El tetraedro didáctico: una reflexión epistemológica

De acuerdo con Morín (2000), el conocimiento no es conocimiento, si no es reflexión-acción-organización, y siguiendo a Bateson (1981), la epistemología es "*la reflexión acerca de cómo determinados organismos conocen, piensan y deciden*". Asimismo, de acuerdo con Godino (2008), el significado de los objetos es el conjunto de prácticas discursivas, operativas y normativas de una persona o una institución frente a una situación problema, puestas en relación y en contexto con las informaciones (epistemología).

Estas ideas nos han ayudado a pensar y estudiar los sistemas didácticos y los desarrollos formativos que se dan en su seno, y en ellos, los procesos de estudio sobre los objetos didácticos. Necesitamos, en primer lugar, de un contexto teórico constructivo, recursivo, activo, rico y diverso que nos ayude a favorecer dicho estudio con el apoyo de los recursos epistemológicos: falibilidad, pluralismo, diversidad, pragmatismo, reflexividad y complejidad. (Peirce, Lewis, Morín, Von Foster, Maturana, Navarro, Faerna, Nubiola, Zalamea, Dussel…).

Pensamos y nos decidimos, en segundo lugar, por la complejidad del modelo del sistema didáctico. Ello exige otro tipo de respuestas investigativas y de apuestas epistemológicas, ontológicas y metodológicas consistentes con los principios triádicos de la semiótica peirceana y los del pensamiento complejo (Morín, 1982): dialógico (antagonismo y complementariedad), recursivo (retroacción causa-efecto), y hologramático (el todo está representado en la parte). Lo usual sería "*separar, fragmentar para poder analizar*" los elementos del sistema: el profesor, o el alumno, o el saber, o el medio didáctico y en ocasiones, alguna o algunas de estas duplas y sus relaciones de tipo dual, como es el caso de la representación del sistema didáctico por medio de un triángulo.

En tercer lugar, en nuestra perspectiva explicativa e interpretativa de tipo relacional coincidimos con Navarro (2000) cuando enuncia la reflexividad y autoreflexividad de los sistemas observador-observado. Para este autor, un sistema es reflexivo en la medida en que a su interior se generan efectos reflexivos entre la actividad del sistema objeto y la actividad objetivadora-significativa del sujeto; ello nos pone en la dirección de las relaciones y reflexiones pedagógicas y didácticas en educación matemática y en la formación de profesores de matemáticas.

Por último, pensamos y tomamos partido aquí por una epistemología relacional,[3] es decir, el estudio de los sistemas cuya materia prima es la relación entre objetos, eventos, hechos, procesos y fenómenos, y una teoría del observador:[4] ya que el acto educativo es una actividad social, aparece la incertidumbre, la autoorganización, y estas se relacionan con la dimensión social y comunicativa, esto es, semiótica. Algunos autores como Lahitte *et al*. (1994) afirman:

> *La cosmovisión ecológica, cibernética, sistémica (o como se llame) […] requiere de diferencias de información que organice la energía material de tal modo que "la mente" (el pensamiento) pueda "corporizarse" y para eso necesita un observador. Necesita un contexto de significación donde sean significativas las diferencias "emergentes", en que las distinciones tengan sentido, es así como una epistemología relacional, brinda este contexto, para que las explicaciones y modelaciones tengan significación* (p. 20).

3 Esta epistemología relacional tiene su origen en la teoría general de sistemas de Ashby (1964), teoría de la comunicación (Wilden, 1979), teoría general de sistemas de Bertalanfy (1978), teoría de la complejidad (Morín, 1982), cibernética de segundo orden (Von Foerster (1988) y la biología del conocimiento (Varela y Maturana, 1990).

4 Remitimos al clásico articulo de Heinz Von Foerster "Notas para una epistemología de los objetos vivientes" (1974), donde enuncia once principios de la epistemología de los sistemas observadores, que da origen a la epistemología relacional, la reflexividad y la autoreferencia.

El tetraedro didáctico: hechos, fenómenos y objetos didácticos

Parece necesario profundizar en el estudio de los sistemas didácticos y suprainstitucionales (Chevallard), reconocer en él la interacción/relación de hechos y fenómenos como los objetos y entidades epistémicos relacionados con el saber matemático; los cognitivos propios de los estudiantes que participan en un determinado proceso de estudio; los objetos didácticos e instruccionales relativos al proceso de enseñanza y a las acciones del profesor que orienta dicho proceso; analizar las determinaciones del entorno del aula (ambientes, recursos, interacciones, roles, normas, contextos locales) como parte del sistema didáctico y sus íntimas relaciones (Lurduy, O. *et al.*, 2005).

Reconocemos con Wilhelmi, Godino y Font (2005) que "*un hecho didáctico es cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción*". Igualmente, que los procesos de instrucción o de estudio en el aula son secuencias temporalmente ordenadas de acontecimientos y que la distinción entre acontecimiento y proceso es relativa, ya que el acontecimiento se puede analizar como un tipo de proceso y este como una unidad de un proceso más complejo.

Asimismo podríamos describir los eventos como episodios de las secuencias del proceso de estudio, de una clase o de un fragmento de ella, lo que posibilita la "objetivación" de configuraciones didácticas:

> *Lo dicho puede sintetizarse utilizando una metáfora vectorial. Todo fenómeno queda descrito como una n-tupla, donde cada componente representa una característica del mismo. Las características o variables pueden considerarse en la investigación desde dos puntos de vista diferentes: uno, como variables explicadas (v1, […], vr), que son problematizadas por la perspectiva teórica utilizada para analizar el proceso de estudio; otro, como variables explicativas (w1, […], ws), que se usan para describir las explicadas en dicha perspectiva y predecir su comportamiento en situaciones "controladas" (generalmente de forma parcial). De esta manera un fenómeno es: Fenómeno = (w1, […], ws; v1, […], vr); donde las vi quedan explicadas por las wj, j = 1, […], r"* (p. 3).

Nos referimos a los objetos didácticos relativos al proceso de enseñanza (objetos-proceso, prácticas-relaciones, significados-semiosis, didáctica, sobre los que avanzaremos más adelante), de diseño, gestión y evaluación asociados a los análisis, acciones y reflexiones del profesor que orienta y posibilita dichos procesos de estudio y al análisis de las determinaciones del entorno del aula (ambientes, recursos, interacciones, roles, normas, contextos locales).

El tetraedro didáctico: los polos, relaciones, semiosis didáctica

El tetraedro didáctico es un constructo analítico para la observación del sistema didáctico y la construcción de significados didácticos (semiosis didáctica). En todo proceso de enseñanza/aprendizaje institucional, emergen relaciones e interacciones entre los actores de dicho proceso; en él interactúan estudiantes, profesores, medios y recursos didácticos, ambientes y entornos del proceso, se constituyen contratos pedagógicos y didácticos, relaciones con el saber construido personal e institucionalmente por dichos actores.

De acuerdo con Chevallard, el sistema complejo que él llama noosfera (el entorno y los sistemas de enseñanza que constituyen las pretensiones de la estructura social interesada en desarrollar institucionalmente procesos de formación con estudiantes dispuestos para tal fin) proporciona y "*presenta un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico*". Según este autor, los sistemas didácticos están inmersos en el entorno social, cultural y científico que influye y condiciona su funcionamiento.

Para nosotros, en el tetraedro se configuran cuatro subsistemas (unidades complejas) ligados a sus respectivas díadas de relaciones complejas, que posibilitan la emergencia de triadas de relaciones, que determinan planos de observación y análisis.

- *Polo profesor* (didáctico): se trata de estudios sobre los elementos que caracterizan la unidad compleja *profesor* y las relaciones profesor-entorno, profesor-saber, profesor-estudiante en lo relacionado con la acción, reflexión, gestión, diseño y evaluación de los procesos de estudio por parte del docente.
- *Polo ecológico del aula* (entorno): se trata de estudios sobre los elementos que caracterizan la unidad compleja entorno y cultura del aula (textos y contextos), las relaciones entorno-profesor, entorno-saber, entorno-estudiante; están relacionados con las interacciones, roles, mediaciones, comunicación, reglas y normas, entornos de enseñanza aprendizaje.
- *Polo estudiante* (cognitivo): se trata de estudios sobre la unidad compleja estudiante y las relaciones estudiante-estudiante, estudiante-entorno, estudiante-saber, estudiante-profesor, relacionados con la comprensión y aprendizaje, sobre los significados personales, los observables cognitivos por medio de sus manifestaciones de conducta cognitiva de manera verbal, gestual y escrita, sus acciones e interacciones, roles.
- *Polo epistémico* (saber): se trata de estudios sobre la unidad compleja *saber matemático* o *didáctico*, los significados institucionales y de referencia matemáticos y didácticos, pretendidos e implementados en el proceso de estudio y sobre las relaciones saber-entorno, saber-profesor, saber-estudiante.

En un sistema didáctico, los elementos (polos) del tetraedro didáctico profesor-alumno-saber-entorno no son ni mutuamente separables, ni mutuamente reducibles, y entre ellos se da una relación de reflexividad y auto reflexividad de tipo epistémico (efectos, reflexiones, relaciones e interferencias de generación de sentido); pero la descripción, exploración, interpretación de esos polos constituyentes como unidad, es la base de la modelación en el tetraedro didáctico.

Se hace necesario hacer una distinción, pues nosotros estamos incorporando un polo como constituyente del ahora tetraedro. Todos los organismos viven en su entorno, tienen y construyen significación, conciencia y auto-referencia con su mundo, por tanto en varios sentidos existe una unidad organismo-entorno y ninguno es exterior al otro; uno determina y es determinado por el otro.[5]

El gráfico que presentamos es el "ideograma" del modelo de sistema didáctico que se ha utilizado en el seno de las investigaciones sobre las Rutas de estudio y aprendizaje en el aula (REA)[6] (Lurduy *et al*., 2007).

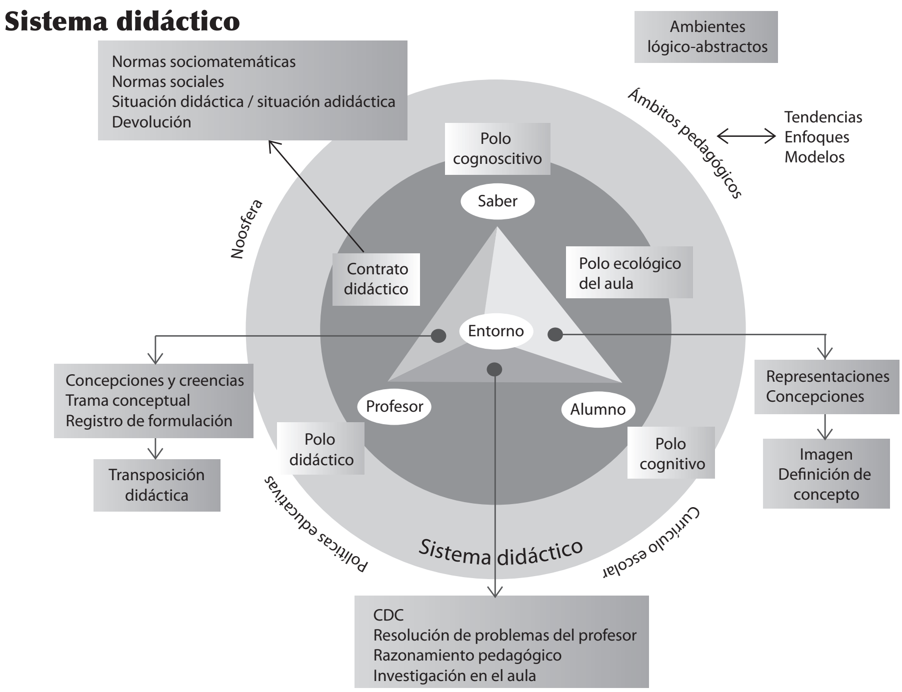


Figura 1

5 Haeckel creó el término ecología, entendiendo por esta el estudio de las relaciones de los organismos con el medio ambiente, incluidas todas las condiciones de existencia; incluso algunos hablan del mundo de las ideas y sus relaciones.

6 Programa de investigación desarrollado por el grupo investigativo Crisálida y sus semilleros de investigación, conformado por profesores y estudiantes adscritos a LEBEM-UD y coordinado por el profesor Lurduy.

Finalmente de lo que se trata es de estudiar las relaciones diádicas y triádicas como relaciones complejas, y los planos de interacción determinados por esas relaciones y emergencias; ello hace posible determinar trayectorias, y configuraciones didácticas y conceptualizaciones del análisis semiótico-didáctico de dichas las relaciones. Qué es posible en las interacciones; qué es significativo y posibilita la acción didáctica; qué es significativo y convertido en pensamiento, acción, reflexión. Las implicaciones que tiene para un actor (polo) del sistema lo hemos denominado *semiosis didáctica*.[7]

Para Peirce todos nuestros contenidos mentales son signos, y por tanto los proceso mentales son procesos de semiosis; ella implica la cooperación-relación triádica de un objeto, un representamen y un interpretante, y por tanto en los proceso de semiosis estos “sujetos” debieran entenderse más como “funciones” que como “realidades sustantivas”.

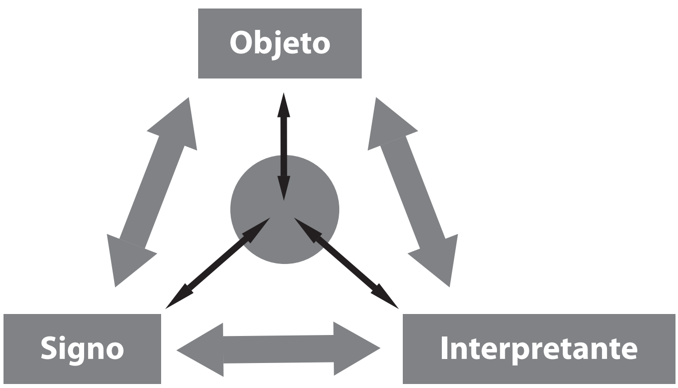


Figura 2

Por una parte, desde los principios y categorías semióticas; desde la reflexión de las relaciones entre polos y los polos mismos; desde un enfoque de lo que en el modelo es significante; desde la relación en la tríada epistemo-semiótica signo-objeto-interpretante. También con las significaciones que pueden emerger en una tríada determinada por cada plano con referencia al cuarto polo. Y finalmente, desde y con relación a las categorías semióticas[8] proponemos un modelo del sistema didáctico, un análisis de los

7 Definir este proceso no es nada fácil, puesto que en él se presentan demasiados rasgos y matices diferentes y relacionados como para poder encerrarlos en una “definición”. Para algunos estudiosos de esta perspectiva se han contabilizado 76 textos en donde Peirce se refiere a la acción de los signos, todos alusivos a los tres “sujetos y a las relaciones que se podrían evidenciar entre ellos”.

8 *Primeridad, segundidad y terceridad* (referidas a los objetos: posibilidad, existencia, necesidad; cualidad, realidad, ley; referidas a los sujetos y los hechos: sensibilidad, esfuerzo, hábito; referidas a las entidades semióticas: icono, índice, símbolo; término, proposición, argumento; referidas a los modos de razonamiento: deducción, inducción, abducción; referidas a las relaciones: posibilidad, actuación y pensamiento).

procesos de semiosis didáctica en ese sistema para la formación docente. Creemos que ello afina los elementos de reflexión y análisis didácticos en el seno de una institución, en la vía de resolución de problemas de un profesor "en/sobre/para" la reflexión y conceptualización de su práctica como docente.

En este trabajo hemos llamado *polo cognoscitivo* o epistémico al relacionado con el subsistema *saber*, *polo didáctico* al relacionado con el profesor, *polo cognitivo* al relacionado con el estudiante y *polo ecológico del aula* al relacionado con los medios, mediaciones y ambientes de aprendizaje/enseñanza en el entorno de la interacción. Las unidades elementales serían los polos y las unidades complejas serían las relaciones entre díadas; las tríadas complejas serían las superficies co-construidas y determinadas por las triadas.

Los subsistemas (polo cognoscitivo o epistémico, polo cognitivo o estudiante, polo ecológico del aula, polo profesor) también son aquellas unidades elementales –simples o complejas– que se comportan como totalidades compuestas por elementos, díadas o tríadas, solidarias e interdependientes y como implicación de tomar la relación como categoría.

Para este tipo de construcción epistemológica las unidades complejas se definen a partir de tres nociones referenciales y relacionadas de manera triádica desde nuestra interpretación de la ontología peirceana:

- Contenido: conjunto o colección de elementos o partes de la unidad compleja y especificados a partir de su condición de partes complejas de un todo; sistemas y subsistemas (profesor, alumno, saber, entorno).
- Estructura: relaciones, nexos, functores, conectivos que hacen emerger una estabilidad (relaciones y correspondencias) entre polos, unidades complejas, sistemas y subsistemas: relaciones monádicas (consigo mismo); diádicas (con otros, dual) y relaciones triádicas (profesor-entorno, estudiante-saber).
- Contexto: espacio no necesariamente físico dentro del cual se verifican los componentes y sus relaciones; es un espacio relacional no cerrado, pero con fronteras con posibilidad de interacciones e intercambios (estructuralmente cerrado e informacionalmente abierto).

Estas unidades y nociones están diferenciadas de su entorno; el sistema funciona como un todo con propiedades referidas al todo y que son emergentes; la organización es el conjunto de relaciones de conexión que permiten caracterizar a una totalidad como sistema; un sistema es una unidad compleja organizada (Morín 1982).

Complejidad, semiótica y pragmática

En este trabajo y en el Enfoque *Ontosemiótico* (EOS) del Conocimiento y la *Instrucción Matemática*, desde las aproximaciones *semióticas, antropológicas y complejas* (Peirce, Wittgenstein, Morín) se adoptan modelos, 1°, *ontológico triádico* de la percepción, cognición y la significación en matemáticas y su didáctica (sobre bases semióticas de tipo pragmático); 2°, *epistemológico relacional* sobre las matemáticas y la reflexión didáctica (basado en presupuestos antropológicos y socio-constructivistas); 3°, *metodológico pragmático* de la instrucción y los procesos de estudio matemático y didáctico (sobre bases complejas, críticas y socio-constructivistas).

Igualmente, desde una perspectiva compleja, relaciona las anteriores dimensiones entre sí con referencia al trasfondo sociocultural en que tiene lugar la actividad de estudio y comunicación de la matemática escolar, su didáctica y sus reflexiones meta-didácticas. Asimismo se adoptan las posturas falibilistas, pluralistas y comprometidas con la teoría de la verdad peirceana (Godino y Batanero, 1991-2009; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2008).

La perspectiva semiótica de la actividad matemática-didáctica se caracteriza por centrar su atención en los signos y su uso sobre las estructuras y funciones mentales. En esta propuesta se hace coherente la articulación de la perspectiva semiótica, el sistema didáctico y las tres teorías planteadas por el EOS para el análisis de las acciones didácticas.

Dado que el signo (objeto didáctico) supone un acto comunicativo, representacional y transformativo de las mismas relaciones didácticas, la perspectiva semiótica abarca de manera conjunta las dimensiones individuales y sociales de la actividad matemática, la enseñanza y el aprendizaje, y los procesos de estudio que el EOS ha denominado instrucción matemática e instrucción didáctica, es decir, de la actividad didáctica.

Y nos referimos a la *instrucción didáctica* como los procesos de estudio dirigidos y organizados (institucionalizados) en el marco de un programa de formación de profesores en los cuales intervienen sistemas de prácticas didácticas, una reflexión sobre ellas, junto al compromiso por la apropiación y transformación de dichas prácticas, los actores y los recursos intervinientes y la asunción de las implicaciones de dicho proceso formativo.

La perspectiva semiótica de la actividad didáctica, asumida por EOS como *triádica, pragmaticista, antropológica*, contribuye a la comprensión del fenómeno didáctico en su naturaleza semiótica (experiencial, representacional, cultural), y nosotros agregamos la interpretación, el uso, el contexto, las situaciones, las mediaciones, los juegos de lenguaje, las intenciones, los valores y la racionalidad axiológica en la construcción de conocimiento (los que evidencia la relación semiosis didáctica-idoneidad), estudiando las Rutas de estudio y aprendizaje (REA), en particular la ruta docente.

Objetos didácticos, su significado y prácticas didácticas

En la perspectiva semiótica adoptada, objeto es un elemento de la tríada, el segundo elemento de la semiosis; su definición es solo comprensible desde la coherencia con sus principios metafísicos y epistemológicos. De acuerdo con Pierce, la constitución de un objeto no es un hecho cerrado sino que se trata de un proceso abierto al que se le pueden adherir nuevas características, en la medida de la aparición de procesos semióticos sucesivos en situaciones y prácticas.[9]

La definición de *objeto como emergente de los sistemas de prácticas*, y la tipología de objetos primarios introducidos en el EOS, responden a esta necesidad de poder describir dichos sistemas, a fin de compararlos entre sí y tomar decisiones en el diseño, desarrollo y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es el objeto matemático-didáctico indicado, señalado, nombrado, caracterizado, conceptualizado, representado, simbolizado, significado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas y/o cuando se reflexiona sobre los procesos de estudio matemático-didáctico, y recursivamente sobre los procesos de estudio institucionalizados y personales de las matemáticas.

En términos de una reflexión didáctica, es necesario introducir una tipología de *objetos didácticos* (componentes monádicos de los subsistemas semióticos, configurables en tríadas, en la caracterización ontológica), que aquí hemos denominado anteriormente –para un meso-análisis didáctico– como *diseño, gestión y evaluación*.

1. ***Diseño***. Inicialmente se tiene en cuenta la teoría de las situaciones didácticas como elemento para la planificación de la secuencia de actividades propuesta en el aula (Brousseau, 1986).

9 El objeto referido para la actividad didáctica es consistente con el definido por Peirce, y la idea es tomada de Blumer (1982): un objeto es "*cualquier entidad o cosa a la cual nos referimos o de la cual hablamos, sea real, imaginaria o de cualquier otro tipo*" (p. 8).

2. ***Gestión***. La secuencia didáctica puesta en juego y el material didáctico usado en la misma, permiten determinar la forma en que se analizarán cada una de las relaciones didácticas que se presentan en este sistema didáctico, que son las relaciones profesor-estudiante, profesor-saber, estudiante-saber, con referencia a un entorno específico (Lurduy, 2005; 2009).
3. ***Evaluación.*** Se determina como la correspondencia que se establece entre la función del material didáctico, la orientación del profesor y la devolución del estudiante frente a la situación problema que enfrenta, en donde se vinculan los dos ítems anteriores como parte de las interacciones que se establecen en el aula (Giménez, 2000; 2005; 2009).

Prácticas y sistemas de prácticas

Puesto que los objetos didácticos son emergentes de sistemas de prácticas didácticas, y dicha emergencia tiene lugar en el tiempo de manera progresiva, recursiva y compleja, se puede introducir de manera natural y consistente con la perspectiva sistémica, la distinción-conjunción-continuidad de los constructos *objeto-proceso, práctica-relación, significación-reificación*, de tal modo que cada tipo y subtipo de objeto matemático-didáctico lleva asociado el correspondiente proceso (problematización, definición, argumentación, particularización, generalización, etc.), formas y modos de la actividad y de la relación en esa actividad con dichos procesos y objetos; y semióticamente, la correspondiente emergencia de significados, representaciones e interpretaciones de la realidad estudiada.

Una *práctica didáctica* se refiere a toda expresión, actuación y regulación que efectúa un profesor para resolver problemas didácticos, comunicar a otros su solución, validarla o generalizarla a otros contextos, problemas o interacciones didácticas. Evidentemente, para nosotros el significado institucional y personal de los objetos didácticos implican motivaciones, formas de actuación y hábitos de conceptualización en las prácticas didácticas, resultado de vivencias y creencias propias, colectivas, institucionales o idiosincráticas, y en ocasiones todas las anteriores. Consistente con la perspectiva pragmatista, el significado es formulado como significado institucional y personal e introduce en su definición la categoría de acción.

El *significado personal/institucional de un objeto didáctico* se define como el sistema de prácticas discursivas, operativas y normativas realizadas por una persona u organización al interior de un proceso de estudio o institución para resolver un campo de problemas didácticos. Es entonces explícito que no solo es posible y potente el lenguaje, sus usos y juegos al interior de una problema, situación problema, contexto, práctica o institución, así como las acciones relativas a tareas y meta-prácticas, sino que también el uso de normas y regulaciones permiten, relacionan y regulan las posibilidades, usos e implicaciones de los significados.

En nuestra conceptualización de tipos de *objetos didácticos* hacemos equiparable y consistente con EOS –y su caracterización de tipos de objetos– y asumimos de manera triádica: 1) El diseño: lenguajes, discursos y situaciones; 2) La gestión: procedimientos, actuaciones, propiedades y relaciones; 3) La evaluación: conceptos, argumentos y reglas.

Facetas y procesos cognitivos; significado y compresión didáctica

Para EOS, las relaciones entre objetos, prácticas y significados es un tipo de relación triádica que ha denominado la función semiótica que media entre los significados personales y los institucionales como relaciones de dependencia establecidas por un sujeto, en el que se involucran tipos de *procesos de pensamiento asociados a facetas de tipo dual*. En esta perspectiva, las relaciones de dependencia pueden ser de tipo instrumental (objetual, relación monádica), representacional (epistemológico, relación diádica) y estructural (mediaciones y relaciones de tipo triádico).

La perspectiva asumida reconoce el carácter triádico de los procesos de razonamiento y las relaciones definidas por Peirce desde su conceptualización de inducción, deducción, abducción y que hacemos coherente con respecto a los procesos de emergencia de las competencias de razonamiento didáctico (análisis y reflexión didácticos).

La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (supervisión) que conllevan procesos meta-cognitivos y mejor comprensión de los fenómenos didácticos y meta-didácticos, (estudiados en los **análisis didácticos**).

El *significado de un objeto didáctico* es el sistema de prácticas (operativas, discursivas, normativas) que un profesor realiza para resolver problemas de tipo didáctico, en las que los constructos *objeto-proceso, práctica-relación, significación-reificación* intervienen (o como hemos referido anteriormente, problemas de la profesión de ser profesor de matemáticas). Este tipo de correspondencias, relaciones de dependencia o función entre un antecedente (expresión, representante, significante) y un consecuente (contenido, significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia, son interpretadas en el EOS como funciones de signo.[10] Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas –siendo consistentes con la perspectiva semiótica asumida– y caracterizan la *reflexión didáctica*.

Las dos categorías básicas de entidades se complementan con otra entidad relacional: *la función semiótica*, que conecta de forma triádica los objetos entre sí y con las prácticas de donde provienen. De esta manera, las funciones semióticas tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las acciones epistemológicas en las matemáticas y/o en la didáctica de las matemáticas y generalizan la noción de representación (representación de algo para alguien de acuerdo con intenciones y regulaciones).

Por tanto, el rol de la representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) pueden ser también representámenes e interpretantes de las funciones semióticas y sus tipos.

Configuraciones, trayectorias e idoneidad didáctica

El proceso de estudio didáctico sobre un contenido o tema educativo se desarrolla en un tiempo dado, mediante una secuencia de configuraciones didácticas que hemos denominado *trayectorias didácticas* de tipo epistémico, cognitivo, instruccional y mediacional que respectivamente hacen emerger *las idoneidades y sus criterios de valoración*.

En relación con la intervención didáctica realizada en contextos institucionales, la aproximación semiótica al conocimiento personal e institucional que propone el EOS es deducible que se puede razonar pragmáticamente, en el sentido de valorar si las acciones, tareas y modos de interacción didáctica en el proceso de estudio son preferibles a otras, lo que permitiría inducir que el proceso de estudio es idóneo. [11]

10 Descrita por U. Eco como función semiótica:
Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un plano de la expresión colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un plano del contenido (…) una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua (Eco, 1995, p.p. 83-84).

11 Para el diccionario RAE, idóneo es "*adecuado, y apropiado para algo*". Según Godino (2008), "*no se trata de la noción de competencia o capacidad para realizar una tarea, sino el grado en que un proceso de estudio didáctico permite el logro de los fines, intenciones y pretensiones didácticas*".

Idoneidad epistémica se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados y pretendidos respecto del significado de referencia, y al grado de representatividad y relación de los significados personales y los institucionales.

Idoneidad cognitiva expresa el grado de desarrollo en que están los significados pretendidos/implementados en relación con los evaluados y los logrados en los alumnos, así como el nivel de proximidad de los significados personales logrados y declarados a los significados pretendidos/implementados, observados en las caracterizaciones de las manifestaciones de conducta cognitiva propuesta, retomadas en esta investigación como caracterización de las manifestaciones de los estudiantes.

Idoneidad instruccional. Expresa el grado de cercanía entre los significados institucionales definidos *a priori* por un profesor, valora los niveles de gestión del conocimiento matemático-didáctico propuestos por el docente y la correlación con los logrados por los estudiantes y manifestados en los procesos de evaluación de un proceso de enseñanza-aprendizaje.

Idoneidad mediacional, referida al nivel de disponibilidad, diseño, gestión, uso y evaluación de los recursos y materiales necesarios para el desarrollo del proceso de estudio, así como al grado de adecuación de los intereses y motivaciones de los estudiantes y profesores en el entorno del aula, en donde se gestiona el proceso de estudio matemático-didáctico

Hablar de idoneidad didáctica desde una perspectiva semiótica, es relacionar la máxima pragmática[12] (Perice, 1971) con los instrumentos para su uso, y su fuerza radica en la clarificación de los propósitos para su implementación conforme a las circunstancias, condiciones, contextos, modos de proceder selectivamente de acuerdo con lo que el significador (interpretante) ha puesto de él. En última instancia se trata de los grados de adecuación de los significados y procesos de semiosis en los sistemas didácticos y semióticos.

Niveles de análisis didáctico

Aceptamos con el EOS que el análisis didáctico "*es el estudio sistemático de los factores que condicionan los procesos de estudio matemático-didáctico de un contenido curricular –o de aspectos parciales del mismo– con unas herramientas teóricas y metodológicas*"; además de ello, aceptamos

12 "*Consideremos qué efectos, que pudieran tener concebiblemente repercusiones prácticas, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de estos efectos es la totalidad de nuestra concepción del objeto*" (p. 69).

que lo utilizaremos en lo que anteriormente hemos denominado *macro análisis didáctico* (al desarrollo de una propuesta curricular), *meso análisis didáctico* (desarrollo de una propuesta de una secuencia o unidad didáctica) y *micro análisis didáctico* (desarrollo de un proceso de estudio puntual implementado en una o unas sesiones de clase).

Se deriva de esta propuesta, un método de *análisis didáctico* que posibilite caracterizar niveles y dimensiones de la compleja relación didáctica y su axiología; por tanto, desde el punto de vista de la investigación didáctica, según Godino *et al.* (2007) es necesario describir el análisis didáctico y sus niveles, los cuales se identifican y caracterizan por:

a. El análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos).

b. La elaboración de las configuraciones de objetos y procesos.

c. El análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.

d. La identificación del sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa).

e. La valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

El primer nivel de análisis pretende estudiar las prácticas matemático-didácticas realizadas en el proceso de estudio. El segundo se centra en los objetos y procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también los que emergen de ellas. Un tercer nivel de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de las configuraciones, los patrones de interacción, las trayectorias y su relación con los aprendizajes de los estudiantes. El cuarto nivel considerado en el enfoque ontosemiótico pretende estudiar esta compleja trama de normas y metanormas que soportan y condicionan los procesos de estudio.

Los cuatro niveles de análisis descritos anteriormente son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa. Por tanto, son necesarios criterios de "idoneidad o adecuación". ***Se trata de realizar una acción-reflexión didáctica o meta-acción*** (la valoración de las acciones realizadas en los procesos de instrucción).

En consecuencia, aquí debe considerarse la incorporación de una racionalidad axiológica en la educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, etc.; por tanto, es necesario proponer un quinto nivel de análisis a los procesos de estudio matemático centrado en la valoración de su *idoneidad didáctica*.

Dicho nivel se basa en los cuatro niveles de análisis previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio en nuevas implementaciones.

Reflexión y semiosis didácticas

Se trata de realizar una acción o meta-acción (la valoración) que recae sobre otras acciones (las acciones realizadas en los procesos de instrucción), en un meta-nivel de análisis didáctico, ello en consistencia con los referentes asumidos desde EOS con la semiótica peirceana y con Eco, la complejidad de Morín, la filosofía del lenguaje de Wittgenstein y la racionalidad de la acción comunicativa de Habermas (Godino, 2008) y que aquí hemos denominado *reflexión didáctica*. Consistentes con la perspectiva semiótica asumida, caracterizan la *semiosis didáctica* y son convertidos en conocimiento didáctico en los ejercicios de *síntesis abductiva* en un proceso de comprensión, interpretación y construcción de hábitos, así como de formas de acción y regulación de la acción y de sus implicaciones en las nuevas y próximas prácticas didácticas.

Finalmente presentamos algunos análisis, reflexiones, herramientas metodológicas y conceptualizaciones utilizados en una investigación que hemos denominado *La Ruta Docente. Elementos para la reflexión sobre la acción del profesor* (REA). Este trabajo se propone aportar a los procesos de reflexión y autoevaluación de la práctica docente en lo referente al modelo del complejo de relaciones del sistema didáctico, y en particular, busca aportar a la caracterización y evaluación de las competencias de reflexión didáctica de los profesores de matemáticas. La REA es emergente de las prácticas de indagación sobre un proceso de estudio en el aula en lo referente a la acción del profesor en la clase de matemáticas, cuando este aborda el tema de las representaciones de la función lineal en grado noveno.

La Ruta Docente. Análisis y reflexión didáctica de un proceso de estudio didáctico-matemático en el seno de un sistema didáctico

El programa de investigación sobre REA ha venido siendo implementando en los últimos siete años por el grupo de investigación Crisálida. En él han participado profesores de la educación básica, formadores de profesores y estudiantes para profesor de matemáticas. Se han estudiado los elementos y relaciones del sistema didáctico (profesor, estudiante, entorno y saber) en investigaciones sobre los procesos de estudio en el aula cuando se implementan secuencias de actividades correspondientes a las temáticas propuestas por los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación

Nacional - MEN para el currículo de matemáticas de la educación básica en Bogotá.

En esta perspectiva, para el caso de los procesos de estudio de las matemáticas en el aula, se hace necesaria la caracterización, reflexión y análisis de las relaciones profesor, estudiante(s), saber y entorno, y de las configuraciones y trayectorias didácticas emergentes en el aula en un proceso de estudio de las matemáticas. En nuestros trabajos (2001-2008) hemos denominado *tetraedro didáctico* (Lurduy, 2008) al sistema de elementos y relaciones del sistema didáctico, y al complejo de configuraciones y trayectorias didácticas, lo llamamos *Rutas de estudio y aprendizaje* (REA), (Lurduy *et al*. 2005).

Lo que en esta investigación estudiamos del tetraedro didáctico es el subsistema o polo profesor en relación con los otros polos (saber, entorno, estudiante), es decir, la gestión del proceso de estudio por parte del profesor de una de las secuencias de actividades para una de las temáticas correspondientes al currículo en grado noveno de la educación media (la representación de la función lineal), la *Ruta Docente*. Pretendemos disponer algunas reflexiones sobre la caracterización de uno de los subsistemas o polos que denominamos *profesor.* Este a su vez es constituyente de manera compleja (Morín) del sistema de relaciones del *tetraedro didáctico*: saber, estudiante, profesor, entorno (sistema didáctico).

Explicitamos y describimos los instrumentos de estudio utilizados para analizar la acción y reflexión del profesor cuando implementa una secuencia de actividades sobre la representación de la función lineal en grado noveno. Esta investigación fue desarrollada con nueve profesores en cuatro instituciones escolares, en el marco del programa de investigación *Rutas de estudio* y *aprendizaje en el aula*. La intención es contribuir a la descripción de la ruta docente con miras a su valoración y la de su idoneidad didáctica, y aportar elementos de análisis, caracterización y evaluación de las competencias de reflexión didáctica de los profesores de matemáticas.

En concordancia con lo expuesto más arriba en este escrito, para el desarrollo del programa de investigación adoptamos algunos enunciados con los cuales conceptualizamos el sistema didáctico (tetraedro didáctico), y diseñamos y gestionamos los instrumentos de recolección y análisis de la información: la teoría de la complejidad (Morín); semiótica y epistemología pragmaticista (Peirce, Lewis); el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino y Batanero); la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau); la resolución de problemas (Charnay, D´Amore); los entornos de aprendizaje, el uso y manejo de material didáctico (Lurduy). En particular para esta investigación, la didáctica de la función (Ruiz Higueras); la reflexión sobre la práctica docente (Llinares, Blanco, Ponte); la evaluación (Giménez); la investigación cualitativa en educación (Ketele, Croll).

La experiencia investigativa[13]

En esta parte reportamos lo correspondiente a la gestión de una secuencia de actividades sobre la representación de la función lineal en grado noveno. Toda la secuencia (16 sesiones de clase) se diseñó a partir de la TSD (Teoría de las Situaciones Didácticas) de Brousseau (actividades de acción, formulación, validación e institucionalización) y la observación y registro de información se hace sobre cuatros sesiones de clase (correspondientes a la fase de validación). Se analizaron videos de las clases, entrevistas a profesores y estudiantes, trabajos de los estudiantes, protocolos de clase de observadores no participantes y los informes de reflexión del profesor.

La construcción de los instrumentos tiene el objetivo de evaluar una secuencia de actividades, que contribuya a la construcción de ciertas nociones específicas. Esta herramienta se enfoca en el análisis de planteamientos de propuestas didácticas que son orientadas desde la TSD, las cuales se convierten en eje articulador de la construcción del instrumento, desencadenando y centrando la mirada en el tetraedro didáctico especificado en el análisis del profesor por medio de las relaciones que este tiene con los estudiantes, con el aprendizaje de un saber y con el medio donde se desenvuelve la situación.

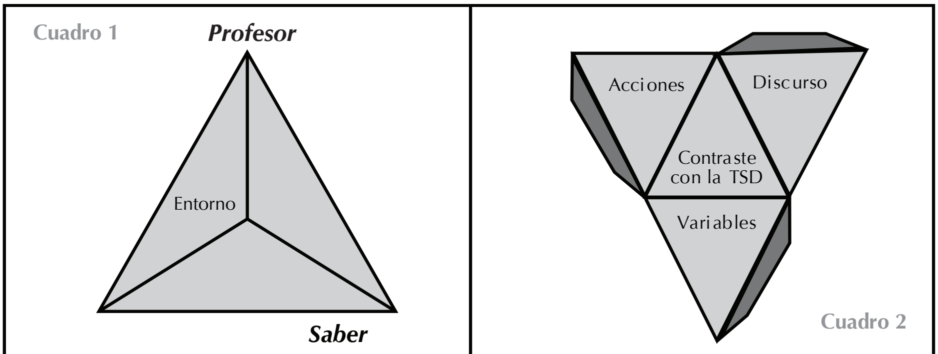
Preparados los instrumentos de registro y observación, la disposición para el desarrollo de la actividad se hizo de la siguiente manera: primero, la intervención de dos observadores que registrarían las evidencias de la clase, uno de ellos involucrado directamente con la planeación de la secuencia de actividades de la noción específica, y el otro, un observador externo, conocedor de la secuencia, más no creador de ella. Segundo, la grabación (video) de cada una de las sesiones de la actividad, las cuales sirven para que posteriormente el mismo profesor haga un registro y análisis de su desenvolvimiento en la clase. Los puntos de vista dispuestos para la observación del hacer del profesor concluye en la triangulación de la información recolectada, que lleva a un análisis cualitativo y cuantitativo, el cual permite observar la validez: consistencia, coherencia y fiabilidad de los instrumentos.

13 La investigación se realizó en Instituciones Educativas Distritales, en los grados séptimo y noveno, y participaron en todo el proceso algunos estudiantes para profesor de LEBEM, del semillero de investigación dirigido por el profesor Lurduy y asesorados por el grupo de investigación Crisálida, en su práctica docente entre 2006 y 2008,.

Los instrumentos[14]

Presentaremos algunos instrumentos para la recolección, análisis y ponderación de la información –o partes de ellos– como una muestra y nos extenderemos en su justificación y explicación. En el diseño de instrumentos se consideraron **categorías**, las cuales vienen referidas a la relación entre el profesor y cada uno de los aspectos considerados en el tetraedro didáctico (ver cuadro 1).

Para la relación **profesor-saber** se toman aspectos que capturan la estructura planeada para la clase, la secuencia de tareas, las formas de interacción previstas en cuanto a la flexibilidad que se puede o no tener con la temática, cómo debe desarrollarse la discusión, los planes a seguir con sus correspondientes propósitos, así como también la secuencia en relación con el objeto matemático puesto en juego en la clase.



Si se desarticula el tetraedro se encuentra el desarrollo de la superficie de él, en donde se hallan cuatro subcategorías que fundamentan la relación del profesor con cada uno de los subsistemas propuestos.

En cuanto a la relación ***profesor-estudiante***, se toman aspectos referidos por los indicadores del NCTM (Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, por sus siglas en inglés) y lineamientos curriculares del MEN en los que se destaca la elección o diseño de tareas que el profesor propone a sus estudiantes, la dirección del discurso de la clase y la creación de ambientes de aprendizaje como áreas centrales del trabajo del profesor que dan forma a lo que pasa en la clase (contrato didáctico).

Asimismo en la relación ***profesor-entorno*** se incluyeron indicadores concernientes al desarrollo organizacional de actividades a través de las cuales

14 Los enunciados de esta parte del documento en cuanto al diseño de instrumentos, registro y análisis de la información, son construcción colectiva de los profesores, estudiantes participantes y el director de la investigación, y hacen parte de los informes finales de investigación de estudiantes para profesor, profesores investigadores y el doctorante, con sus matices y naturales diferencias.

el profesor motiva la participación en las mismas, la organización de los estudiantes, del aula, los recursos disponibles para el trabajo en clase, en relación con los ambientes físico y lógico abstractos que intervienen en la clase (mediación e interacciones).

Las observaciones específicas a realizar en cada una de las categorías planteadas se determinaron por **sub-categorías**, las cuales tuvieron en cuenta que los estudiantes adoptaran la acción del profesor, lo que él proporciona para que la actividad funcione. Dichas sub-categorías son *variables didácticas, acciones de clase, discurso y contraste con la TSD*.

La consideración de las **variables didácticas** permite determinar cómo hacer uso de las indicaciones y elementos que se deben poner en juego en el aula. Se intenta mirar las **acciones** en compañía de su intencionalidad, planteada en el diseño. En cuanto al **discurso**, deja ver cómo el profesor hace su gestión, encaminando lo que se quiere que el estudiante haga. El **contraste con la TSD** observa si lo que hace el profesor es viable desde lo que plantea la teoría (ver cuadro 2).

Para un análisis más enriquecedor se optó por considerar **componentes de la sub-categoría** independientes dentro de cada unas de las categorías, y en cada caso con un "*criterio específico para analizar dichos componentes*"; esto permitió discriminar detalles sobre cómo se presentan en el hacer del profesor, cómo se construyen las reglas que gobiernan la interacción y el comportamiento.

Algunos altos en el camino

Un aspecto muy importante de la investigación realizada sobre la ruta docente deja ver la posibilidad de análisis y reflexión didáctica de los estudiantes para profesor de matemáticas (EPM), y en esa dirección la posibilidad, realización y valoración de la evaluación de sus competencias didácticas construidas en sus procesos de estudio didáctico y de formación en LEBEM.

REA, los procesos de estudio y la experiencia investigativa

Para el desarrollo de la observación del EPM, se asignaron a cada uno de los instrumentos de observación, registro y análisis de la información sus respectivas categorías, sub-categorías, componentes y descriptores en la especificidad de cada temática a observar en la actividad que se pretendía desarrollar; además, se diferenciaron éstas en cuanto al tipo de situación que se trabajaría: acción, formulación, validación e institucionalización. Ello ha permitido una indagación cualitativa detallada de las prácticas docentes, de los procesos de estudio y de la misma experiencia investigativa, ya que es un elemento primordial del perfil de egresado de LEBEM y de la investigación curricular propuesta a estudiantes y profesores.

La observación del quehacer del profesor (EPM) permitió reflexionar en torno al fin de la investigación y del análisis cuantitativo con el que se determinan las tendencias del maestro en el desarrollo de su clase, logrando con ello –por sesión y aplicación por parte de diferentes profesores– una mayor fiabilidad de la secuencia a valorar, lo que a su vez posibilitó realizar una gestión de clase más fluida y produjo un análisis menos parcial de su quehacer, mirando los aspectos a mejorar que posibilitan que los estudiantes construyan nociones y que el profesor guíe de manera adecuada dicha construcción.

Estos instrumentos posibilitaron determinar que en el sistema didáctico los elementos (profesor, alumno, saber y entorno) por separado no son suficientes para realizar un análisis detallado de las situaciones de enseñanza. Para hablar de un elemento, es necesario estudiar al otro; por tanto, se unifica el trabajo con dichos elementos, especificando la mirada en el profesor y en cada una de sus relaciones.

Además, el explorar a fondo las relaciones en el tetraedro, permite involucrar más componentes de análisis que en ocasiones no se tienen en cuenta (variables, acciones, discurso, contraste con la teoría) en la consideración de una situación problémica específica. Estos son importantes para el desenvolvimiento de las mismas, porque se pone de manifiesto la existencia de algunos componentes que a veces no son considerados en la planificación de la clase.

El sistema didáctico y el tetraedro didáctico

Dado que el sistema didáctico y el tetraedro didáctico son un modelo, éste debe ser explicado a partir de un marco teórico de referencia, el cual permite establecer la operatividad del mismo (el tetraedro didáctico), respecto de la interpretación del suceso a explicar (los análisis de las configuraciones y trayectorias didácticas a la hora de la formación de profesores en los aspectos de los objetos didácticos).

Desde una perspectiva epistemológica el tetraedro es una analogía, es explicativo (debe brindar una explicación del sentido y del significado del fenómeno emergente en el análisis), esto es, debe potenciar una interpretación; es descriptivo como una serie de enunciados interpretativos en el contexto de la construcción teórica que le dio origen (REA y EOS) y, finalmente, debe permitir el paso de la observación a la argumentación en la descripción e interpretación de los fenómenos didácticos aquí referidos (Bateson, 1981).

A partir de los aportes y conceptualizaciones de estas modelaciones, y aunque los análisis e investigaciones son más dispendiosos y complejos, de acuerdo con Lurduy (2009), los desarrollos logrados en los procesos investigativos con estudiantes, profesores y estudiantes para profesor en el programa de formación de profesores de LEBEM, han generado una mayor comprensión de los fenómenos y hechos didácticos. Mediante esa vía se ha motivado un mayor compromiso académico y didáctico en los procesos formativos, en los análisis de los procesos de estudio en los diferentes niveles de la educación, en distintos grados de reflexión y análisis didáctico de profesores, formadores y estudiantes para profesor, y por tanto, en la valoración y reconocimiento de las configuraciones didácticas, las identidades profesionales y la idoneidad didáctica (competencias de reflexión y análisis didáctico).

Referencias bibliográficas

Bateson, G. (1989). *Pasos hacia una ecología de la mente*. Buenos Aires: Planeta.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos en didáctica de las matemáticas. En: *Recherches en Didactiques des Mathematiques* (7), 2, 33-115.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica*. Buenos Aires: Aique.

Croll, P. (1995). *La observación sistemática en el aula*. Madrid: Editorial La Muralla.

De Ketele, J. (1995). *Metodología para la recogida de información*. Madrid: Editorial La Muralla.

D'Amore, B. y Fandiño, M. (2002). *Un acercamiento analítico al "triángulo de la didáctica". Educación matemática,* México: 14(1), 48-6.

Godino, J. (2004). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Disponible en: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_

______________ (2008). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática.* Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_fundamentos.htm

Giménez, J. (2000). *La evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

Ibáñez, J. (2000). Nuevos avances en la investigación social. La investigación social de segundo orden. En: Revista *Anthropos*, No. 22, Madrid.

Lahitte, H. *et al*. (1994). *Matriz relacional de los procesos cognitivos*. Salamanca, España: Amarú ediciones.

Lavanderos, L. (2002). *La organización de las unidades cultura naturaleza: hacia una concepción relacional de la cognición*. Tesis doctoral. Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Lurduy, O. (2005). Algunos elementos para la comprensión de la cultura del aula. En: *Cuadernos de investigación No. 5*, "Rutas de estudio y aprendizaje, el caso de las matemáticas". Bogotá: Universidad Distrital-IEIE".

______________ (2009). El profesor investigador de su práctica. La formación del profesorado de matemáticas. En: *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, No. 51.

Morín, E. (1982). *El método: naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra.

______________ (2000). *Una mente bien ordenada*. Barcelona: Seix Barral.

Peirce, C. S. (1971). Cómo hacer nuestras ideas claras. En: *Mi alegato a favor del pragmatismo*, Argentina: Aguilar.

Wilhelmi, M. R.; Godino, J. D. y Font, V. (2005). *Bases empíricas de modelos teóricos en didáctica de las Matemáticas: reflexiones sobre la teoría de situaciones didácticas y el enfoque ontológico y semiótico*. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm

Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los *Elementos*

Edgar Alberto Guacaneme Suárez[1]

En este documento se presenta un análisis de la teoría de la proporción expuesta por Euclides en el Libro V de los *Elementos*; dicho análisis se nutre de los resultados de la investigación en Historia de las Matemáticas y se organiza a la luz de una interpretación de la *Teoría de Significados Sistémicos* del Enfoque Ontosemiótico. Los resultados del mismo ofrecen una mirada alterna de la propuesta euclidiana relativa al tratamiento de la razón y la proporción, potencialmente útil —y, en cierto sentido, necesaria— para adelantar tanto la actividad de docencia de las matemáticas, como la investigación didáctica relacionada con estos objetos matemáticos.

Introducción

En el proceso de construcción del proyecto de tesis denominado inicialmente *El conocimiento histórico en la formación integral de un profesor de matemáticas: estudio del caso de la proporcionalidad*,[2] del Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Educación Matemática, se ha considerado importante lograr una aproximación a la historia de la razón y la proporción recurriendo a la identificación de fuentes documentales que versen específicamente sobre ésta y que permitan esclarecer, entre otros aspectos, algunos momentos y hechos fundamentales de su desarrollo. En este sentido, al menos en la tradición matemática occidental, se han identificado varios hitos, dentro de los cuales sobresale la época dorada de los griegos (representada fundamentalmente por Eudoxio, Euclides y Apolonio) en la que se configura una teoría de las proporciones, se adapta a la versión axiomática deductiva y se usa en la descripción de curvas geométricas.

De aquella época, y en particular de la producción matemática de Euclides, hemos seleccionado una de las obras más importantes para las matemáticas, en general, y para la teoría de la proporción, en particular: los

1 Estudiante del Doctorado Interinstitucional en Educación (Sede Universidad del Valle) y profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

2 Dirigido por el Doctor Luis Carlos Arboleda e inscrito en la Línea de investigación en Historia y Educación Matemática. Actualmente el proyecto se titula *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas*.

Elementos[3]. Si bien los Libros V, VI, VII y X, de esta obra contienen información relativa a las proporciones, desde nuestra perspectiva ha merecido especial atención el Libro V, puesto que: (i) en éste Euclides hace un tratamiento de la teoría de la proporción para las magnitudes geométricas; (ii) esta teoría contiene la definición de proporción, por demás ampliamente estudiada por los historiadores, la cual constituye la innovación central frente a la teoría de la proporción pitagórica; (iii) el Libro V maneja un nivel de generalidad *sui generis* en los *Elementos*; (iv) la "proporcionalidad geométrica" no ha sido tan comentada y estudiada en la investigación didáctica (o al menos no tanto como la "proporcionalidad aritmética") y por tanto, presenta un "sabor" especial a la reflexión; y (v) abordar el estudio de todos los libros mencionados desborda nuestras posibilidades de tiempo y espacio actuales. Así, el Libro V es el objeto de análisis de este trabajo; de manera específica nos interesa esclarecer el significado de la razón y la proporción, en tanto objetos matemáticos centrales de la teoría desarrollada en dicho libro. Para tal fin, haremos uso de las seis categorías a las que alude la *Teoría de los significados sistémicos* [(Godino, 1996), (Godino y Batanero, 1994), (Godino y Batanero, 1998), (Godino y Recio, 1998), (Godino, 2002), (Godino, Batanero y Font, 2007)], a saber: situaciones problemas/tareas matemáticas, lenguaje matemático, procedimientos/procesos matemáticos, conceptos/definiciones, propiedades y argumentos.

Atendiendo a ello, inicialmente presentaremos una breve descripción de las seis categorías definidas en la *Teoría de los significados sistémicos* y del contenido del Libro V, para luego hacer una descripción del tratamiento de la teoría de la proporción a través de cada una de las seis categorías mencionadas. Finalmente, esbozaremos algunas conclusiones acerca del significado sistémico de la razón y la proporción. Como apéndice del documento incluimos un listado de las definiciones y proposiciones del Libro V.

Esperamos que este trabajo permita al lector una mirada alterna de la propuesta euclidiana relativa al tratamiento de la razón y la proporción, y que los resultados aquí expresados puedan servir de base para elaborar contrastes con otras propuestas matemáticas, desarrolladas por los matemáticos o por los diseñadores curriculares, que posibiliten develar aspectos de lo que ha sido y es la teoría de la proporcionalidad.

3 Como los historiadores reconocen varias traducciones de los *Elementos*, procedentes de diversas versiones, aclaramos que se asumirá la versión de Puertas (1994), la cual procede de la edición de J. L. Heiberg y H. Menge, *Euclidis Opera omnia,* vols. I-IV, Leipzig, 1883-1886.

Señalemos, inicialmente, que entendemos la *Teoría de los significados sistémicos* (TSS) como una propuesta teórica-metodológica que, junto con la *Teoría de las funciones semióticas* y *la Teoría de las configuraciones didácticas*, constituyen los actuales desarrollos de un ambicioso programa de investigación en Didáctica de las Matemáticas, denominado *Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*, liderado por el doctor Juan D. Godino.[4]

Desde nuestra interpretación distinguimos que en el marco de la TSS se reconoce que el análisis del significado de los objetos matemáticos en una actividad matemática específica (de una cierta institución, momento histórico u obra matemática) se enriquece al ser ejecutado bajo la óptica de las seis entidades primarias o categorías de análisis citadas antes.

Entendemos que en este contexto teórico se considera que las *situaciones problemas/tareas matemáticas* son uno de los ejes centrales que contextualizan y promueven la actividad matemática y que incluyen el análisis tanto de los problemas matemáticos simples y complejos, como de las problemáticas metamatemáticas que movilizan la actividad matemática; aquí, se entiende que la mayoría de estos problemas están entretejidos en redes problemáticas y que por tanto su análisis debe desarrollarse en el ámbito singular y plural. Asimismo, en la descripción e identificación del significado de las nociones, la TSS asigna un importante papel al *lenguaje matemático*, interpretado —desde nuestra perspectiva— en una dimensión relativamente ingenua pero útil, en el que se le reconoce como un mediador en la solución de las problemáticas reseñadas y que considera la mirada a los términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc., empleados. Por otra parte, los *procedimientos/procesos matemáticos,* constituyen una tercera categoría de análisis en la TSS; en efecto, hemos comprendido que en esta teoría se asume la identificación de un campo operatorio o procedimental (definido por operaciones, algoritmos, técnicas, etc.) como un aspecto nodal en la identificación del significado de los objetos matemáticos, en tanto que este campo deja entrever las maneras de uso de dichos objetos en un ámbito no necesariamente discusivo o de definiciones; igualmente, hemos comprendido que se pueden analizar la manera como algunos procesos matemáticos (*v.g.*, materialización, idealización, particularización, gene-

4 En http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm se encuentran alojados una variedad de documentos que describen ampliamente tal programa.

ralización, personalización, institucionalización, representación, significación, descomposición, reificación) se ponen en juego y manifiestan como parte fundamental de la actividad matemática. Igualmente, y como es natural suponer, *conceptos/definiciones* constituye una categoría de análisis fundamental en la TSS; consideramos que en esta teoría el análisis de un concepto atiende el estudio de la definición, pero lo trasciende en la medida en que la concibe como una expresión del concepto, integrada más a las reglas gramaticales sobre el uso del lenguaje en la actividad matemática en cuestión. Las *propiedades matemáticas* constituyen la quinta categoría considerada en la TSS; desde nuestra interpretación de la teoría, concebimos las propiedades como los atributos que de los objetos matemáticos de una obra matemática se ponen en juego y se develan en la arquitectura de la obra misma; en cierto sentido, estos atributos exhiben el carácter utilitario de los objetos en tanto que dan cuenta de qué se puede o no hacer con los conceptos de la obra. La última de las seis categorías la constituyen los *argumentos matemáticos*; estos son los razonamientos que se utilizan para comprobar, explicar o justificar las soluciones de los problemas, o para validar las inferencias, conjeturas o deducciones que la trama constructiva en la actividad matemática puede implicar.

En lo que sigue, a través de estas seis categorías se intenta hacer una "reconstrucción" de lo que podemos describir como la "configuración epistémica" que Euclides elaboró para las nociones de razón y proporción en el Libro V, esto es, los objetos y relaciones emergentes de las prácticas operatorias y discursivas de Euclides sobre estas nociones o conceptos. Pero, antes, miremos la estructura de dicho Libro.

Estructura del Libro V

Por considerarse como componente de la obra total, se debe suponer que el Libro V está antecedido y condicionado por las ocho nociones comunes, enunciadas al inicio del Libro I (Puertas, 1991, pp. 199-201). Además, en tanto que hace referencia a las magnitudes geométricas generalizadas[5] y no de manera específica a las tratadas en los anteriores libros, se supone que éstos no condicionan o se implican en aquél; en cierto sentido, los historiadores estudiosos de los *Elementos* reconocen una independencia

5 Luis Vega, en la introducción general (Puertas, 1991, p. 73), califica el contenido del Libro V como la teoría *generalizada* de la proporción, y no teoría *general,* por al menos tres motivos: "[i] La forma de aparición de la teoría —en sustitución de nociones anteriores más limitadas y concretas de razón y proporción, en la primera mitad del siglo VI—, [ii] el hecho de que estas magnitudes hayan de cumplir ciertas condiciones —ser homogéneas y "arquimedianas"—, [iii] el punto oscuro de las relaciones entre las ideas de magnitud y número". (La numeración es nuestra).

del Libro V con respecto a los que le preceden. Igualmente se muestran de acuerdo en que el Libro VI constituye una particularización de la teoría de las proporciones generalizada y que en esencia aborda el estudio de la semejanza entre figuras. También, establecen que la teoría expuesta en el Libro V no condiciona el tratamiento de la teoría de la proporciones en el ámbito aritmético, contenida en esencia en el Libro VII, lo cual no puede interpretarse como la ausencia de ciertas analogías y diferencias en el tratamiento de la proporción entre los ámbitos de las magnitudes y los números. Asimismo, discuten si la teoría de proporciones generalizada es o no empleada en el Libro X, en tanto que algunos reconocen, en ciertas proposiciones, el uso de la idea de *antanairesis* —o como se llamó después, *anthyphairesis*— como una definición alterna de proporción, no enunciada por Euclides ni en el Libro V ni en el VII.

Una primera aproximación a la estructura del Libro V permite reconocer un grupo de dieciocho definiciones, veinticinco proposiciones (ninguna de ellas construcción o problema), dos porismas (o corolarios) y ningún postulado. A propósito de las proposiciones, Hill (1928, p. 39) afirma que "De las veinticinco proposiciones, cinco se refieren a las magnitudes y sus múltiplos (no a razones). De las veinte restantes, catorce conciernen a la *igualdad* de razones y seis a propiedades de razones *desiguales*".

Es este, entonces, el panorama general en el que se ubica el Libro V y que define su estructura interna. Este es el terreno en el que se desarrollará el análisis en torno a las seis categorías citadas y que definen los seis apartados siguientes.

Situaciones problemas/Tareas matemáticas

Acabamos de señalar que ninguna de las veinticinco proposiciones del Libro V enuncia explícitamente un problema matemático o una construcción; todas ellas son teoremas.[6] La gran mayoría de las proposiciones tiene una configuración condicional o bicondicional; en efecto, salvo la proposición 15, las demás o bien tienen un enunciado explícitamente condicional (si p entonces q), o se puede hacer una interpretación simbólica de la forma $p \Rightarrow q$. En este sentido, la actividad matemática esencial en el Libro V no es otra que la de demostrar enunciados condicionales; ahora

6 Nos referimos aquí a problemas o construcciones como los dados en las proposiciones 1 del Libro III (*Hallar el centro de un círculo dado*) y 1 del Libro I (*Construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada*) respectivamente. Por teoremas asumimos aquellos enunciados que exhiben los atributos esenciales de los objetos. Euclides al terminar la demostración de un problema emplea la locución "*que es lo que había que hacer*" en tanto que al terminar la demostración de un teorema utiliza la locución "*que es lo que había que demostrar*".

bien, es apenas natural admitir que en el marco de una presentación deductiva, como la de los *Elementos,* es completamente adecuado asumir la demostración de cada proposición como una problemática evocada por el enunciado mismo de la proposición; bajo esta óptica, la demostración de cada proposición constituiría un problema lógico deductivo. El asunto de la demostración será abordado en esencia cuando demos cuenta de la categoría *Argumentación*.

Por otra parte, antes de pasar al análisis de la segunda categoría, creemos conveniente señalar que más allá de la mirada internalista que se pueda hacer al tipo de problemas y tareas matemáticas que subyacen en el Libro V, hay que considerar que la teoría euclidiana de las proporciones emerge en atención a dos problemas específicos de la época.

Por un lado, la entonces clásica teoría pitagórica de la proporción —y en general la cosmovisión pitagórica— había sufrido un duro revés al confirmarse la "anomalía" relativa a la conmensurabilidad de cualquier par de segmentos; es decir, a la imposibilidad de asignar un número (o medida) o dos números, a la razón de dos segmentos cualesquiera. Esto conminó a los matemáticos griegos a, entre otras *tácticas*[7], replantear la teoría de la proporción de tal suerte que se pudiera hablar de razones y proporciones, sin necesidad de especificar si las magnitudes consideradas eran o no conmensurables; en últimas, a excluir la noción de medida numérica de la geometría. En cierto sentido, el mérito de esta teoría es que frente a la teoría de los pitagóricos, esta no alude a la medida (como número) que establece "cuántas veces" una magnitud está contenida en otra, o cuántas veces una magnitud debe ser repetida para igualar a un múltiplo de la otra, o, como lo señala Corry (1994, p. 4), el mérito mayor de la teoría expuesta en el Libro V es la posibilidad de comparar magnitudes inconmensurables. Lo anterior no debe interpretarse como si en este libro se le diera salida total al problema de la conmensurabilidad, pues es en el Libro X y no en el V, donde se hace un tratamiento específico de la conmensurabilidad (o si se prefiere, de la inconmensurabilidad).

Por otro lado, es conveniente recordar que el Libro V atiende a la necesidad que motiva los *Elementos* y, más en general, a la obra euclidiana. Ésta no es un requerimiento ni iniciativa enciclopédica; más bien es una necesidad de presentar bajo el esquema axiomático deductivo las teorías matemáticas y, en este sentido, justificar las afirmaciones de la teoría bajo

7 El artículo de Rusnock y Thagard (1995) ofrece una gama y análisis de varias tácticas ligadas a los diferentes elementos (a saber: la construcción geométrica, la estructura lógica, la teoría de números y la teoría de razón/proporción) que el problema de la inconmensurabilidad involucra. Dos de las tácticas se refieren a "limitar la aplicación de la razón en geometría y reformular la geometría tanto como sea posible sin el uso de la razón; o […] generalizar los conceptos de razón y proporción" (p. 115). Estas dos están implicadas en las propuestas eudoxiana y euclidiana.

unos cánones matemáticos que se apropian y logran una forma particular. Así, el Libro V no es una simple recopilación del trabajo de Eudoxio, ya que implicó una revisión, recapitulación y transformación de su teoría, e incluso la creación de resultados.[8] En otras palabras, la teoría euclidiana de las proporciones responde a un problema metamatemático que se relaciona directamente con un *estilo* de hacer matemáticas y de comunicarlas, característico de aquella comunidad y época, que se constituyó en acicate y guía para la mayor parte de las matemáticas ulteriores.

Lenguaje matemático

Cuando pensamos en el lenguaje utilizado en el Libro V, debemos hacer alusión al idioma en que han sido escritos los *Elementos*. Se sabe que originalmente fueron escritos en griego antiguo y que se realizaron traducciones al árabe y al latín, y que éstas se han vertido en lenguas vernáculas modernas.[9] Este asunto, que puede ser de orden menor, ha sido considerado por historiadores a través de análisis muy específicos (*v.g.*, estudios de carácter filológico o etimológico[10]) y de análisis más generales que, por ejemplo, contemplan el estudio de las modificaciones de orden estructural (*v.g.*, inclusión o exclusión de proposiciones, postulados, etc., e incluso la inclusión de los Libros XIII al XV). Como este aspecto está lejos de nuestras posibilidades, lo asumiremos como no relevante para el presente propósito y, en consecuencia, reiteramos y precisamos nuestro objeto de estudio: el Libro V de los *Elementos* en la versión en español presentada por Puertas (1994, pp. 9-54).

Al examinar este texto, sin incluir las notas elaboradas por la autora de la traducción, reconocemos que las definiciones, las proposiciones y sus demostraciones están escritas en un estilo retórico que incorpora palabras o términos, notación simple y diagramas o dibujos; precisamente estos cuatro

8 Una amplia y detallada exposición sobre el vínculo entre la teoría de proporción de Eudoxio y la de Euclides se encuentra en Knorr (1992).

9 En un apartado de la introducción general, Luis Vega (Puertas, 1991, pp. 123-151) presenta una amplia y minuciosa discusión acerca de las diferentes versiones y ediciones de los Elementos; allí presenta cuatro fases características del texto, a saber: Euclides griego, Euclides árabe, Euclides latino y Euclides de las lenguas vernáculas. Por su parte, Acerbi (2003) reconoce que a diferencia de otros libros de los *Elementos*, el Libro V no presenta diferencias sustanciales en cuanto a su estructura entre las tradiciones griega y árabe-latina.

10 En la Sección 5, *Las magnitudes geométricas de Euclides: glosario*, Grattan-Guinness(1996, p. 364) refiere una discusión acerca de la traducción del término griego σημεισν (posteriormente traducido como *punctum*) como *punto* y no como *signo*, como parece haber sido usado originalmente por Euclides, asunto que cobra un valor mayor cuando luego reconoce que el uso de *signo* descartaba la posible consideración de este objeto como constitutivo de las magnitudes.

elementos del lenguaje constituyen los apartados siguientes a través de los que desarrollamos el análisis de esta categoría.

Palabras o términos

Las palabras o términos usados, como era de esperarse, en esencia refieren a algunos objetos y relaciones matemáticas definidas implícita o explícitamente (nos referiremos a éstos como *palabras-concepto*); por supuesto que también se encuentran palabras que cumplen una función secundaria en el discurso. Las palabras-concepto han sido objeto de trabajo e interpretación histórica, y en libros como el de Puertas (1994) y Heath (1956) constituyen buena parte de sus comentarios; algunos ejemplos de éstas, identificadas en las definiciones, son: magnitud, parte, menor, mayor, mide, múltiplo, medida, razón, tamaño, homogéneas, guardar razón, equimúltiplo, proporcionales, razón duplicada, razón triplicada, antecedentes, consecuentes, razón por alternancia, razón por inversión, composición, separación, conversión, razón por igualdad, extremos, medios, proporción perturbada.[11] Más allá de la posible dificultad en la interpretación de las palabras-concepto, por experiencia propia reconocemos que el estilo utilizado impone enormes dificultades a un lector no familiarizado con éste, es decir, a un lector moderno; para corroborarlo, basta con leer cualquiera de los enunciados de la mayoría de las definiciones o proposiciones para encontrarse con textos abstrusos que ocasionalmente pueden llegar a parecer trabalenguas, y comparar tal experiencia con la lectura e interpretación de su expresión algebraica dual.

Sin embargo, más allá de las dificultades generadas por el estilo retórico, es preciso señalar que hay un componente lógico en la enunciación que genera dificultad en la lectura. Dicho componente es planteado detalladamente por Gardies (2004, pp. 9-26) en uno de los apartes del capítulo titulado "*De quoi parlait le Géomètre grec*". Nuestra interpretación de lo expuesto allí se resume en que una definición de la proporción desborda los límites del lenguaje de primer orden en tanto que se refiere a una relación entre relaciones y, por tanto, implica una manera de predicación sobre predicados. La virtud de Euclides, que conlleva a lo abstruso de sus predicados, es precisamente lograr enunciar en lenguaje de primer orden una definición tal.

Notación

Decimos que la notación es simple, en tanto que esta solo incorpora el uso de letras griegas mayúsculas (*v.g.*, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Θ) para denotar magnitudes, exclusivamente en las demostraciones. Sin embargo, Euclides hace un

11 En la sección titulada *Conceptos/definiciones* discutiremos los conceptos implicados por algunas de éstas.

uso dual de éstas: en la demostración de una misma proposición, utiliza un par de letras para nombrar una magnitud y también emplea una sola para nombrar otra magnitud; por ejemplo, la demostración de la Proposición 1 comienza así: "Sean un número cualquiera de magnitudes AB, ΓΔ respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes E, Z iguales en número" (Puertas, 1994, p. 18). La notación de la magnitud a través de dos letras evoca la notación que el mismo Euclides ha usado en libros anteriores para indicar segmentos; allí las letras parecerían denotar los extremos del segmento, es decir los puntos. Algo similar podría considerarse que sucede en el Libro V, pero nos resistimos a aceptar tal interpretación pues es claro que en él se está tratando con magnitudes generalizadas y no solo unidimensionales (*i.e.*, segmentos). De esta manera, cuando Euclides enuncia "la magnitud AB" o "la magnitud E" debe entenderse que se está refiriendo a un segmento, una región o un sólido (o más precisamente, a la cantidad de longitud de un segmento, la cantidad de superficie de una región o la cantidad de volumen de un sólido, respectivamente) y no exclusivamente al segmento cuyos extremos son los puntos denotados con A y B; no hacerlo así implicaría el desconocimiento del nivel de generalidad que el Libro V implica, del cual hablaremos más adelante, cuando nos refiramos a los *procesos* matemáticos identificados. Euclides también hace uso de esta notación de letras griegas en los dibujos que acompañan las demostraciones en el mismo sentido que el señalado antes; sin embargo, bajo la consideración de que los trazos rectos y finitos en los dibujos no representan segmentos —como lo discutiremos adelante—, la interpretación de estas letras denotando puntos o segmentos no tiene sentido alguno. Por otra parte, examinando con un poco más de cuidado el uso de la notación con una o dos letras, advertimos que ello está relacionado con la operatoria de las magnitudes; así, Euclides nota una magnitud con una letra cuando ésta será multiplicada o constituye un múltiplo de otra magnitud, en tanto que usa las dos letras, cuando la magnitud será dividida en sus partes o cuando será objeto de una resta (o será restada de otra). En consecuencia, a través de esta observación, debemos reconocer que la notación también incorpora un aspecto de ostensión operatoria.

Un señalamiento adicional respecto de la notación empleada es el hecho de que, excepto para las magnitudes, no hay notación alguna para ninguna de las palabras-concepto citadas arriba; en efecto, incluso para los objetos como razón o proporción, se usan expresiones retóricas de la forma "como… es a …, así… es a…". De esta manera queda claro que las discusiones acerca de si debe usarse el signo "=", en vez de "::", o el signo "/" en lugar de ":" para simbolizar la proporción y la razón, respectivamente, son sencillamente anacrónicas.[12] Ello no implica que en una interpretación

12 Grattan-Guinness(1996) refiere que la notación "::" procede de William Oughtred, en el siglo XVII.

moderna de las razones y proporciones, esta discusión no tenga sentido, pues definitivamente el uso de unos u otros símbolos sí impone relaciones diferentes entre el lector y el texto, como lo hemos podido advertir a través de la experiencia de leer las propiedades de las razones con unos y otros símbolos, o a la manera como sugiere Grattan-Guinness (1996) en la sección sobre *La ontología de Euclides* (pp. 369-371).

De las anteriores precisiones sobre la notación, se deduce que en los Elementos no hay uso de notación algebraica alguna del estilo $a{:}b{::}c{:}d$ o $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.[13]

Diagramas o dibujos

Los diagramas o dibujos incluidos en el Libro V acompañan cada una de las demostraciones de las proposiciones.[14] Todos están constituidos por trazos rectilíneos con pequeños trazos en sus extremos o en su interior. A modo de ejemplo, y para facilitar la referencia a los comentarios sobre los dibujos, presentamos en la Figura 1 una reproducción del dibujo empleado en la demostración de la proposición 3 (Puertas, 1994, p. 24).

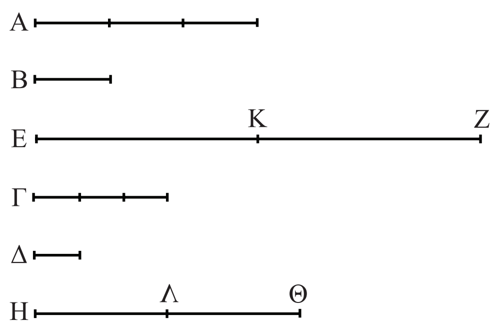


Figura 1

Como lo señalamos antes, no nos parece acertada la lectura de estos trazos como segmentos, ni la de las letras como puntos o extremos de estos; ello en consideración a que los trazos están representando cantidades de longitud, de superficie y de volumen. A este respecto Beppo Levi comenta:

> *y el hecho de que la figuración que acompaña las demostraciones se hace todavía exclusivamente por segmentos, mientras que los co-*

13 Esta y otras razones son expresadas por Grattan-Guinness (1996, p. 366) en su discusión en torno a si existió o no en los *Elementos* un álgebra geométrica.

14 En este punto debemos reconocer que algunos autores han puesto en duda la originalidad de los dibujos en la obra euclidiana manifestando que éstos fueron insertados en transcripciones y traducciones posteriores. Al margen de la posible validez de tales declaraciones, las razones expresadas en torno a la triangulación de la información disponible para lograr una versión muy cercana a la original, argüidas por Luis Vega (Puertas, 1991, pp. 123-151), nos permiten considerar que los dibujos sí hacían parte de la obra euclidiana objeto de análisis.

mentaristas se esfuerzan frecuentemente en acentuar el nuevo punto de vista con el dibujo de objetos diferentes, solo demostrará más claramente el pensamiento más puramente abstracto del autor antiguo, desvinculado de la representación material; pues estos segmentos no tienen diferente significación que las letras en nuestras demostraciones algebraicas (Levi, 2003, p. 167).

La anterior interpretación puede ser entendida como una anticipación en la obra euclidiana de la *linealización* de las magnitudes geométricas, lograda por Descartes en su *Geometría*, varios siglos después. Consideramos que Euclides estaba lejos de considerar tal proceso en los términos técnicos en que lo planteó Descartes, pues este último sí tenía entre sus propósitos lograr una definición operativa del producto de segmentos; creemos que Euclides simplemente reconoció en los trazos la posibilidad de representar la cantidad de una magnitud geométrica cualquiera y una relativa —pero restringida— operatividad.

En efecto, debemos resaltar el hecho de que la longitud (o quizá sea mejor decir la extensión) de cada trazo sí está en correspondencia con la cantidad de la magnitud considerada. Esto se puede evidenciar por la manera en que se representa una relación como la "equimultiplicidad"; por ejemplo, en la demostración de la proposición 3, Euclides inicialmente enuncia: "Pues sea la primera, Α, el mismo múltiplo de la segunda, Β, que la tercera, Γ, de la cuarta, Δ, y tómense los equimúltiplos ΕΖ, ΗΘ de Α, Γ" (Puertas, 1994, p. 24) para luego presentar el diagrama de la Figura 1. Como puede apreciarse, la extensión de Α es tres veces la de Β, así como la extensión de Γ es tres veces la de Δ; igualmente, la extensión de ΕΖ es dos veces la de Α, así como la extensión de ΗΘ es dos veces la de Γ.

El hecho de que la extensión del trazo esté en correspondencia con la cantidad de la magnitud considerada, tiene una expresión bastante diciente en las proposiciones que implican una proporción o una desproporción. Tal es el caso, por ejemplo, del dibujo que acompaña la demostración de la proposición 14, cuya primera frase es "Guarde pues la primera, Α, con la segunda, Β, la misma razón que la tercera, Γ, con la cuarta, Δ, y sea Α mayor que Δ" (Puertas, 1994, p. 40), y que reproducimos en la Figura 2.

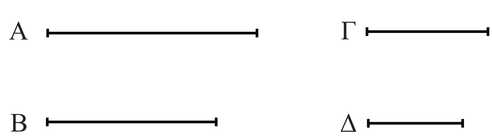


Figura 2

En este dibujo se observa que en efecto la extensión del trazo nombrado con A es mayor que el del trazo notado con Δ. Pero más allá de esto, llama la atención que ciertamente los trazos conforman una proporción geométrica —al menos desde una aproximación intuitiva—, es decir, (i) no solo A es mayor que B, y Γ es mayor que Δ, sino que (ii) el resto de A con respecto a B, es mayor que el resto de Γ con respecto a Δ, en tanto que A es mayor que Γ, y además (iii) tales restos parecen la misma fracción de A y Γ respectivamente, o simplemente (iv) B parece ser la misma fracción de A, como Δ es fracción de Γ. Desde esta perspectiva, la razón y la proporción tienen una expresión figurativa particular, totalmente implícita en el dibujo; en otras palabras, si bien en el dibujo es relativamente evidente el reconocimiento de un múltiplo de una magnitud, no lo es así la razón entre dos magnitudes ni mucho menos la proporción entre dos razones.

El papel de la figura en los *Elementos* es discutido ampliamente por Gardies (1997, pp. 127-155) en el capítulo titulado *"Le rôle de la figure chez Euclide et Archimède"*. Allí, destacando que las entidades tratadas en la obra son de naturaleza diferente (números, magnitudes geométricas específicas y magnitudes en general), comenta que las figuras empleadas en múltiples libros tienen que ser consideradas de manera igualmente diversa; así, a las figuras empleadas para representar a las magnitudes geométricas específicas (*v.g.*, segmentos, ángulos, triángulos, círculos) las denomina *propias,* en tanto que utiliza el término *impropias* para las figuras que representan los otros dos tipos de entidades.[15] Desde esta postura, diremos que los dibujos del Libro V son representaciones impropias, o no ostensivas, de las magnitudes generalizadas representadas. Este reconocimiento constituye un argumento más a favor de nuestra interpretación de los trazos rectos y finitos como representación indistinta de los segmentos, regiones y volúmenes.

Procedimientos/Procesos matemáticos

Procedimientos matemáticos

La lectura del contenido del Libro V nos permite reconocer algunos procedimientos matemáticos, a saber:

a. *Medir o ser medido*. El procedimiento matemático de medir está referido en las definiciones 1 y 2; sin embargo, como lo menciona Puertas (1994, p. 9), "La noción de medida y la relación de medir a (y ser medido por) quedan indefinidas". Al respecto reiteramos que

15 Esta división nos evoca la distinción entre las representaciones ostensivas y no ostensivas, respectivamente.

uno de los rasgos de esta teoría es precisamente la de no asociar una medida (*i.e.*, un número) a la relación entre dos magnitudes homogéneas; no obstante esta consideración, nuestra interpretación de las definiciones citadas sí incorpora la referencia a la existencia de un número entero aunque no requiere establecer cuál es.

b. *Multiplicarse*. Esta idea se aplica a una magnitud y, desde nuestra interpretación, se reduce a añadir una magnitud a sí misma cualquier número entero de veces, es decir, a una adición repetida. Esta idea aparece no sólo en la Definición 4, sino que es aplicada dondequiera que en el Libro V aparecen las expresiones múltiplo o equimúltiplo; especialmente se reconoce tal tratamiento en las demostraciones de las diferentes proposiciones, a través de su representación en los dibujos e incluso a través de la inclusión de términos como *doble, triple o cuádruple*.

c. *Comparar magnitudes*. Para parejas de magnitudes homogéneas aparece el proceso general de comparación para establecer cuándo una excede, es igual o resulta inferior que la otra. A través de estas comparaciones se colige cuándo una magnitud es igual, desigual, mayor o menor que otra.

d. *Suma de magnitudes*. Si bien en la idea de multiplicarse se admitía la reiteración de una magnitud, en la Definición 14 (composición de una razón) se admite la suma de dos magnitudes cuando estas son antecedente y consecuente de una razón. Ahora bien, aún no logramos entender la justificación para que tal definición se interprete en términos de proporciones —como lo hace Puertas (1994, p. 16) "$a : b :: c : d \rightarrow (a+b) : b :: (c+d) : d$"— y no en términos de una razón; por otra parte, la proposición 18 admite también la suma, y su formulación simbólica no es otra que la recíproca de la que acabamos de incluir.

e. *Diferencia de magnitudes*. En las definiciones 15 y 16 (separación y conversión de una razón, respectivamente) se incorpora la idea de resta de magnitudes cuando estas son antecedente y consecuente de una razón y, aunque no se explicite, el antecedente es mayor que el consecuente. Aquí también Puertas (1994, p. 16) hace una interpretación en términos de proporciones: "$a : b :: c : d \rightarrow (a-b) : b :: (c-d) : d$" —interpretación que también hace para la proposición 17— y "$a : b :: c : d \rightarrow a : (a-b) :: c : (c-d)$", respectivamente. De la misma forma, en las proposiciones 17, 18 y 19 se incorpora la separación de una razón, pero en éstas claramente en el marco de proporciones y, en consecuencia, la idea de resta de magnitudes. Asimismo, una idea similar a la de resta aparece en las proposiciones 5 y 6; en éstas, de una magnitud *se quita* otra menor y se generan restos de aquella.

f. *División de una magnitud*. En la demostración de las proposiciones 1, 3 y 15, Euclides divide una magnitud en magnitudes iguales a una parte de aquella, condición que limita el resultado y no permite interpretarlo como la división de una magnitud en un número cualquiera de partes alícuotas; en efecto, en las tres proposiciones se garantiza que la magnitud a dividir es múltiplo de la magnitud en que se va a dividir.

Los procedimientos que acabamos de discutir parecieran tener su racionalidad en los libros anteriores de los *Elementos* —lo cual contrastaría con la independencia del Libro V señalada antes—; sin embargo, consideramos que ello puede ser cierto para el caso en que las magnitudes referidas sean segmentos, e incluso superficies, pero no es así si éstas son volúmenes; recordemos que el trabajo con objetos geométricos sólidos (o quizá sea más prudente decir, objetos en el espacio) tendrá que esperar a los Libros XI, XII y XIII.

Procesos matemáticos

Con respecto a los procesos matemáticos (y atendiendo a lo señalado al inicio de la sección *Situaciones problemas/Tareas matemáticas*) debemos reiterar que el proceso por excelencia desarrollado en el Libro V, ante la ausencia de problemas o construcciones, es la demostración de enunciados condicionales; adicionalmente, y ligado con este proceso, advertimos en el Libro V el uso del proceso matemático de *instanciación*; estos procesos serán tratados en la sección *Argumentos*. Asimismo, reconocemos el proceso de generalización como un rasgo del Libro V. Como lo señalamos en la sección *Estructura del Libro V* y en la sección *Lenguaje matemático,* la generalización se advierte al considerar que se está incluyendo en una misma estructura a las magnitudes geométricas arquimedianas y no se les está dando un tratamiento particular que atienda a su dimensión. Además, en la Definición 5, especialmente en la idea evocada por la locución *cualquier equimúltiplo*, aparece una manera particular de referirse a todos los elementos de un conjunto, en este caso de magnitudes; el nivel de generalización aumenta en esta misma definición, cuando se condiciona la comparación de dos parejas de tales conjuntos de equimúltiplos, para garantizar que *se comportan —frente al orden— de la misma manera*. De modo un poco diferente, la generalización aparece en las proposiciones 1 y 12, al hablarse de "un número cualquiera de magnitudes" (Puertas, 1994, pp. 18, 37).

Con una mirada de lejos más especializada, Acerbi (2003) alude al Libro V como una fuente principal en el estudio de la generalidad. Además, establece que al respecto de la generalidad, las tradiciones griega y árabe-latina de los *Elementos*, ofrecen tratamientos bastante disímiles. Igualmente, sostiene que ya en los tiempos de Euclides estaba muy refinada la comprensión de la generalidad y de las herramientas lingüísticas para expresarla. Él asume como objeto central de estudio a la proposición 8 (especialmente su demostración), como caso revelador de la existencia y expresión del proceso de generalidad euclidiano.

Conceptos/definiciones

Como ya se mencionó, el Libro V contiene 18 definiciones, las cuales han sido discutidas minuciosamente por los historiadores. De éstas, identificamos al menos tres nominales, a saber: la Definición 3 (nomina la razón como una relación entre dos magnitudes), la Definición 6 (nomina magnitudes proporcionales o proporción a las que satisfacen la condición de la Definición 5) y la Definición 11 (nomina magnitudes correspondientes a lo que hoy llamaríamos parejas de antecedentes y parejas de consecuentes)[16]. Las quince definiciones restantes establecen condiciones, y catorce de éstas, además, dan nombres a los objetos implicados; la Definición 8 solo precisa la condición pero no nomina algo. De estas definiciones, el grupo de la 12 a la 16 alude a transformaciones en las razones sin que su enunciado implique, al menos de manera inmediata o directa, la aplicación a una proporción; a este respecto, Puertas (1994, p. 15) sostiene que estas definiciones "Euclides las aplica a razones cuando describirían mejor proporciones, tal vez porque, al referirlas a proporciones, parecería que asume algo que todavía no se ha probado".

Atendiendo la opinión de los historiadores, quienes coinciden en asignar un lugar central a la paradigmática Definición 5 (proporción), y junto con

16 En esta definición aparece por primera vez la mención a los términos "antecedente" y "consecuente" sin una significación explícita en el contenido anterior; creemos que la significación surge de manera relativamente natural cuando se atiende al orden explícito de referencia a las magnitudes de una proporción (*i.e.*, primera, segunda, tercera, cuarta) implicado desde la definición 5, y de manera mucho más obvia, cuando se incorpora una notación como "$a:b$" pues allí se observa que a antecede a b.

ella a las definiciones 3 (razón) y 7 (desproporción), recapitularemos y discutiremos algunos de sus planteamientos.[17]

Hay un cierto consenso en que la Definición 3, en sí misma, es una definición general y vaga, y desempeña un papel secundario —y en cierto sentido innecesario— en la teoría; por ejemplo, Hill (1928, p. 38) expresa que "El primer señalamiento que habría que hacer respecto de las definiciones es la ausencia de una definición útil de razón, por ello es imposible hacer cualquier uso de la tercera definición de Euclides". También hay un consenso en que esta definición es complementada por la Definición 4 y adquiere un carácter específico en la medida en que interactúa con la Definición 5; al respecto, por ejemplo, Fine (1917, p. 73) establece que "una noción muy definida de razón está implicada en la definición de proporción".

La existencia de estos consensos contrasta con la existencia de diversas interpretaciones que hacen los historiadores sobre las ideas de razón y proporción en conjunto. En suma, tales interpretaciones configuran una gama de posibilidades que incluyen concebir la razón (y ocasionalmente la proporción) como —o relacionada con—: (i) una cantidad, adicional a los números y las magnitudes, (ii) una comparación o relación binaria de segundo orden, (iii) un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes, (iv) un número real.[18]

Para Grattan-Guinness (1996), en la obra euclidiana existen tres tipos distintos de cantidades, a saber: los números, las magnitudes y las razones. Nos parece que en esencia su argumento se centra en el hecho de que las razones se pueden comparar para establecer si están *en la misma razón*,[19] o si una *es mayor* o *es menor* que otra, de manera análoga a como se hace con los números y las magnitudes. En oposición, Corry (1994) ha afirmado que la razón no puede concebirse como una cantidad en tanto que la idea

17 Fine (1917, p. 73) sostiene que las definiciones significativas del Libro V son de la 3 a la 7. Antes hicimos una consideración acerca del carácter nominal de la definición 6 y frente a la definición 4 podemos señalar, brevemente, que desde nuestra perspectiva, ésta impone la condición de que para poder establecer una razón entre dos magnitudes, estas deben ser arquimedianas, condición que no satisfacen los ángulos euclidianos, observación esta última que no hemos encontrado en ninguno de los documentos históricos estudiados y que se sustenta en el hecho de que para Euclides no puede haber un ángulo mayor o igual a dos rectos.

18 Al margen de estas interpretaciones con referentes históricos, en los capítulos 3 y 4 de la tesis de Guacaneme (2001) se encuentran sendos análisis de las ideas de razón y proporción en teorías matemáticas y textos escolares de matemáticas. Igualmente, en Guacaneme (2002) se encuentra una descripción del tratamiento que de las razones, proporciones y proporcionalidad se realiza en algunos textos escolares.

19 Si bien Grattan-Guinness (1996, p. 361) reconoce una igualdad aplicable a los números y a las magnitudes, sostiene que Euclides nunca dice que las razones sean *iguales* entre sí, solamente que están en la *misma razón*, o que una razón *es como* otra. Éste es uno de los tres rasgos de los *Elementos* que Grattan-Guinness utiliza en su argumentación en contra de una lectura de la obra en términos de álgebra geométrica.

de cantidad griega no la admite; de hecho afirma que "La razón, a diferencia del número y de la magnitud, no mide nada ni es cantidad" (p.10). El argumento, coincidencialmente, es similar al que emplea su contradictor, pues también se refiere a que la comparación de dos razones no permite establecer si estas son *iguales* o *desiguales*, sino para establecer la *identidad* o falta de ella; como parte de su argumentación, cita el siguiente pasaje de las *Categorías* (VI, 6a) de Aristóteles, para reforzar la idea de que la condición de igualdad o desigualdad solo se aplica a las cantidades:

> *Lo que realmente es peculiar para las cantidades es que nosotros las comparamos o contrastamos en términos o sobre los fundamentos de igualdad. Predicamos los términos 'igual' o 'desigual' de todas las cantidades mencionadas*.

Corry (1994, p. 5) establece que "La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades" y luego (p. 10) señala que "La razón entre dos cantidades del mismo tipo (bien sean dos números o dos magnitudes homogéneas), permite compararlas aún siendo desiguales". A partir de ello se puede colegir que la proporción es asumida como una comparación entre dos comparaciones. Por su parte, Grattan-Guinness (1996, pp. 367-368) en la octava sección, "*Razones de Euclides ¿un fondo musical?"*, considera que las razones pueden estar en una estrecha conexión con las relaciones entre notas musicales —o quizá sea mejor decir entre intervalos— en tanto que la proporción sería una manera de afirmar que dos de tales relaciones son la misma, sin requerir que los términos de las razones sean iguales; así, la relación entre las notas Fa sostenido y La [F#-A] puede reconocerse como una tercera menor, que es la misma relación, o el mismo intervalo, que hay entre Si y Re [B-D][20]; desde esta perspectiva la proporción sería una relación entre dos relaciones.

La razón relacionada con un arreglo o secuencias ordenadas de magnitudes es una propuesta que encontramos en el trabajo de Fine (1917), donde establece que:

> *Ya que según la Definición 5 la condición para que A, B, X, Y sean proporcionales es que: si los múltiplos A, 2A, 3A, … y B, 2B, 3B, … son*

20 Casualmente, luego de la lectura del Capítulo 4, *The role of the theory of proportions in Nicomachus, Theon and Domninus* (Klein, 1968, pp. 26-36) —y antes de la lectura de (Grattan-Guinness, 1996)— habíamos escrito:
A partir del documento de Klein parece razonable explorar la expresión musical que da origen a la teoría de las proporciones, pues éste puede constituir un ámbito sugerente para el trabajo escolar y con los profesores con las proporciones, además que permitiría esclarecer una idea de razón "práctica" o "sensible" y contrastarla con una idea de razón "teórica" o "abstracta". (Quizá se pueda afirmar que la relación entre las notas Mi y Do, es la misma que entre las notas Si y Sol).

dispuestos en un arreglo en una sola secuencia en el orden de tamaño, y de la misma manera se disponen los múltiplos X, 2X, 3X, … y Y, 2Y, 3Y, …, la ley de distribución de los múltiplos de A entre aquellos de B debe ser la misma que la de los múltiplos de X entre aquellos de Y. De ahí que "la identidad" de las razones A:B y X:Y significa la identidad de estas dos leyes de distribución, y la razón A:B en sí misma significa la relación de tamaño entre A y B que es indicada por la manera en que los múltiplos de A están distribuidos entre aquellos de B (p. 73).

Esta interpretación se puede resumir en una correspondencia entre dos sucesiones ordenadas de múltiplos, cada una compuesta por los múltiplos de las dos magnitudes de una razón. Fine (1917, pp. 74-75) argumenta a favor de esta interpretación al advertir cómo ésta se pone en juego en varios de los teoremas (proposiciones 7 a 10, 11, 13, 16, 18, 22, 24). La idea propuesta por Fine establece la necesidad de que las dos magnitudes de cada razón sean homogéneas, pues de no ser así, no se podría armar una sucesión con los múltiplos de éstas. Igualmente, tal idea no impide que las magnitudes de las dos razones tengan que ser todas del mismo tipo o la misma naturaleza. Además, implica una manera poco usual de interpretar la Definición 5, en tanto que no toma parejas de múltiplos sino de secuencias. Además, Fine sostiene que para una teoría general de la proporción no se requiere una definición de razón, en singular, aunque sí se exigen sendas definiciones de igualdad y desigualdad entre razones, las cuales son suministradas en las definiciones 5 y 7. Bajo esta última interpretación, la razón se despoja de todo halo referido a la cantidad; en efecto, no es posible aquí pensar en que una cantidad pueda estar asociada a una secuencia ordenada de equimúltiplos de dos magnitudes, o en otras palabras, no se puede pensar en una entidad (*v.g.*, un número) que se asocie o ponga en correspondencia con una sucesión.

La interpretación de la teoría de la proporción del Libro V como una manifestación de la teoría del número real ha sido objeto de opinión y estudio de varios historiadores. Recapitulando las ideas de Corry (1994, pp. 7-13) podemos señalar que algunos historiadores de las matemáticas han argumentado a favor de la equivalencia entre la teoría de proporciones de Euclides y la de cortaduras de Dedekind. Uno de los argumentos consiste en considerar una razón o cociente de dos magnitudes homogéneas y asociarlo a una cortadura, para luego considerar dos cocientes de magnitudes que resulten iguales (proporcionales) y mostrar que las cortaduras asociadas son equivalentes. Otros historiadores de las matemáticas rechazan tal equivalencia bajo la idea de que la interpretación de los textos griegos debe hacerse en el marco de las restricciones en que estos fueron producidos. Una de tales restricciones se refiere al lenguaje; en este sentido no se acepta la traducción o formulación simbólica de las definiciones, ni las interpretaciones y deducciones que a partir de ellas se hacen. Otra de las restricciones obedece a la radical diferencia entre la idea de número en la obra griega y la del número del siglo XIX.[21] Atendiendo a lo anterior, se entiende que no pueda reconocerse en la teoría de las proporciones una teoría de números.

En la misma dirección, Fine (1917, pp. 75-76) discute la relación entre los irracionales y las razones de inconmensurables, afirmando que el argumento expresado por algunos historiadores a favor de reconocer que en efecto se puede asociar una razón y una pareja de números enteros a cada cortadura de Dedekind —y que con esto se podría entender que Euclides ya poseía una teoría del número real y, en consecuencia, Dedekind no habría *creado* el sistema de los números reales— está apoyado en un simbolismo algebraico y en unas nociones de número y de razón que no se corresponden con las ideas euclidianas respectivas.

Estas posturas contrastan con afirmaciones de estudiosos de la teoría de la proporción del Libro V. Por ejemplo, en Zubieta (1991) encontramos las siguientes oraciones: "Esta nota presenta la definición de número real atribuida a Dedekind como una interpretación de la definición de proporción de Eudoxio, tal como la enuncia Euclides al principio de su libro V" (p. 477) y "Esto significa que la definición de número real propuesta por Richard Dedekind es la misma que la presentada por Eudoxio" (p. 478). También Knorr (1992) señala que "Como es bien sabido, las definiciones euclidianas son un equivalente de la técnica de Dedekind (a través de 'cortes' en los racionales) para investigar la propiedad de los números reales" (p. 3). De manera análoga, Hill en al menos dos de sus documentos sobre los Libros V y VI de los *Elementos*, señaló que "La razón de una magnitud A a otra magnitud B de la misma clase es un número real, racional o irracional, determinado de la manera como se explican en lo que sigue. Éste se denota por el símbolo A:B" (Hill, 1912, p. 360) y que "Estos seis resultados suministran una regla para determinar si la razón (A:B) es mayor que, igual a, o menor que cualquier número racional; consecuentemente, en concordancia con la definición de Dedekind, la razón (A:B) es considerada como un número" (Hill, 1928, p. 44).

Antes de pasar a los comentarios sobre la Definición 7, nos parece interesante destacar que otro elemento interesante en la discusión de la Definición 5 lo constituye su expresión simbólica, pues existen varias versiones simbólicas de traducción de la esta. Por ejemplo Corry (1994, p. 3) propone la siguiente:

21 La idea griega reconoce a los números y las magnitudes como cantidades *no abstractas* asociadas respectivamente al contar y medir, en tanto que la idea moderna se refiere a la cantidad como abstracta y general.

“$a{:}b=c{:}d$, si para todo par de enteros *m, n,* se tiene $ma>nc$ (o $ma<nc$, o $ma=nc$) si y solo si $mb>nd$ (o $mb<nd$, o $mb=nd$) respectivamente”.

Entre tanto, Puertas (1994, p. 12) reseña dos versiones no equivalentes desde el punto de vista lógico; una que implica una *disyunción de conjunciones*, a saber:

“siendo *a, b, c, d* unas magnitudes del dominio de la teoría y *m* y *n* unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a{:}b{::}c{:}d$ si y solo si: o (($ma>nb$) y ($mc>nd$)) o (($ma=nb$) y ($mc=nd$)) o (($ma<nb$) y ($mc<nd$)).”

Y otra que es una *conjunción de condiciones (implicaciones*), la cual es la forma lógica de su aplicación en la proposición 11, a saber:

“siendo *a, b, c, d* unas magnitudes del dominio de la teoría y *m* y *n* unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a{:}b{::}c{:}d$ si y solo si: (si $ma>nb$, entonces $mc>nd$) y (si $ma=nb$, entonces $mc=nd$) y (si $ma<nb$, entonces $mc<nd$).”

A través de una notación particular de la reunión de los signos “=”, “<” y “>”, Filep (2003, p. 1) incorpora una forma simbólica equivalente a la citada inmediatamente antes, a saber:

“si *a, b, c, d* son magnitudes (de la misma clase), entonces $a{:}b=c{:}d$ si y solo si para cualesquiera enteros positivos (‘números’ en el uso griego) *n, m*, $ma \gtreqless nb \rightarrow mc \gtreqless nd$.”

Con respecto a lo planteado por los historiadores sobre la Definición 7, queremos resaltar que Knorr (1992, p. 8) establece que:

> *Uno de los defectos conocidos de la teoría euclidiana en el libro V es que no prueba que “no tener la misma razón” sea equivalente a “tener una razón mayor o menor razón”. Pero, de hecho, algunas veces supone esta afirmación (por ejemplo, en el libro V, proposiciones 9 y 10), por lo cual es preciso pensar que lo entendían tanto él como los geómetras que le precedieron.*

Esta aserción es importante para entender que hay un supuesto tácito en la teoría que provee a Euclides de una herramienta potente para la demostración de la proporcionalidad o desproporcionalidad de cuatro magnitudes; en otras palabras, si se supone que tener una razón mayor que otra equivale a afirmar que no es cierto que exista proporción entre tales magnitudes, se dispone de una herramienta para demostrar por reducción al absurdo.

También, nos llama la atención la manera en que Fine (1917, p. 73) parafrasea la Definición 7 [“Si (en la notación de la Definición 5) se pueden encontrar m y n tal que $mA>nB$ pero $mX\leq nY$, entonces se dice que A tiene una mayor razón a B que la que X tiene a Y], pues es una manera alterna de mirar la comparación entre las razones.

Propiedades

En el Libro V hay veinticinco proposiciones y dos porismas a través de las cuales se reseñan y demuestran propiedades de los diferentes objetos tratados. Al examinar el contenido de las proposiciones y atendiendo al dominio al que se refiere (*v.g.*, magnitudes o proporciones) —o más específicamente, a los dominios que relaciona (*v.g.*, magnitudes y magnitudes, magnitudes y proporciones, proporciones y magnitudes, proporciones y proporciones— se reconocen cinco grupos de proposiciones.

El primer grupo —compuesto por las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6— se refiere a las magnitudes y sus múltiplos (*i.e.*, magnitudes), pero no aluden a las razones ni a las proporciones. La expresión simbólica de tales proposiciones (*i.e.*, $[m(x_1+x_2+\ldots+x_n)=mx_1+mx_2+\ldots+mx_n]$, $[(m\Theta n)x=mx+nx]$, $[m(nx)=(mn)x]$, $[m(x-y)=mx-my]$, $[(m\Theta n)x=mx-nx]$) permite reconocer que, en lenguaje moderno, se están expresando propiedades relativas a la distributividad (proposiciones 1, 2, 5 y 6) y aparentemente a la asociatividad del producto (proposición 3)[22]; además, advertimos que se admite la suma de magnitudes, la suma y resta de múltiplos de magnitudes, la suma y resta de los números que representan las veces que se suma una misma magnitud y el producto de tales números, y que no hay referencia alguna al producto de magnitudes.[23] Pero para que estas operaciones se puedan aplicar se requiere, de una parte, que las magnitudes implicadas sean homogéneas y, de otra, que se considere que los números m, n no son exactamente los números tratados en los libros aritméticos de los *Elementos*, sino, podríamos decir, números de contar repeticiones de una misma magnitud.

El segundo grupo consta de las proposiciones 7 (sin su porisma 7’) y 8. Al observar los enunciados simbólicos de las propiedades en cuestión (*i.e.*, [Si

22 Para la propiedad expresada en el simbolismo $[m(nx)=(mn)x]$ hay que precisar que se están incorporando dos productos y que una notación más precisa podría ser $[m\odot(n\odot x)=(m\ n)\odot x]$ en la que el símbolo $\odot$ expresa el producto de un escalar por una magnitud (o simplemente la idea de múltiplo de una magnitud) y el símbolo $\bullet$ expresa el producto de dos “números de contar”. Bajo estas consideraciones no es muy evidente que la propiedad se refiera a la asociatividad del producto.

23 Esta última observación es amplia y vehementemente discutida por Corry (1994, pp. 2-5) en el apartado titulado *“La teoría de proporciones de Eudoxio”*.

$x=y$, entonces $x:z::y:z$ y $z:x::z:y$], [Si $x<y$, entonces $x:z \prec y:z$; $yz:x \succ z:y$]) reconocemos cómo se explicitan propiedades “de orden” de las razones a partir de propiedades “de orden” en las magnitudes o, en otras palabras, cómo la igualdad o desigualdad de las magnitudes se refleja o trasmite a algunas de las razones en que ellas están implicadas. La anterior afirmación debe matizarse con la observación que está implicada en la simbología empleada aquí, y que distingue, por ejemplo, el igual para las magnitudes (=) del hoy “igual” para las razones (::).

El tercer grupo está integrado por proposiciones que describen cómo relaciones entre razones determinan relaciones u operaciones entre magnitudes. Así, en este grupo están las proposiciones 9, 10, 14, 20, 21 y 25. Sus expresiones simbólicas respectivamente son: [Si $x:z::y:z$, entonces $x=y$. Y, si $z:x::z:y$, entonces $x=y$], [Si $x:z \prec y:z$, entonces $x<y$. Y si $z:x \prec z:y$, entonces $x>y$], [Si $w:x::y:z$ y $w \gtrless y$, entonces $x \gtrless z$], [Si $u:v::x:y$ y $v:w::y:z$ y $u \gtrless w$, entonces $x \gtrless z$], [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$ y $u \gtrless w$, entonces $x \gtrless z$], [Si $w:x::y:z$ y $w>x$ y $w>y$ y $x>z$ y $y>z$, entonces $w+z>x+y$]. De estas seis proposiciones, las últimas cuatro (*i.e.*, 14, 20, 21 y 25) tienen una condición específica en tanto que en la hipótesis no solo se incluyen condiciones sobre las razones, sino también sobre las magnitudes implicadas.

El cuarto grupo es el más numeroso; éste incluye propiedades de las proporciones o desproporciones, es decir de las razones en sí mismas. Allí, ubicamos las proposiciones 4, 7′, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 19′, 22, 23 y 24, cuyos enunciados simbólicos respectivamente son: [Si $w:x::y:z$, entonces $\forall m$ y n, $mw:nx::my:nz$], [Si $w:x::y:z$, entonces $x:w::z:y$], [Si $u:v::w:x$ y $w:x::y:z$, entonces $u:v::y:z$], [Si $x_1:y_1::x_2:y_2::\ldots::x_n:y_n$, entonces $(x_1+x_2+\ldots+x_n):(y_1+y_2+\ldots+y_n)::x_i:y_i$, $\forall i=1,\ldots,n$], [Si $u:v::w:x$ y $w:x \succ y:z$, entonces $u:v \succ y:z$], [Si $w:x::y:z$, entonces $w:y::x:z$], [Si $(w+x):x::(y+z):z$, entonces $w:x::y:z$], [Si $w:x::y:z$, entonces $(w+x):x::(y+z):z$], [Si $(w+x):(y+z)::w:y$, entonces $(w+x):(y+z)::x:z$], [Si $(u+v):(x+y)::v:y$, entonces $(u+v):(x+y)::u:x$], [Si $x_1:x_2::y_1:y_2$, $x_2:x_3::y_2:y_3$, ... , y $x_{n-1}:x_n::y_{n-1}:y_n$, entonces $x_1:x_n::y_1:y_n$], [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$, entonces $u:w::x:z$], [Si $u:v::w:x$ y $y:v::z:x$, entonces $(u+y):v::(w+z):x$]). Como se puede observar, las razones no son objeto de operación tales como la suma o el producto, aunque sí sus elementos (*i.e.*, las magnitudes), al menos para la suma y para, lo que hoy llamaríamos, el producto por un escalar; en oposición a esta afirmación, encontramos en Fine (1917, p. 75) la siguiente afirmación:

> *El Teorema 22 implica una definición del producto de las dos razones A:B y B:C, y el Teorema 24 una definición de la suma de dos razones A:C y B:C, en el mismo sentido que la Definición 5 implica una definición de razón en sí misma.*

El quinto grupo contiene únicamente a la proposición 15 ([$x:y::nx:ny$]), la cual no presenta estructura de condicional y tan solo muestra una proporción. Nos parece que esta forma de enunciación no permite ubicar esta proposición en alguno de los otros grupos.

Argumentos

En tanto ícono del estilo hipotético deductivo, la argumentación utilizada en los *Elementos* procede vía deductiva y esencialmente sintética. En las proposiciones del Libro V hemos identificado que la mayoría de sus demostraciones proceden a través del estilo directo, aunque también hemos reconocido proposiciones cuya demostración incorpora la reducción al absurdo; las demostraciones de las proposiciones 9, 10 y 18 incorporan esta última estrategia demostrativa.

Las proposiciones (y sus demostraciones) exhiben una estructura que ha sido descrita por los historiadores; en general ella contempla seis etapas, a saber: *prótasis, ectesis, diorismo, construcción, demostración y conclusión*.[24] En la versión de Puertas (1994), en el Libro V la prótasis aparece al inicio en letra cursiva y en esencia es el enunciado de la proposición; la *ectesis* es el párrafo siguiente a la *prótasis*, el cual casi siempre inicia con los términos "Sean" o "Pues sean". El tercer párrafo, que inicia con la palabra "Digo", es el *diorismo*. Luego del *diorismo* aparecen uno o varios párrafos en los cuales no siempre es evidente el reconocimiento de la *construcción* y la *demostración* como partes separadas, aunque creemos que en la etapa de la construcción, los diagramas o dibujos son una parte constitutiva medular. La *conclusión* normalmente es el último párrafo (excepto cuando hay porismas) y comienza con la expresión "Por consiguiente" e incorpora el texto de la *prótasis*.[25]

En las demostraciones de las proposiciones identificamos una forma especial de prueba, pues Euclides presenta una demostración para equimúltiplos específicos de las magnitudes (casi siempre el doble y el triple), y sin un discurso particular que propenda por la generalización

24 En este texto hemos usado los términos "proposición" y "demostración" en un sentido amplio para referirnos con el primero a lo que aquí se llama prótasis, en tanto que el segundo lo hemos usado para referirnos al conjunto de las otras cinco etapas citadas. En adelante seguiremos usando la misma convención y emplearemos la cursiva (o itálica) cuando hagamos referencia a una etapa específica.

25 Debemos reconocer que en la interpretación de cada *prótasis* y en la reescritura de la proposición en lenguaje simbólico moderno fue fundamental el texto de la *ectesis*, el del *diorismo* e incluso el de la *construcción* y *demostración*; sin éstos, varias veces nos sentimos ante un enunciado abstruso, sin mayor sentido.

a cualquier equimúltiplo, construye una argumentación válida para el caso general; en otras palabras, pareciera que muestra la validez de la *prótasis* para un caso particular que subsume todos los casos. Esta estrategia exhibe lo que algunos han dado en llamar un proceso de *instanciación*; en este, en la *ectesis* se reemplaza la forma de cuantificación universal enunciada en la *prótasis* por la designación de un objeto singular que representa la clase general, sobre el que se desarrolla la demostración.

Otra estrategia demostrativa llamativa que hemos identificado, es la empleada en parte de la demostración de la proposición 8, pues Euclides arguye con una especie de inducción sobre los múltiplos cuando expresa "tómese A doble de Δ y M triple (de Δ), y así **sucesivamente** hasta que el múltiplo tomado de Δ sea el primero mayor que K" (la negrilla es nuestra).

Ahora, siguiendo las directrices de Hill (1923, pp. 217-220), las proposiciones del Libro V se pueden clasificar en seis grupos. Cada uno de estos ha sido representado, en la Figura 3, por una columna de proposiciones (notadas P*i*).

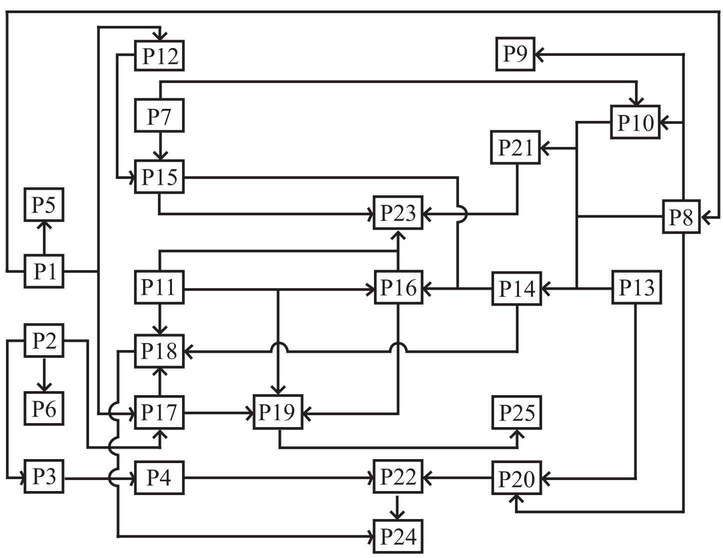


Figura 3

Antes de examinar los grupos definidos por Hill, debemos señalar que en la Figura 3 hemos procurado representar también la estructura deductiva del Libro V. En ésta hemos utilizado una flecha de conexión si una proposición interviene en la demostración de otra; así, por ejemplo, en la figura se puede leer que la proposición 15 (P15) es utilizada en las respectivas demostraciones de las proposiciones 16 y 23, en tanto que en la demostración de la proposición 15 intervienen las proposiciones 7 y 12. Esta representación, junto con la tabla de la Figura 4 (ver páginas siguientes), nos ha permitido reconocer un indicador de la *complejidad lógica* de cada proposición; de esta manera, es muy probable que una proposición tenga mayor complejidad lógica que otra, si en la primera intervienen un mayor número de proposiciones que en la segunda.

Así, a partir de la lectura de la última fila de la tabla, se advierte que es muy probable que la proposición 23 y las proposiciones 14, 16 18, 19, 20 y 21 tengan un nivel de complejidad lógica mayor que el de las demás, en tanto que en su demostración se involucran cuatro y tres proposiciones, respectivamente. De forma análoga se identifica que las proposiciones 1, 2, 7, 11 y 13 no incorporan proposición alguna en su demostración, lo que hace suponer que su complejidad lógica es baja. Por otra parte, leyendo la información de la última columna de la tabla, se tiene un indicio de identificación del nivel de intervención y potencia de las proposiciones en la deducción de resultados de la teoría; así, se observa que la proposición 8 es utilizada en cinco proposiciones, en tanto que las proposiciones 1 y 11, lo son en cuatro proposiciones y las proposiciones 5, 6, 9, 23, 24 y 25 no se implican en demostración alguna. Como veremos enseguida, estos y otros indicadores han sido utilizados parcialmente por estudiosos y críticos del Libro V para agrupar sus proposiciones.

Ahora sí, demos una mirada a los grupos definidos en el apartado V de la crítica de Hill al Libro V de los *Elementos* (1923, pp. 217-220).

El primer grupo contiene las proposiciones que versan sobre las magnitudes y sus equimúltiplos (no sobre sus razones), a saber: las proposiciones 1, 2, 3, 5 y 6. Hill (1923, p. 217) sostiene que sus demostraciones no dependen del Axioma de Arquímedes.[26] Además, señala que a este grupo es necesario añadir una proposición (que llamará *Proposición subsidiaria*), que si bien no es explicitada como tal, sí se reconoce en la demostración de la proposición 8 y que enuncia así: "Si A, B, C son magnitudes de la

26 En el capítulo 3, *El método de exhaución y la heurística*, de la Torre (1997, pp. 25-29) dirige su estudio hacia la *propiedad arquimediana;* luego de presentar y discutir sus diferentes formas enunciativas, expresa que su formulación contemporánea es "Dadas dos magnitudes homogéneas desiguales, siempre existe un múltiplo de la cantidad menor que supera a la mayor" (p. 26).

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13
P1					X			X				X	
P2			X			X							
P3				X									
P4													
P5													
P6													
P7										X			
P8									X	X			
P9													
P10													
P11													
P12													
P13													X
P14													
P15													
P16													
P17													
P18													
P19													
P20													
P21													
P22													
P23													
P24													
P25													
	0	0	1	1	1	1	0	1	1	2	0	1	0

Figura 4

P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	
			X									4
			X									3
												1
								X				1
												0
												0
	X											2
X						X	X					5
												0
X						X	X					3
		X		X	X				X			4
	X											1
						X	X					3
		X		X								2
		X							X			2
					X				X			2
				X	X							2
										X		1
											X	1
								X				1
									X			1
										X		1
												0
												0
												0
3	2	3	2	3	3	3	3	2	4	2	1	

misma clase, y A es mayor que B, entonces existen números *n* y *t* tales que *n*A>*t*C>*n*B".

El segundo grupo que identifica Hill se refiere a razones *desiguales* (o desproporciones) e incluye las proposiciones 8, 10 y 13. De éstas afirma que solo son usadas para demostrar propiedades de razones iguales (proporciones)[27] y critica entonces la insuficiencia del criterio para razones iguales (Definición 5) y la recurrencia al criterio de razones desiguales (Definición 7) para tal fin; además, sostiene que la *Proposición subsidiaria* (citada antes) desempeña un papel fundamental en el uso de estas proposiciones en las demostraciones en que están implicadas. Acerbi (2003) resalta que si bien el Libro V se refiere a la proporcionalidad, estas tres proposiciones aluden a la desproporcionalidad; comparativamente en número muy pocas respecto a la cantidad de proposiciones de dicho libro, pero fundamentales en la demostración de varias de las proposiciones de éste. El mismo autor afirma que la proposición 8 jugó un papel fundamental en los primeros desarrollos de la teoría general de proporciones y en los tratamientos preeuclidianos de esta teoría; particularmente, en su citado artículo de cerca de setenta páginas, señala la importancia del razonamiento en la demostración de esta proposición y manifiesta que en el Libro V no se da cuenta de dicha importancia. También, este autor señala que la proposición 8, a pesar de su enunciado intuitivo, tiene una gran importancia en la estructura deductiva del libro; ella tiene una de las demostraciones más extensas (e incompleta), a pesar de que solo alude a una proposición anterior y a pocas suposiciones. A través de ella se establece una condición suficiente para la desigualdad de razones (desproporcionalidad).

El tercer grupo reseñado por Hill está integrado por las proposiciones 4, 7, 7'[28], 11, 12, 15, 17 y 18, y señala que las pruebas de estas proposiciones (excepto la de la 18) dependen exclusivamente de la Definición 5 y de las proposiciones del primer grupo. Esta observación se contrasta y a la vez se matiza cuando se observa la segunda columna de proposiciones en la Figura 3; allí se evidencia que salvo la proposición 18, a las demás proposiciones solo llegan flechas de las proposiciones del grupo de la primera columna y de proposiciones de la segunda columna. Asimismo se hace evidente que estas proposiciones solo van a estar involucradas en proposiciones del mismo grupo o de los grupos 4 y 5.

El cuarto grupo está constituido por las proposiciones 16, 22, 23 y 24. En términos generales sus demostraciones proceden por lo que Hill (1923,

27 En Puertas (1994, p. 35) sí se usa la proposición 8 en la demostración de la proposición 10.
28 Este porisma por nosotros notado como 7', es reseñado por Hill (1923, p. 218) como Corolario de la proposición 4.

p. 218) llama el *tipo normal* y requieren del Axioma de Arquímedes. Hill (1923, pp. 217-218) sostiene que “Cada demostración es independiente de todas las demás propiedades de las razones iguales”, pero lo exhibido en las Figuras 3 y 4 nos pone en desacuerdo con tal planteamiento, en tanto que hemos reconocido que las proposiciones 4, 11 y 18 (que en la sección titulada *Propiedades* hemos incluido como proposiciones que exhiben propiedades de las proporciones) sí intervienen en las demostraciones de las proposiciones 22, 16 y 24, respectivamente.

El quinto grupo contiene únicamente a la proposición 19. Hill considera que su demostración no procede por el *tipo normal*, aunque advierte que podría ser considerada como una transformación de la hipótesis y conclusión de la proposición 17 con la ayuda de la proposición 16; en las Figuras 3 y 4 se observa cómo en la demostración de la proposición 19, en efecto intervienen las proposiciones 16 y 17, pero además la 11.

El sexto y último grupo considerado por Hill incluye las proposiciones 9, 14, 20, 21 y 25. En cierto sentido (salvo por la proposición 10) este grupo coincide con el que señalamos como tercer grupo en el apartado titulado *Propiedades* y, como era de esperarse, su caracterización es bastante similar. Para Hill (1923, p. 219) “El objeto de estas proposiciones no es demostrar la igualdad de dos razones, sino probar que ciertas magnitudes implicadas en las razones son iguales o desiguales, dependiendo del caso”.

A modo de cierre

El análisis de la teoría euclidiana de la proporción, expuesta en el Libro V de los *Elementos,* realizado hasta aquí bajo la óptica de las seis categorías de la *Teoría de significados sistémicos,* nos reporta dividendos importantes para la comprensión de tal teoría y de los objetos matemáticos implicados, dentro de los cuales, so pena de ser reduccionista o simplistas, nos atrevemos a destacar los siguientes seis, que se corresponden en su orden con las categorías de la TSS (situaciones problemas/tareas matemáticas, lenguaje matemático, procedimientos/procesos matemáticos, conceptos/definiciones, propiedades y argumentos):

- Esta teoría discurre sobre las razones y proporciones de magnitudes geométricas, sean éstas conmensurables o inconmensurables, es decir, de manera independiente de la idea de medida como asignación de un número. Además, el modo discursivo empleado responde a una manera específica de hacer y comunicar las matemáticas en el cual sobresale la actividad demostrativa.

- El estilo retórico que se usa para presentar la teoría impone retos considerables a las mentes condicionadas y acostumbradas al uso de un lenguaje simbólico (algebraico), pero a la vez ofrece la posibilidad de reconocer que el simbolismo puede no necesariamente ser un rasgo consustancial de las matemáticas. Adicionalmente, sorprende el papel que juegan la notación y los dibujos a favor de la comprensión de la operatividad y de la generalidad, aun cuando no exista notación para los conceptos centrales de la teoría *(i.e.*, razón y proporción).
- Los procedimientos matemáticos contemplados en la teoría se corresponden con operaciones entre magnitudes, pero no entre razones, de lo cual se sigue que para estas últimas no existe una operatividad explícita ni implícita; este argumento es central al intentar establecer diferencias entre esta teoría y la de los números reales, presentada cerca de veinte siglos después. Por su parte, los procesos matemáticos identificados en la presentación de la teoría y en las demostraciones (*v.g.*, instanciación, generalización) ilustran de manera evidente la manera de pensar, hacer y comunicar las matemáticas, más allá de la especificidad relativa a los objetos matemáticos de la teoría.
- Si bien la mayoría de las definiciones nomina a los objetos de la teoría a la vez que establece condiciones para los mismos y se esperaría que con ello se lograra la identificación y caracterización única de los objetos de la teoría, los historiadores de las matemáticas han generado diversas interpretaciones de éstas y, consecuentemente, diversos significados para tales objetos; esto se revela particularmente interesante para el caso de la razón, en tanto uno de los objetos centrales de la teoría.
- Una de las diversas clasificaciones que pueden construirse de las propiedades o teoremas de la teoría, evidencia que en ésta se hace un tratamiento de las magnitudes, y de las razones de magnitudes y de las proporciones, pero que éstos están interconectados por propiedades que relacionan el comportamiento de las magnitudes con el de las razones.
- Las estrategias de argumentación de las propiedades evidencian de manera bastante clara la estructura demostrativa empleada por Euclides y el estilo directo e indirecto de demostración. Asimismo, son un referente para identificar el modo en que la instanciación permite abordar la generalidad desde la particularidad. Por otra parte, se han logrado identificar proposiciones particularmente importantes para la construcción deductiva de la teoría, así como teoremas en cuya demostración se involucran numerosas proposiciones, lo cual conlleva una valoración particular de su complejidad lógica.

En este punto debería ser claro que el significado de la razón y la proporción —aún en una obra matemática tan bien concebida como el Libro V de los *Elementos*— no puede reducirse a sendas definiciones o párrafos. Precisamente, lo que se ha intentado mostrar en este documento es que el estudio profundo de cada uno de los componentes de tal obra ha generado discusión entre los historiadores y los acuerdos no abundan en la literatura histórica especializada. O dicho de otra manera, los significados de estos objetos matemáticos están dependiendo de las diversas interpretaciones y decisiones históricas que se adopten. Así, por ejemplo, si se asume una interpretación desde lo que Grattan-Guinness (2004) llama *herencia* de la teoría de las proporciones y se acepta su traducción al lenguaje algebraico moderno, se reconocerá una teoría bastante cercana a la de las cortaduras de Dedekind e incluso se identificará un álgebra de las razones donde la proporción es una igualdad entre éstas o una relación de equivalencia; si se asume una postura desde lo que Grattan-Guinness (2004) llama la *historia*, se reconocerá una teoría generalizada de las magnitudes geométricas en la que la idea matemática de razón solo se puede entender en relación con la idea de proporción y desproporción, y, en cierto sentido, se asume la primera como una relación cuantitativa no numérica entre las magnitudes así como la proporción y la desproporción como relaciones de comparación entre las razones.

No obstante esta ambigüedad semántica, seguramente no muy atractiva para matemáticos y profesores de matemáticas, consideramos que precisamente conocer tal teoría de la proporción alimenta la comprensión que de los objetos matemáticos razón y proporción se debe lograr para adelantar tanto la actividad de docencia de las matemáticas, como la investigación didáctica relacionada con dichos objetos.

Referencias bibliográficas

Acerbi, F. (2003). Drowning by multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with special emphasis on prop. 8. *Archive forHistory of Exact Sciences* 57, 175-242.

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas*, 10(1), 1-24.

De la Torre, A. (1997). *Anotaciones a una lectura de Arquímedes*. Medellín: Universidad de Antioquia.

Filep, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 19, 167-174.

Fine, H. (1917). Ratio, proportion and measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics*, *Second Series*, 19(1), 70-76.

Gardies, J. L. (1997). *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*. París: Librairie Philosophique J. Vrin.

_____________ (2004). *Du mode d'existence des objects de la mathématique.* París: Librairie Philosophique J. Vrin.

Godino, J. D. (1996). *Mathematical concepts, their meaning, and understanding*. Paper presented at the Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education Valencia.

____________ (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2-3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

_____________ (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D.; Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D. y Recio, A. (1998). *A semiotic model for analysing the relationships between thought, language and context in mathematics education*. Paper presented at the Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, South Africa.

Grattan-Guinnes, I. (2004). History or Heritage? An important distinction in mathematics and for mathematics education. *American Mathematical Monthly, 111*(1), 1-12.

______________ (1996). Numbers, magnitudes, ratios, and proportions in Euclid's Elements: How did he handle them? *Historia Mathematica*, *23*(4), 355-375.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

______________ (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en los textos escolares de matemáticas. *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, 7(1), 3-42.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements* (Second ed.). New York: Dover.

Hill, M. J. M. (1912). Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette*, *6*(100), 360-368.

_____________ (1923). A critical account of Euclid's exposition of the theory of Proportion in the Fifth Book of the Elements. *The Mathematical Gazette, 11*(162), 213-220.

_____________ (1928). The logical eye and the mathematical eye. Their outlook on Euclid's theory of Proportion. Presidential Address to the Mathematical Association, 1928. *The Mathematical Gazette, 14*(193), 36-56.

Klein, J. (1968). *Greek mathematical thought and the origin of algebra* (E. Brann, Trans.). New York: Dover Publications, Inc.

Knorr, W. (1992). De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas*, 8, 1-12.

Levi, B. (2003). *Leyendo a Euclides* (Tercera ed.). Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Puertas, M. L. (1991). *Euclides. Elementos. Libros I-IV.* Madrid: Editorial Gredos S.A.

___________ (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Rusnock, P. y Thagard, P. (1995). Strategies for conceptual change: Ratio and proportion in classical Greek mathematics. *Studies In History and Philosophy of Science Part A*, *26*(1), 107-131.

Zubieta, F. (1991). La definición de proporción de Eudoxio. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 7*, 477-486.

Apéndice

Definiciones y proposiciones del Libro V de los Elementos[29]

Definiciones

1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.
2. Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.
3. Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.
4. Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra.
5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.
6. Llámense proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.
7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.
8. Una proporción entre tres términos es la menor posible.
9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que [guarda] con la segunda.
10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que [guarda] con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.
11. Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.
12. Una razón *por alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.
13. Una razón *por inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.
14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto

29 Tomado de Puertas (1994); sin embargo, aún bajo el riesgo del anacronismo pero con la intención de hacer más comprensivos los enunciados, en la mayoría de las proposiciones hemos incluido al final de cada una y entre paréntesis, una versión simbólica moderna, lo cual no significa que consideremos que en los *Elementos* había ya un álgebra geométrica; una discusión interesante de la existencia o no de dicha álgebra se encuentra en Grattan-Guinness (1996). Nótese que hemos empleado símbolos diferentes para indicar las relaciones u operaciones entre magnitudes (=, <, >, :, +, -), que para indicar las relaciones entre razones ($\prec$, $\succ$, ::), o para indicar operaciones entre números ($\oplus$, $\ominus$).

con el consecuente como una sola [magnitud] en relación con el propio consecuente.

15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.
16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.
17. Una razón *por igualdad* se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que tomadas de dos en dos guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.
18. Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente, y como el consecuentes es a alguna otra [magnitud] —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— alguna otra [magnitud] es al antecedente.

Proposiciones

- Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas. [$m(x_1+x_2+\ldots+xn)=mx_1+mx_2+\ldots+mx_n$]

1. Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta. [$(m\Theta n)x=mx+nx$]
2. Si una primera [magnitud] es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos [magnitudes] tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta. [$m(nx)=(mn)x$]
3. Si una primera [magnitud] guarda la misma razón con una segunda, que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente. [Si $w:x::y:z$, entonces $\forall m$ y n, $mw:nx::my:nz$]
4. Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una [magnitud] quitada [a la primera] lo es de otra quitada [a la segunda], la [magnitud] restante [de la primera] será también el mismo múltiplo de la [magnitud] restante [de la

segunda] que la [magnitud] entera de la [magnitud] entera. [$m(x\text{-}y)=mx\text{-}my$]

5. Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas [magnitudes] quitadas [de ellas] son equimúltiplos de estas [dos segundas], las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas. [$(m\ominus n)x=mx\text{-}nx$]
6. Las [magnitudes] iguales guardan la misma razón con una misma [magnitud] y la misma [magnitud] guarda la misma razón con las [magnitudes] iguales. [Si $x=y$, entonces $x:z::y:z$ y $z:x::z:y$]

• 7′. *Porisma*: Si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión. [Si$w:x::y:z$, entonces $x:w::z:y$]

7. De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma [magnitud] una razón mayor que la menor, y la misma [magnitud] guarda con la menor una razón mayor que con la mayor. [Si $x<y$, entonces $x:z\prec y:z$; y $z:x\succ z:y$
8. Las [magnitudes] que guardan con una misma [magnitud] la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma [magnitud] guarda la misma razón, son iguales. [Si $x:z::y:z$, entonces $x=y$. Y, si $z:x::z:y$, entonces $x=y$]
9. De las [magnitudes] que guardan razón con una misma [magnitud], la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma [magnitud] guarda una razón mayor, es menor. [Si $x:z\prec y:z$, entonces $x<y$. Y si $z:x\prec z:y$, entonces $x>y$]
10. Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí. [Si $u:v::w:x$ y $w:x::y:z$, entonces $u:v::y:z$]
11. Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes. [Si $x_1:y_1::x_2:y_2::\ldots::x_n:y_n$, entonces $(x_1+x_2+\ldots+x_n):(y_1+y_2+\ldots+y_n)::xi:yi,\ \forall i=1,\ldots,n$]
12. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con una sexta. [Si $u:v::w:x$ y $w:x\succ y:z$, entonces $u:v\succ y:z$]
13. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si menor, menor. [Si $w:x::y:z$ y $w\gtreqless y$, entonces $x\gtreqless z$]
14. Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos, tomados en el orden correspondiente. [$x:y::nx:ny$]
15. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales. [Si $w:x::y:z$, entonces $w:y::x:z$]
16. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales. [Si $(w+x):x::(y+z):z$, entonces $w:x::y:z$]

17. Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales. [Si $w:x::y:z$, entonces $(w+x):x::(y+z):z$]

18. Si como un todo es a otro todo, así es una [parte] quitada [de uno] a una [parte] quitada [de otro], la [parte] restante será también a la [parte] restante como el todo es al todo. [Si $(w+x):(y+z)::w:y$, entonces $(w+x):(y+z)::x:z$]

• 19′. *Porisma*: Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales. [Si $(u+v):(x+y)::v:y$, entonces $(u+v):(x+y)::u:x$]

19. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor. [Si $u:v::x:y$ y $v:w::y:z$ y $u \gtreqless w$, entonces $x \gtreqless z$]

20. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor. [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$ y $u \gtreqless w$, entonces $x \gtreqless z$]

21. Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón. [Si $x_1:x_2::y_1:y_2$, $x_2:x_3::y_2:y_3$, ... , y $x_{n-1}:x_n::y_{n-1}:y_n$, entonces $x_1:x_n::y_1:y_n$]

22. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón. [Si $u:v::y:z$ y $v:w::x:y$, entonces $u:w::x:z$]

23. Si una primera [magnitud] guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta. [Si $u:v::w:x$ y $y:v::z:x$, entonces $(u+y):v::(w+z):x$]

24. Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor [juntas] son mayores que las dos restantes. [Si $w:x::y:z$ y $w>x$ y $w>y$ y $x>z$ y $y>z$, entonces $w+z>x+y$]

Gloria Inés Neira Sanabria

Es candidata a Doctora del Doctorado Interinstitucional en Educación sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas, con el proyecto doctoral *Obstáculos epistemológicos en la ruptura algebra cálculo*. También es Magister en ciencias matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia.

Es Especialista en Edumática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Se encuentra adscrita al énfasis de matemáticas del DIE-UD.

Actualmente se desempeña como docente en la Facultad de ingeniería de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Pedro Javier Rojas Garzón

Es Doctorando del Doctorado Interinstitucional en Educación sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas, adscrito al énfasis de Matemáticas. También es Magister en ciencias matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia. Licenciado en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander-UIS.

Actualmente se desempeña como profesor titular de la Facultad de ciencias y educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Jaime Humberto Romero Cruz

Es Doctorando del Doctorado Interinstitucional en Educación sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas, adscrito al énfasis de matemáticas. También es Especialista en educación matemática de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Es Matemático de la Universidad Nacional de Colombia.

Actualmente se desempeña como profesor asistente de la Facultad de ciencias de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Jorge Orlando Lurduy Ortegón

Es profesor de tiempo completo de la Facultad de ciencias y educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Es Doctorando del Doctorado en Educación sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas, adscrito al énfasis de matemáticas. Magister en Desarrollo Educativo y Social de la Universidad Pedagógica Nacional-UPN.

Actualmente pertenece al grupo de investigación GIIPLyM, reconocido por Colciencias.

Edgar Alberto Guacaneme Suárez

Es Doctorando del Doctorado en Educación sede Universidad del Valle, adscrito al énfasis de matemáticas. También es Magister en Educación de la Universidad del Valle.

Entre sus líneas de investigación encontramos *Educación del profesor de Matemáticas e historia de las matemáticas*.

Actualmente es profesor adscrito de la Universidad Pedagógica Nacional-UPN.

Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático / Edgar Alberto
Guacaneme Suárez... [*et al*.]. -- Bogotá: Universidad Distrital
Francisco José de Caldas, 2012.
135 p.; cm.
ISBN 978-958-8782-21-8
1. Matemáticas - Historia 2. Cálculo 3. Teoría de los números
4. Filosofía de las matemáticas I. Guacaneme Suárez, Edgar Alberto.
519 cd 21 ed.
A1359030

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Editorial
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS
FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN UNIVERSIDAD DISTRITAL

El presente volumen es el primero de la nueva Colección de Pedagogía y Didáctica del Énfasis en Educación Matemática del Doctorado Interinstitucional en Educación DIE de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, la Universidad Pedagógica Nacional y la Universidad del Valle. Esta colección se inserta en una serie editorial que cobija distintas colecciones por énfasis. La colección que ahora se inicia con este volumen reúne bajo el sugerente título Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático cuatro trabajos teóricos de participantes avanzados del doctorado, que prepararon durante su actividad académica como herramientas epistemológicas y metodológicas para su actual proyecto doctoral y como aporte para otros proyectos de sus grupos de investigación y de los demás doctorandos del programa DIE en sus sedes de Cali y Bogotá. Desde la epistemología, ¿hay un pensamiento algebraico distinto del aritmético, o el álgebra sólo es otro lenguaje más ref nado para la aritmética? ¿Cómo se compara esta transición de la aritmética al álgebra con otra que la seguiría dos o tres años más tarde desde el álgebra al cálculo diferencial e integral? ¿Cómo son las relaciones entre pensamiento y lenguaje desde el punto de vista de Jean Piaget y desde el de Lev Vygotsky? ¿Cómo utilizar estas herramientas teóricas y las del Enfoque Onto-Semiótico para hacer análisis didácticos más f nos de los procesos de estudio de las matemáticas en todos los niveles de la educación? ¿Cómo ensayar esas herramientas para hacer un análisis histórico-epistemológico del desarrollo de las nociones de razón y proporción en la síntesis que propuso Euclides en sus Elementos, después de siglos de matemáticas griegas?

Hacia el futuro, esta colección recogerá diversas producciones teóricas e investigativas de profesores y profesoras del Programa DIE, de candidatos y otros participantes avanzados del mismo doctorado DIE y de otros intelectuales relacionados con él que aporten nuevas luces al estudio de la pedagogía y la didáctica de las matemáticas, también conocidas como Educación Matemática o Matemática Educativa. El lector podrá apreciar en este primer volumen la riqueza que empieza a acumularse en esta naciente colección y podrá abrigar la fundada esperanza de que continúe con numerosos volúmenes de la misma f nura y calidad del que tiene entre sus manos.

Carlos E. Vasco