Experiencia interna y quehacer matemático

Carlos Eduardo Vasco Uribe[1]

Introducción

El propósito de este trabajo es doble: considerar al menos tres tipos de experiencia interna relacionados con las reconstrucciones mentales espacio-temporales: geométrica, aritmética y lógica, y argumentar por qué parecen ser estos los mínimos necesarios (y tal vez suficientes) para iniciar y apoyar el avance del trabajo matemático de niños, niñas y jóvenes, al menos en las ramas de las matemáticas que se han llamado "aritmética", "geometría" y "lógica matemática".

Como preámbulo, diré qué considero *experiencia* y qué entiendo por *quehacer matemático*. Afirmo, en primer lugar, que no puede darse una definición precisa de experiencia por ser imposible aclararle el sentido del vocablo experiencia a quien no la haya tenido, e innecesario hacerlo a quien sí la haya experimentado repetida y conscientemente. En segundo lugar, aunque sea imposible definir el sustantivo *experiencia* o el verbo *experimentar,* sí podemos describir la experiencia como una *vivencia* interior, personal e intransferible, de una situación, fenómeno o proceso cualquiera de nuestro transcurrir espacio-temporal. Por supuesto que a quien me pregunte de nuevo qué es *vivencia* tendría que decirle que es una experiencia interna.

Para salir de este círculo, podríamos hablar del verbo *experimentar* como más apropiado para referirnos al proceso de *vivir* –o mejor, de *vivenciar*– las experiencias o vivencias personales a las que me refiero, y decir que estas son recortes mentales conscientes de ese proceso continuado que se experimenta, vive o vivencia. Es verdad que, en español, el nombre sustantivo derivado del verbo *experimentar –experimento*– parece más apropiado para procesos diseñados con el fin de confirmar o refutar conjeturas o hipótesis previamente formuladas; pero eso nos aclara que no nos estamos refiriendo a experimentos científicos, sino a la categoría más general de experiencia.

1 Licenciado en filosofía, magíster en física y doctor en matemáticas; es profesor emérito de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. Actualmente es profesor especial en el programa de Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá y la Universidad del Valle en Cali, Colombia. En este doctorado dirige la línea de didáctica de las matemáticas. Es profesor del programa de Doctorado en Ciencias Sociales, Niñez y Juventud de la Universidad de Manizales y Cinde, en Manizales, Colombia, en donde colabora con la línea de desarrollo cognitivo-emotivo-motor de niños, niñas y jóvenes.

En los adjetivos afines se notan también ciertas derivas lingüísticas: *experiencial* sería el adjetivo más cercano a la idea de experiencia que tengo en mente (comparar con *vivencial*), mientras que *experimentada* parece referirse más a la persona que tiene ya muchas experiencias en su pasado, aunque también se aplica al fenómeno que ha pasado por el proceso interior al que me refiero (comparar con *fenómeno vivenciado*) y *experimental* se refiere más a *experimento* que a *experiencia*.

Para mí, el *quehacer matemático* o la actividad de hacer matemáticas es construir, manipular, estudiar, refinar, admirar y disfrutar los modelos mentales simplificados que nuestro cerebro puede crear a partir de cualquier tipo de procesos y sistemas, sean estos empíricos o imaginados y, paralela e interactivamente, formular, estudiar, refinar y desarrollar teorías apropiadas para dichos modelos.

Construir un modelo mental y formular una teoría apropiada para él requiere no solo identificar en cada modelo los distintos tipos o universos de componentes y los componentes específicos que se distinguen en cada tipo o universo, sino que también requiere tres esfuerzos más: identificar las propiedades y relaciones que pueden establecerse acerca de los componentes; identificar las transformaciones, operaciones o acciones que pueden realizarse sobre ellos y, finalmente, precisar y formular explícitamente las restricciones, conexiones internas, propiedades y correspondencias entre componentes, relaciones y transformaciones. Hablo del *sustrato* del modelo (sus universos de componentes), de la *dinámica* interna del modelo (su juego de operaciones y transformaciones), de la *estructura* interna del modelo (su red de relaciones) y de la *teoría* del modelo para cada uno de esos cuatro aspectos (Vasco *et al*., 1995, pp. 408-424). Diremos que la teoría se *interpreta* en el modelo y que el modelo *cumple* o *satisface* la teoría.

La actividad de construir y refinar los modelos corresponde al procesamiento mental llamado "análogo", y la formulación de las teorías, al llamado "proposicional" o "digital", en el sentido de los cuatro formatos de representación mental: Análogo, Proposicional, Esquemático y Asociativo del modelo SPAARS de *PoweryDalgleish* (1997).[2]

Al considerar el quehacer matemático como el juego con modelos y sus teorías, yo diría, por lo tanto, que hacer matemáticas se parece más a practicar las artes que las ciencias naturales y, si tuviera que escoger entre las artes, diría que hacer matemáticas se parece más a la composición en la

2 Traduzco así los cuatro formatos que estos autores distinguen en su modelo SPAARS: *Schematic, Propositional, Analogical,* and *Associative Representation Systems* (Power y Dalgleish, 1997).

música y al juego de variaciones sobre un tema musical que a la práctica de las artes plásticas tradicionales, como la pintura, la escultura y la arquitectura, aunque también es muy cercana a las artes contemporáneas posibilitadas por las nuevas tecnologías, como el arte multimedial. La práctica de las artes plásticas se parece más a la actividad de construir modelos mentales, vista desde esa perspectiva, pero el juego interno de modelos y teorías se asemeja más a la actividad creativa musical.

Es verdad que uno de los propósitos de las ciencias naturales –y al menos de algunas de las ciencias sociales y humanas– es también la producción de modelos y teorías; pero a diferencia de las matemáticas, en esas ciencias cada modelo permite derivar de su teoría ciertas conjeturas o predicciones que se contrastan contra la experiencia empírica que tenemos acerca de los procesos naturales o sociales que pretendemos modelar, ya sea a través de experiencias vividas en su flujo normal o a través de experiencias diseñadas y manipuladas para producir reacciones (experimentos). Si nuestro modelo y su teoría no se comportan lo suficientemente bien como para simular, explicar y predecir (o al menos retrodecir) los procesos que se querían modelar con su ayuda, hay que descartarlos. La experiencia empírica es la que rige las ciencias naturales y sociales, ya sea la experiencia cotidiana y no planeada que llamamos "natural" (por más que sea muy cultural), o la experiencia más refinada y cuidadosamente planeada que llamamos "experimento". Por coherente y elegante que sea el modelo y por refinada que sea su teoría, si no soportan la contrastación con la experiencia empírica, no sobreviven: peor para el modelo y la teoría. En cambio, en matemáticas, ese contraste con la experiencia empírica no es necesario. Si la realidad no se ajusta al modelo matemático y a su teoría, peor para la realidad.

Considero, por supuesto, que también se puede experimentar en matemáticas. En un trabajo temprano que realicé sobre el nacimiento de la teoría de grafos, señalé la importancia de recorrer con la punta de un lápiz, física o mentalmente, los siguientes dibujos (Figura 1, tomada de Vasco, 1978):

Trate de recorrer mentalmente los siguientes dibujos sin levantar el lápiz

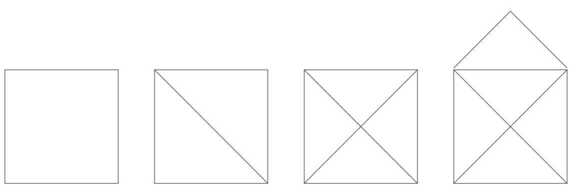

Figura 1
Gráficos para experimentar en matemáticas

Este tipo de experimentación empírica en matemáticas suele ser crucial para la construcción inicial, para el posterior refinamiento de un modelo mental y para la construcción paralela de una teoría apropiada. Pero una vez desarrollado un modelo lo suficientemente depurado para que mantenga su propia consistencia y permita formular una teoría apropiada para el mismo, ya no importan ni la experiencia ni la experimentación empíricas como criterios de supervivencia ni de calidad del modelo y su teoría. La palabra *consistencia* en la frase anterior fue escogida intencionalmente para enfatizar que la existencia de un modelo matemático requiere solo su consistencia, así sea en el curioso caso de un modelo para la lógica paraconsistente (Bobenrieth, 1996). Una selección más precisa de las palabras aconsejaría utilizar *coherencia* para los modelos y *consistencia* para las teorías. Así, el metateorema usual de la teoría de modelos diría que una teoría es consistente si puede interpretarse al menos en un modelo coherente.

Es claro que el creador de la teoría de grafos, Leonardo Euler, pretendía inicialmente construir un modelo simplificado y una teoría apropiada que le permitiera resolver el problema de si era posible o no recorrer en una caminata todos los puentes de Königsberg sin repetir ninguno. Si el modelo y la teoría resultantes no hubieran servido para distinguir el tercer dibujo de los demás de la Figura 1, es claro que no hubieran cumplido este propósito; pero una vez construido ese modelo con su teoría, aun en el caso de que Euler hubiera fracasado en el intento de resolver el problema inicial, dichosmodelo y teoría podrían haberse estudiado, refinado y analizado por sus propios méritos sin obstáculo ninguno; tal vez más tarde podrían haber servido para modelar otras situaciones.

No faltan matemáticos que se precian de estudiar modelos y teorías que no sirven para nada imaginable. Pero sus pretensiones de pureza están condenadas a que si sus modelos y teorías son lo suficientemente refinados y creativos, tarde o temprano servirán muchísimo, tal vez para lo que menos se habían imaginado sus inventores.

Un ejemplo geométrico

Supongamos que estamos desarrollando un modelo y una teoría para modelar el arte de dibujar figuras en una hoja de papel extendida sobre una mesa plana, con toques de tinta o lápiz que llamamos “puntos”, con rayas rectas que trazamos con una regla, y con circunferencias o arcos de ellas que trazamos con un compás, a las que llamamos “líneas”, entre las cuales distinguimos entre “rectas” y “curvas”.

A partir de nuestra experiencia empírica cotidiana podemos estar perfectamente seguros de que si los puntos no tienen ciertas mínimas dimensiones, no los podemos ver. En nuestro modelo mental son, pues, más bien pequeñas regiones, discos o figuras planas regulares o irregulares pero de dimensiones macroscópicas. Eso no obsta para que postulemos *en la teoría* que los puntos de nuestro modelo mental simplificado no tienen dimensiones.

Nuestra experiencia empírica nos dice que trazar una raya recta con una regla y un lápiz no es tan fácil como parece: se nos puede deslizar un poco la regla si con el lápiz hacemos mucha presión lateral, o el lápiz puede separarse de ella si no aplicamos la suficiente presión contra el borde. También sabemos por experiencia que esa raya tiene que ser lo suficientemente ancha para poderla ver, y por ello es más bien una banda de grafito con bordes aproximadamente paralelos que una recta matemática, sea ello lo que fuere. En el modelo mental son, pues, bandas estrechas de bordes paralelos. Pero al formular la teoría podemos postular que las rayas de nuestro modelo mental simplificado no tienen anchura ninguna, y que sin embargo son visibles al imaginario ojo de nuestra mente; además, podemos postular que son perfectamente rectas, aunque no sepamos explicar precisamente qué quiere decir eso. En caso de que algunos estudiantes inquietos desafíen nuestras estipulaciones, nos vemos obligados a recurrir a nuestra autoridad magisterial omnímoda para obligarlos a agachar la cabeza y aceptar dichas postulaciones teóricas, aunque no las entiendan.

Una vez que comprobamos por experiencia que dos puntos diferentes marcados sobre el papel nos permiten situar apropiadamente la regla para trazar un segmento de recta entre ellos, podemos suponer que entre cualquier pareja de puntos marcados en nuestro modelo mental del papel (la superficie de una inmensa hoja perfectamente lisa y sin combas ni arrugas que llamamos “plano”), podemos siempre trazar un único segmento de recta sobre ese plano, y podemos decir que esa afirmación es nuestro primer postulado del modelo geométrico simplificado.

Eso no excluye que, más tarde, podamos postular que en otros modelos sea posible trazar dos o más segmentos entre dos puntos; ni tampoco que podamos postular que haya parejas de puntos mutuamente invisibles entre los cuales no podamos trazar ningún segmento; ni tampoco es necesario postular que en todos los modelos siempre podamos prolongar un segmento más allá de los puntos que tiene como extremos; ni estamos seguros de que esas prolongaciones, aun en el caso de que sí existan, sean únicas. Pensemos por ejemplo que los puntos están marcados en dos bordes distintos de una hoja cuadrada, o al menos rectangular, como en el caso de la geometría del origami; una vez hayamos marcado entre esos dos puntos un nuevo segmento por medio de un doblez, ¿cómo prolongarlo?

Podríamos, pues, tener geometrías no-euclidianas porque no cumplen el primer postulado con respecto a la unicidad del segmento de recta entre dos puntos dados, o con respecto a la existencia del mismo, o con respecto a ambas cosas; o porque no cumplen el segundo postulado con respecto a la prolongabilidad de todo segmento de recta, de nuevo también porque tal vez no existan esas prolongaciones, o porque tal vez no se pueda garantizar su unicidad, o ninguna de las dos cosas. Y todavía no hemos enunciado, ni estudiado, ni modificado, ni mucho menos negado el tercer postulado sobre las circunferencias, ni el cuarto sobre los ángulos rectos, ni mucho menos el quinto postulado de Euclides sobre la existencia de parejas de rectas no secantes o sobre las secantes a parejas de rectas.

Una vez hayamos fijado mentalmente en la imaginación y en el dibujo –así como en el lenguaje mental interno y en el lenguaje social externo– ese modelo que acabamos de crear con una teoría adecuada al mismo, ya sea que ese modelo y esa teoría nos sirvan o no para modelar la situación que nos ofreció el incentivo o la disculpa para construirlos, podemos, sin más, empezar a estudiarlos, manipularlos, restringirlos, extenderlos, desarrollarlos, admirarlos y disfrutarlos. Ya no importa la experiencia empírica para continuar el juego. Ahora se trata más bien del disfrute de una experiencia interna muy cercana a la experiencia estética, pero reglada y disciplinada por los sucesivos refinamientos de la teoría.

La experiencia interna

La pregunta es si no estamos vivenciando aquí un nuevo tipo de experiencia, distinta de la experiencia empírica, originada sí en nuestras experiencias empíricas, pero que ni coincide ni se agota con ellas, que podríamos llamar "experiencia interna". Es claro que con ello no quiero decir que la experiencia empírica no sea también interna, ni que sea externa a la conciencia; más bien quiero insistir en que la experiencia empírica se deriva de las sensaciones y percepciones que parecen provenir de fuera de la mente, mientras que la materia prima de la experiencia a la que me refiero parece provenir de sus propios contenidos internos en el pasado y el presente. Podríamos, pues, decir que la experiencia empírica es una experiencia interna sobre actividades, materiales y estímulos externos, y aquella a la que quiero referirme es una experiencia interna sobre actividades, materiales, y estímulos internos; habría que hablar más precisamente de una experiencia externo-interna y de otra interno-interna, pero para abreviar, me referiré a la primera solo como "experiencia empírica" y a la segunda, como "experiencia interna".

Esa experiencia interna es directamente accesible a nuestra conciencia, a ese –a la vez real e imaginario– ojo de nuestra mente; ella es la que nos posibilita empezar a hacer matemáticas, y al mismo tiempo saber que estamos haciendo matemáticas. Esa experiencia interna es la que nos permite incluso diseñar experimentos mentales, repetirlos controladamente en la experiencia interna o en la empírica, y registrar y analizar sus resultados.

Para Kant, la experiencia es sólo la experiencia empírica obtenida por los sentidos. En la edición A (1781) de la *Crítica de la razón pura*, dice que "la experiencia es sin duda el primer producto que elabora nuestro entendimiento con la materia bruta de las percepciones sensibles".[3] En ello, Kant es heredero del empirismo inglés, su principal interlocutor después de que Hume lo ayudó a despertar de su sueño dogmático y llegar a su revolución copernicana respecto al papel activo de los dinamismos *a priori* del sujeto. Desde la terminología kantiana no parece apropiado decir que tenemos experiencia interna de esos dinamismos de nuestra mente, sino solo experiencia empírica de fenómenos aprehensibles por nuestra sensibilidad.

Pero más allá de Kant, podemos preguntarnos si hay o no una experiencia interna distinguible de la experiencia empírica, una vivencia de cierta actividad del pensamiento que nos permite una acción mental regulada, imaginable y al menos parcialmente comunicable por gestos, dibujos, palabras y símbolos, y que nos posibilita hacer algún tipo de experimentación mental y una repetición controlada de esos experimentos. Para mí, esa sería precisamente la experiencia interna que nos ayudaría a hacer geometría.

Una primera tesis de este trabajo es que, al menos en el comienzo de la geometría, sí se da esa experiencia interna, y que ella se basa ante todo en la experiencia empírica de nuestros movimientos en el espacio-tiempo, pero que no se agota en ella, sino que surge como diferente de ella en su reconstrucción y simplificación en nuestra memoria, imaginación y entendimiento.

Acepto, pues, que esta experiencia interna comienza en la experiencia corporal-kinestésica como experiencia empírica, proveniente de las lecturas neuronales y musculares propioceptivas que registran distintos movimientos nuestros, así sea los oculares únicamente. Estaría en esto de acuerdo con ciertos planteamientos de Papert (1980) y de Lakoffy Núñez (1999)

3 Traducción al castellano tomada de la edición hecha por Francisco Larroyo; ver Kant, 1972, p. 29, nota 2.

sobre el origen de las matemáticas, sobre los que volveré más adelante. La experiencia interna también podría derivarse de la experiencia visual, si el aparato visual está intacto; pero no podría limitarse a esa fuente visual, pues un ciego de nacimiento puede también tener esa experiencia interna que le permita iniciar la geometría y avanzar en ella. Afirmo, además, que una vez depurada esa experiencia empírica inicial –visual o no– tal como la utilizamos, por ejemplo, para hacer geometría, da lugar a una experiencia interna no dependiente de la experiencia corporal-kinestésica empírica ni de la visual, sino de sus reconstrucciones y simplificaciones en nuestro cerebro.

Esa independencia se puede constatar repetidamente en el trabajo mental sobre los modelos simplificados que analizamos y manipulamos en nuestra experiencia interna, los cuales, una vez llegan a un cierto nivel de estabilización y coherencia que nos permiten formularles teorías apropiadas, nos hacen experimentar no solo como innecesaria sino como irrelevante la contrastación ulterior con la experiencia empírica.

¿No es esa experiencia interna, precisamente, la experiencia matemática de la que escriben tan elocuentemente Davis y Hersch (1981) en su libro con ese mismo título? ¿No es ella la misma de la que tratan, entre muchas otras obras, la clásica conferencia de Poincaré,"La invención matemática" (Poincaré, 1908) y su no menos famoso comentario en el libro La psicología de la invención en el campo de las matemáticas de Hadamard (1945)?

La experiencia interna en el comienzo de la geometría

Volvamos al dibujo en el papel y a los distintos tipos de experiencia de los que somos conscientes al marcar los puntos, trazar los segmentos y dibujar las circunferencias. No se trata tanto de la experiencia empírica de observar el resultado de trazar el segmento con la regla, o el arco de circunferencia dibujado con el compás, sino de la experiencia dinámica de vivir el desplazamiento mismo de nuestra mano que se mueve en línea recta, guiada por el borde de la regla, o la del giro del puño y el brazo constreñidos por el compás, guiados por la rigidez de sus brazos, uno de ellos fijado por la punta enterrada en el sitio que llamamos "centro", y la experiencia interna de poder recordar, simplificar y repetir mentalmente esos movimientos, sin necesidad de mover un músculo.

Si no hubiéramos tenido muchas veces esas experiencias dinámicas y no pudiéramos reconstruirlas en nuestras experiencias internas, ¿nos sería posible definir los términos "desplazamiento", "traslación", "giro" o "rotación"?

Es un ejercicio altamente ilustrativo tratar de definir esas palabras abstractas, derivadas de los verbos "desplazar", "trasladar", "girar" y "rotar", los cuales a su vez tratan de comunicar una experiencia no verbal. Recuérdese por ejemplo el movimiento instintivo de la mano al tratar de explicar verbalmente qué es una curva helicoidal o una escalera de caracol.

Es igualmente ilustrativo buscar en distintos textos de geometría o de física, o en diccionarios y enciclopedias, cómo se definen esas operaciones básicas de la geometría y de la física. Una y otra vez, los círculos viciosos nos atraparán en sus volutas de anaconda: una rotación es un giro, un giro es una vuelta, una vuelta es una rotación.

Ensayemos de nuevo a buscar en los diccionarios y enciclopedias otra palabra básica: "desplazarse". Desplazarse, deslizarse, trasladarse, moverse, desplazarse… otro círculo vicioso. Tal vez algún purista trate de precisar que una traslación es un desplazamiento en línea recta. Pero el llamado "movimiento de translación" de la Tierra en su órbita, ¿es en línea recta o es en una órbita circular? ¿No será más bien elíptica? ¿Cómo es un desplazamiento en línea recta? ¿En qué difiere de otros tipos de desplazamiento? ¿Hay alguien que haya tenido la experiencia empírica de desplazarse en línea recta sin experimentar ninguna aceleración, ya sea gravitacional o de otro origen? Según la misma física newtoniana, no sería posible distinguir entre esa experiencia de un movimiento rectilíneo uniforme y la experiencia de estar en reposo.

No veo cómo pueda definirse desplazamiento, translación, giro o rotación sin acudir a la experiencia interna que sigue procesando, depurando y estilizando la experiencia empírica de desplazarse y de girar o de combinar desplazamientos y giros; en particular, trate el lector o lectora de revivir la experiencia interna de girar mientras se desplaza, o la de desplazarse sin girar ni sentir ninguna aceleración o freno lateral, tal como la hemos depurado y estilizado en nuestra memoria e imaginación, así nunca la hayamos experimentado empíricamente. Así estaría construyendo modelos mentales que le permitirían empezar a formular teorías que podríamos adscribir a la geometría dinámica.

En este sentido tienen razón Lakoffy Núñez (1999) al asignar el lugar de donde provienen las matemáticas a la corporeidad. Ya Papert (1980) había señalado la importancia de comenzar el trabajo matemático desde lo que él llamó "*body-syntonicmathematics*", "las matemáticas sintónicas con el cuerpo" (ver también Vasco, 1986/1990).Pero ese es un punto de partida, un origen que no se convierte en matemáticas hasta que no haya pasado de la experiencia empírica corporal-kinestésica a la experiencia interna depurada y estilizada, ya autónoma con respecto a su origen empírico.

Un argumento más en favor de la existencia de esta experiencia interna de nuestras reconstrucciones mentales del espacio-tiempo está tomado de la física, en particular de la cinemática, pues entiendo con mi maestro Carlo Federici que la geometría es una física general del espacio, y la cinemática, una física general del espacio-tiempo, que he llamado "cronotopía" (Vasco, 2006; 2007). El argumento es que –ya sea que la aceptemos o no– encontramos poca dificultad en comprender lo que sería la "Ley Cero" de la física de Newton: que el desplazamiento de un cuerpo en línea recta con velocidad constante no es un proceso que requiera fuerzas que lo mantengan, sino un estado indistinguible del estado de reposo.

Si reflexionamos un momento, llegamos a la misma conclusión anterior: nunca hemos tenido la experiencia empírica de un desplazamiento en línea recta con velocidad constante, ni podríamos estar seguros de haberla tenido. Pero a partir de experiencias empíricas recordadas, fragmentadas, reconstruidas, simplificadas y depuradas en nuestra mente, podemos perfectamente vivir esa experiencia interna que nos hace comprender lo que es ese tipo de movimiento, así no quedemos totalmente convencidos de que es indistinguible del estado de reposo ni de que es innecesario suponer una fuerza que lo mantenga. Pero necesitamos construir un modelo mental apropiado para que las frases y las fórmulas de la teoría newtoniana tengan sentido para nosotros.

La diferencia entre esos dos tipos de experiencias, la empírica y la interna, puede explicar también el éxito de la física aristotélica durante más de dos mil años, y la dificultad que tienen los estudiantes, aun los más aventajados, para comprender las leyes newtonianas. Paradójicamente, esa experiencia interna es el único puente que nos permite llegar a descifrar –al menos parcialmente– el significado de esas leyes. Pero no puede olvidarse que, como para el avance de un ejército, un puente es a la vez obstáculo y camino.

Otro argumento relacionado con el anterior es la seguridad con que distinguimos las trayectorias rectas de las curvas. Los profesores de matemáticas nos escudamos en una lectura superficial de Hilbert para responderles a nuestros alumnos cuando preguntan por la diferencia entre rectas y curvas trazadas en el plano, que en vez de planos, rectas y puntos, bien podríamos hablar de mesas, sillas y jarros de cerveza. Pero supongamos que algunos alumnos insisten en preguntar: ¿En qué se distinguen las sillas rectas de las curvas? En ese caso ya nos sentiríamos muy seguros de la respuesta; de nuevo no nos queda más remedio que apelar a nuestra autoridad magisterial omnímoda para hacer callar a nuestros estudiantes más inquietos. Más productivamente, podríamos invitarlos a vivenciar experiencias internas que pueden simplificar, depurar y aun contradecir sus experiencias empíricas, pero más bien los conminamos a aceptar que "recta" o "silla" es un término no definido. Así talvez podamos hacer algo de lógica, pero no geometría, ni podemos escapar de la agudeza de Russell cuando dice que las matemáticas son aquel galimatías que quienes lo hablan no saben lo que dicen ni si lo que dicen es verdad.

En cambio, sí podemos apelar a nuestra experiencia interna para distinguir rectas de curvas, y fijar un modelo y una teoría inicial apropiada a él, de tal manera que solo aceptemos segmentos de recta (además de semirrectas y rectas ilimitadas), sin aceptar curvas (o aceptando solo arcos de curvas que sean trozos de circunferencias o circunferencias completas o cerradas, o solo cónicas, pero no cualquier tipo de curvas).[4] Esta flexibilidad en la decisión permite vivenciar la libertad de la experiencia interna en el origen y el avance de las matemáticas.

La única posibilidad que tenemos de distinguir entre el círculo como figura regional (como son todas las de Euclides), que podríamos llamar "disco", y el círculo como figura lineal (aunque en Euclides no haya figuras lineales), que podríamos llamar "circunferencia", es apelar a nuestra experiencia interna de las reconstrucciones espacio-temporales de nuestras percepciones y movimientos.

Casi todos los profesores, y la mayoría de los textos de matemáticas que conozco, suelen definir rigurosamente "círculo" como "*el lugar geométrico de los puntos equidistantes de otro punto llamado centro*". Sin embargo, unos minutos o unas páginas más adelante, suelen decir que "*el área del círculo es pi-erre-cuadrado*". Si se hubieran tomado en serio su propia definición, el área de ese lugar geométrico tendría que ser cero.

No obstante, esa incongruencia no es fácil de detectar, pues –a diferencia de lo que creen los profesores de geometría– no estamos haciendo geometría escolar con las definiciones y los postulados, sino con la experiencia interna, y al acudir a ella, el salto de la frontera a la región encerrada por ella es inmediato e insensible. Tanto los alumnos como los profesores y autores de texto creen entender perfectamente de qué se está hablando, sin que esa prestidigitación sea consciente para ninguno de ellos, a pesar de sus declaraciones programáticas respecto al trabajo pretendidamente riguroso con el modelo expositivo geométrico euclidiano de definiciones, postulados y teoremas.

4 Nótese que no he dicho "círculo" ni "arco de círculo", sino "circunferencia" y "arco de circunferencia", pues para Euclides el círculo es la región limitada por la circunferencia, no la línea que la limita (así la frase "llamada periferia" sea una interpolación posterior en la definición 15, como lo anota Heiberg; ver Heath, 1926, vol. 1, p. 183f).

Una vez fijado mentalmente el modelo simplificado, podemos intentar ir en contra, no solo de nuestras experiencias externas, sino también de esas mismas experiencias internas que parecían determinar la diferencia entre desplazamientos en línea recta y en trayectorias curvas. Podemos, por ejemplo, remplazar las líneas rectas por circunferencias maximales (doblemente mal llamadas "círculos máximos") en una esfera, y continuar nuestro juego geométrico al estilo de Riemann, o mejor todavía, al estilo de los antiguos astrónomos y astrólogos babilonios, egipcios y griegos, que lo jugaron a la perfección milenios antes de Euclides.

Entre otras cosas, en la geometría de la esfera –que podemos considerar como un modelo simplificado de una pulida bola de cristal, de nuestro planeta Tierra, o de la aparente bóveda celeste– nuestra experiencia interna nos permite asegurarnos de que se cumple también el quinto postulado tal como lo redactó Euclides:

Si un arco de un mal llamado "círculo máximo" corta transversalmente a otros dos arcos del círculo máximo, y los ángulos internos en un lado del círculo máximo transversal suman menos de dos rectos, entonces los dos arcos del círculo máximo debidamente prolongados se cortan en ese lado del arco transversal.

Claro está que, en la esfera, esos dos arcos también se cortan por ese mismo lado si los ángulos internos suman dos rectos o más, y por supuesto también se cortan al otro lado; pero el cuidadoso enunciado de Euclides no prohíbe que eso suceda. Solo postula el corte para el caso en que se cumpla cierta condición, y no dice que si no se cumple la condición, no hay corte.

Esa prohibición la agregamos nosotros mentalmente por estar mal acostumbrados a que, en caso de que nos pongan una condición del tipo: "*Si se cumple el antecedente A, entonces sucede el consecuente B*", nosotros agregamos mentalmente "*y si no, no*". Son talvez rezagos de una niñez sometida a la autoridad omnímoda de los padres y los maestros.

¿Es entonces el modelo de la geometría de la esfera, tomando los llamados "círculos máximos" como rectas, una geometría euclidiana o no? Por lo menos parece cumplir el quinto postulado como lo propone Euclides. Sin embargo, se presenta frecuentemente como una geometría no-euclidiana. ¿Por qué?

Notemos de paso que, al remplazar las líneas rectas por arcos de circunferencias maximales, estamos contradiciendo nuestra experiencia interna de lo que es una trayectoria rectilínea. Notemos también que al remplazar el plano por la esfera o por una semiesfera, estamos contradiciendo la experiencia interna de lo que es una superficie plana. Pero para poderlo hacer, necesitamos haber practicado muchos años el juego geométrico euclidiano modelado en nuestra experiencia interna y refinado por el interjuego de esos modelos mentales espacio-temporales con las teorías formuladas en un lenguaje articulado o digitalizado. Más aún, todavía necesitamos de nuestra experiencia interna para reconstituir una superficie esférica y un arco de circunferencia maximal. ¿Podríamos aceptar que la línea ecuatorial es una circunferencia maximal sin acudir a la experiencia interna de moverla ligeramente sobre un modelo mental de la superficie terrestre y la de compararla con los paralelos? ¿Podríamos entender, sin esa experiencia interna, por qué los paralelos, a pesar de su nombre y de que efectivamente no se cortan, no corresponden a rectas paralelas en el modelo?

¿Es posible definir lo que es línea y plano, lo que distingue una línea recta de una curva, lo que significa estar entre dos puntos, o entre dos líneas, o lo que es un extremo de un segmento, o lo que es un ángulo de giro, o lo que significa ser colineal o coplanar, o lo que es estar a un lado o a otro de una línea en un plano... sin esa experiencia interna simplificada y refinada a partir de las experiencias empíricas espacio-temporales? Mi tesis en este trabajo implica que ello no es posible.

Un estudio de caso: la dimensionalidad en Hilbert

Analicemos, por ejemplo, una versión ligeramente modificada de los axiomas de dimensión de Hilbert.[5] El primero podría llamarse "Axioma del paso de la dimensión uno a la dimensión dos", o para abreviar: "Axioma 1-a-2":

- Axioma 1-a-2: Dados dos puntos no coincidentes, existe al menos un tercer punto no colineal con los dos primeros.

Sin la experiencia interna que hemos descrito, ¿es posible explicar qué significa que "dos puntos son no coincidentes", ya sea asumiendo o no que si dos puntos coinciden no son en realidad dos, sino son el mismo punto? ¿Es posible darle algún significado a la relación de colinealidad? ¿Es posible encontrar la manera de formular este axioma sin acudir a esa experiencia interna de producir un trazado en línea recta? ¿Es posible no experimentar como forzada y artificial una posible negación de este axioma 1-a-2 para el espacio vivenciado en esa experiencia interna?

Comparemos la situación con el paso de la dimensión dos a la dimensión tres:

5 Este ejemplo apareció en prensa en Vasco (2006).

- Axioma 2-a-3: Dados tres puntos no colineales, existe al menos un cuarto punto no coplanar con los tres primeros.

Sin la experiencia interna que hemos descrito, ¿es posible darle algún significado a la coplanaridad? ¿Es posible encontrar la manera de formular siquiera este axioma sin acudir a esa experiencia interna? ¿Es posible no experimentar como forzada y artificial una posible *negación* de este axioma 2-a-3 para el espacio vivenciado en esa experiencia interna?

Comparemos las dos situaciones anteriores con el axioma que debería seguir a los dos ya enunciados:

- Axioma 3-a-4: Dados cuatro puntos no coplanares, existe al menos un quinto punto no coespacial con los cuatro primeros.

Sin la experiencia interna que hemos descrito, ¿es posible darle algún sentido a la coespacialidad? ¿Es posible encontrar la manera de formular siquiera este axioma sin haber tenido esa experiencia interna y sin tratar de ir en contra de ella? ¿Es posible no experimentar como forzada y artificial una posible *afirmación* de este axioma 3-a-4 para el espacio vivenciado en esa experiencia interna?

Para hacer geometría en cuatro o más dimensiones, es necesaria la experiencia interna de la coincidencia, la colinealidad, la coplanaridad y la coespacialidad, además de la experiencia interna de la artificialidad y la extrañeza de tratar de seguir adelante, a pesar de que este tercer axioma tiene exactamente la misma forma lógica que los dos axiomas anteriores:

- Axioma (n)-a-(n+1): Dados (n+1) puntos no co-(n–1)-hiperplanares, existe al menos un (n+2)-avo punto no co-(n)-hiperplanar con los (n+1) primeros.

Aquí, por supuesto, la terminología es:

co-0-hiperplanares: coincidentes

co-1-hiperplanares: colineales

co-2-hiperplanares: coplanares

co-3-hiperplanares: coespaciales (en el mismo 3-hiperplano), etc.

Podemos interpretar que Hilbert estaba tratando de axiomatizar la geometría del plano y del espacio sin dejar agujeros lógicos, con el propósito de capturar con un número finito de axiomas consistentes, independientes y completos, todo lo que había pretendido hacer Euclides en sus libros estrictamente geométricos; pero ni Hilbert habría podido escoger sus axiomas sin acudir a su experiencia interna, ni nosotros podríamos apreciar el éxito o el fracaso de su programa sin apelar a la nuestra.

Las experiencias internas en el comienzo de la aritmética

Kant atribuía a los dinamismos *a priori* de la mente tanto la geometría como la aritmética. Se ha querido reducir la primera a la intuición *a priori* del espacio y la segunda a la intuición *a priori* del tiempo. No estoy de acuerdo con esa reducción.

Recordemos la solución que propuso Kant al problema de que el triángulo genérico no puede darse como figura imaginativa, pues en la imaginación tendría que ser un triángulo acutángulo, rectángulo u obtusángulo. Kant remplaza la figura imaginativa estática por el esquema activo del trazado de un triángulo: se traza un primer segmento de recta; se hace un giro en lo que podríamos llamar "un ángulo euclidiano" (es decir, mayor que cero grados y menor que 180); se traza otro segmento de recta; se hace un giro que permita quedar en la orientación precisa para que el tercer segmento de recta cierre la figura, y finalmente se traza ese tercer segmento de recta.

La solución es magistral; esa es la adoptada por Papert (1980) y su equipo de colaboradores en la geometría de la tortuga en el lenguaje LOGO. Pero no es una solución únicamente espacial: es también temporal, pues requiere primero un desplazamiento en línea recta, luego un giro, luego otro desplazamiento, luego otro giro que debe terminar precisamente al alcanzar la orientación exacta para tocar el comienzo del primer segmento, y luego un tercer desplazamiento que debe terminar precisamente al cerrar la figura. La temporalidad aparece permanentemente. La geometría no puede tener, pues, su origen solo en la intuición pura del espacio, sino en una compleja experiencia interna espacio-temporal.

La atribución de la aritmética a la intuición *a priori* del tiempo ha sido muy discutida, y no me detendré aquí en las controversias. Únicamente me fijaré en que sí es posible considerar fenómenos sucesivos en la conciencia como lo suficientemente diferenciados para distinguir el primero en el que caímos en la cuenta de que había sucedido, del segundo o del tercero, o dicho de otra manera, distinguir la primera vez que pasó el evento de la segunda o tercera vez que pasó "lo mismo", o "algo parecido".

Nótese que las palabras "repetir" y "repetición" implican una articulación compleja de "lo mismo" con "lo distinto": la ocurrencia de algo claramente distinto en el tiempo, pero lo suficientemente parecido en los demás aspectos para poder decir "es lo mismo".

Mi propuesta es que la aritmética no proviene inicialmente de las experiencias empíricas de contar objetos, sino de la experiencia interna de ordenar sucesos o eventos distinguibles en la conciencia, así sean originados en impresiones de los sentidos externos o de los propioceptivos, como latidos del corazón, palmoteos, golpes, ruidos o salidas del sol. Para decirlo en un aforismo:

"En el comienzo fue la ordinalidad y no la cardinalidad."

Por ello, para mí los antiguos números ordinales "primero, segundo, ..." son anteriores en la experiencia interna a los cardinales "uno, dos, ...". Más aún, no podrían contarse objetos de colecciones no subitizables sin atribuirles antes un orden interno "primero, segundo, ..." a los objetos de las colecciones figurales (en el sentido de Piaget y Szeminska, 1950).

Agregaría yo mismo: ni siquiera en un comienzo cuenta el niño los objetos, sino más bien los movimientos sucesivos de su brazo y su mano mientras va señalando el orden atribuido a los objetos. De aquí se derivan los principios del conteo ya precisados por Gelman y Gallistel (1978), y los errores debidos a repetir uno o varios objetos ya señalados, o a omitir alguno o algunos. Por esto yo prefiero referirme no al "conteo" sino más bien al "dedeo".

Si el lector ha podido seguir mi análisis anterior, estará de acuerdo conmigo en que sí puede decirse que la aritmética ordinal comienza con la experiencia interna del flujo temporal hecho transparente a la conciencia, no en sí mismo como flujo vacío, sino inicialmente por la sucesión de eventos o la repetición de los mismos. Es una digitalización de las variaciones de ese flujo que parece continuo en la experiencia interna.

Por algo la palabra "evento" tiene en español el sinónimo "suceso", de donde vienen "sucesivo" y "sucesión".[6] Solo más tarde se distribuye esta experiencia interna en el espacio-tiempo para iniciar la aritmética cardinal con el conteo de objetos apreciables de un solo golpe o *Gestalt* en una colección figural (el conteo por subitización).

Ese conteo se extiende por medio de la atribución de una ordenación específica a los objetos seleccionados visualmente, la cual sólo con el tiempo se llega a considerar por parte del aprendiz como indiferente, en el sentido de que cualquier ordenación específica que se le atribuya a la colección figural –y hay $n!$ ordenaciones diferentes para cada colección de n objetos– produce el mismo numeral final en el conteo con la lista estándar aprendida de memoria, al menos si el dedeo se ha hecho correctamente, o sea, sin

6 En inglés "*successive*" y "*succession*" tienen el mismo sentido que en español, pero el significado de la palabra "*success*" ha derivado hacia "éxito", perdiendo la denotación de "evento". Para mayores dificultades de traducción, en el análisis matemático "sucesión" no se dice "*succession*" sino "*sequence*".

saltarse o repetir, y si los objetos que se intenta contar se comportan dócilmente. No es fácil contar moscas en un basurero.

Si la aritmética no se constituye hasta no haber logrado articular la cardinalidad con la ordinalidad en el conteo de pequeñas colecciones figurales, la aritmética tampoco tiene su origen únicamente en la intuición pura del tiempo, pues para el conteo de objetos de la experiencia empírica es necesaria la atribución en la experiencia interna de un orden al despliegue espacial de la colección figural. Lo mismo podría decirse de ciertas colecciones que no estudió Piaget pero que son cruciales para el aprendizaje de la aritmética por parte de las personas invidentes: las colecciones táctiles. Para la aritmética se requiere, pues, también una compleja experiencia interna espacio-temporal, proveniente de reconstrucciones y digitalizaciones no sólo del flujo temporal, sino también de las perturbaciones del flujo visual o táctil a partir de un campo perceptual de fondo, reconstruido como liso y uniforme en la experiencia interna.

¿Es posible definir lo que es lo primero y lo segundo, lo que viene antes o después, sin ese refinamiento de las experiencias empíricas que he llamado "experiencia interna" de la sucesión temporal y la distribución espacial? ¿Es posible definir lo que es singular y plural, lo único y lo dual, lo uno y lo múltiple, sin esa experiencia interna de lo espacio-temporal que hemos depurado y refinado a partir de las experiencias empíricas de tipo visual, táctil y temporal que hemos vivido? Mi tesis en este trabajo implica que ello no es posible.

Un modelo lógico

Acabamos de experimentar, al repasar el enunciado del quinto postulado a la manera de Euclides en el aparte sobre la geometría, la tendencia interna de querer interpretar la condicional como bicondicional: al considerar el enunciado de que si se cumplen ciertas condiciones a un lado de una transversal a dos rectas, esas rectas se cortan a ese lado, difícilmente podemos resistirnos a agregarle mentalmente a ese enunciado el infundado "y si no, no".

Nuestra experiencia del autoritarismo paterno nos lleva a deformar la lógica y a leer una bicondicional en donde únicamente hay una condicional en un solo sentido. Pero una vez configurado un modelo lógico lo suficientemente coherente, al desarrollar su teoría podemos comenzar a poner y quitar conectivas y a exigirles propiedades que podemos postular en favor o en contra de la experiencia previa que hayamos tenido en nuestros intercambios lingüísticos y en su contraparte mental.

Podemos inventar una lógica en la que todas las conectivas condicionales sean bicondicionales, o inventar una conectiva condicional tan artificial que pueda ligar dos situaciones completamente disparatadas, como la expresada por la oración: "Si dos más dos son cinco, entonces yo soy Napoleón", postulando, por ejemplo, que esa conectiva condicional estrafalaria produzca siempre una proposición compuesta verdadera cuando el antecedente es falso o cuando el consecuente es verdadero. Por ejemplo, también sería verdadero decir: "Si dos más dos son cinco, entonces yo no soy Napoleón", o aun decir: "Si dos más dos son cuatro, entonces yo no soy Napoleón".

En efecto, muchos expertos en lógica matemática llaman con doble perversidad "implicación material" a esa conectiva estrafalaria que desafía nuestra experiencia lingüística, pues ni es una relación de implicación, ni tiene nada de material. Pero aunque sus estudiantes no entiendan nada (y con toda razón), esos expertos parecen no tener el más mínimo problema en aceptarla como coherente con su experiencia interna, sus modelos internos de razonamiento y sus teorizaciones de los mismos.

Así podemos hacer otro tipo de matemáticas al estilo de las distintas lógicas matemáticas, no solamente de la lógica aristotélica. Pero para saber por qué consideramos esos modelos como lógicos, qué es un tipo de lógica y cuáles lógicas son aristotélicas o no, hemos tenido que partir de nuestra experiencia interna, que esta vez es una experiencia de los flujos e intercambios de la información en la conciencia, ya sea digitalizados por el lenguaje articulado, ya directamente accesibles como sucesiones de imágenes, recuerdos y estados de conciencia.

Por ejemplo, podemos inventar lógicas no-aristotélicas porque –a diferencia de Aristóteles– nosotros sí aceptamos predicados vacíos, o porque postulamos conjunciones que no conmutan (trate de conmutar la "y" en la proposición compuesta: "Me pongo las medias y me pongo los zapatos", como lo analicé con ejemplos de lógicas temporales en un artículo sobre la formalización del lenguaje ordinario; ver Vasco, 1983), o porque no aceptamos la reducción al absurdo en su forma fuerte, ni el principio del tercero excluido, ni la eliminación de la doble negación, rechazados por los matemáticos intuicionistas.

Pero sin nuestra experiencia interna de los flujos e intercambios de información, no podríamos distinguir entre una frase declarativa y una interrogativa o una imperativa; ni entre una afirmación de una frase de la que estamos convencidos y una mera enunciación de la misma frase para su consideración por el interlocutor; ni entre una afirmación y una negación, que es a la vez afirmación de un rechazo; ni entre la conjunción de dos afirmaciones como afirmación conjunta y la mera disyunción débil como postulación de que creemos que al menos una de las dos frases pueda ser verdadera, o tal vez ambas, aun con el temor de que ninguna de las dos lo sea. Más importante todavía para iniciar el trabajo lógico-matemático, sin esa experiencia interna no podríamos distinguir entre la conjunción de dos proposiciones y la afirmación consecutiva de otras dos proposiciones cuando la segunda se deriva de la primera por un paso de inferencia. Nótese que en castellano la expresión "y entonces" puede significar solo la sucesión temporal o también la inferencial, y que en ambos casos utilizamos formas del verbo "seguir", como "se sigue que".

Esas son las experiencias internas en las que se reconstruye la experiencia vital de dialogar, de expresarse, de dar y pedir razones, de tratar de convencer y de dejarse convencer o rendirse ante la evidencia. Esas experiencias internas están al comienzo de toda lógica, y son las únicas que permiten distinguir un sistema lógico de un sistema geométrico o de un sistema abstracto, así ese mismo sistema geométrico o abstracto se utilice luego como modelo de un sistema lógico, o uno lógico de uno geométrico. Ni siquiera podríamos explicar lo que significa la última parte de la frase anterior sin esas experiencias internas dialogales, tan finamente expuestas por Kamlah y Lorenzen en su propedéutica a la lógica (KamlahyLorenzen, 1967; Lorenzen, 1955).

¿Es posible definir lo que es una proposición como diferente de una pregunta o una orden sin tener la experiencia interna de la aseveración de un enunciado como un compromiso personal del enunciador con la verdad de lo enunciado, al menos en la creencia y el deseo? ¿Es posible distinguir una sucesión de dos proposiciones enunciadas como una conjunción de ambas, de otra sucesión de proposiciones en las que la segunda se enuncia como derivada de la primera, sin tener la experiencia interna de la necesidad o la inevitabilidad de esa conexión intrínseca entre ellas? Mi tesis en este trabajo implica que ello no es posible.

La experiencia interna y el uso cuidadoso de la palabra "intuición"

Esta propuesta permite explicar por qué puede hablarse correcta y rigurosamente de intuición interna en matemáticas, no solo como la intuición *a priori* del sujeto kantiano, sino como el recurso inmediato a esas experiencias internas reconstruidas, refinadas y reorganizadas por las teorías que permiten iniciar la aritmética, la geometría y la lógica, y con ellas todas las exploraciones de la creatividad matemática.

La palabra "intuición" puede a veces ser utilizada en forma imprecisa e ideológica, y con razón se utiliza solo con reserva y desconfianza. Pero en la propuesta presentada aquí, limito su uso a la vivencia consciente, personal, inmediata e innegable de la experiencia interna, y en ese sentido la palabra "intuición" puede ahora utilizarse con precisión y seriedad. Más aún, su utilización se hace necesaria, pues no existe otra palabra para referirse a esa vivencia directa de la propia experiencia interna que se impone a la conciencia de cada uno de nosotros sin mediaciones ni dubitaciones.

Solo considero responsablemente utilizada la palabra "intuición" cuando se refiere a un conocimiento interno a partir de la experiencia interna, conocimiento que es consciente de ser in-mediato, o sea no mediado, directo y no indirecto, y cuando ese conocimiento es in-negable, o sea cuando no podemos negarlo consciente, sincera y responsablemente.

Cuando Hilbert postula en sus axiomas de dimensión que existen al menos tres puntos no colineales o cuatro puntos no coplanares, no tenemos que diseñar un experimento empírico para comprobarlos o refutarlos. Tenemos acceso inmediato a su comprobación, y esto es lo que significa estrictamente "intuición": la visión interna acompañada de la conciencia de que la verdad de esos postulados es inmediata y directa en el modelo mental que intuimos, y de que no podemos menos de declarar esos postulados como verdaderos en nuestra experiencia interna del espacio, sin poderlos negar sinceramente.

Esto no obsta para que inmediatamente después podamos ver qué sucedería si inventáramos un modelo que no cumpliera el segundo de esos postulados de dimensión, o uno que no cumpliera el primero. Pero solo podemos adquirir esa libertad creativa a partir de la intuición de nuestra experiencia interna y del esfuerzo por superarla. Solo a partir de esa experiencia interna del conocimiento intuitivo, es decir inmediato e innegable, podemos hacer el esfuerzo disciplinado por mediatizarlo por la teoría, y aun negarlo, con el fin de empezar a estudiar únicamente su consistencia interna, independientemente de la verdad o de la certeza.

Esta libertad de avanzar aun en contra de la experiencia interna previamente considerada como inmediata, indubitable e innegable es lo que dificulta la referencia a la intuición en las matemáticas y lo que lleva a los delicados análisis de Fischbein (1987) sobre la evolución de la intuición con el avance en la práctica y en la reflexión de un matemático avezado.

Con la referencia a la intuición como conocimiento interno de la experiencia interna propuesta antes, no hay dificultad en seguir el razonamiento de Fischbein ni en entender por qué seguir el paso de una demostración que para un matemático avezado es "intuitivamente evidente", puede tomarle semanas de duro trabajo a un estudiante graduado. La evolución y el cultivo de la intuición en Fischbein es precisamente el ejercicio de seguir refinando, depurando y estilizando la experiencia interna con el juego de modelos y teorías, de tal manera que podamos hacer que esa experiencia sea cada vez más flexible, creativa e independiente de sus orígenes en la experiencia empírica.

Sin embargo, en el aparte que dedica Fischbein a la relación entre experiencia e intuición, hay que tener cuidado con el uso de "experiencia" para la experiencia empírica en el sentido kantiano de la expresión. Creo que se enriquece el trabajo ya clásico de Fischbein con las precisiones propuestas anteriormente para el uso de las expresiones "experiencia empírica" y "experiencia interna", y para la redescripción de la intuición, tanto para el acto de hacer conciencia de la inmediatez de la experiencia interna, como para el resultado de ese acto.

Solo a partir de nuestra experiencia interna de afirmar algo a la vez como verdadero, como cierto y como coherente con otras afirmaciones, podemos empezar a distinguir el concepto de verdad relacionado con la coherencia semántica entre enunciados de la teoría y modelos mentales; el concepto de certeza como actitud subjetiva de seguridad de la verdad de una afirmación, independientemente de la verdad de la misma, y el concepto de consistencia lógica entre enunciados, como independiente de la verdad y de la certeza que tengamos de los mismos.

Es necesario reflexionar sobre la fina propuesta inicial de Raymond Duval a este respecto. En su análisis del razonamiento se puede ver con claridad cómo sin tener presente la distinción entre *estatus* (para Duval, teórico u operatorio) y valores (para él, valor epistémico semántico y valor de verdad), no estamos enseñando a nuestros alumnos a demostrar, sino solo a convencer a otros con argumentos retóricos; este tipo de argumentación puede ser muy importante, pero no es suficiente para garantizar la aceptación de una proposición como teorema en las matemáticas actuales. La única manera de avanzar en la comprensión de las distinciones anteriores y de aprender lo que es una demostración formal es procurar tener la experiencia interna de asignar y de cambiar el estatus a un enunciado específico, lo que no aparece en las representaciones escritas en lenguaje natural, pero puede hacerse visible por medio de diagramas arbolares y grafos dirigidos (Duval, 1999/1995, cap. V).

Avanzando en este camino, propongo más bien distinguir al menos cuatro estatus de un enunciado matemático, dos lógicos y dos epistémicos, y dentro de cada uno distinguir los distintos valores que podemos asignarles a diversos enunciados que tienen ese mismo estatus, por lo menos durante una fase precisa del razonamiento. Podríamos distinguir así el estatus lógico-sintáctico de un enunciado acerca de su conformación, con los valores correcto, incorrecto, inasignable; el estatus lógico-semántico que atribuimos a un enunciado acerca de su verdad, con los valores verdadero, falso, indeterminado; el estatus epistémico subjetivo acerca de la certeza, con los valores cierto, plausible, probable, imposible u otros, y el estatus epistémico operatorio acerca de si se trata de una proposición axiomática, hipotética, conjetural, teoremática o de una regla de inferencia, valores que corresponden a la distinción entre un punto de partida general y uno particular de una demostración, lo propuesto a demostración, lo ya demostrado y los medios de pasar de los enunciados previos al siguiente.

No trato ahora de discutir los méritos y dificultades de esta propuesta o de la de Duval, sino de hacer caer en la cuenta de que no es posible ni siquiera vislumbrar qué se está tratando de lograr con estas distinciones y con la escala de los valores propuestos si no se apela a la experiencia interna de considerar enunciados matemáticos y de tratar de probarlos o refutarlos.

En forma similar, cuando decimos que una relación de inferencia tiene que tener cierto tipo de reflexividad que permita inferir la misma frase de otra instancia de ella misma anteriormente enunciada; o que tiene que tener cierto tipo de transitividad que permita inferir directamente de la primera, una tercera frase que fue inferida anteriormente de una segunda frase inferida de la primera; o que tiene que tener cierto tipo de monotonía que permita remplazar una hipótesis por otras frases de las cuales esa hipótesis pueda inferirse como un lema, estamos haciendo uso de una intuición que nos permite leer nuestra experiencia interna sin intermediarios (Hacking, 1994; Gabbay, 1994).

Nadie que no tenga esa experiencia puede entender lo que estamos diciendo, ni por qué exigimos esas propiedades y no otras cuando queremos delimitar las características de una relación de inferencia. No podemos precisar lo que queremos decir por "relación de inferencia" a quien se resista a apelar a la propia intuición inmediata e innegable de esa experiencia interna que seguramente ha tenido: la de vivir flujos de información que le han permitido extraer nueva información a partir de formulaciones previas.

Cuando decimos que una pareja de elementos diferentes está ordenada o no, y que en caso de que la consideremos ordenada solo podemos cambiarle el orden de una única manera; o cuando decimos que podemos pensar en un caso en que una colección tenga solo un elemento, y que esa colección se puede representar escribiendo primero un corchete, luego un símbolo del elemento, y por fin otro corchete, estamos haciendo uso de nuestra intuición inmediata de las experiencias internas de tipo aritmético-ordinal, geométrico-espacial y lógico-dialogal.

No podemos definirle a nadie la diferencia entre segmento de recta orientado y no orientado, o entre una colección de dos o tres elementos con o sin orden, a menos que sepamos que esa otra persona también ha tenido ciertas experiencias internas, y que tiene acceso directo a ellas en su intuición inmediata e innegable de las mismas.

Pero una vez que aceptamos esas experiencias internas y nuestra intuición de las mismas en nuestra conciencia, podemos empezar a desafiar creativamente dichas intuiciones por medio del interjuego de los modelos mentales con las teorías; a suspender libremente las inferencias directas e indirectas que antes podíamos considerar como inevitables y necesarias, y aun atrevernos a negar lo que antes no podíamos menos que considerar como innegable. Pero esa libertad, esa creatividad y esa capacidad de suspender y aun negar nuestras intuiciones geométricas, aritméticas y lógicas solo pueden darse en el ámbito mismo de esas experiencias internas y en contraste con ellas.

Conclusión

Considero, pues, que la geometría, la aritmética y la lógica se inician con experiencias internas que no deben ser llamadas "empíricas", pues pueden repetirse a voluntad sin temor a que la empiria las "refute", "falsee" o "falsifique", por más que tengan su origen en la corporeidad-con-mente de los seres humanos, que experimentan como organismos conscientes la sucesión de los eventos, el movimiento, la acción, la distribución espacial de variaciones perceptuales, el flujo de información en el pensamiento y en el diálogo, pero que pueden reconstruir, refinar, digitalizar y reorganizar esa experiencia empírica en una experiencia interna.

Esta propuesta permite explicar en qué sentido pueden tener razón los que quieren asignarle un origen empírico a las matemáticas, al estilo de Philip Kitcher (1984), y bajo qué derrotero ellos mismos extenderían abusivamente el calificativo de "empírica" a la experiencia interna que ya no depende del tribunal de la experiencia empírica; por ello, es más prudente llamarla "cuasi-empírica". Una vez iniciado el proceso de construcción de un modelo matemático con su teoría, el estudio ulterior, los refinamientos, las variaciones y el disfrute de ese modelo y su teoría ya no dependen de comprobaciones ni refutaciones provenientes de la realidad sensible, sea ella lo que fuere, considerada por los empiristas como la única fuente de nuestras experiencias. A lo más, habría que considerar la experiencia empírica como fuente indirecta de nuestra experiencia interna, la cual se independiza de su fuente al comenzar a hacer matemáticas, y de allí en adelante no tiene que someterse ya más a la tutela de la empírica.

Hace ciento veinte años Georg Cantor optó por seguir su experiencia interna y sus cultivadas intuiciones para crear una nueva teoría de conjuntos, a pesar de la oposición generalizada de los cancerberos de las matemáticas universitarias y las revistas de prestigio, y a pesar de su propia impresión de estar encontrando paradojas en todos los recodos del camino.

Hace cien años David Hilbert optó por aceptar la teoría cantoriana de conjuntos a pesar de las paradojas propuestas por Cantor mismo y las detectadas por otros lógicos ingleses e italianos. Hilbert confiaba en su experiencia interna, en su intuición cultivada y creadora, así Gödel fuera a echar por tierra alguna de sus muchas propuestas treinta años más tarde.

A pesar de aparecer como enano al lado de esos gigantes, con Cantor y con Hilbert quiero trepar sobre sus hombros para apostarle también hoy a la experiencia interna y a la intuición cultivada como lugar privilegiado de la creatividad matemática.

¿Quién nos limitará la libertad de creación en las matemáticas? Una vez que nos movamos libremente en este mundo de la experiencia interna, de este paraíso matemático no nos podrá expulsar ningún arcángel con su espada de fuego. Pero en el principio fue esa experiencia interna que produjo y sigue produciendo una intuición inmediata e innegable. Sin ella no hubiéramos podido intuir el paraíso.

Referencias bibliográficas

Bobenrieth, A. (1996). *Inconsistencias: ¿por qué no? Un estudio filosófico sobre la lógica paraconsistente*. Santafé de Bogotá: Tercer Mundo Editores.

Davis, P. J. & Hersch, R. (1981).*The mathematical experience.* Boston: Birkhäuser.

Duval, R. (1999/1995).*Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle-IED-GEM. (Trad. del original francés: *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, 1995).

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, Holland: D. Reídel.

Gabbay, D. M. (1994). *What is a logical system?* En: D. M. Gabbay (pp. 179-216). Oxford, New York: Oxford University Press.

Gelman, R. & Gallistel,C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Hacking, I. (1994). What is logic? En: D. M. Gabbay (Ed.).,*What is a logical system?* (pp. 1-33). Oxford, New York: Oxford University Press.

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, NJ: Princeton University Press. [La obra original es en inglés, escrita por Hadamard para un curso que dictó en Nueva York en 1943; la traducción francesa apareció solo en 1959: *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, traduit de l'anglais par Jacqueline Hadamard. Paris: Librairie Scientifique Albert Blanchard.]

Heath, T. (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements* (2nd ed.).Cambridge, UK: Cambridge UniversityPress. [Hay reedición en New York: Dover, 1956, con sucesivas reimpresiones].

Kamlah, W. & Lorenzen, P. (1973). *Logische Propädeutik: Vorschule des vernünftigen Redens* (2. Aufl.). Mannheim/Wien/Zürich: BibliographischesInstitut.

Kant, I. (1972). *Crítica de la razón pura* (Estudio introductorio y análisis de la obra por Francisco Larroyo). México: Porrúa.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York/Oxford: Oxford University Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. (1999). *Philosophy in the flesh: the embodied mind and its challenge to Western thought*. New York: Basic Books.

Lorenzen, P. (1955). *Einführung in die operative logik und mathematik*. Berlin: Springer-Verlag.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. New York: Basic Books.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1950). *La genèse du nombre chez l'enfant. Neuchâtel:* Delachaux&Niestlé.

Poincaré, H. (1908). L'invention mathématique. *L'Enseignement Mathématique*, 10(5), 357-371.

Power, M. & Dalgleish, T. (1997). *Cognition and emotion: from order to disorder.* Hove, UK-New York, NY: Psychology Press (Reimpreso 2003).

Vasco, C. E. (1978).Estratificación conceptual del proceso de producción de conocimientos matemáticos. *Ideas y Valores*, pp. 53-54, 99-112.

__________________ (1983). Conectivas secuenciales y la formalización del lenguaje ordinario. *Matemática-Enseñanza Universitaria*, 27, 12-23.

__________________ (1986). Learning elementary school mathematics as a culturally conditioned process. En: M. I. White & S. Pollak (Eds.). *The cultural transition: human experience and social transformation in the Third World and Japan* (pp. 141-175). Boston-London: Routledge & Kegan Paul. [Hay traducción al castellano: Vasco, C. E. (1990). El aprendizaje de las matemáticas elementales como proceso condicionado por la cultura. *Comunicación, Lenguaje y Educación* (Madrid), n.6, 5-25.]

__________________ (2006). Cronotopía: un "Programa de Bogotá" para lo que se suele llamar "Geometría". En: C. Ruiz *et al.* (Eds.). *Memorias: XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética* (Bogotá, junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, 1-28). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

__________________ (2007). La cronotopìa o la matematica dello spazio-tempo, prima e dopo la metrica. *La Matematica e la sua Didattica* (Bologna), 21(4), 455-470.

Vasco, C. E. *et al.* (1995). La teoría general de procesos y sistemas. En: Misión Ciencia, Educación y Desarrollo, *Educación para el Desarrollo* (Colección Documentos de la Misión, tomo 2, 377-652). Santafé de Bogotá: Presidencia de la República-CPDI-Colciencias.