La experiencia figural. Algunas reflexiones sobre el papel de las figuras en la geometría plana

Olga Lucía León C.[1]
Carlos Álvarez J.[2]

Presentamos en este capítulo una reflexión sobre un tipo de experiencia llevada adelante a través de las figuras. Una experiencia que está, a su vez, vinculada directamente al texto y a la lectura del libro I de la obra *Elementos* de Euclides. Una primera observación que haremos es que nuestro estudio se referirá únicamente a la geometría plana, a esa geometría que con justicia histórica es llamada geometría *euclidiana*, centrando nuestro interés en el papel que en ella tienen las figuras. La atención se dirige al modo en que las figuras se inscriben en la demostración geométrica, para intentar comprender el lugar que ellas ocupan en las inferencias que, a partir de los axiomas, dan lugar al resto de proposiciones que forman el cuerpo de la geometría.

Introducción

El tema de la relación entre la experiencia y las matemáticas nos sitúa de inmediato en el centro de un debate largo y controvertido. Mucho se ha dicho a propósito del tema, acerca del papel que la experiencia tiene o puede tener en matemáticas, mucho se ha discutido también acerca de sus proposiciones y verdades. ¿Es legítimo decir que la verdad matemática debe algo a la experiencia? Es claro que la respuesta a esta pregunta depende de lo que se entienda por cada uno de los términos cuya relación se establece aquí: es innegable que si de ellos se predispone una noción determinada, fija y acabada, entonces la respuesta está dada desde el inicio. El concepto que se tenga de "matemáticas" permitirá aclarar cuál es su relación –si es que acepta tener alguna– con la experiencia. De igual modo, si se considera que la "experiencia" es un tipo específico de actividad humana, la forma de caracterizarla permitiría adelantar su posible vinculación con una disciplina como las matemáticas. Conscientes de este hecho trivial, no nos proponemos adelantar ninguna hipótesis acerca de lo que es la matemática o de lo que es la experiencia y esperamos que, en

1 Universidad Distrital Francisco José de Caldas – Universidad del Valle. Investigación realizada en el marco de la investigación Doctoral de la autora. Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Educación Matemática.
2 Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. Investigación realizada con apoyo del proyecto Conacyt 400302-5-25269H.

la medida en la que nuestras ideas se exponen, sea posible delinear una posición clara respecto de cada uno de estos términos y de su relación.

La idea de que las matemáticas son una ciencia deductiva, que al tomar como base a un conjunto de proposiciones iniciales, las otras proposiciones se obtienen mediante la aplicación de una serie de reglas de inferencia, permite delinear una posición que considera que la experiencia se encuentra –vinculada de alguna manera– en el origen de las proposiciones que sirven de base a la geometría. Esta idea abarca un espectro tan amplio que permite el reencuentro de posiciones teóricas tan alejadas como las de Gauss y Frege, quienes coinciden al señalar que las proposiciones iniciales de la geometría, los axiomas o postulados geométricos, deben su origen a un cierto modo de experiencia. Frege considera que los axiomas o proposiciones básicas de la geometría son proposiciones verdaderas derivadas de una *experiencia primaria*, razón por la cual esta ciencia difiere de la aritmética, la única ciencia verdaderamente universal, necesaria y previa a toda experiencia, la única ciencia *a priori*. Por su parte Gauss señala que la geometría puede ser considerada como una rama de la mecánica y en este sentido no solo sus axiomas son la descripción de hechos intuitivamente evidentes, derivados precisamente de la experiencia sensible, sino que aun en el modo específico en el que las verdades geométricas se obtienen a partir de estos axiomas, es posible dar un lugar a la experiencia. Es así que podemos comprender una parte de su "experimento" diseñado para comprobar si la suma de los ángulos internos de un triángulo es o no igual a dos rectos.[3]

Pero nuestra investigación no buscará ahondar en este camino, ya suficientemente andado y recorrido, sobre el posible carácter experimental de las hipótesis de la geometría. Queremos, en cambio, abrir el espacio de reflexión a un tipo de experiencia llevada adelante a través de las figuras. Una experiencia que está a su vez vinculada directamente al texto y a su lectura. Una primera observación que haremos es que nuestro estudio se referirá únicamente a la geometría plana, a esa que con justicia histórica es llamada geometría *euclidiana*, centrando nuestro interés en el papel que en ella tienen las figuras, las cuales desempeñan –en el modo específico de argumentación geométrica– un rol en la trama argumentativa global de la geometría. Nuestra atención se dirige entonces al modo en el que las figuras se inscriben en la demostración geométrica, para intentar comprender el lugar que ellas ocupan en las inferencias que, a partir de los axiomas, dan lugar al resto de proposiciones que forman el cuerpo de la geometría.

Si encontramos, por ejemplo, que todo razonamiento geométrico –e insistimos una vez más en que nos referimos únicamente a la geometría

3 Nos referimos al capítulo bien conocido de la medición de los ángulos de un triángulo cuyos vértices son las cimas de los montes Hoher Hagen, Brocken e Inselsberg.

euclidiana– es un razonamiento sobre las figuras y guiado por ellas, vale decir que toda inferencia en geometría es una inferencia dada y posibilitada por ellas. Entonces podremos concluir que será a través de la experiencia que de ellas se tiene, que depende, en gran medida, toda la geometría. Una conclusión obtenida a través de una figura, un razonamiento guiado por ella, podría en este caso considerarse como el resultado de este singular tipo de experiencia.

No debemos olvidar que la presencia de las figuras en el texto euclidiano tiene un origen tan difícil de discernir como el origen del texto mismo. Basta comparar un manuscrito tan antiguo como el *Manuscrito Vaticano* (ms. Vaticano, Gr. 190) que data del siglo X, para constatar que las figuras desempeñan en él un papel secundario y aparentemente marginal. No es claro en qué momento de la historia del texto de Euclides las figuras tomaron el papel que hoy tienen, pero es indudable que está íntimamente vinculado con un cambio en el modo en el que este texto fue leído, cambio que nos parece claro percibir ya en la matemática del siglo XVI. Pero junto con este hecho, podemos observar también que las figuras están relacionadas, al menos, con tres tipos de entidades distintas a lo largo de los trece libros de la obra euclidiana. Como lo ha señalado Gardies (1997), los *Elementos* se ocupan de tres tipos de entidades matemáticas y en su estudio las figuras no son presentadas de manera idéntica:

1. En los libros I, II, III, IV, VI, XI, X, XII y XIII las entidades son de orden propiamente geométrico.
2. Los libros VII, VIII y IX, los aritméticos, se ocupan de lo que los griegos llaman números.
3. El libro V se ocupa de las magnitudes en abstracto.

De tal manera que en el primer caso se tienen las figuras que se conocen como *figuras geométricas*, en donde una recta representa una recta, un círculo representa un círculo, un triángulo representa un triángulo, a diferencia de lo que sucede en los otros dos casos, en donde los números o las magnitudes abstractas son representados con segmentos de recta. En nuestro estudio solo nos ocuparemos del papel de la figura en el primero de los tres casos señalados anteriormente.

Debemos indicar también, que nos ocuparemos de una lectura más interesada en discutir un problema de naturaleza epistemológica que uno de naturaleza propiamente histórica, pero curiosamente vamos a centrar nuestra atención en algunas proposiciones en las que las figuras desempeñan un papel distinto al que hemos descrito brevemente. Nos referimos a algunas proposiciones en las que la conclusión y punto central del argumento geométrico se desprende de lo que en ellas se puede ver y leer. Para comprender este punto veremos algunas de estas proposiciones y cómo en ellas las figuras determinan y funcionan como un cierto instrumento experimental.

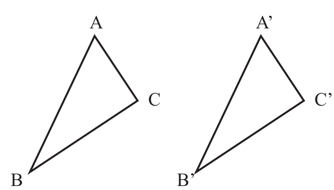
Las tres experiencias que a continuación se presentan, surgen de un tejido axiomático propio de la geometría euclidiana; prescindir de la primera experiencia, y en consecuencia de su efecto en las otras dos, será la fuente para proponer otro tejido axiomático, el de los *Fundamentos de la Geometría,* de David Hilbert (1899/1997).

Primera experiencia: el movimiento de las figuras y la determinación de la igualdad

En este caso confrontaremos, como en todos los demás, el papel que se da a las figuras en el texto y el contexto euclidiano. Comenzaremos analizando la proposición I-4 de los *Elementos*, recordando que se trata del primer teorema demostrado en el texto. Esta proposición asegura la igualdad de dos triángulos bajo la hipótesis de que dos de sus lados coinciden, junto con el ángulo formado por estos dos lados. Este teorema –nos referiremos a él como *T(LAL)*– se puede parafrasear del modo siguiente:

T(LAL): Un triángulo está determinado de manera única por dos de sus lados y el ángulo formado por ellos.

Desde luego que el primer aspecto que precisa aclaración –en torno de esta proposición– es el sentido que en ella tiene la igualdad que se asegura existe entre los dos triángulos. Dicho en otras palabras, si se parte del triángulo[4] **T**[ABC] (al que denotamos simplemente como **T**) y el triángulo **T**[A′B′C′] (denotado como **T′**), el teorema asegura que de las igualdades **L**[AB] = **L**[A′B′], **L**[AC] = **L**[A′C′] y *a*[BAC] = *a*[B′A′C′] se concluye que **T = T′**.



Gráfica 1. Teorema LAL

4 En adelante denotaremos con **L**[AB] al segmento de recta cuyos extremos son los puntos *A y B*; con *a*[BAC], al ángulo formado en el vértice *A* por los dos segmentos **L**[BA] y **L**[AC], que se encuentran en este punto; finalmente, con **T**[ABC] denotaremos al triángulo cuyos vértices son *A, B y C.*

Es claro que en este enunciado se incluyen 4 igualdades; 3 de ellas se asumen por hipótesis y una más que se debe concluir. Para comprender el sentido de estas igualdades, el autor de los *Elementos* solo dispone del criterio que se encuentra en la noción común 4 que asegura:

N.C.4. *Las cosas que coinciden entre sí (que se ajustan entre sí) son iguales entre sí.*

En esta noción común parece claro que cuando dos "cosas" (magnitudes, figuras planas o cuerpos sólidos) se ajustan la una a la otra, lo que significa que una está superpuesta sobre la otra y de este modo coincide con ella, entonces serán iguales. Este criterio de igualdad no puede ocuparse de establecer los medios para llevar a dos cosas a superponerse para verificar su posible igualdad. Ello nos obliga a suponer, a manera de hipótesis, que los lados **L**[AB] y **L**[AC] del primer triángulo podrían ajustarse y coincidir con los lados **L**[A′B′] y **L**[A′C′] del segundo, lo mismo que el ángulo *a*[BAC] lo haría con el ángulo *a*[B′A′C′], si es que fuese posible disponer de algún medio para llevarlas a superponerse unas sobre las otras.[5] Pero al aceptar esta hipótesis nos vemos conducidos a esperar que los triángulos **T** y **T′** coincidirán al superponerse uno sobre el otro, dando con ello la prueba de su igualdad.

No cuestionamos el resultado esperado de la experiencia de llevar al triángulo **T** a sobreponerse sobre el triángulo **T′**, sino el hecho mismo de que esta experiencia sea posible. Antes de explicar con cierto detalle este problema, veamos cómo procede el autor de los *Elementos*. Recordemos que la demostración (αποσειξις - apodeixis) de esta proposición se apoya en la construcción (κατασκευη - kataskeuê)[6] siguiente:

> *el triángulo* **T = T***[ABC] se aplica al triángulo* **T′ = T***[A′B′C′] y el punto B se coloca sobre el punto B′ y la línea recta* **L***[AB] sobre* **L***[A′B′] (Euclides, 2000, p. 206)*[7].

De esta construcción se desprende el argumento que busca demostrar la igualdad, entendida bajo el mismo criterio de la noción común 4, del triángulo **T** con el triángulo **T′**. Si se trata de dos figuras rectilíneas que

5 Aunque no podemos dejar de notar que al aceptar esta suposición hemos de alguna manera invertido el sentido de la Noción Común 7, ya que en este caso se asegura que "cosas" que son iguales coinciden entre sí.

6 Nos referimos a la cuarta etapa o al cuarto momento de una proposición geométrica, tal y como esta fue caracterizada en su forma general por Proclus en su *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides* y que son: la enunciación (προτασις - protasis), la exposición (εκθεσι - ekthesis), la especificación (διορισμος - diorismos), la construcción (κατασκευη - kataskeuê), la prueba (αποδειξις - apodeixis) y la conclusión (συμπερασμα - symperasma).

7 Se utiliza la primera reimpresión de la traducción de Madrid: Gredos, publicada en 1991.

son iguales, ellas lo son en virtud de que se ajustarán entre sí, siempre que sea posible dejar caer una sobre la otra. Este es claramente el sentido de la expresión "el triángulo **T** se aplica al triángulo **T'**..." (*Epharmozomenou gar tou ABG trigônou epi to DEZ trigônon kai tithemenou tou men A*)[8] que sugiere que de alguna manera se toma el triángulo **T** y "se deja caer sobre", "se superpone" al triángulo **T'**. El problema es que Euclides no ha introducido hasta este momento –recordemos que nos encontramos en la cuarta proposición del primer libro y solo disponemos de las definiciones, los postulados, las nociones comunes y las tres primeras proposiciones– ninguna operación que permita llevar a cabo dicha operación de superposición de una figura sobre otra. En otras palabras, no es claro si la coincidencia –hipotética– de los lados **L**[AB] y **L**[A'B'] y de los lados **L**[AC] y **L**[A'C'], junto con la coincidencia –también hipotética– de los ángulos *a*[BAC] y *a[*B'A'C'], son de algún modo las condiciones iniciales para llevar a cabo la experiencia de *aplicar* el triángulo **T** sobre el triángulo **T'**, o bien si esta aplicación es posible independientemente de estas igualdades. Pero antes de intentar aclarar este punto, sigamos de cerca el modo en el que termina el argumento dado por Euclides para esta proposición. Una vez que se ha aplicado el triángulo **T** sobre el triángulo **T'**, de modo que el punto *B* se coloca sobre el punto *B'* y el lado **L**[AB] sobre el lado L[A'B'], Euclides presenta como prueba (αποσειξις - apodeixis) la lectura hecha de este *experimento* pensado que consistió en haber tomado el primer triángulo y haberlo aplicado sobre el segundo:

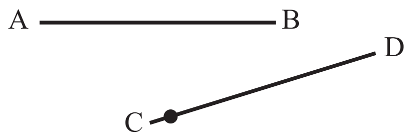
> *el lado* **L***[AB] coincide con el lado* **L***[A'B'] y el lado* **L***[AC] también coincidirá con el lado* **L***[AC'], en virtud de que el ángulo a[BAC] es igual al ángulo a[B'A'C']; por lo tanto el punto C coincidirá con el punto C'. Pero el punto B coincide con el punto B', por lo que la base* **L***[BC] coincide con la base* **L***[B'C'] y será igual a ella. Así, el triángulo completo* **T***[ABC] coincide con el triángulo* **T'***[A'B'C'] y será igual a éste. Los ángulos restantes también coincidirán con los ángulos restantes y serán iguales a ellos* (Euclides, 2000, p. 206).

De la igualdad **L**[BC] = **L**[B'C'], a la que ha llegado a través de esta experiencia de superponer los dos triángulos, Euclides concluye la igualdad **T**[ABC] = **T'**[A'B'C']. Todo el argumento parece descansar así sobre la legitimidad de la operación geométrica que permite llevar a un triángulo a ser *aplicado* sobre otro. Habíamos mencionado que Euclides no ha dado

8 Debemos señalar que el término empleado por el autor de los Elementos en esta proposición, «Ἐφαρμοζομένου - Epharmozomenou», se refiere a la voz pasiva «εφαρμοζεσθα - epharmozesthai», lo que hace referencia a una transformación geométrica –no definida ni introducida previamente– que no supone necesariamente la igualdad del triángulo **T** que "es aplicado" sobre el triángulo **T'**.

ningún postulado[9] que justifique la aplicación de una figura sobre la otra. Previo a la proposición 4, el autor de los *Elementos* solo ha introducido un procedimiento, a través de las primeras tres proposiciones, para poder *aplicar* un segmento de recta sobre otro; el procedimiento consiste, esquemáticamente, en lo siguiente:

1. Dado un segmento de recta **L**[AB] y un punto C fuera de él, es posible colocar este segmento de recta en el punto C. Esto significa que es posible trazar un segmento **L**[CD] que es igual, de acuerdo con el criterio del que se dispone, al segmento **L**[AB]. Este es el problema que se construye en la segunda proposición (I-2).[10]



Gráfica 2

2. Si se dispone de dos segmentos de recta distintos, lo que significa que uno de ellos es menor que el otro, **L**[AB] > **L**[CD], es posible quitar al segmento mayor una parte igual al segmento menor. Esta construcción está dada en la tercera proposición (I-3).

Gráfica 3

El interés que tenemos en la proposición (I-3), es que con ella es posible tomar, en un segmento de recta, una parte que sea igual a otro segmento de recta dado (y menor que el primer segmento). Vale decir que con esta tercera proposición se ha justificado plenamente el que si se tienen dos segmentos de recta, es posible *aplicar* uno sobre el otro, a condición de que no sea mayor que éste. En otras palabras, el sentido de esta construcción de aplicación no es otro sino el de que se puede encontrar un punto *E* en

9 Recordemos que son los tres primeros postulados, las *peticiones* o *demandas* (Αἰτήματα) sobre los cuales Euclides justifica las construcciones requeridas en la geometría, notablemente la construcción de un segmento de línea recta cuando se han dado los dos puntos que son sus extremos, la prolongación de un segmento de recta tanto como sea necesario y la posibilidad de trazar una circunferencia cuando se tiene un punto como centro de la misma y el segmento que da su radio.

10 Para esta construcción será necesario, como se sabe, utilizar un triángulo equilátero como figura auxiliar y cuya construcción ha sido dada en la primera proposición (I-1).

el segmento mayor **L**[AB], que será el extremo de un segmento **L**[AE] que hace parte de él, y que es igual al segmento menor **L**[CD].

Para llevar a cabo esta operación y poder encontrar el punto requerido en el segmento mayor, es necesario *colocar* un segmento de recta en un punto fuera de ella, en este caso colocar el segmento **L**[CD] en el punto *A*; lo que consiste, en estricto sentido, en poder trazar un segmento igual a este segmento dado. Cuando el autor de los *Elementos* busca *colocar* un segmento en un cierto sitio del plano –el sitio indicado por el punto dado–, ello no significa que el segmento dado se mueve o se desplaza sobre el plano para llegar a otro lugar; significa, tal y como lo muestra en la proposición I-2, que se puede trazar uno que le es igual. Esa experiencia que consiste en aplicar un segmento sobre otro está dada, primero, por una construcción que permite *trazar o construir* un segmento en otro punto del plano; pero esta construcción está basada, a su vez, en una relación de igualdad dada en las definiciones iniciales, y válida para los segmentos de recta:

> Def.: *Un círculo es una figura plana comprendida por una línea, tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí* (Euclides, 2000, p. 193).

Así, mientras las tres primeras proposiciones dan cuenta de la operación que permite colocar un segmento de recta sobre otro, la demostración de la cuarta proposición, que requiere aplicar un triángulo sobre otro, se presenta sin haber dado un procedimiento que permita aplicar una figura sobre otra mediante una construcción. Llama la atención el que Euclides acepte sin justificación alguna la posibilidad de mover y aplicar un triángulo sobre otro, mientras que ha dedicado, en cambio, las primeras proposiciones de su texto a justificar y dar cuenta de esta construcción para un segmento. Sin embargo, si el lector del texto euclidiano intenta realizar la experiencia de superponer el triángulo **T** sobre el triángulo **T′** mediante la construcción de un triángulo igual a **T** que se ajuste y coincida con **T′**, las razones que llevaron al autor de los *Elementos* a seguir el camino elegido aparecen claramente. Al intentar la construcción de un triángulo igual a **T** y que se encuentre superpuesto a **T′**, vemos que es la igualdad de los ángulos *a*[BAC] = *a*[B′A′C′] la que presenta ahora la mayor dificultad. En efecto, no se trata solo de aplicar un par de segmentos sobre otro par de segmentos, sino de aplicar al mismo tiempo un ángulo sobre otro, y no será sino varias proposiciones más adelante cuando Euclides logre, en la proposición I-23, *construir* (κατασκευη - kataskeuê) un ángulo igual a un ángulo dado, cuando se tiene un segmento y se ha señalado también uno de los extremos en el que se debe de construir dicho ángulo.[11] Esto significa que dado un

11 Queremos subrayar el hecho de que si bien las proposiciones I-2 y I-23 permiten llevar a cabo las construcciones análogas para un segmento y para un ángulo, el autor de los *Elementos*

ángulo *a*[BAC] y un segmento **L**[A′B′], se puede trazar un segmento **L**[A′C′] de modo que el ángulo *a*[B′A′C′] que forme este segmento con el segmento dado sea igual al ángulo dado.

Gráfica 4

Parece necesario disponer primero de la posibilidad de construir un ángulo *a*[B′A′C′] igual al ángulo *a*[BAC] del triángulo **T**[ABC] para poder garantizar así que los lados **L**[AB] y **L**[AC], y el ángulo que forman en este triángulo, se han *aplicado* sobre los lados y el ángulo respectivos del triángulo **T**[A′B′C′]. Podríamos comprender así que "mover un triángulo" para superponerlo sobre otro es, en el marco delineado por los postulados y las primeras proposiciones de los *Elementos*, una expresión coloquial para señalar que lo que se ha hecho ha sido *construir* a partir de un triángulo **T**[ABC] un nuevo triángulo mediante el siguiente procedimiento:

C1: Se construye un segmento **L**[A′B′], igual al segmento **L**[AB], en un punto dado A′ (proposición I-2). Se construye con este segmento **L**[A′B′] y en el punto A′ un ángulo *a*[B′A′C′] igual al ángulo *a*[BAC] (proposición I-23). Sobre el segmento trazado para construir el ángulo *a*[B′A′C′], se toma un punto C′ de modo que el segmento **L**[A′C′] sea igual al segmento **L**[AC] (proposición I-3). Finalmente se traza el segmento **L**[B′C′] a partir de los puntos B′ y C′ (postulado 1).

De este modo el teorema **T**(LAL) podría interpretarse como sigue:

> *El triángulo* **T***[A′B′C′] construido a través del procedimiento descrito por C1 es igual al triángulo dado* **T***[ABC].*

Pero este camino no solo presenta el inconveniente de tener que recurrir a una proposición no demostrada aún para el lector del texto euclidiano; lo más grave es que, por esta vía, caerá inevitablemente en un círculo vicioso, ya que la proposición I-23, en donde se lleva a cabo la construcción de un ángulo igual a un ángulo dado, requiere de la igualdad de dos triángulos a partir del criterio dado por *T(LAL)*.

habla en el primer caso de *colocar* (θέσθαι) el segmento en otro punto; en el segundo caso, señala que se va a **construir** (συστήσασθαι) un ángulo igual a un ángulo dado.

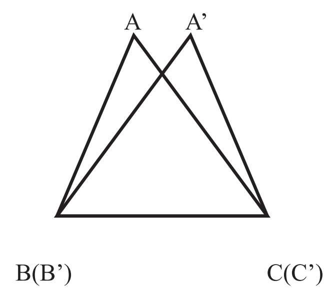
En efecto, la construcción propuesta por Euclides para la proposición I-23 consta de los siguientes pasos:

a. Trazar el segmento **L**[BC] a partir de los extremos B y C, para construir así el triángulo **T**[ABC].

b. Construir un triángulo **T**[A′B′C′] de modo que sus lados **L**[A′B′], **L**[A′C′] y **L**[B′C′] sean iguales a los segmentos dados **L**[AB], **L**[AC] y **L**[BC].

El primer paso requiere solo del primer postulado para llevarse a cabo. El segundo, requiere primero de la posibilidad de trazar un triángulo dados sus tres lados (proposición 22), pero, sobre todo, el poder asegurar que el triángulo así construido es igual al triángulo cuyos lados son los segmentos **L**[AB], **L**[AC] y **L**[BC], es decir el triángulo **T**[ABC]. Gracias a esta igualdad se podrá decir que el ángulo *a*[B′A′C′] se ha construido igual al ángulo *a*[BAC]. Esto nos permite analizar el segundo caso, en el que Euclides recurre a esta experiencia de mover y aplicar un triángulo sobre otro: nos referimos a la proposición I-8, en la cual, parafraseando el estilo que dimos a la primera versión de *T(LAL)* se demuestra que un *triángulo está determinado de manera única por sus tres lados*.

Esto significa que dados dos triángulos **T = T**[ABC] y **T′ = T**[A′B′C′], cuyos lados son iguales dos a dos, se tendrá que ellos son iguales. La prueba de la coincidencia de estos dos triángulos se lleva a cabo por Euclides de la misma forma en la que llevó a cabo la prueba de *T(LAL)*, es decir, que en la construcción (κατασκευη - kataskeuê) de esta proposición, solo se establece que el triángulo **T** se aplica sobre **T′**. Se debe subrayar, sin embargo, que ahora Euclides parece más prudente con las conclusiones que extrae de esta experiencia, muy probablemente porque en este momento ya dispone de más proposiciones para echar mano de ellas; sobre todo, dispone de *T(LAL)*, lo que le permite no forzar al lector a concluir lo que la experiencia no permite concluir. Euclides establece simplemente que después de aplicar **T** sobre **T′** ellos deberán coincidir, ya que de otro modo se tendría la siguiente situación:



Gráfica 5

Es decir que al aplicar el segmento **L**[BC] al segmento **L**[B′C′], de modo que sus extremos coincidan, se tendría que sobre un mismo segmento –y del mismo lado– se encontrarían en dos puntos distintos *A* y *A′*, dos pares de segmentos iguales dos a dos: **L**[AB] = **L**[A′B′] y **L**[AC] = **L**[A′C′]. Pero la imposibilidad de que una figura así exista ha sido establecida por el autor de los *Elementos* justo en la proposición anterior, I-7. Esto señala que la experiencia, que en estricto sentido es exactamente la misma que en *T(LAL)*, no puede ella sola mostrar la igualdad, la coincidencia de **T** con **T′**; más bien esta experiencia nos lleva a concebir una figura cuya posible existencia ha sido desechada en la proposición anterior. Este "ajuste" lleva a Euclides a concluir que la verdadera lectura de la experiencia no puede ser otra que la coincidencia de los dos triángulos.

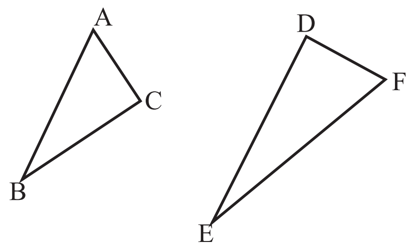
No entraremos en los detalles de la demostración de la proposición I-7; marcaremos por lo pronto el hecho de que ella depende directamente de I-5 –la que analizaremos más adelante– y ésta, a su vez, de I-4, es decir de *T(LAL)*. Con ello podemos concluir el singular hecho de que el correctivo de la experiencia de la superposición de dos figuras, llevada a cabo en I-8, está dado precisamente por la superposición de dos figuras llevada realizada en la proposición I-4.

Pero este hecho muestra la inconsistencia que subyace a la idea de querer justificar por el camino descrito la construcción (κατασκευη - kataskeuê) presentada en la proposición I-4: para poder sustituir mediante una construcción la experiencia de superponer los dos triángulos, era necesario primero poder construir un ángulo igual a un ángulo dado; esta construcción es posible si se puede realizar un triángulo igual a otro triángulo dado; pero esta igualdad buscada es precisamente la igualdad que se quiere resolver. Esto significa que el primer teorema de los *Elementos* nos obliga a aceptar, para su demostración, una singular *experiencia* que consiste en mover *imaginariamente* un triángulo para montarlo sobre otro –experiencia para la cual no se han dado los medios propios del discurso geométrico que permitan concebirla– ya que al intentar llevar a cabo la *construcción geométrica* necesaria para sustituir a dicho experimento se debe recurrir a una proposición que se basa precisamente en el teorema que se quiere demostrar. En otras palabras, sería necesario aceptar como ya demostrado lo que se quiere demostrar.

Ante este dilema el autor de los *Elementos* ha tomado partido por una experiencia imaginaria que no tiene justificación, lo que nos puede llevar a pensar en la existencia de una laguna inadmisible en un texto considerado por más de veinte siglos como el ejemplo más decantado del rigor en geometría.

Segunda experiencia: el ancla de la figura y la comparación de las magnitudes

Hasta ahora hemos señalado cuáles son, a nuestro juicio, las dificultades a las que se enfrenta el lector del texto euclidiano para llevar adelante el *experimento pensado* que se sugiere en la demostración del teorema *T(LAL)*. Una vez señaladas estas dificultades, dirijamos nuestra atención ahora a una conclusión que se extrae de esta experiencia. Para ello consideremos dos triángulos, **T**[ABC] y **T**[DEF], en los que nuevamente se tienen las igualdades **L**[AB] = **L**[DE] y **L**[AC] = **L**[DF], pero en cambio se tiene que el ángulo *a*[BAC] es distinto del ángulo *a*[EDF].



Gráfica 6

Si en este caso se *aplica* el segmento **L**[AB] sobre el segmento **L**[DE], y también el segmento **L**[AC] sobre el segmento **L**[DF], a la manera de la proposición I-3, se tendrá que en ambos casos los segmentos coincidirán –resultado esperado en nuestra experiencia– dadas las dos igualdades asumidas **L**[AB] = **L**[DE] y **L**[AC] = **L**[DF]. Pero llegado a este punto, resulta sorprendente el que en este caso sea posible también retomar a la letra la conclusión que Euclides extrae de la superposición de los dos triángulos, ya que podemos afirmar igualmente que:

> *el lado L[AB] coincide con el lado* **L***[DE], y* **L***[AC] también coincidirá con el lado* **L***[DF] en virtud de que son iguales dos a dos y de que* **L***[AB] y* **L***[AC] se han aplicados sobre* **L***[DE] y* **L***[DF] respectivamente; por lo tanto, el punto C coincidirá con el punto F, y el punto B con el punto E.*

Así, a la manera del autor de los *Elementos*, se podría concluir, cosa que violenta nuestra intuición, que de la coincidencia de los puntos C con F y B con E, se tiene que la base **L**[BC] de **T**[ABC] coincide con la base **L**[EF] de **T**[DEF] y será, por lo tanto, igual a ella.[12]

12 Recordemos que en la demostración (αποσειξις) de *T(LAL)* la igualdad de las bases **L**[BC] y **L**[B'C'] se apoya en la siguiente aclaración: *Si cuando B coincide con B' y C con C', la base*

La resistencia a usar la coincidencia de los puntos para concluir la igualdad de los lados **L**[BC] y **L**[EF] nos permite ver claramente que la igualdad de los lados **L**[BC] y **L**[B′C′] en la prueba euclidiana de *T(LAL)* no se deriva de la coincidencia de los extremos de estos dos segmentos –B con B′ y C con C′– sino de la igualdad del ángulo *a*[BAC] con el ángulo *a*[B′A′C′], igualdad que en el caso de los triángulos **T**[ABC] y **T**[DEF] no se cumple. Resulta paradójico el que Euclides haya utilizado un argumento que deriva de las relación de *incidencia*, que vincula dos tipos de objetos geométricos –los puntos y las líneas– al afirmar que es solo una línea la que puede pasar por dos puntos,[13] cuando el resultado buscado deriva de otro tipo de relación, la que permite comparar en magnitud líneas y ángulos. El argumento utilizado por Euclides llama tanto más nuestra atención, cuanto que a la par de la experiencia por la que nos ha llevado, surge otra experiencia imaginaria que nos permite formular como hipótesis el que la magnitud del ángulo *a*[BAC] está relacionada directamente con la magnitud del lado **L**[BC] que lo subtiende.

Ello nos lleva a proponer una nueva versión del teorema *T(LAL)*:

> I. *Si dos triángulos* **T***[ABC] y* **T***[A′B′C′] son tales que las igualdades* **L***[AB] =* **L***[A′B′] y* **L***[AC] =* **L***[A′C′] se satisfacen, entonces de la igualdad a[BAC] = a[B′C′] se concluye la igualdad* **L***[BC] =* **L***[B′C′] y de ahí la igualdad de los triángulos* **T***[ABC] y* **T***[A′B′C′].¬*

Lo interesante de esta formulación para *T(LAL)* es que ella nos permite descubrir un vínculo estrecho entre este teorema y las siguientes proposiciones:

> II. *En todo triángulo el lado mayor subtiende al ángulo mayor y al ángulo mayor lo subtiende el lado mayor.*
>
> III. *Si dos triángulos* **T***[ABC] y* **T***[DEF] son tales que las igualdades* **L***[AB] =* **L***[DE] y* **L***[AC] =* **L***[DF] se satisfacen, entonces de la desigualdad a[BAC] < a[EDF] se concluye la desigualdad* **L***[BC] <* **L***[EF] y de ahí la desigualdad de los triángulos* **T***[ABC] y* **T***[A′B′C′].¬*

Hemos señalado que el autor de los *Elementos* invita al lector a obtener de la coincidencia de los extremos de los lados superpuestos, con ayuda

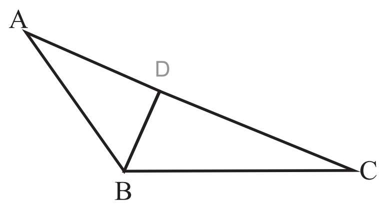
---

L*[BC] no coincide con la base* **L***[B′C′], dos líneas encerrarán un espacio, lo que es imposible. Por lo tanto la base* **L***[BC] coincide con la base* **L***[B′C′]*. Sabemos que la autenticidad de esta aclaración ha sido puesta en duda por algunos comentadores de la obra euclidiana; lo que parece indiscutible es que está en el origen de la Noción Común 9.

13 Claramente, aunque el texto euclidiano no lo mencione, es posible establecer la misma propiedad con la propiedad dual: es sólo un punto, el que se encuentra simultáneamente en dos líneas.

de un argumento acerca del número de rectas que pueden pasar por dos puntos distintos, la igualdad –coincidencia– del tercer lado; veamos ahora cómo procede para la prueba de las proposiciones (II) y (III). Notemos que estas dos últimas proposiciones son las I-18 y I-19 (II), y I-24 (III), lo que muestra que mientras que la posibilidad de formularlas a manera de conjetura es inmediata tras una ligera variación en el experimento imaginario, su demostración requiere del despliegue de una trama argumentativa mucho más compleja que la que se empleó en *T(LAL)*.

Analizaremos con cierto cuidado estas demostraciones, ya que en ellas veremos con toda claridad un segundo tipo de experiencia figural. Para la prueba de las proposiciones I-18 y I-19, nuestra proposición (II), Euclides considera primero un triángulo **T**[ABC] en el que el lado **L**[AC] > **L**[BC].



Gráfica 7

Sobre el segmento **L**[AC] toma un punto D, de tal manera que **L**[CD] = **L**[BC], a la manera de la proposición I-3, y traza (postulado 1) el segmento **L**[BD]. Ahora asegura que *a*[CBA] > *a*[CBD], y que este último ángulo es igual a *a*[CDB]. No nos ocuparemos, por lo pronto, de esta última igualdad demostrada por Euclides en la proposición I-5 y que analizaremos más adelante –de la cual, por cierto, el lector habrá apreciado ya que se encuentra en cierta armonía con la proposición I-18 que nos ocupa en este momento– y nos concentraremos en la primera desigualdad. Pero antes de ello concluiremos nuestra presentación del argumento euclidiano. El ángulo *a*[CDB] es mayor que el ángulo *a*[BAC], desigualdad demostrada en la proposición I-16, lo que termina la demostración, ya que *a*[CBA] > *a*[CBD] = *a*[CDB] > *a*[BAC].[14]

La prueba de la desigualdad *a*[CDB] > *a*[BAC], al igual que la prueba de la desigualdad *a*[CBA] > *a*[CBD], se obtiene a partir de un nuevo tipo de experiencia con las figuras, en la cual lo que la figura muestra constituye el

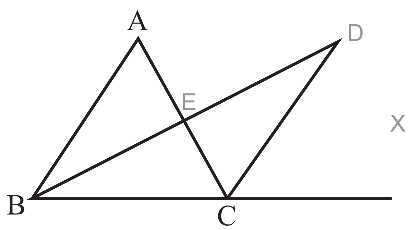
14 Con base en el mismo argumento, es posible probar que la relación inversa se cumple: si *a*[CBA] > *a*[BAC] entonces **L**[AC] > **L**[BC]. Si esta última relación no se cumple, entonces **L**[AC] ≤ **L**[BC]. Si **L**[AC] = **L**[BC] entonces, por la proposición I-5, se tendría que *a*[CBA] = *a*[BAC], lo que contradice la hipótesis asumida. Si **L**[A,C] < **L**[BC] se tendría, por lo que se acaba de probar, que *a*[CBA] < *a*[BAC], lo que contradice nuevamente la hipótesis asumida.

fundamento para lo que sobre ella se demuestra. De hecho, ninguna de las dos desigualdades se deduce a partir de un postulado o de algún teorema previo, sino simplemente a partir de lo que la figura muestra. Es fácil observar que en el caso de la desigualdad *a*[CBA] > *a*[CBD], sólo la disposición del segmento **L**[BD] en la figura permite concluir la desigualdad de los dos ángulos. Claro que nuevamente Euclides no procede en el vacío y se apoya en otra noción común, la número 5, que asegura:

N.C. 5. El todo es mayor que la parte.

Es la disposición de este segmento, con el cual se forma el ángulo *a*[CBD], la que permite decir que éste es una parte del ángulo *a*[CBA]. Esta proposición I-18 forma parte de un ciclo de proposiciones, iniciado en I-16 y del que también forma parte la proposición I-24, en las que las figuras muestran –y demuestran, para el autor de los *Elementos*– ciertas relaciones entre magnitudes que no se habían obtenido ni planteado previamente.

Veamos cómo la demostración de I-16, que asegura que en todo triángulo el ángulo externo es mayor que cualquiera de los ángulos internos opuestos, procede de la misma forma. Para este enunciado (προτασις - protasis), tomemos la exposición (εκθεσις - ekthesis) y especificación (διορισμος - diorismos) siguientes: si **T**[ABC] es un triángulo cuyo lado **L**[BC] se ha prolongado (postulado 2) hasta el punto X, el ángulo externo *a*[ACX] será mayor que cualquiera de los dos ángulos internos *a*[BAC] y *a*[CBA].



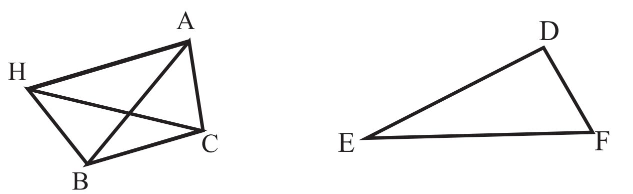
Gráfica 8

Para dar paso a la construcción (κατασκευη - kataskeuê), Euclides toma el punto medio E del segmento **L**[AC] –construcción hecha en la proposición I-10– y el segmento **L**[BE] se prolonga hasta D, de modo que **L**[BE] = **L**[ED] y traza el segmento **L**[CD]. Ahora, del teorema *T(LAL)*, se concluye la igualdad de los triángulos **T**[ABE] y **T**[CDE] en virtud de que el ángulo *a*[CED] es igual al ángulo *a*[BEA][15] y, por el mismo teorema *T(LAL)*, se tiene también que el ángulo *a*[ECD] es igual al ángulo *a*[EAB]. Nuevamente es la disposi-

15 Debido a la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice, demostrada por Euclides en la proposición I-15.

ción del segmento **L**[CD] en la figura, la que permite concluir que el ángulo *a*[ECD] es menor que el ángulo *a*[ECX] por ser una parte de éste. El autor de los *Elementos* nos invita a ver en la figura una desigualdad entre magnitudes que no parece tener otra posible justificación. En esta proposición Euclides no impone a la figura una relación –de igualdad o desigualdad– entre magnitudes a partir del contenido mismo de la trama argumentativa, sino que extrae esta relación únicamente de la figura y, a partir de ella, esta relación se inscribe en esa trama.

Antes de extraer las conclusiones a las que nos lleva este nuevo tipo de experiencia con las figuras, experiencia en la cual es la figura la que nos permite determinar cuál de dos magnitudes es mayor y cuál es menor, y que hemos detectado en la prueba de las proposiciones I-18 y I-16, veamos la demostración de la proposición I-24, a fin de poder apreciar cómo es el mismo tipo de experiencia la que la sustenta y poder llevar a cabo una reflexión global sobre ésta. En este caso el autor de los *Elementos* se encuentra nuevamente frente a los dos triángulos de la figura 6 y, en virtud de que el ángulo *a*[BAC] es menor que el ángulo *a*[EDF], construye sobre el lado **L**[AC], y del lado en el que se encuentra el punto B, un ángulo *a*[HAC] que es igual al ángulo *a*[EDF]. No es extraño, así, que resulte lo siguiente:



Gráfica 9

El segmento **L**[AH] con el que se forma el ángulo *a*[HAC] = *a*[EDF], a partir de **L**[AC], deberá caer por fuera del ángulo *a*[BAC]; este hecho no ha sido plenamente sancionado por ninguna proposición previa, pero podemos aceptar que esta es la manera en la que la figura que se construye recupera y se pliega a la exigencia de que *a*[BAC] < *a*[EDF], de modo que de esta forma expresa lo que la noción común 5 establece. Una vez trazado el segmento **L**[AH], de modo que también sea igual en magnitud al segmento **L**[ED], se trazan los segmentos **L**[BH] y **L**[CH]. Se podrá reconocer que se ha trazado el triángulo **T**[HAC] a través del procedimiento **C1** –que describimos anteriormente– y que es por lo tanto igual al triángulo **T**[EDF], por lo que podemos concluir también que **L**[CH] = **L**[EF]. Esta igualdad permite afirmar, con base en la proposición I-5 ya mencionada, que *a*[AHB] = *a*[ABH]. Ahora es la figura quien nos permite concluir las siguientes relaciones entre ángulos: *a*[CBH] > *a*[ABH] y *a*[AHB] > *a*[CHB]. Con ellas llegamos así a que *a*[CBH] > *a*[CHB].

Los tres teoremas analizados, I-18, I-16 y I-24, tienen en su enunciado (προτασις - protasis) la propiedad singular de asegurar la desigualdad de dos magnitudes geométricas: se asegura que la relación de desigualdad entre dos lados de un triángulo implica la misma relación de desigualdad entre los ángulos que estos lados subtienden, o bien se asegura que el ángulo externo de un triángulo será mayor (desigual) que cualquiera de los ángulos internos opuestos; o, finalmente, que si en dos triángulos con dos lados iguales los ángulos formados por estos lados son desiguales, los lados que subtienden a estos ángulos serán también desiguales. Esta condición especial nos permite comprender el papel que en ellas desempeñan ahora las figuras, ya que no se les pedirá que muestren o constaten una igualdad, sino una desigualdad. Primero debemos señalar que, tanto para la relación de igualdad como para la desigualdad entre magnitudes, Euclides ha tenido que apoyarse en las nociones comunes –llamadas así debido a que se trata de nociones que son igualmente válidas para todas las magnitudes geométricas, o bien que son comunes a ellas–, pero el punto delicado es el de aclarar cómo estas nociones comunes deberán aportar el criterio que en ellas se busca en cada caso.

Ya hemos visto cómo el criterio de igualdad derivado de la noción común 4 parecía imponer ese tipo particular de experiencia con las figuras: la superposición; y no debemos olvidar que para el teorema *T(LAL)* resultó imposible sustituirla o dar cuenta de ella a partir de las construcciones de los segmentos y de los ángulos dadas en I-2 y I-23. Ahora aparece con claridad el hecho de que el papel de estas construcciones fue el de hacer posible también la superposición de magnitudes *distintas* –como lo establece claramente el enunciado de I-3– y que en virtud de la noción común 5 deberá presentar a una como parte de la otra. Si de antemano se ha establecido una relación de orden entre las magnitudes geométricas, entonces la figura deberá apegarse a ella, como lo hicimos notar en la gráfica 9 con el ángulo *a*[HAC] que es mayor, por hipótesis, que el ángulo *a*[BAC]. Pero en el caso de las tres proposiciones que nos ocupan, el orden de magnitud entre los ángulos se extrae de la figura misma. En el caso de la proposición I-16 vemos cómo este mecanismo funciona claramente: se busca demostrar que el ángulo interno –y opuesto– *a*[BAC] es menor que el ángulo externo *a*[ACX] (gráfica 8); para ello se lleva a cabo una construcción que no es sino la superposición del primero sobre el segundo para constatar –diríamos *experimentalmente*– que en efecto es menor por ser una *parte* de él. Claramente esta experiencia no puede ser la mera construcción del ángulo interno *a*[BAC] sobre el lado **L**[AC] –y del lado en el que se encuentra el punto X– pues hay dos problemas que lo impiden; el primero, obvio, es que nos encontramos en la proposición I-16 y la construcción del ángulo igual a un ángulo dado se dará hasta la proposición I-23; el segundo, más directamente ligado a nuestro tema, es que de llevar a cabo esta construcción, Euclides no dispone de ningún medio para poder dirimir si el segmento **L**[CD], con el que este ángulo se formaría, cae dentro o fuera del ángulo externo *a*[ACX]. Por ello se ve obligado a invertir el problema y llevar a cabo la construcción descrita, en la cual la figura presenta el ángulo *a*[ACD] con la doble propiedad de ser una parte del ángulo *a*[ACX] –por lo tanto, menor que éste– y también la de ser igual al ángulo *a*[BAC]. La desigualdad que se quiere demostrar en el teorema I-16 es extraída de la primera de estas dos propiedades, y es claro que en este caso la figura predetermina la relación y fija así su papel con el cuerpo teórico en el que se inscribe.

Hemos visto cómo las tres proposiciones analizadas nos permiten apreciar un nuevo papel de las figuras, en las que ahora son ellas quienes aportan la verificación de lo que se afirma. Es claro que las figuras[16] presentadas en los *Elementos* deben leerse en dos momentos: primero, la atención debe concentrarse viéndolas como la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la especificación (διορισμος - diorismos) de la proposición; en este caso la figura queda sujeta a unas condiciones iniciales. En un segundo momento, se añaden a la figura las construcciones geométricas necesarias para alcanzar la demostración de la proposición; esto es lo que en ella corresponde a la construcción (κατασκευη - kataskeuê). Mientras que el primer momento no es sino la representación de lo que el enunciado (προτασις - protasis) establece y no parece requerir de más justificación, el segundo momento está siempre basado en los postulados –que deben verse así como cláusulas constructivas– y en las proposiciones que tienen el fin de proporcionar una construcción.[17] Así, en la proposición I-16, la figura correspondiente (gráfica 8) consta, en el momento de la exposición (εκθεσις - ekthesis) y de la especificación (διορισμος - diorismos), únicamente del triángulo **T**[ABC], en el cual el lado **L**[BC] se ha prolongado hasta el punto X; ella presenta de este modo un triángulo y un ángulo externo *a*[ACX] que, se asegura, será mayor que los ángulos internos *a*[BAC] y *a*[ABC]. El segmento **L**[BD] –que pasa por el punto E– y el segmento **L**[CD], así como el triángulo **T**[CDE], son colocados ahí por la construcción (κατασκευη - kataskeuê).

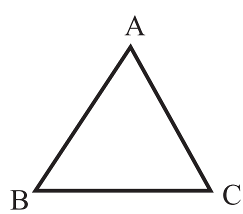
16 Desde luego nos referimos únicamente a las figuras que muy atinadamente J. L. Gardies (1997) ha llamado "figuras verdaderas", en comparación con las "figuras falsas", cómo la expuesta en la gráfica 5. Para más detallada explicación de estas nociones remitimos al lector a la obra *L'organisation des mathématiques grecques de Théétete a Archimede*.

17 Nos referimos a las proposiciones que son conocidas como *problemas* entre las que se encuentran justamente las proposición I-23 que hemos analizado.

A partir de estos dos momentos de la figura, el *canon* euclidiano consiste en hacer que sea en la prueba (αποδειξις - apodeixis) en donde se establezcan las propiedades y relaciones de lo que en la construcción se añadió a la figura original, ya que de esto depende el que aquello que se afirmó en la especificación (διορισμος - diorismos), quede así plenamente demostrado. Pero el papel que desempeñan las figuras en las tres proposiciones que hemos analizado no se ajusta plenamente a este *canon*, ya que en ellas las figuras devienen un elemento constitutivo de la prueba misma. Lo que se concluye en la prueba (αποδειξις - apodeixis) no se establece a propósito de las figuras sino a partir de ellas, exigiendo por lo tanto otro tipo de papel de la figura, en donde no es ella la que se ancla a condiciones de partida, sino son las relaciones finales las que se anclan a la figura. La conclusión (συμπερασμα - symperasma) depende así de lo que la figura ha logrado introducir en la prueba.

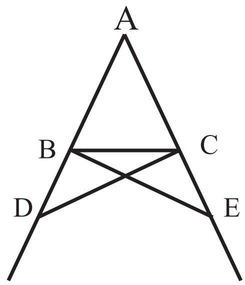
Para comprender este punto con mayor claridad, veamos la prueba de la proposición I-5, de la que ya hemos hablado, para constatar que en ella la figura se ajusta plenamente al *canon* descrito, *canon* del cual se alejan nuestras tres proposiciones analizadas. A manera de contrapunto tenemos ahora una proposición en la cual veremos que el papel de las figuras es el de aceptar en cada paso lo que el enunciado, la construcción y la prueba le llevan a aceptar. La figura se sujeta a relaciones que provienen de esos tres componentes.

En la proposición I-5 el autor de los *Elementos* tiene que demostrar que en un triángulo isósceles los ángulos subtendidos por los lados iguales, son iguales. La figura que *expone* esta proposición es simplemente la de un triángulo isósceles y en ella se *determina* también lo que se debe demostrar: si en el triángulo **T**[ABC] se tiene que los lados **L**[AB] y **L**[AC] son iguales, entonces los ángulos *a*[ABC] y *a*[ACB] también son iguales.



Gráfica 10

Una vez completadas estas dos primeras etapas, viene el momento de la *construcción* de las condiciones auxiliares y, con ellas, la figura se transforma del modo siguiente:



Gráfica 11

En donde se han prolongado los segmentos **L**[AB] y **L**[AC] y se ha tomado un punto D sobre la prolongación de **L**[AB], para encontrar después sobre la prolongación de **L**[AC] un punto E, tal que **L**[AE] sea igual a **L**[AD]. Vemos que son los postulados y las primeras proposiciones quienes permiten justificar plenamente lo que hasta aquí se ha hecho, y podemos decir que son ellos, como parte de la trama argumentativa de esta proposición, los que nos permiten *ver* las igualdades de estos segmentos en la figura. La figura queda anclada a los postulados y a las primeras proposiciones, y de ellos se derivan las conclusiones que a continuación se señalan. A partir de la construcción mencionada anteriormente, se puede concluir, de acuerdo con el teorema *T(LAL)*, que **T**[ABE] = **T**[ACD] ya que las condiciones iniciales de la proposición han establecido las siguientes igualdades –las mismas que la figura asume– **L**[AB] = **L**[AC] y **L**[AE] = **L**[AD], que son los lados que en estos dos triángulos son iguales dos a dos y que forman el mismo ángulo *a*[BAC]. La igualdad de estos dos triángulos permite concluir la igualdad de los segmentos **L**[BE] y **L**[CD] que la figura asume nuevamente. Ahora entra en escena una nueva noción común, la 3, que asegura:

N.C. 3. Si iguales se quitan a iguales, los residuos son iguales.

Con esta noción común se puede asegurar que **L**[BD] = **L**[CE]; de esta igualdad y la de los lados **L**[BE] y **L**[CD], junto con la de los ángulos *a*[AEB] y *a*[ADC] –que se sigue de la igualdad de los triángulos **T**[ABE] = **T**[ACD]–, se tiene la igualdad de los triángulos **T**[BCD] = **T**[BCE]. De esta última igualdad se obtiene, a su vez, la igualdad de los ángulos *a*[CBE] = *a*[BCD], a partir de la cual, mediante una nueva aplicación de la misma noción común, se obtiene finalmente la igualdad que se quería demostrar: *a*[ABC] = *a*[ACB].

Podemos apreciar así cómo todas las igualdades entre triángulos, segmentos y ángulos que presenta esta segunda figura –la que, a partir de la que expone y determina la proposición, incorpora los trazos de la construcción–

le son impuestos por el texto que despliega el autor en su demostración. Ninguna de ellas se deriva directamente de la figura.

Un caso completamente distinto, lo señalamos en su momento, se presenta con las proposiciones I-16, I-18 y I-24 que analizamos previamente; en ellas la figura impone al texto una relación de desigualdad entre algunas de las magnitudes geométricas involucradas y, a partir de ello, se sigue la demostración de las proposiciones. Si se retornan la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la construcción (κατασκευη - kataskeuê) necesarias para la prueba de I-16, se podrá constatar que en el momento de evidenciar que el ángulo *a*[ACD] es igual al ángulo *a*[BAC] y menor que el ángulo *a*[ACX], la primera igualdad se extrae del teorema *T(LAL)* y es impuesta a la figura, pero la segunda desigualdad es impuesta por la figura e introducida así a la prueba; solo entonces la *conclusión* se sigue.[18]

Es este hecho el que coloca a las figuras involucradas en estas proposiciones en el papel de aportar, a la manera de un dato experimental, las relaciones entre magnitudes que devienen esenciales en la prueba proporcionada por el autor de los *Elementos* para ellas. Podemos decir que sin este nuevo papel no es posible alcanzar la prueba que se busca.

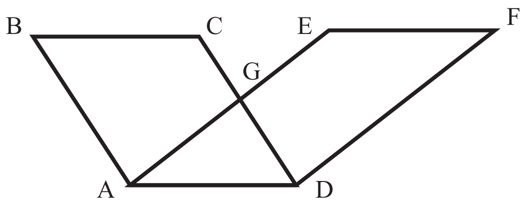
Existe una interesante –y aparentemente obvia– consecuencia de la proposición I-16, que es presentada por el autor de los *Elementos* en la proposición que afirma que en todo triángulo dos ángulos cualesquiera siempre son menores que dos ángulos rectos. Desde luego que son obligados dos tipos de comentario acerca de esta proposición I-17. El primero se refiere al hecho de que ella parece anunciar al teorema sobre la suma de los ángulos internos del triángulo –proposición I-32– y por ende queda pendiente su relación con el postulado 5 o con su contrapuesta. Sin embargo, dejaremos de lado este tipo de comentario en este trabajo y nos concentraremos en el segundo tipo, que refiere a la idea subyacente y que sugiere que los ángulos se pueden *sumar* o *añadir* unos a otros. Es claro que no puede haber otra posible interpretación para la afirmación de que cualesquiera dos ángulos internos de un triángulo *son menores que dos rectos*, ya que con ella el lector interpreta que la **suma** de dos ángulos internos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos. Hay dos condiciones que deben de satisfacerse para poder dar sentido pleno a esta afirmación: la primera, es la que fija el patrón de comparación, es decir, este valor que es el de "dos ángulos rectos". A partir de lo que Euclides ha demostrado en la proposición I-13, se

18 Se habrá notado que en todas ellas la figura impone una relación de desigualdad entre ángulos, pero se podrá revisar con esta misma óptica la demostración que presenta Euclides en su proposición III-2 y en la cual se podrá observar cómo es, en ese caso, la figura la que impone una relación de desigualdad entre segmentos de recta.

puede asegurar que los ángulos a[ACB] y a[ACX] en la gráfica 8 son iguales a (suman) dos ángulos rectos; la proposición se sigue inmediatamente de este hecho si en lugar del ángulo externo a[ACX] se toma cualquiera de los otros dos ángulos internos. Pero se debe observar que la suma de dos ángulos se entiende, por ahora, solo bajo la hipótesis de que los ángulos que se suman se encuentran uno junto al otro, a fin de poder dar sentido geométrico a esta operación de adición de ángulos. Por ello, no podemos considerar como legitimada plenamente esta operación de adición entre ángulos sino hasta la proposición I-23 con la cual, al tomar dos ángulos –sin imponer en ellos la condición de que tengan un lado común– es posible llevarlos precisamente a esta situación. Con esta observación se puede comprender claramente que el sentido geométrico de la suma de segmentos ha quedado plenamente establecido desde la proposición I-3.

Pero el paso más delicado dado por Euclides, es aquel en que se refiere a la suma de figuras rectilíneas. Esto nos obliga a hacer una precisión a propósito del lenguaje que utilizaremos en adelante, ya que hasta ahora no ha habido ninguna ambigüedad con el término "figura". En adelante aparecerá un nuevo uso de este término, sin que ello suponga el abandono del uso anterior. Cuando nos refiramos a las figuras rectilíneas, entenderemos con ello un dominio o región. Una figura (Σχημα) rectilínea es concebida como un *dominio* que se suma a otro, dando lugar a una nueva figura rectilínea, que se concibe como la suma de estos dos dominios. Así, las operaciones aditivas entre estas magnitudes están supeditadas a la posibilidad de operar con las figuras (Σχημα) rectilíneas que las expresan. El colocar "uno junto al otro" es el resultado de operar con ellas, pero la acción que lleva a ese resultado consolida una operación con magnitudes. A falta del término "rectilínea" nos referiremos, como hasta ahora, a las figuras en las que claramente se ven involucradas magnitudes geométricas, pero que no han sido concebidas ellas mismas como magnitudes.

En realidad, en las primeras 33 proposiciones de su obra Euclides no ha tratado ninguna otra figura (Σχημα) rectilínea aparte del triángulo; el círculo ha sido utilizado en algunas de ellas como figura auxiliar. Es en la proposición I-34 en la que Euclides introduce al paralelogramo como nueva figura (Σχημα) rectilínea y para la cual demuestra, en esta proposición, la igualdad de los lados y de los ángulos opuestos. Pero el estudio de estas nuevas magnitudes representadas por las figuras (Σχημα) rectilíneas requiere de llegar a establecer un nuevo criterio de igualdad para ellas, en el cual la condición de que éstas se ajusten una sobre la otra para poder ser consideradas como iguales, no es ya necesaria. Recordemos que si "sumar" es "colocar junto al otro", el criterio de ajustar para concluir la igualdad no da elementos para establecer la permanencia de la igualdad en este proceso operativo. Como se sabe, es la proposición I-35 la que demuestra que dos paralelogramos cuya base es la misma –proposición que de inmediato se generaliza al caso de dos paralelogramos cuyas bases son iguales– y que se encuentran entre las mismas paralelas, son iguales. Obviamente, bajo esta afirmación no se pretende que se llegue a hacer ver que son dos paralelogramos coincidentes, sino que se trata de dos figuras (Σχημα) rectilíneas que solo son parcialmente coincidentes entre sí. Si seguimos la prueba de esta proposición I-35 podemos observar claramente el punto al que nos referimos; Euclides considera dos paralelogramos con la misma base y que se encuentran entre las mismas paralelas, lo que significa, de acuerdo con la exposición (εκθεσις - ekthesis) de esta proposición, que en los paralelogramos **P**[AC] y **P**[AF] (gráfica 12), si el segmento **L**[BC] se prolonga en dirección del punto E, se encontrará que este y el punto F se encuentran en la línea así prolongada. Se asegura entonces que estos dos paralelogramos son iguales. Si ahora, a la figura que presenta esta exposición (εκθεσις - ekthesis) le añadimos los trazos marcados por la construcción (κατασκευη - kataskeuê) propuesta por Euclides, y que consiste simplemente en trazar el segmento **L**[CE], el papel de la figura cambia cualitativamente.



Gráfica 12

No se trata ahora de que la figura muestre que ciertas magnitudes son menores o iguales que otras, sino de introducir en la trama misma del argumento demostrativo el que los paralelogramos **P**[AC] y **P**[AF] son el resultado de sumar el triángulo **T**[AGD] y de restar el triángulo **T**[CEG] a los triángulos **T**[BAE] y **T**[CDF] respectivamente. La igualdad de los triángulos **T**[BAE] y **T**[CDF] se obtiene a partir del teorema *T(LAL)*, dada la igualdad de los lados **L**[AB] = **L**[CD] y **L**[AE] = **L**[DF], y la de los ángulos *a*[BAE] = *a*[CDF]. Estas últimas igualdades de los lados y los ángulos se desprenden de las propiedades demostradas para el paralelogramo en la proposición anterior y de la igualdad de los ángulos correspondientes formados por dos paralelas y una transversal, demostrada en la proposición I-29. Todas estas igualdades se derivan de las proposiciones anteriores y es la figura la que tiene que asumirlas. Pero es ahora la figura la que muestra que los paralelogramos **P**[AC] y **P**[AF] se obtienen mediante la suma y la resta de los triángulos iguales; es solo después de que esto ha sido aceptado en el argumento, que su igualdad se deriva de la noción común 3 y de la siguiente:

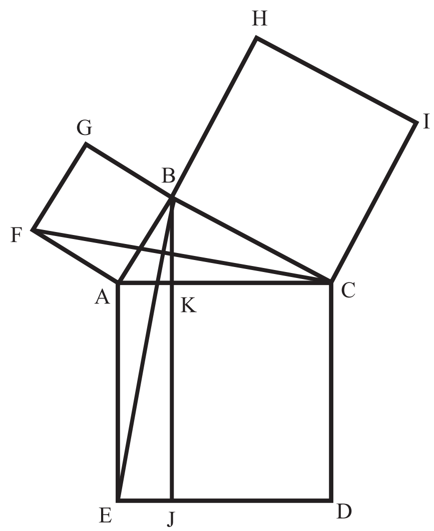
N.C. . Si se suman iguales a iguales, los totales son iguales.

Claramente las nociones comunes 2 y 3 comparten un mismo tipo de relación con las figuras, ya que al darles a ambas un sentido geométrico, se debe hablar de tres magnitudes geométricas, segmentos de recta, ángulos y figuras (Σχημα) rectilíneas, y se asegura que si se parte de magnitudes iguales a las cuales se *suman* o se sustraen magnitudes iguales, lo que se obtiene –los totales o los residuos– son iguales. Estas dos nociones comunes hablan así de una *regla* de la adición o de la sustracción, pero cuando se aplica a las anteriores magnitudes geométricas, es la figura la que puede dar cuenta de esta operación. Así, las figuras son portadoras de las operaciones que, aplicadas a magnitudes iguales, dan como resultado magnitudes iguales. Esto significa que el tránsito del criterio de igualdad a partir de la coincidencia –y cuya relación con las figuras ya fue analizado– al criterio de permanencia de la igualdad a partir de las operaciones con iguales, requiere que las operaciones geométricas de suma y resta se encuentren debidamente legitimadas en el argumento demostrativo; éste es el papel que desempeñan las figuras en el ciclo de proposiciones que nos ocupa ahora.

Desde luego que estas operaciones aparecen, siempre apoyadas en las nociones comunes, en muchas de las más célebres proposiciones de los *Elementos*; baste mencionar, por ejemplo, la proposición I-32, ya aludida anteriormente, y en la cual de manera explícita se habla de la suma de los tres ángulos internos de un triángulo. Se sabe que la prueba de esta proposición depende del postulado 5 y es importante notar que, de hecho, este mismo postulado requiere, antes de su posible utilización, el que se aclare el sentido de la *suma* de los ángulos ahí mencionada. Recordemos que este postulado asegura que dos líneas que sean atravesadas por una línea transversal se cortarán si se prolongan lo suficiente, siempre que ellas formen, con la transversal, ángulos internos que sean menos de dos rectos. Mucho se ha dicho a propósito de la aparición tardía de este postulado en el texto euclidiano –hasta la proposición I-29– y algunos autores sostienen que ello se debe a la resistencia del escritor de los *Elementos* a recurrir a él; nosotros creemos que este "retraso" del autor a recurrir a su postulado, obedece a la necesidad intelectual de aclarar dos problemas con este enunciado. El primero, que en modo alguno debe ser tenido como trivial, exige que se dé sentido al referente: el significado que tiene el ser *menor* que dos ángulos rectos. El segundo, se refiere claramente al sentido en el que habrá de comprenderse la *suma* de estos dos ángulos. Hemos hecho ver que estos problemas están íntimamente vinculados con el tema que nos ocupa, y claramente la aparición tardía de este postulado en la trama general del texto euclidiano está ligado al desarrollo que aquí hemos tratado de delinear y al papel que las figuras deben desempeñar en el cuerpo general del texto geométrico.

Pero creemos que el papel de las figuras en esta ley de adición y de sustracción es llevado a su forma más completa cuando, a través de ellas, se tiene que dar cuenta de las operaciones hechas sobre las figuras (Σχημα) rectilíneas. El ejemplo analizado de la proposición I-35 inicia este ciclo que terminará con la última proposición del libro 11, la XI-14. Dentro de este ciclo ocupa un lugar especial la prueba dada por el autor de los *Elementos* a la proposición I-47, conocida como el teorema de Pitágoras, que establece, a través de la figura, el algoritmo para la suma de cuadrados. Pasemos directamente a la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la especificación (διορισμος - diorismos) de esta proposición: si se toma al triángulo rectángulo **T**[ABC], se trata de probar que el cuadrado **Q**[AD] es igual a la *suma* de los cuadrados **Q**[AG] y **Q**[BJ]. La construcción (κατασκευη - kataskeuê) procede ahora en dos tiempos: primero se traza simplemente el segmento **L**[BJ], como la perpendicular al segmento **L**[ED] desde el punto B. Con este simple trazo, el lector sabe de inmediato cuál será el curso de la demostración. En efecto, la figura establece una suma de figuras (Σχημα) rectilíneas: el cuadrado **Q**[AD] es la *suma* de los paralelogramos **P**[EK] y **P**[DK], y a partir de esta igualdad se tendrá que probar que los cuadrados **Q**[AG] y **Q**[BI] son iguales a estos dos paralelogramos. Para la prueba de la primera igualdad **Q**[AG] = **P**[EK] se trazan, –segundo momento de la construcción–, los segmentos **L**[EB] y **L**[FC], lo que hace que la prueba ahora sea, una vez más, obtenida a partir de *T(LAL)*. Los triángulos **T**[ABE] y **T**[AFC] son iguales por tener dos lados iguales, **L**[AE] = **L**[AC] y **L**[AB] = **L**[AF], y los ángulos formados por éstos, *a*[EAB] y *a*[CAF], son también iguales. Las igualdades entre los lados se desprenden directamente de la definición del cuadrado; la igualdad de los ángulos ya se obtiene, nueva intervención de la figura, para fijar una operación de magnitudes, debido a que ambos son iguales a la suma de un ángulo recto y el ángulo *a*[BAC]. Ahora es la simple aplicación de la proposición I-41 –que asegura que los paralelogramos duplican al triángulo que tiene la misma base y se encuentra entre las mismas paralelas– la que permite concluir la prueba. La prueba de la igualdad **Q**[BI] = **P**[DK] procede de manera totalmente análoga.

Como en los dos casos anteriores, podemos apreciar que el papel experimental de las figuras se inicia en el momento de la construcción (κατασκευη - kataskeuê), ya que es hasta entonces cuando devienen un instrumento necesario en la prueba. Hemos insistido en el hecho de que antes de la construcción, la figura solo despliega la exposición (εκθεσις - ekthesis) y la especificación (διορισμος - diorismos), es decir que solo asume y muestra lo que en el enunciado (προτασις - protasis) se ha establecido como existente –lo que establece un primer tipo de ancla–, a saber un cierto objeto geométrico, un triángulo o un paralelogramo, así como las propiedades que de él se predican. La construcción parece tener la finalidad de modificar la figura, al hacer aparecer nuevas figuras cuya existencia no se había establecido por el enunciado; tal es el caso de los triángulos **T**[ABE] y **T**[AFC], así como de los paralelogramos **P**[AK] y **P**[DK]. Que las relaciones que aparecen en estas figuras modificadas deban incluirse en la prueba de la proposición –lo que fija el segundo tipo de ancla– no debe sorprendemos, pues este hecho es el que justifica la necesidad y razón de ser de este momento de la proposición, codificado como la construcción (κατασκευη - kataskeuê). Pero lo que hemos querido resaltar, es que en los casos analizados ha sido necesario introducir en el argumento lo que la figura así modificada aporta, entendiendo con ello que las relaciones de igualdad o desigualdad que en ella se expresan no son susceptibles de ser justificadas al margen de ella.



Gráfica 13

Que en la figura sea posible mostrar todos los argumentos que se concatenan en la cadena deductiva de la prueba nos parece algo necesario para poder seguirla cabalmente. Pero hemos mostrado en estas tres experiencias cómo la figura aporta un elemento sin el cual el argumento deductivo se ve interrumpido; esta experiencia sobre la figura es necesaria, entonces, para poder dar el curso completo a la demostración misma. Queremos resaltar que en el caso de las desigualdades entre magnitudes –nuestra segunda experiencia– y en el de las operaciones geométricas –la tercera experiencia– una vez hechas estas aportaciones por la figura, el argumento se apoya en el teorema *T(LAL)* que, sustentado en la primera experiencia, se ha sedimentado y se ha integrado al conjunto de argumentos a los que legítimamente se puede recurrir. La primera experiencia analizada se presenta así como la experiencia original que apoya indirectamente a las otras dos.

Podemos así concluir que si se quisiera reconstruir el texto euclidiano para eliminar toda posible noción de experiencia figural, al menos en lo que se refiere a las tres experiencias que hemos señalado –y sin que ello signifique que es posible prescindir de las figuras– dos condiciones tendrían que cumplirse: partir de un principio que permita prescindir de la primera experiencia y asumir enseguida las modificaciones que esto conlleva para las otras dos. Este es, sin duda, el espíritu que anima el texto de David Hilbert (1899/1997), *Los Fundamentos de la Geometría*.[19] Dejaremos aquí la alusión a la obra de Hilbert, pero el lector que haya seguido nuestro argumento podrá encontrar, a partir de este comentario, una buena guía para dirigir la lectura de un texto que podemos considerar como el último de los grandes comentarios hechos a la obra de Euclides.

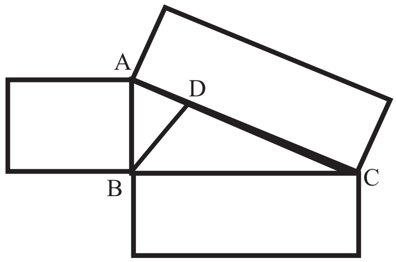
Reflexión final: figuras y proporciones

El propósito de caracterizar distintos tipos de experiencias con las figuras en la obra de Euclides, y con ello el intento de caracterizar la función de las figuras en la trama argumentativa de la geometría euclidiana no se agota con la exposición ya realizada, ya que percibimos cómo se abre un ciclo nuevo de reflexión cuando nos preguntamos por el papel de las figuras (y su experiencia) en el marco de la teoría de las proporciones. A manera de ejemplo veamos el tipo de reflexiones que se sugieren a partir de la lectura de la proposición VI-31:

> *Proposición 31: En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.*

19 Nos referimos, desde luego, a los cambios que en su texto ha introducido Hilbert y entre los que destacan:

1. El teorema T(LAL) se establece como axioma –quinto axioma de congruencia– debido a la eliminación del método de transposición.
2. La prueba del teorema del ángulo externo difiere completamente de la prueba de Euclides, debido a que no recurre al principio de que el todo es mayor que la parte.
3. La teoría de las áreas de las figuras planas se modifica sustancialmente al reconocer que la igualdad establecida por Euclides corresponde únicamente a una operación de descomposición de las figuras, razón por la cual no acepta hablar de igualdad sino de equidescomponibilidad y equicomplementareidad.



Gráfica 14

En la demostración de esta proposición podemos observar que ahora no se privilegia ninguna figura rectilínea en particular y el énfasis se ha desplazado hacia la determinación de la dependencia de las relaciones entre las figuras respecto de las relaciones que se establecen entre sus lados. Si se compara el proceso de demostración de las proposiciones I-47 y VI-31, se notará que la permanencia de la relación de semejanza en la segunda desempeña el mismo papel que la relación de igualdad desempeña en la primera. En ambas tramas argumentativas la construcción (κατασκευη - kataskeuê) transforma el modo en el que la figura es presentada en un primer momento, a fin de poder dar cuenta de la adición de las magnitudes que ellas representan. Pero mientras que en la proposición I-47 la transformación consiste en "partir" en dos a la figura (cuadrado) construida sobre la hipotenusa para proceder a probar que cada una de estas dos partes es igual a la figura construida sobre cada uno de los otros dos lados del triángulo rectángulo; en el caso de la proposición VI-31, la construcción consiste en trazar simplemente el segmento **L**[BD] el cual, según lo muestra la figura, divide al triángulo rectángulo **T**[ABC] en dos triángulos que son semejantes a él mismo. A partir de este momento la prueba no depende simplemente del hecho que el punto D divida a la hipotenusa **L**[AC] en dos segmentos **L**[AD] y **L**[DC], sino de que cada uno de los lados del triángulo **T**[ABC] que forman al ángulo recto es la media proporcional de la hipotenusa **L**[AC], y cada uno de los segmentos en los que ésta queda dividida: **L**[AB] es la media proporcional de **L**[AC] y **L**[AD]; y **L**[BC] es la media proporcional de **L**[AC] y **L**[DC].

A partir de este momento, la figura representa no solo la *adición* de una serie de partes en las que ésta se pudo haber dividido, sino que es, sobre todo, portadora de una relación de proporcionalidad entre los lados y entre las figuras construidas sobre ellos, que el teorema se sigue: primero se tiene que **L**[AC]/**L**[AB] = **L**[AB]/**L**[AD], y por lo tanto, a partir de los *porismos*[20]

20 Como es bien sabido, el segundo *porismo* de la proposición VI-20 es una interpolación atribuida a Theón, pero es ciertamente hasta este momento que puede aceptarse completamente la afirmación.

de las proposiciones VI-19 y VI-20, se tiene que $\mathbf{L}[AD]/\mathbf{L}[AC] = \mathbf{F}_{AB}/\mathbf{F}_{AC}$; en donde $\mathbf{F}_{AC}$ y $\mathbf{F}_{AB}$ son las figuras (rectilíneas) construidas sobre los lados $\mathbf{L}[AC]$ y $\mathbf{L}[AB]$ respectivamente. De igual modo se tiene que $\mathbf{L}[DC]/\mathbf{L}[AC] = \mathbf{F}_{BC}/\mathbf{F}_{AC}$. Ahora la proposición VI¬-31 se sigue inmediatamente de una proposición relativa a la teoría de proporciones, la cual desempeña, en este caso, un papel análogo al que desempeñaron las nociones comunes en las experiencias figurales que analizamos anteriormente. Nos referimos a la proposición V-24:

> *Proposición: Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas (*συντεθὲν*), guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.*

De esta proposición, se sigue que $(\mathbf{L}[AD] + \mathbf{L}[DC]/\mathbf{L}[AC]) = (\mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BC}/\mathbf{F}_{AC})$, tomando las dos igualdades de razones obtenidas a partir de los *porismos*. Es decir que la razón de igualdad que se presenta entre los segmentos, será la misma que la que se presente entre las figuras.[21]

Ahora la proposición V-24 garantiza la permanencia de la relación de proporcionalidad bajo la adición de dos antecedentes con el mismo consecuente, tal y como las nociones comunes garantizaban la permanencia de la relación de igualdad bajo la adición de iguales. Pero es la figura la que permite asegurar que esta permanencia de la proporcionalidad no es otra cosa sino la permanencia de la relación de semejanza de las figuras bajo la adición.

Este pequeño ejemplo que hemos tratado nos permite adelantar que el papel de las figuras en una geometría cuyo objeto no sea ya la comparación entre las magnitudes geométricas, sino el estudio de la proporcionalidad y la semejanza, destina a la figura un papel cuyo aspecto *experimental* debe ser analizado.

Referencias bibliográficas

Euclides (2000). *Elementos*. Madrid: Gredos.

Gardies, J. (1997). *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimede*. Paris: Vrin.

21 Desde luego que para apreciar cabalmente nuestra interpretación, invitamos al lector a seguir la demostración de esta proposición VI-31 en alguna de las ediciones de los *Elementos*.

Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements [translated from the text of Heiberg]*. New York: Dover.

Hilbert, D. (1997). *Foundations of Geometry*. La Salle, Illinois: Open Court. (Obra original publicada en 1899).