

# La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula<sup>1</sup>

Dora Inés Calderón<sup>2</sup>

Olga Lucía León C.<sup>3</sup>

## Introducción

---

Este artículo presenta la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación en el campo de la didáctica, aplicada al problema del desarrollo de la argumentación de soluciones de problemas matemáticos en el aula de los últimos grados de escolaridad de educación media y de los primeros niveles de educación superior. El propósito es proporcionar elementos desde esta particular metodología, como un insumo para la discusión sobre los modos de investigar problemas relacionados con el desarrollo de competencias discursivas en campos particulares como el de las matemáticas escolares. Desde este punto de vista, más allá de presentar un reporte de investigación, en esta oportunidad se intenta proponer este modelo de investigación como una metodología efectiva para la investigación de los procesos escolares y, en particular del desarrollo de conocimiento en el aula: he ahí el carácter pedagógico de la ingeniería didáctica.

La pregunta general de la investigación es por el tipo de factores que están en la génesis de la elaboración de los argumentos y que enmarcan el posicionamiento argumentativo de los estudiantes en la solución de un problema matemático. El modelo de ingeniería didáctica cubrió tres fases e involucró dos poblaciones: un primer grupo de estudiantes de primer semestre de licenciatura en matemáticas y un segundo grupo de quince estudiantes de 10° grado de educación media. Con base en estos elementos, se presentará el modelo de investigación y se considerará el estudio realizado como un ejemplo de aplicación de ingeniería didáctica.

---

1 Este artículo tiene como base el modelo de investigación empleado en las tesis doctorales de las autoras, tituladas respectivamente *Dimensión comunicativa y cognitiva de la argumentación en matemáticas* y *Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría*. Universidad del Valle, 2005.

2 Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis de Lenguaje. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

3 Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis en Matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Un punto de partida de la investigación en educación y, en particular en didáctica, deviene del reconocimiento de que, tanto desde los campos disciplinares como desde las prácticas pedagógicas y didácticas, se hace necesario comprender, explicar y cualificar los procesos implicados en la acción del profesor y en la del estudiante, en pro de desarrollar más efectivamente los denominados aprendizajes escolares. Este reconocimiento ha propiciado lo que en el contexto académico se conoce como la configuración y la evolución del campo de la investigación educativa (Wittrock, 1989; Elliott, 1994; Pérez, 1994; Briones 1996; de Tezanos, 2004; etc.) y el desarrollo de distintos enfoques y metodologías, generalmente de tipo cualitativo, para investigar los fenómenos educativos (p.e., la investigación etnográfica en contextos escolares, la investigación-acción, entre otras).

Con respecto a la investigación de un espacio educativo tan particular como el aula, la práctica investigativa exige dos tipos de reflexión de distinta índole y con exigencias y problemáticas particulares, pero complementarias. Por una parte, está el trasfondo ético y epistémico que exige del profesor como profesional de la pedagogía, el desarrollo y la observación de una actitud indagadora como actitud natural a su *ethos* profesional. Por otra, está la necesidad de establecer, de manera consciente e intencional, o bien la prioridad entre la práctica didáctica y la práctica investigativa; o bien la inclusión de la dimensión investigativa en la acción didáctica, en concordancia con la razón de ser de las relaciones didácticas. El primer aspecto hace alusión a la consolidación de la competencia pedagógica y didáctica del profesor (Calderón, 2003) o lo que Godino (2001, 2007) denomina idoneidad del profesor. El segundo aspecto se refiere a la necesidad de definir claramente la naturaleza de la acción del profesor en las relaciones didácticas profesor-estudiante-saber (Brousseau, 1998) y, desde este punto de vista, desentrañar que, desde una perspectiva didáctica, la razón de ser de esta relación es el aprendizaje del estudiante o la elaboración y el desarrollo del saber escolar por parte del educando o, si se quiere, el desarrollo de competencia comunicativa y cognitiva en los campos de los saberes escolares, por parte de los estudiantes.

Desde este último punto de vista, considerar la investigación como acción privilegiada en las prácticas del aula, sería un desafuero en términos de poder responder a la razón de ser de la relación didáctica. Sin embargo, obviar la acción investigativa del aula, puede constituir un riesgo cuyo resultado sea la emergencia y la consolidación de una tendencia a repetir y a memorizar contenidos y a ritualizar excesivamente prácticas sin la reflexión de las formas de interacción en el aula, tanto entre estudiantes y profesor

como entre estos dos actores y el saber escolar. Esta discusión nos sitúa nuevamente en el dilema planteado por Araceli de Tezanos en 1985, sobre si los profesores son artesanos o intelectuales de la educación. Como premisa inicial, proponemos que el desarrollo de las prácticas de investigación en el contexto escolar ha de entrañar criterios tanto de tipo epistémico en el horizonte del desarrollo de competencias e idoneidades en el profesor y en el estudiante, como criterios de tipo epistemológico y metodológico, en la perspectiva de la articulación, la adecuación y la evaluación de los saberes disciplinares en relación con la estructura curricular y con la configuración y el desarrollo de las “tareas” o las “actividades escolares” y su evaluación, seguimiento y reorientación.

### La ingeniería didáctica como modelo de investigación de los procesos didácticos

---

De acuerdo con el avance de la teoría didáctica, por ejemplo, con la consolidación de la didáctica como campo disciplinar,<sup>4</sup> la investigación en y sobre el aula ha cobrado estatus científico como práctica académica y por ello ha generado el desarrollo de enfoques epistemológicos y de metodologías apropiadas para la investigación del contexto escolar (Shulman, 1988, de Tezanos, 2004, entre otros). Este artículo pretende, como ya se planteó, presentar uno de los modelos que emergen en este contexto: la Ingeniería Didáctica.

Como modelo de investigación en educación, la ingeniería didáctica surge en los años ochenta como respuesta a las exigencias de asignar una función efectiva a las investigaciones educativas. En particular, frente al requerimiento de que sus producciones sean significativas para la enseñanza y el aprendizaje, y para la necesidad de consolidar una metodología de investigación específica para la didáctica de las matemáticas.<sup>5</sup> La importancia de esta metodología de investigación en educación matemática, se evidencia en el alto impacto de los trabajos realizados en Francia por investigadores como Guy Brousseau (1998, 2004) y Régine Douady (1984) en la didáctica de las matemáticas. Las investigaciones que usan esta metodología se pueden clasificar en tres grandes tipos:

---

4 Para este aspecto, se recomienda consultar el desarrollo de la denominada didáctica francesa con autores como Brousseau (1998, 2004), Vergnaud (1984), Chevallard (1999), Douady (1984), Godino (2001, 2004), D’Amore (2001, 2005, 2007), Calderón y León (2001, 2005, 2007), entre otros.

5 Si bien el modelo ha sido desarrollado para el caso de la enseñanza de las matemáticas, es un hecho que sus fundamentos permiten la reflexión didáctica en las demás áreas. Por ejemplo, Delia Lerner (2001) ha realizado consideraciones para el caso de la didáctica de la lengua, desde este enfoque.

- I. Las que tienen como sustento la enseñanza pero que no se ciñen a contenidos específicos, como las de Marilier, Robert y Tenaud (1987), sobre el aprendizaje de métodos y el trabajo en grupo. O trabajos como los de Bloch (2002) sobre la teoría de las situaciones didácticas y de la transposición didáctica de Yves Chevallard (1985, 1986).
- II. Las que apuntan al dominio paramatemático, donde las nociones como ecuación y demostración, entre otras, guardan un estatus de herramienta en la enseñanza (Yves Chevallard, 1982).
- III. Las que consideran la elaboración de génesis artificiales para un concepto matemático determinado como las de Brousseau (2002 y 2004).

Una característica fundamental de este tipo de metodología de investigación es la confrontación entre los *análisis a priori* sobre los diseños de actividades de aula y los *análisis a posteriori* sobre los corpus que se producen en la implementación de las tareas, como la forma básica de validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

El proceso experimental de la ingeniería didáctica distingue cuatro fases: (Artigue, y otros 1995).

- 1. Fase de análisis preliminar.** En la que se busca profundizar sobre: el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza; el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos; el análisis de las concepciones, de las dificultades y de los obstáculos que determinan su evaluación y, finalmente, de las restricciones donde se va a situar la acción didáctica. Michel Artigue y otros (1995, p. 34) destacan que “los estudios preliminares tan solo mantienen su calidad de preliminares en su primer nivel de elaboración”. Posteriormente van tomando distintos lugares y funciones en la investigación.
- 2. Fase de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.** En la que se busca identificar las variables macro y micro didácticas relacionadas con el estudio y el tipo de actividad propuesta a los estudiantes. El análisis *a priori*, se convierte en un análisis de control de significado “comprende una parte *descriptiva* y una *predictiva*, centradas en las características de las situación diseñada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes” (Artigue, 1995). El análisis micro didáctico se obtiene fundamentalmente mediante el *análisis de las tareas*.<sup>6</sup>
- 3. Fase de experimentación.** En la que se ejecutan los diseños y se recogen los datos que informan sobre los fenómenos identificados en el análisis *a priori*.

---

6 El análisis de tareas ha sido desarrollado como una metodología autónoma por Juan Pascual-Leone (1991) y Mariela Orozco (1998), entre otros; no obstante, en la ingeniería didáctica hace parte del tipo de análisis que se realiza en la fase de concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.

- 4. Fase de análisis *a posteriori* y evaluación.** Se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación. El análisis se fundamenta en un *análisis de contenido*<sup>7</sup> de los datos obtenidos en la implementación, para la confrontación con el análisis *a priori*.

Como se observa desde la perspectiva anterior, el corazón de la ingeniería didáctica como metodología de investigación del aula, lo constituye *el análisis de tareas*. “La noción de tarea que se construye desde este modelo de investigación, se constituye como un sistema propuesto para el desarrollo de los aprendizajes de los estudiantes, que se articula en los niveles macro (curricular y didáctico) y micro (de la interacción con el conocimiento y con los interlocutores del aula), niveles que se han de tener en cuenta en los respectivos análisis” (Calderón, 2005, p. 212). Además, se trata de considerar tal análisis en una perspectiva sistémica, particular, sincrónica y de carácter constitutivo. Es decir, bajo la consideración de que un criterio didáctico fundamental es el establecimiento y la articulación de los distintos factores que necesariamente se involucran en el diseño didáctico y en la ejecución de las tareas. Tales factores incorporan aspectos de tipo curricular, epistemológico, cognitivo, comunicativo y sociocultural. A continuación se presenta una descripción de nuestra investigación aplicando este modelo de investigación.

### La ingeniería didáctica como base para la comprensión del desarrollo de la argumentación en matemáticas

---

En el espíritu general de nuestro programa de investigación<sup>8</sup> está el interés por comprender, describir, analizar y cualificar los procesos de aula, tanto en la dimensión de la enseñanza como en la del aprendizaje, en los campos particulares del lenguaje y las matemáticas. Desde este punto de vista, este interés se constituye en un factor definitorio para la elección de la ingeniería didáctica como modelo de investigación para el aula y configura las exigencias que se dan para cada una de las fases de la ingeniería. Veamos ahora cómo se desarrolló esta investigación bajo este modelo.

---

7 Al igual que el análisis de tareas, el análisis de contenido se considera como una metodología autónoma en investigación cualitativa, por ejemplo con los trabajos de Berelson (1952) y Travers (1969-1986); sin embargo, dentro de la ingeniería didáctica se constituye la técnica para el análisis *a posteriori*.

8 Nos referimos al trabajo que desde 1994 desarrolla el Grupo de Investigación Interdisciplinaria en Pedagogía del Lenguaje y las Matemáticas-GIIPLyM, adscrito a las Universidades Distrital y del Valle.

### ***La definición del problema de investigación y de sus objetivos***<sup>9</sup>

La pregunta por el tipo de factores que están en la génesis de la elaboración de los argumentos y que enmarcan el posicionamiento argumentativo de los estudiantes en la solución de un problema matemático, se constituyó en el componente principal del problema de esta investigación. La hipótesis fundamental es que el desarrollo de un argumento matemático depende de una relación básica entre la lengua natural como sistema semiótico que privilegia la argumentación y los razonamientos en general, y los sistemas semióticos como el algebraico y el figural, que se privilegian en los razonamientos matemáticos y en la elaboración de conceptos tanto matemáticos como geométricos.

En el anterior panorama surgió la necesidad de estudiar, en los procesos de negociación de sentido y de significados matemáticos que realizan los estudiantes, los factores de tipo cognitivo y de tipo comunicativo que inciden en el desarrollo de procesos argumentativos efectivos. En consecuencia, en este momento investigativo se indagó por las relaciones existentes en las dimensiones comunicativa –argumentativa-cognitiva– y geométrica, con el fin de establecer aspectos fundamentales presentes en el desarrollo de la argumentación en matemáticas.

Para el caso de la argumentación en general, el análisis de los procesos heurísticos de tipo metadiscursivo y discursivo, su relación con otros registros diferentes al de la lengua natural para la elaboración de argumentos y la consolidación de conocimientos, así como el análisis de los procesos interactivos necesarios para el desarrollo de situaciones argumentativas, han estado ausentes de la formación de los docentes del área de lenguaje; de ahí su bajo impacto en la formación de los estudiantes.<sup>10</sup>

Para el caso de la argumentación en geometría, el efecto que el registro figural tiene en la elaboración de conocimiento matemático y la comprensión de los factores asociados a la conversión a otros registros semióticos usados en los razonamientos geométricos, son aspectos que no están presentes en la formación de los docentes de matemáticas en ejercicio.<sup>11</sup>

9 El problema y los objetivos de la investigación iluminaron tanto el proyecto doctoral de la autora (2005) como el de Olga Lucía León (2005), dado que el proyecto de investigación macro se realizó conjuntamente y se separaron resultados por áreas de énfasis, de la siguiente manera: Olga Lucía León indagó las relaciones matemáticas en el contexto de la argumentación en geometría y Dora Inés Calderón dio razón de los procesos discursivos involucrados en el desarrollo de la argumentación en geometría.

10 La investigación dio razón de los aspectos relacionados con el desarrollo de la argumentación en general.

11 El trabajo de la profesora Olga Lucía León da razón de este aspecto en particular.

De acuerdo con este marco problémico, la investigación pretendió dar un paso en la explicitación de relaciones existentes entre las dimensiones cognitiva y comunicativa de los procesos de argumentación y de validación en matemáticas en el aula. Para ello, se propuso responder cuestionamientos como los siguientes:

- ¿De qué manera contribuye la implementación de prácticas argumentativas en situaciones de validación, al desarrollo de las competencias comunicativa y matemática, en los estudiantes?
- ¿Qué tipo de estrategias discursivas se privilegian y se desarrollan para la solución de problemas geométricos y para la interpretación y producción de discursos argumentativos en matemáticas?
- ¿Qué tipo de razonamientos se privilegian y se desarrollan para la solución y validación de problemas geométricos en contextos argumentativos en el aula?
- ¿Qué relación es posible establecer entre la argumentación, la validación y la demostración en matemáticas?
- ¿Cuáles son los retos para la Escuela que pretende generar prácticas argumentativas en el hacer matemático?

En concordancia con el problema anterior, se plantearon los siguientes propósitos, que, a su vez, configurarían el diseño de las fases de la ingeniería didáctica.

Como gran objetivo, se estableció la identificación de relaciones de continuidad y condicionamiento entre la argumentación en sus dimensiones cognitiva y comunicativa y la validación en sus dimensiones cognitiva y matemática, en procesos de elaboración de conocimiento geométrico en el aula. Como objetivos específicos, la investigación se planteó los siguientes:

- Establecer los factores de tipo cognitivo, comunicativo, epistemológico y didáctico que inciden en la producción del discurso argumentativo en geometría euclidiana.
- Identificar habilidades argumentativas y modos de razonamiento privilegiados por el grupo que se estudia, durante la solución de problemas geométricos.
- Determinar factores de bloqueo, de orden cognitivo, comunicativo y didáctico en los procesos de solución de problemas, en situaciones argumentativas en el aula.
- Formular estrategias didácticas para el desarrollo de procesos de validación en matemáticas, mediados por instancias argumentativas.

### ***Exigencias de las fases de la ingeniería***

A partir del planteamiento del problema y de objetivos de investigación, es evidente que se abre un campo de exigencias para la investigación del

aula. Por una parte está el llamado a las disciplinas involucradas: en este caso al lenguaje y en especial al campo de la argumentación y las matemáticas y, en particular, a la geometría euclidiana. Por otra, aparece el problema propiamente didáctico e investigativo, que tiene que ver con la articulación de los distintos factores que intervienen en el nivel macroestructural y en el micro estructural para la configuración, el diseño, la aplicación, la observación y el análisis de tareas. Adicionalmente, y junto con las anteriores exigencias, emerge la necesidad de identificar y seleccionar instrumentos y procedimientos adecuados para cada una de las fases de la investigación. Es importante recordar, al respecto, que una ingeniería didáctica exige el vínculo permanente entre la dimensión didáctica y la investigativa. Esa es su naturaleza y ese es el valor de su papel en la indagación de los fenómenos de la enseñanza y del aprendizaje. Desde este punto de vista, nuestra investigación estableció en cada fase las siguientes exigencias teóricas e implicaciones metodológicas para la ingeniería.

Exigencias de la estructura para la ingeniería didáctica	Las decisiones para cada fase
Identificar el conjunto de factores relacionados con <b>el análisis macroestructural</b>	<p><b>Fase preliminar:</b> Identificación de supuestos teóricos y el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas.</p> <p><b>Fase de concepción y análisis a priori:</b> Identificación de la estructura de relaciones curriculares y de requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas.</p> <p><b>Fase de experimentación:</b> Identificación de elementos para la regulación y la sistematización de la investigación y del desarrollo didáctico del diseño.</p> <p><b>Fase de análisis a posteriori:</b> Contrastación de aspectos curriculares y didácticos del diseño frente a los resultados.</p>
Identificar el conjunto de factores relacionados con <b>el análisis microestructural</b>	<p><b>Fase preliminar:</b> Identificación de las estructuras de interacción argumentativa espontánea en el aula de matemáticas.</p> <p><b>Fase de concepción y análisis a priori:</b> Identificación de unidades significantes en los diseños de actividades. Análisis de condiciones contextuales en el diseño didáctico. Análisis de contenidos de tareas.</p>

	<p><b>Fase de análisis a posteriori:</b> Identificación de factores cognitivos y comunicativos que intervienen en los procesos de argumentación en geometría.</p>
<p>Establecer <b>metodologías</b> apropiadas para la investigación <b>en cada fase</b></p>	<p><b>Fase preliminar:</b> Momento etnográfico (1 año): establecimiento de conjeturas. Momento de investigación- acción (1 año): identificación de categorías emergentes.</p> <p><b>Fase de concepción y análisis a priori:</b> La transposición didáctica. Diseño de categorías de análisis e identificación de variables micro y macrodidácticas. Análisis documental (teorías y currículos).</p> <p><b>Fase de experimentación:</b> Observación etnográfica de la aplicación del diseño.</p> <p><b>Fase de análisis a posteriori:</b> Análisis de contenidos. Análisis contrastivo de variables.</p>

Tabla 1

a. *La fase preliminar como la contextualización micro y macrodidáctica*

La fase de *análisis preliminar* en la ingeniería didáctica constituye –de acuerdo con nuestra investigación– una experiencia de contextualización teórica, curricular y didáctica para el profesor, en un campo particular del saber escolar. Confluyen en ella distintos tipos de preguntas que, en general, se sitúan en el problema del estado de la cuestión, del desarrollo curricular y didáctico del saber escolar en discusión y de la relación que el mismo profesor tiene con tal saber.

Así por ejemplo, nuestro estudio se preguntó por: a) las concepciones que circulaban en los estudiantes sobre argumentación y sobre objetos matemáticos como los sistemas de numeración, y b) la identificación de requerimientos didácticos para orientar la elaboración de los diseños que pretenden desarrollar competencias argumentativas, en este caso, en geometría. Las dos preguntas exigieron –como se observó en la tabla 1– dos momentos de investigación que nos permitieran dar respuesta a tales preguntas.

- *El momento etnográfico: Los procesos comunicativos y el desarrollo de la argumentación*

El momento etnográfico se realizó con observación no participante –durante un semestre– a una población de treinta estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas. Este momento permitió reconstruir y

analizar las dinámicas discursivas que se manifiestan por la aplicación de un diseño didáctico dedicado a la observación de la emergencia de concepciones de los estudiantes sobre el ser profesor de matemáticas y sobre los sistemas de numeración. Tal diseño privilegió el desarrollo de “interacciones argumentativas” en la comunicación de contenidos matemáticos.<sup>12</sup> Como resultado se obtuvo un conjunto de categorías emergentes de tipo procesual y de tipo didáctico, que dieron razón de ser a los procesos observados. Las **categorías procesuales** hacen referencia a los factores relacionados con el desarrollo discursivo y cognitivo. Por ejemplo, la *comprensión* (frente a contenidos y la interacción), la *regulación* (producción y uso de normas sociales, sociomatemáticas y matemáticas), la *concepción* (como el sistema que da razón de las posiciones epistémicas y de cambios de sentido), la *estructura de la comunicación* y las reglas de elaboración de sentido, los *roles discursivos* que determinan acciones discursivas y las *estructuras enunciativas y proposicionales* que dan cuenta de la elaboración del sentido. Como **categorías didácticas** emergieron dos: *la secuencia didáctica* (como estructura del contenido) y *la estructura de la clase* (que determina los momentos del aprendizaje), con estas dos categorías surgen, **unidades de análisis** como *la situación* (como el conjunto de condiciones para la interacción), *el episodio* (como la secuencia temática de las interacciones), *la fase* (como los estados sucesivos en el desarrollo de una tarea) y *el evento* (como cada una de las acciones discursivas de los participantes en el desarrollo de la tarea).

El análisis, de tipo generativo (Goetz & Le Compte, 1988), aplicado a los datos proporcionados por la etnografía permitió obtener información sobre las características de las estructuras comunicativas para la producción de consenso, en situaciones de discusión de soluciones de problemas matemáticos y que son presentadas en la tabla 2:

---

12 La observación se realizó con un grupo de estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas, en el marco de una experiencia docente que implementó una metodología “argumentativa”, con el ánimo de identificar concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas y sobre los sistemas de numeración (que no era el interés de esta investigación). Para éste estudio esta población resultaba interesante, puesto que explícitamente se realizarían interacciones denominadas comúnmente argumentativas; de esta manera, se garantizaba una situación de aula muy interactiva.

## Estructura del consenso

Aspectos estructurantes	Factores emergentes
<b>Criterios para consensuar</b>	Lo que yo pienso. Lo que más se dice. Lo que todos consideramos importante de lo que nosotros decimos. Lo que todos consideramos importante de lo que alguien dice. Lo que todos construimos.
<b>Tipos de consenso</b>	Según se aplique uno u otro criterio de los anteriores surgen los siguientes tipos de consenso entre los estudiantes. Por mayoría. Por relevancia. Por discusión. Por construcción colectiva. Pragmático.
<b>Tipos de roles</b>	Moderador. Colaborador. Consensuador. Sancionador. Reflexivo. Textualizador.
<b>Elementos estructuradores del consenso:</b>	El resumen. La ilación.

Tabla 2

Como se observa, para esta investigación el momento etnográfico se constituyó no solo en el modo privilegiado para el reconocimiento de los aspectos involucrados en el desarrollo discursivo de procesos argumentativos espontáneos en el aula de matemáticas, sino también en la posibilidad de configurar categorías que permitieran el análisis de tales procesos y la proyección de las búsquedas teóricas y metodológicas que permitieran un diseño idóneo para el propósito de desarrollar la competencia argumentativa en matemáticas, en poblaciones escolares de nivel avanzado.

- *El momento de investigación-acción o la consolidación de las relaciones didácticas. El requerimiento comunicativo*

El momento de investigación-acción se realizó con quince estudiantes provenientes del anterior grupo. Se aplicó un diseño de investigación-acción, a partir de los hallazgos del momento etnográfico que generó toda la es-

estructura didáctica de base para la investigación; de ahí que los aspectos que se describen a continuación se constituyeran en la base para el diseño didáctico y para la experimentación.

### Ciclos de investigación-acción

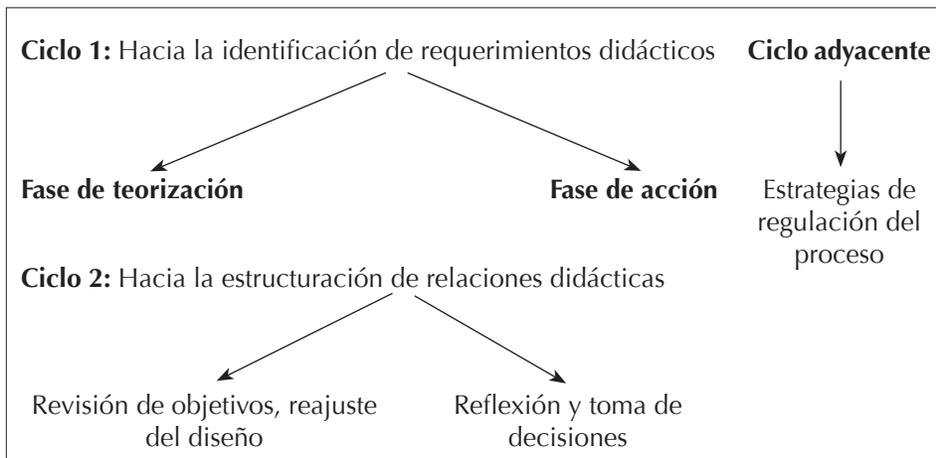


Figura 1

Como parte de la fase preliminar de la ingeniería didáctica, el momento de investigación-acción se constituyó en el espacio privilegiado para el análisis teórico y metodológico de los aspectos identificados en el momento etnográfico. Así, dado que una conclusión derivada de la etnografía fue: *la ausencia de referentes didácticos de tipo teórico para el desarrollo de procesos argumentativos en matemáticas en el aula*, ésta se configuró como un sentido orientador del momento de investigación-acción. En consecuencia, el equipo de investigación se dedicó a realizar la tarea de “identificar requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría” (Calderón y León, 2001). Por esta razón, y a manera de síntesis del proceso de esta etapa, a continuación se describen las categorías teóricas que guiaron la construcción del diseño didáctico en la fase de concepción y planeación (Calderón y León, 2001). También se describen las acciones necesarias en este momento de la investigación.

Categorías teóricas	Acciones	Productos esperados*
<b>Requerimiento didáctico.</b> Referente teórico que da razón de un componente de la estructura de las relaciones didácticas y que da elementos para la	<b>Elaboración teórica.</b> Definición de categorías y unidades de análisis, preguntas y acuerdos. Esta labor estuvo a cargo del grupo de investigación	<b>Producción de teoría didáctica.</b> Identificación y teorización de requerimientos didácticos para el desarrollo de competencias argumentativas en matemáticas.

estructuración de relaciones entre todos los componentes, a propósito de las relaciones didácticas.		
<p><b>Diseño didáctico</b></p> <p>Estructura de una secuencia didáctica establecida a través de un programa particular. Explica opciones epistemológicas, comunicativas y cognitivas, en el contexto de las relaciones didácticas.</p>	<p><b>Acción didáctica</b></p> <p>Diseño de tareas, identificación de unidades y categorías didácticas y de tramas argumentativas. Desempeño de roles del profesor y del investigador.</p>	<p><b>Diseño didáctico</b>, a partir de un análisis de requerimientos para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría.</p> <p><b>Identificación de factores de bloqueo y de desbloqueo</b> en la argumentación de soluciones de problemas sobre la relación pitagórica.</p>
<p>* Para los productos de este momento de la investigación se recomienda ver el libro de Calderón, Dora y León, Olga (2001). <i>Requerimientos didácticos y competencias argumentativas en matemáticas</i>.</p>		

Tabla 3

A partir del análisis realizado bajo las anteriores categorías, se establecieron los requerimientos teóricos que debían estructurar un análisis *a priori* macroestructural como referente para el diseño de situaciones didácticas. El proceso de construcción de los requerimientos se consolidó a partir de la búsqueda de respuestas a preguntas que surgieron de la reflexión sobre la acción en el aula y en los distintos frentes que consolidan tal acción. Como resultado, se consolidó un conjunto de cuatro requerimientos didácticos que denominamos *requerimientos didácticos básicos* correspondientes a cada uno de los aspectos involucrados en el contexto de las relaciones didácticas y que estructuran de manera particular el saber didáctico: requerimientos comunicativos, requerimientos epistemológicos, requerimientos cognitivos, y requerimientos socioculturales (Calderón y León, 2001).

A continuación presentamos, a manera de ilustración la relación entre tópicos interrogados y tipos de preguntas que se plantearon –que dieron como resultado la caracterización de requerimientos realizada–, el desarrollo vinculado al requerimiento comunicativo, en especial lo relacionado con la construcción de un referente teórico que caracterizó la *competencia argumentativa en geometría* y los requerimientos didácticos necesarios para el desarrollo de esta competencia (Calderón y León, 2005).

**La competencia argumentativa.** Como resultado del proceso de observación, análisis y teorización de los procesos argumentativos de los estudiantes y de las reflexiones teóricas desarrolladas en la investigación, se consolidó una caracterización de la competencia argumentativa en geome-

tría, a partir del desarrollo de competencias geométricas. Las competencias geométricas básicas que dan razón del hacer geométrico son:

- La construcción de imágenes mentales de configuraciones bidimensionales y tridimensionales.
- La anticipación a movimientos.
- La producción de razonamientos.

Las anteriores competencias se articulan a los componentes que caracterizan *la competencia argumentativa en geometría* como una macroestructura cognitiva conformada por:

*Tramas conceptuales de tipo matemático.* La presencia de este componente garantiza el dominio de referentes y de procesos propios del campo matemático y le permite al sujeto la toma de posición epistémica y epistemológica (Duval, 1999) frente al objeto de la argumentación. El sujeto puede asignar, frente al saber matemático un valor *epistémico semántico* (si tan solo asigna valores de confiabilidad a un enunciado desde su experiencia con el contenido del enunciado); un valor *epistémico teórico* (si los valores de confiabilidad son asignados desde la función del contenido en una teoría), un valor *lógico* (en tanto se consideren los criterios de consistencia propios de las teorías geométricas).

*Estrategias de interpretación de textos matemáticos,* que garantizan formas de operar con el conocimiento matemático. La objetivación de los objetos matemáticos mediante la designación, la caracterización, la categorización y la expansión discursiva (Duval, 1999), permiten comprender las macroestructuras y las microestructuras en los textos matemáticos y, con ello, los sentidos que se expresan en estos textos. Este dominio le permite al individuo discriminar los argumentos por el tipo de proceso matemático presente en su elaboración.

*Producción de razonamientos deductivos,* que garantizan la producción e interpretación de formas de organización discursiva y textual bajo la estructura justificativa, en los contextos oral y escrito. Este dominio le permite al sujeto una toma de posición discursiva propia del hacer matemático.

*Estrategias de contextualización,* que garantizan un uso adecuado y pertinente de la argumentación como forma de interacción social. Este dominio le permite al sujeto desarrollar normas de interacción argumentativas, formas de evaluación de la pertinencia y poner en escena el discurso bajo el criterio de eficacia argumentativa.

En general, se observa que los resultados del momento de investigación-acción dejaron planteada la teoría de base para la construcción del diseño didáctico propuesto y ejecutado en las fases *a priori* y *a posteriori* de la ingeniería didáctica. A continuación se describe la metodología para las dos siguientes fases de la investigación.

*b. Las fases de análisis a priori y de experimentación como la construcción de las condiciones para la escenificación y la puesta en escena*

En este apartado se presentan dos fases de la investigación, teniendo en cuenta que la construcción del diseño didáctico produce un resultado cuya implementación exige ser observada, pero no transformada. En una primera parte de la descripción de la fase de análisis *a priori*, presentamos dos aspectos que debieron ser definidos previamente: la población y los instrumentos y las técnicas para la recolección de datos; posteriormente describimos el análisis macroestructural y microestructural realizado en nuestra investigación, teniendo en cuenta que este tipo de análisis de las tareas, son los requeridos en la ingeniería didáctica.

## La población

---

Teniendo en cuenta las características de la población en la fase preliminar –estudiantes universitarios de primeros semestres inscritos en una asignatura que propendiera por una metodología “argumentativa”, cuya observación fuera aprobada por ellos y por el maestro titular–, se consideraron, para el desarrollo de la *fase de análisis a priori* los siguientes criterios para la selección de la población para la fase de experimentación:

1. Ser una población diferente a la universitaria, con el fin de confrontar resultados y de garantizar un grupo que tuviera un trabajo previo con las figuras en geometría.
2. Ser de los últimos grados de la educación secundaria.
3. Haber tenido un trabajo previo en grados anteriores con manipulación de piezas para la formulación de la relación pitagórica.
4. Aprobación de los estudiantes, de los padres, y de las directivas del colegio, para realizar la experimentación en tiempos extraclase.
5. Condiciones locativas de la institución para realizar las sesiones.

La población que se consolidó para esta fase de la investigación estuvo constituida por un grupo de 15 estudiantes de 10° grado de un Colegio Distrital de Ciudad Bolívar de Bogotá. A este grupo se le aplicó un diseño didáctico para el desarrollo de competencias argumentativas en geometría,

durante cuatro meses, en jornada contraria a su jornada escolar; de ahí que se realizara un trabajo extracurricular.

Con base en la descripción anterior, a continuación se visualizan las herramientas metodológicas empleadas en el curso de las fases de investigación. Dada la particularidad de cada fase se desatacan las herramientas metodológicas aplicadas según los requerimientos de las mismas.

### Descripción de las herramientas metodológicas

Herramienta metodológica	Descripción	Tipo de dato
<b>Protocolo</b>	<p>Documento escrito, elaborado por las investigadoras para observar una sesión de clase. El objetivo es sistematizar las observaciones.</p> <p><i>Formales:</i> elaborados por las dos investigadoras.</p> <p><i>Informales:</i> elaborados por la investigadora-profesora de matemáticas, después de cada sesión de clase.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Información contextual: actitudes verbales (actos de habla) y no verbales (desplazamientos, ademanes y gestos).</li> <li>2. Representaciones matemáticas tomadas de las elaboraciones de los estudiantes.</li> </ol>
<b>Entrevistas</b>	<p>Entrevistas no estructuradas, realizadas al final de cada bloque de trabajo, a estudiantes con el criterio de "muy interesado" y "poco interesado".</p>	<p>Impresiones del grupo estudiado con respecto a los procesos desarrollados en el aula.</p>
<b>Recolección de registros escritos</b>	<p>Soluciones escritas elaboradas en cada fase de la actividad de aula.</p>	<p>Procesos de solución. Variedad de soluciones. Justificaciones escritas.</p>
<b>Grabaciones</b>	<p><i>En audio:</i> se realizan a parejas de estudiantes, durante la confrontación de resultados individuales.</p> <p><i>En video:</i> se realizan a las sesiones plenas para la puesta en común de soluciones de grupos.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Reconstrucciones orales de procesos individuales.</li> <li>2. Discusiones de parejas para elaborar soluciones, y justificaciones.</li> <li>3. Procesos de argumentación colectivos.</li> <li>4. Esquemas de justificación y validación.</li> </ol>

Tabla 4

Las anteriores herramientas permitieron recolectar datos en los tres momentos de la investigación y generar una triangulación de datos (Goetz & Le Compte, 1988) que cubrieran aspectos como la manifestación oral como flujo del discurso –tomado en audio y en video– en distintos momentos de los procesos argumentativos; la producción escrita –los artefactos producidos como soluciones de problemas en los talleres– individual y de parejas, como otra fuente de la producción discursiva complementaria a la oralidad; las observaciones del contexto de elaboración de soluciones y de producción discursiva individual y de parejas de nuevas soluciones –en protocolos–; y las impresiones de los estudiantes sobre su propio proceso de solución y argumentación de problemas sobre la relación pitagórica. Esto con la finalidad de obtener un mayor grado de confiabilidad en el registro de los procesos argumentativos de los estudiantes observados y de ganar aspectos discursivos, cognitivos y contextuales relacionados en tales procesos.

### ***Metodología para el análisis a priori macroestructural***

Desde el punto de vista de la ingeniería didáctica como modelo de investigación en educación, el análisis de aspectos macroestructurales que hacen parte de la fase de concepción y análisis *a priori* lo constituye la teorización realizada sobre el objeto de la enseñanza. En nuestra investigación corresponde a los desarrollos sobre la dimensión curricular en la argumentación y a la teoría de la argumentación y el discurso (Calderón, 2005, capítulos I, II y III) y, a la dimensión curricular de la relación pitagórica, las tramas teóricas sobre esta relación y los tipos de razonamiento (León, 2005, capítulos I, II y III). Dadas las implicaciones de la producción de estos capítulos, tan solo se presenta aquí la metodología de *análisis de contenidos* empleada para este nivel, cuyos resultados –el contenido de los capítulos referidos– fueron contrastados en el análisis *a posteriori*.

En términos generales, el análisis de contenidos puede ser considerado como una técnica de investigación que, según Travers (1972), es “un conjunto de técnicas diseñadas para el análisis de comunicaciones verbales” (en Pérez, 1994, p. 134). Según los diversos autores que han teorizado sobre esta técnica de análisis, lo común a ella es el hecho de ser un procedimiento o una serie de procedimientos de tipo analítico, destinados a formular, de manera sistemática, inferencias válidas y reproducibles, aplicables a un contexto discursivo específico, como por ejemplo el de la educación en argumentación y en matemáticas, para nuestro caso. Se pretende, entonces, que sobre un contenido manifiesto, se realice un proceso analítico de manera sistemática y objetiva, es busca de categorizaciones, generalizaciones y conclusiones verificables. De ahí la *función heurística* y la de *comprobación* del análisis de contenido (Pérez, 1994). Veamos, como ilustración,

el esquema desarrollado en la investigación de Calderón (2005) para este análisis.

***Esquema para el análisis a priori de contenidos en el nivel macroestructural***

Contenido analizado	Técnica	Corpus	Foco de análisis
<b>Antecedentes curriculares investigados*</b>	<b>Análisis inferencial</b> de antecedentes curriculares, didácticos e investigativos sobre procesos argumentativos en matemáticas y argumentativos en general en la escuela.	Siete documentos de reformas curriculares en Colombia (1962-2003). Cuatro textos de preceptivas literarias. Documentos de propuestas didácticas sobre argumentación en el aula en Colombia. Documentos sobre investigaciones nacionales e internacionales en argumentación en matemáticas y argumentación en general.	El lugar de la argumentación en los currículos y su posible incidencia en la formación en lenguaje. Tendencias didácticas e investigativas de la argumentación en la escuela. Identificación de problemas que surgen.
<b>Teorías de la argumentación y del lenguaje**</b>	<b>Identificación, discriminación y relación</b> de categorías, de relaciones y de funciones en teorías de la argumentación, del discurso, de la semiótica y del aprendizaje de la geometría. Consolidación de categorías de análisis y de relaciones y funciones	Bibliografía en el campo de la argumentación, del discurso, de la teoría de los actos de habla, de los procesos de razonamiento y de la geometría euclidiana.	Relaciones teóricas y metodológicas implicadas en el desarrollo de los procesos de argumentación en geometría. Factores de tipo cognitivo y comunicativo presentes en el desarrollo de competencias argumentativas en geometría.

\* Ver, como resultado de este análisis, el capítulo I de las tesis de Calderón (2005).  
\*\* Ver, como resultado de este análisis, los Capítulos II y III de Calderón (2005).

Tabla 5

Como se planteó anteriormente, el resultado de este análisis constituyó tres capítulos que dan razón, por ejemplo, al lugar que ha tenido la argumentación como objeto curricular en Colombia, entre los años 1900 y 2003. Así por ejemplo, es posible identificar que en la primera mitad del siglo XX la tendencia curricular que marcó a la argumentación estuvo cobijada por los enfoques prescriptivista y normativista en lingüística, como resultado, las preceptivas literarias fueron el lugar natural de la argumentación para la Escuela. De ahí se observa, en los manuales revisados, que la enseñanza de la retórica, o mejor, de la oratoria, fundamentalmente se centró en la teoría y la práctica de la redacción y de la elocución (ver capítulo I en Calderón, 2005).

En la segunda mitad del siglo XX, de la mano de las tendencias en las ciencias del lenguaje, la argumentación pasa por ser un elemento para el “buen decir” o para el reconocimiento de las estructuras del lenguaje con el fin de promover el estudio sistemático de la lengua para un uso correcto y más tarde al marco del desarrollo de habilidades expositivas. Finalmente, el período curricular que va de 1996 al 2003 bien se puede denominar *el período del auge de la argumentación en la Escuela*; esto al punto de que es posible afirmar que hay en esta época una desmedida preocupación por incluir, en cualquier sentido y de cualquier manera, el tema de la argumentación en el espacio escolar. Todos estos elementos, junto con un análisis a las teorías de la argumentación configuran, entonces, el resultado del análisis *a priori* macroestructural para el caso del lenguaje. Se sientan de esta manera los fundamentos teóricos que soportan los contenidos escolares que implican el desarrollo de las tareas.

### Metodología para el análisis a priori microestructural

---

Fundamentalmente se procedió desde la metodología del *diseño de situaciones didácticas* (Brousseau, 1988, Douady, 1996). Para ello se preparó una secuencia de actividades de aula para aplicar en la fase de experimentación. La secuencia asumió el enfoque metodológico de los aprendizajes cooperativos (Mulryan, 1992); por esta razón se incorporó el *trabajo en pequeños grupos*, con miras a facilitar los procesos de interacción social que, de acuerdo con teóricos como Dewey (1902) y Vygotsky (1978), activan el desarrollo del conocimiento. El diseño se estructuró desde tres instancias fundamentales que se concretan en los talleres propuestos a los estudiantes. La primera, propuso el trabajo de *solución de problemas en forma individual*. Posteriormente se realizó un *trabajo por parejas* en don-

de se discutían las soluciones individuales y se optaba por una solución compartida. Como última instancia se realizó una *sesión de discusión con el grupo*, partiendo de la sustentación que hacía una de las parejas, de su solución particular. Como fruto de esta discusión se obtenía una solución elaborada por todo el grupo. Para todas estas instancias, el profesor asumió el rol de orientador del proceso y de moderador en las sesiones de discusión y síntesis. A continuación se detallan los propósitos investigativos y didácticos para las actividades desarrolladas y las sesiones previstas.

### **Esquema metodológico para el diseño de las situaciones didácticas**

<b>Propósito para la investigación</b>	<b>Propósito didáctico</b>	<b>Fases de la visualización</b>	<b>Actividades desarrolladas</b>	
			Talleres	Sesiones/ Interacción
<b>Determinar los componentes que intervienen en la formulación de la relación pitagórica, a partir de los procesos de visualización y de expansión discursiva.</b>	Formulación de la relación pitagórica y de enunciados orientados a la objetivación y a la fundamentación de la relación formulada.	<i>Estudio</i> de las gráficas y <i>objetivación</i> de sus relaciones.	1 a 6	Trabajo individual: 6 Trabajo de pareja: 6
		<i>Formulación</i> de las relaciones entre gráficas y <i>contrastación</i> .	1 a 6	Plenaria: 4 Entrevista: 1
		<i>Consolidación</i> de las relaciones y <i>formulación</i> de una sola relación.	6	
<b>Total talleres</b>			<b>6</b>	
<b>Total sesiones</b>				<b>10</b>

Tabla 6

La actividad de resolución de problemas se estructuró básicamente en tres fases de la solución. A continuación se presenta la descripción de las fases y el tipo de proceso que se espera realicen los estudiantes; también del tipo de intervención que puede tener el profesor para cada una de las fases.

Fases de la actividad en el aula			
Etapa de formulación de argumentos		Etapa de validación de argumentos*	Etapa de estructuración y formulación de argumentos
Resolución individual	Resolución por parejas	Plenaria	Estructuración
Formulación de Conjeturas.	Eliminación parcial de incertidumbres. Regulación de procesos espontáneos. Estructuración de sistemas de representación.	Formulación y confrontación de convicciones. Determinación de incertidumbres colectivas. Legitimación de conclusiones.	Descontextualización del problema. Estructuración de una solución más efectiva. Institucionalización de resultados. Determinación de los efectos del proceso anterior en la transformación de concepciones.
* En este caso se considera que la <i>validación</i> tiene el sentido de <b>consolidación de la fuerza de los argumentos</b> . Esto, en tanto que se trata de un ejercicio de análisis de cada uno de los argumentos propuestos para evaluar su pertinencia y su valor como elemento para lograr un discurso coherente que genere convicción en otros y no como una estrategia general de regulación del sistema matemático.			

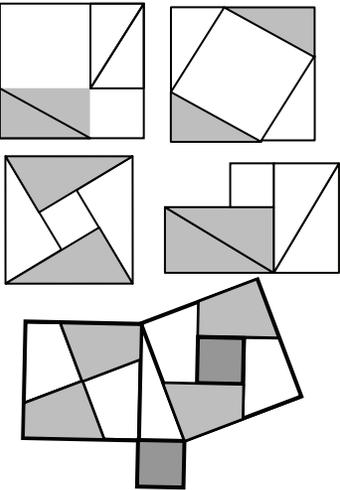
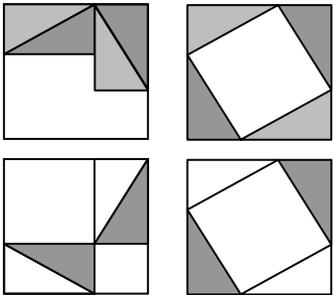
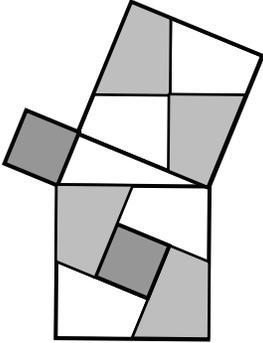
Tabla 7

La dificultad para la discriminación teórica y metodológica de lo que se estipuló en un principio como actividad de argumentación y como actividad de validación, fue uno de los motivos que llevó a reformular las relaciones entre práctica argumentativa y práctica validativa y a considerar que la validación se constituye como un factor de regulación presente tanto en el proceso de argumentación en matemáticas, como en otros procesos matemáticos.

Como último aspecto del diseño metodológico del análisis *a priori* en su nivel microestructural, se estableció la secuencia de actividades definitiva, de acuerdo con los propósitos investigativos y didácticos y con los aspectos metodológicos planteados anteriormente. Esta secuencia se consolidó en un conjunto de seis talleres. A continuación, en la tabla 8, se presenta una síntesis de esta secuencia. Sus análisis constituyen el resultado de la fase de análisis *a posteriori*.

Estructura general de la secuencia de los talleres		
Objetivo de aprendizaje	Taller	Trabajo individual
Formular una relación matemática a partir del análisis de figuras.	1 a 5	<p>1. <b>Estudie</b> el gráfico presentado en este taller y <b>formule</b> la relación matemática que se muestra con el gráfico.</p> <p>2. <b>Formule</b> por lo menos tres razones que le hacen a usted concluir esa relación.</p>
	2, 4, 6 complementarios	<p>1) Estudie los gráficos 1 y 2 presentados en este taller y formule la relación matemática que se muestra con cada gráfico.</p> <p>2) ¿La relación formulada en cada caso, es la misma que usted formuló para el gráfico presentado en el taller 1 (3, y 5)?</p> <p>3) En caso de ser afirmativa la respuesta para el punto 2, explique su respuesta. En caso de haber respondido negativamente explique las diferencias entre las relaciones formuladas.</p>
<u>Consolidar la formulación</u> de la relación Pitagórica a partir del análisis de figuras.	6 a	<p>1) <b>Estudie</b> los gráficos 1, 2 y 3 presentados con este taller y determine si alguno de ellos evidencia mejor la Relación Pitagórica.</p> <p>2) <b>Justifique</b> la respuesta anterior. En el caso de ser afirmativa <b>proporcione tres razones</b> que le hicieron optar por un gráfico determinado, y si es negativa tres razones por las cuales ninguno de los gráficos proporcionados evidencia la Relación Pitagórica.</p>

Tabla 8 (páginas 92 y 93)

Trabajo en pareja	Plenaria	Figuras propuestas
<p><b>1. Elaborar</b> una sola relación matemática a partir de las relaciones formuladas por los dos integrantes.</p> <p><b>2. Proporcionar</b> por lo menos tres <b>razones</b> que le hacen a la pareja concluir que esa es la relación mostrada.</p> <p><b>3. Preparar una presentación para convencer</b> a las demás parejas de que la relación elaborada por la pareja es la más adecuada y de que las razones que la soportan son las más acertadas.</p>	<p>A partir de la presentación de una de las parejas, <u>elaborar</u> la relación matemática más adecuada para la gráfica proporcionada.</p>	
		
<p><b>1) Elaborar una respuesta</b> por pareja a las preguntas 1 y 2 del trabajo individual.</p> <p><b>2) Preparar una presentación para convencer</b> a las demás parejas de que la relación elaborada por la pareja es la más adecuada y de que las razones que la soportan son las más acertadas.</p>	<p>A partir de la presentación de una de las parejas, <u>elaborar</u> la relación matemática más adecuada para la gráfica proporcionada.</p>	

Observando todo el proceso anterior se encuentra que en la ingeniería didáctica, los resultados de las fases de análisis preliminar y del análisis *a priori* de las tareas consolidan una estructura y un marco teórico que apoyan el proceso de experimentación, pero que fundamentalmente explicitan las variables macro y micro didácticas que hacen posible la estructura de análisis fundamental de la ingeniería didáctica: la confrontación análisis *a priori* y análisis *a posteriori*. A continuación se presenta brevemente el diseño del análisis *a posteriori* y una muestra de resultados a manera de conclusión.

*c. Diseño metodológico para la fase análisis a posteriori o la consolidación de la reflexividad didáctica.*

El análisis *a posteriori* tiene como base dos tipos de datos: los que provienen del análisis *a priori* macroestructural (curricular y didáctico) y los que provienen de la recogida de datos durante la aplicación y observación del diseño didáctico. Este análisis se efectuó mediante la técnica de *análisis de contenido*, que se explicó anteriormente, cuyo procedimiento para esta fase se describe a continuación.

**Esquema metodológico para el análisis *a posteriori***

Base del análisis	Actividades requeridas	Procedimiento
Resultado del análisis <i>a priori</i> microestructural: las tareas.	Análisis de corpus Análisis <i>a posteriori</i> de los resultados de las tareas (análisis de datos).	Aplicación de categorías del análisis <i>a priori</i> a los datos obtenidos. Contratación empírica y teórica y conjeturación.
Resultado del análisis <i>a priori</i> macroestructural: factores curriculares y didácticos obtenidos.	Contratación teórica y empírica y formulación de conjeturas. 1. Contratación de antecedentes. 2. Contratación de teorías. 3. Aplicación de categorías de análisis y producción de teoría.	Análisis separados en lenguaje y en matemáticas. Análisis conjuntos en lenguaje y matemáticas. Discernimiento conjunto de relaciones y de deslindes teóricos.

Tabla 9

En la tabla 10 se presenta la manera como se procedió para la realización de cada una de las actividades implicadas en esta fase de la investigación y para la producción de resultados de la aplicación didáctica.

Actividad	Técnica	Datos	Producto esperado
Análisis de datos*	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Aplicación de rejilla de análisis a los datos recolectados.</li> <li>2. Triangulación de datos.</li> <li>3. Contrastación de los análisis <i>a priori</i> de las tareas y <i>a posteriori</i> del conjunto de datos.</li> </ol>	<p>Diez transcripciones de trabajo de pareja.</p> <p>Once Protocolos de clase.</p> <p>Seis transcripciones de plenarias de clase.</p> <p>Veintiún artefactos producidos por estudiantes.</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Conjeturas sobre relaciones.</li> <li>2. Identificación de factores de tipo cognitivo y de tipo comunicativo que intervienen y determinan el desarrollo de procesos argumentativos en geometría</li> </ol>
Elaboración de conclusiones**	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Contrastación de conjeturas provenientes del análisis de los datos y los antecedentes.</li> <li>2. Relación de los diferentes resultados de los análisis realizados y recomendaciones.</li> </ol>	Los análisis anteriores	Articulación de relaciones y de resultados en la tesis.

\* Ver el resultado de este análisis en el Capítulo VI de Calderón, 2005.  
 \*\* Ibídem

Tabla 10

Como resultados de este análisis destacamos que en el nivel macroestructural se presentó una propuesta de constitución de género pedagógico mediante la articulación de tres variables conformantes de género: *el contexto escolar, el modo de organización de la interacción y la situación de comunicación prevista*; además, se seleccionaron los criterios para cada variable, que orientaron las opciones tomadas, desde cada una de ellas, para el diseño didáctico propuesto. Durante la elaboración de la secuencia didáctica, el análisis *a priori* consideró, para la variable del contexto escolar, los criterios de *pertinencia curricular, adecuación didáctica y optimización de estrategia*. A manera de ilustración de este nivel macroestructural, presentamos el siguiente resultado del análisis, en el que se identificaron los efectos de los tres criterios señalados en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Resultados en la configuración del contexto escolar		
Criterio	Opción tomada	Efecto en el desarrollo del diseño
Pertinencia curricular	<p>1. Temática: geometría euclidiana.</p> <p>2. Procesual: desarrollo de lenguaje matemático y de razonamientos argumentativos. Comprensión y análisis de textos y producción de estructuras discursivas y textuales complejas en el área de matemáticas.</p>	<p>1. Focalizó la reflexión en el tema de la magnitud-área. Evidenció el aprendizaje adquirido con respecto a la relación pitagórica. Manifestó concepciones sobre el hacer escolar en geometría. Y permitió asociar las temáticas de trigonometría por la relevancia que tomó el triángulo.</p> <p>2. Manifestó creencias sobre el uso del lenguaje en matemáticas. Explicitó relaciones entre tipos de expansiones discursivas y comprensiones de tareas en matemáticas. Y constituyó un diseño didáctico complejo para los estudiantes, por la exigencia de usar habilidades de razonamiento consolidadas previamente.</p>
Adecuación didáctica	<p><b>Espacio escolar:</b> un colegio público del Distrito Capital; una población de 10º grado de educación media; una actividad de tipo extracurricular, complementaria a la formación en matemáticas.</p> <p><b>Objeto curricular:</b> la relación pitagórica (R.P.) en su sentido geométrico; el registro figural como registro principal.</p> <p><b>Propósitos de aprendizaje:</b> 1) elaborar sentido para R.P.; 2) elaborar tramas argumentativas para R.P.; 3) desarrollar procesos inferenciales en el campo geométrico.</p> <p><b>Requerimientos didácticos:</b> interacción de tipo argumentativo; una trama argumentativa fundamentada en la relación ángulo recto -teoría de las paralelas-, igualdad</p>	<p>1. La opción por una institución pública repercutió en los siguientes aspectos: se aumentó el tiempo de implementación del diseño didáctico de cuatro a siete meses. Se redujo la población de trece a seis estudiantes. Se aumentó el número de horas por taller, al tener que replicarse varias veces con grupos diferentes de la población. Todo lo anterior lo originó el cierre de la institución de dos meses, por problemas sindicales del magisterio.</p> <p>2. Activó la manifestación de sentidos asociados a la R.P., y de formas de aprehensión del registro figural. Complejizó la tarea de formulación de la R.P. por tres razones: ésta no era una temática curricular vigente para la población; esta población no había consolidado la R.P. como conocimiento operatorio; y la exploración heurística con el registro figural no resultó ser un procedimiento familiar para los estudiantes.</p> <p>3. Propició actitudes de verificación del cumplimiento de los propósitos. Aumentó en tres la cantidad de talleres previstos, en respuesta a las necesidades de formación de la población para el cumplimiento de los propósitos.</p>

	de figuras por coincidencia y por cantidad de magnitud. Dos dimensiones en la elaboración de sentido: la de conocimiento y la de elaboración mediante procesos inferenciales, uso de registro el figural; una estrategia de elaboración de conocimiento de tipo colectivo.	4. Instituyó en la población la estructura de la interacción propuesta: roles discursivos, momentos de elaboración de conocimiento y exigencia de acuerdos. Se aumentó el número de sesiones de trabajo de seis a once, con el fin de aplicar talleres de apoyo para el desarrollo de procesos inferenciales heurísticamente pertinentes. La trama argumentativa complejizó la formulación de R.P. para esta población, por las exigencias matemáticas previas requeridas por el tipo de trama argumentativa escogida. El tipo de interacción incidió en el avance de elaboración de las tres dimensiones del sentido de una proposición.
Optimización de estrategias	Taller de solución de problemas.	1. Favoreció la elaboración de conocimiento colectivo y la configuración de los tipos de roles en la interacción. 2. Puso de manifiesto los límites de la estrategia para la elaboración de conocimiento, por cuanto la exigencia de la estrategia de construir y aplicar, a partir de conocimiento elaborado previamente, no la cumplía satisfactoriamente la población.

Tabla 11

A partir de los efectos anteriormente identificados, se observa que los criterios permitieron consolidar un espacio articulado en el que interactúan dialécticamente los saberes puestos en juego (tramas argumentativas sobre la R.P. y los saberes matemáticos asociados), las intencionalidades en la interacción y las creencias y, los presaberes de los estudiantes en torno a los dos aspectos anteriores. En particular se puede concluir que:

1) El criterio de *pertinencia curricular* generó como resultado una articulación entre dos componentes curriculares: el saber matemático y el desarrollo del lenguaje, en este caso en matemáticas, con las concepciones de los estudiantes. Desde el primer componente se vincularon los campos de formación matemática (la geometría) y la argumentación en matemáticas, con presaberes conceptuales y procedimentales en matemáticas. En el segundo componente se relacionaron exigencias para la argumentación y la producción de textos explicativos y argumentativos con estrategias de trabajo en grupos y de elaboración de consensos, unas ritualizadas por la cultura escolar y otras emergentes por la relación con los talleres.

Los efectos de las opciones tomadas al aplicar el criterio de *pertinencia curricular* destacan el establecimiento de un contexto geométrico que pri-

vilegió la reflexión sobre las áreas y la orientación discursiva hacia la explicación. Además, como un efecto de la aplicación del diseño, no solo se convocaron saberes matemáticos asociados al campo geométrico sino que, también se vincularon saberes de otros campos matemáticos como el trigonométrico. Veamos algunas interacciones que evidencian esta situación:

G: Se va hablar sobre las relaciones que tienen las figuras de trabajo en pareja. Las relaciones que yo encontré fueron que en todas se les puede hallar el área, pero en la segunda figura en el cuadrado de adentro se tiene que utilizar el Teorema de Pitágoras, que es otra relación que se puede utilizar en el otro cuadrado y también podemos trabajar los perímetros (Aud. 4. 1).

H: La relación que encontramos fue que por cada figura por separado se hallan el seno, coseno y la tangente (Aud. 4. 2).

G: Cuando yo comencé a hablar yo coloqué las relaciones que tengo, yo dije que podía hallar el área, las áreas son iguales que con Pitágoras podía hallar el área de éste y que podía hallar los perímetros a éste cuadro (Aud. 4. 3).

Complementariamente, la estrategia de taller, como dispositivo para la elaboración de conocimiento, se caracterizó por convocar saberes asociados con los que el desarrollo del taller consideró centrales y que no necesariamente correspondían con los previstos por el diseño. También se observó en la implementación de los talleres la emergencia de saberes asociados con rituales en procedimientos matemáticos que devienen de la experiencia curricular de los estudiantes, por ejemplo:

A: lo que hacemos es observar digamos las figuras que lo conforman y en sí también el área del perímetro que es sobre todo lo que más nos piden en matemáticas cuando hallamos una figura como ésta (Aud. 3. 50).

Con base en los resultados señalados se infiere que hay un potencial de contenidos curriculares, no solo de orden temático sino también procedimental y actitudinal, que al ser dinamizado por las propuestas didácticas, genera contextos escolares específicos, que la misma propuesta tendrá que entrar a regular. En consecuencia, el vínculo establecido entre el campo de formación y las concepciones de los estudiantes permitió que el contexto geométrico de las áreas surgiera inmediatamente como constitutivo del contexto escolar, así como también que emergieran contextos matemáticos y no matemáticos alternos y se desarrollaran formas de interacción discursiva para la elaboración de significación, de manera colectiva.

2) El criterio de *adecuación didáctica* articuló tres factores: las condiciones externas (el contexto socio-cultural), las concepciones de los estudiantes sobre el objeto curricular (R.P.) y la propuesta de la tarea (en su dimensión instruccional y regulativa). Al respecto, se observó que un factor determinante del nivel y del modo de desarrollo de un proceso didáctico es el contexto sociocultural en el que se realiza tal proceso. Esto, por cuanto las condiciones del contexto inciden en el nivel de participación y de permanencia de los estudiantes en el proceso y, como consecuencia, en el desarrollo de los conocimientos y de las concepciones que emergen frente al diseño didáctico; además, en la interiorización de las pautas de trabajo propuestas y en su influencia en la construcción de roles y posiciones discursivas de los estudiantes.

El efecto que tuvo en la implementación del diseño la opción por el espacio escolar seleccionado, fue determinante para el comportamiento de factores como la permanencia de la población, el tiempo, y el modo de aplicación del diseño. De los 13 estudiantes que constituían la población inicial, nueve se lograron contactar durante el cierre de la institución y cuatro no se pudieron encontrar para terminar el proceso. El tiempo que llevó al equipo investigador la búsqueda de otro espacio escolar, la ubicación de los estudiantes en sus casas de habitación y la adecuación de horarios para jornadas de trabajo (algunos de los estudiantes empezaron a trabajar durante el receso escolar), interrumpió la secuencia temporal de aplicación del diseño por espacio de tres semanas. El modo de aplicación del diseño se vio afectado, por cuanto los horarios convenidos inicialmente no permitían reunir a toda la población recuperada el mismo día y hora. Por esta razón hubo necesidad de aplicar el mismo taller a distintos subgrupos, en diferentes momentos, según el horario que fuera posible concertar. Con esas condiciones de implementación de la secuencia didáctica la pregunta que surgió para el equipo investigador en el análisis macro fue: ¿Qué se logró consolidar con los dos primeros talleres, anteriores al cierre de la institución?

En el análisis de datos de los correspondientes talleres se identifican como aspectos consolidados en los estudiantes los siguientes: la intencionalidad de los momentos de la interacción (construir para convencer), las relaciones elaboradas previamente, el contenido geométrico de la interacción con los talleres previos y los rituales de la interacción argumentativa (el argumentador expone, aclara y justifica, y el auditorio escucha, pregunta, entiende y toma posición). En la siguiente tabla se presentan datos que corroboran los aspectos consolidados en los grupos de estudiantes.

Grupo	Intencionalidad	Relaciones y contenido	Rituales
A-B	<p><b>A:</b> “¿Cómo vamos a hacer eso?, <b>¿cómo hacemos una técnica, sí, para poder que entiendan?</b> Porque es que mirándolo así está como muy, porque nosotras ya sabemos qué es, pero otra persona que no sepa no va a entender.” (Aud. 22. 50).</p>	<p><b>A:</b> “Primero que todo quiero que demos-tremos <b>triángulos y rectángulos</b>”.</p> <p><b>B:</b> “No, primero por qué escogimos, por qué creemos que es ese y no las otras.”</p> <p><b>A:</b> “No <b>primero escribamos la relación.</b>”</p> <p><b>B:</b> “Pero primero tenemos que decir por qué sí por qué no”.</p> <p><b>A:</b> “¿Por qué?”</p> <p><b>B:</b> “¿Por qué? Porque es donde observamos claramente, <b>el triángulo rectángulo y una relación.... el triángulo rectángulo y una de las funciones del....</b>de la relación Pitagórica es tener base.” (Aud. 22. 25-30).</p>	<p><b>A:</b> “Entonces, las razones por las cuales yo creo que ésta es la más conveniente, es porque, eh yo clasifiqué las figuras que se forman a partir de los segmentos del triángulo ... entonces a partir de esa vamos a dar la conclusión final que es crear una nueva justificación, ¿una nueva qué? Razón pero ya con términos más amplios en la figura C.” (Aud. 22. 1).</p>
E-F-G	<p><b>H:</b> “Entonces <b>se necesita, sería comprobar</b> si esos cuadriláteros son o no son.” (Aud. 18.143).</p>	<p><b>H:</b> “Se sigue manteniendo las áreas, pero ya <b>no con relación a dos figuras</b>, sino si hay figuras pero no, pero no....., <b>se sigue manteniendo la relación entre dos figuras</b> pero no la uno, la dos.” (Aud. 18. 5).</p>	<p><b>F:</b> “Sería la relación, <b>sería la suma de los catetos más la hipotenusa, sería la relación.</b> Y la razón ya sería que sumar cateto opuesto (no se entiende) nos daría hipotenusa el cuadro pequeño, el cuadro mediano nos daría la medida del cuadro.” (Aud. 18. 92).</p>

Tabla 12

Complementariamente, la aplicación de este criterio puso en emergencia la relación entre las formas de interacción diseñadas y la elaboración de conocimiento. Es decir, para el caso del diseño realizado, la estructura de la interacción resultó ser clara y organizadora para los estudiantes; además,

un criterio que se siguió fielmente como instrucción escolar. Para el profesor, la realización de la estructura de la interacción proporcionó datos sobre la relación entre conocimientos previos (como posibles obstáculos o como coadyuvantes), procedimientos matemáticos y no matemáticos e identificación de conocimientos y de procesos que requerían ser desarrollados o implementados.

El criterio de *optimización de las estrategias* se convirtió en un factor para la valoración de las formas de interacción propuestas para el trabajo en el aula y sus efectos en el desarrollo de los propósitos de aprendizaje. En los siguientes apartados se evidencian resultados con respecto a este criterio.

## Conclusiones

---

Tan solo presentaremos conclusiones con respecto a la metodología de ingeniería didáctica para el análisis del discurso matemático en el aula. La ingeniería didáctica como modelo de investigación en didáctica, en este caso de las matemáticas<sup>13</sup>, establece con gran claridad los componentes del diseño didáctico y la necesidad de tomarlo como objeto de estudio permanente. Además, hacen evidentes las relaciones didácticas y la necesidad de que la didáctica genere criterios muy particulares para la realización efectiva de la enseñanza y del aprendizaje en campos particulares –como el de las matemáticas o el del lenguaje– para nuestra investigación. En esta perspectiva, este modelo recoge, sistematiza y aprovecha, para los intereses de la educación, el legado de tradiciones de la investigación educativa como la etnografía y en especial la investigación-acción. Sobre todo, en cuanto a la dimensión metodológica y al impacto que estas tradiciones tienen en su labor de identificar e interpretar problemáticas concretas de los escenarios escolares.

Como propuesta de investigación en el aula, la ingeniería didáctica aporta elementos fundamentales para la comprensión de las implicaciones epistemológicas y metodológicas del diseño didáctico. De ahí que centre su interés en la producción de un modelo de análisis de tareas en cuatro fases: análisis preliminar, análisis *a priori*, experimentación y análisis *a posteriori*. Como resultado de la aplicación de este modelo para la presente investigación, se identifica la importancia capital del modelo en términos de su contribución a explicar la complejidad de las relaciones didácticas y a la puesta en escena de los distintos factores que convergen en la reflexión

---

13 Como se mencionó al comienzo del artículo, este modelo se ha desarrollado en el seno de la didáctica de las matemáticas, pero sus principios no son ajenos a otros campos didácticos y menos a la tradición de la investigación en el aula.

didáctica, por ejemplo la teoría de un campo de conocimiento como la geometría euclidiana, la teoría de la argumentación y del discurso, la psicología del desarrollo en relación con las matemáticas y con el lenguaje y las teorías del currículo en matemáticas y en lenguaje. De igual manera, la investigación puso en emergencia la necesidad de afinar criterios para la identificación de estados *a priori* (de los estudiantes y de los procesos curriculares y didácticos) y de seguimiento y evaluación, tanto del desarrollo de propósitos de aprendizaje como de procesos de representación, de comunicación y de uso de los saberes puestos en juego en un diseño didáctico.

Adicionalmente, la noción de tarea cobró un gran valor por cuanto sobrepasó una significación tradicional que la reduce a “la responsabilidad” que impone el profesor al estudiante, generalmente para ser realizada en casa y con el propósito de “reforzar” un aprendizaje. *Tarea*, en este modelo de investigación implica situación de comunicación y de aprendizaje; estructura de relaciones orientadas al desarrollo de conocimiento, desde presupuestos didácticos previamente establecidos. Por ello, la tarea no se restringe a una actividad o a un día de trabajo, se proyecta a un horizonte que involucra el desarrollo de posicionamientos epistémicos y discursivos de los estudiantes y a la posibilidad de avanzar en un campo de saberes específico. En consecuencia, este modelo de investigación se convierte en un factor de formación y de ejercicio del docente.

## Bibliografía

---

Artigue, M.; Douady, R. y Gómez, P. (Eds.). (1995). Una empresa docente. En: *Ingeniería didáctica en educación matemática*, pp. 33-59. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bloch, I. (2002). *Differents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations*. En: J. Dorier; Artaud; M. Artigue; R. Berthelot y R. Floris (Eds.). *Actes de la 11 Ecole D'Ete de Didactique des Mathematiques*. París: La pensée Sauvage Editions.

Briones, G. (1996). *La investigación en el aula y en la escuela*. Bogotá: Convenio Andrés Bello.

Brousseau, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. En: J. Dorier; Artaud; M. Artigue; R. Berthelot y R. Floris (Eds.). *Actes de la 11 Ecole D'Ete de Didactique des Mathematiques*. París: La pensée Sauvage Editions

\_\_\_\_\_ (2004). *Théorie des situations didactiques*. París: La pensée Sauvage Editions.

- Calderón, D. I. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas*. [Tesis doctoral]. Cali: Universidad del Valle.
- \_\_\_\_\_ (2003). Género Discursivo, discursividad y argumentación. En: *Revista Enunciación*, (8) 44-56. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- \_\_\_\_\_ (2000). Sobre las concepciones de los maestros que enseñan a leer y a escribir. En: *Maestros y concepciones sobre lenguaje*. Bogotá: Universidad Distrital-Colciencias.
- Calderón, D. y Molina, C. A. (1999). Institución educativa y técnicas grupales. En: *Módulo de Comunicación para la Especialización en Docencia Universitaria*. Bogotá: Universidad Santo Tomás de Aquino.
- Calderón, D. I. y León, O. L. (2001). *Requerimientos didácticos y competencias argumentativas en matemáticas*. Bogotá: IDEP-Colciencias.
- Chevallard, Y. (1997). Famillière et problématique, la figure du professeur. En: *Recherches en didactique des mathématiques*, 17 (3), 17-54.
- Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascon, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.
- D'amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Balderas, A. (trad.). Bogotá: Magisterio
- De Tezanos, A. (1985). *Maestros artesanos, intelectuales. Estudio crítico sobre su formación*. Bogotá: CIUP.
- \_\_\_\_\_ (2004). *Una etnografía de la etnografía*. Bogotá: Colección Pedagogía Antropos.
- Douady, R. (1984). *Jeux des cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques – Une réalisation dans tout le cursus primaire*. París: These D'Etat, Université Paris VII.
- Elliott, J. (1994). *La Investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.
- Godino, J.; Font, V. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). **An onto-semiotic approach to representations in mathematics education**. *For the Learning of Mathematics*, 27 (2).
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1996). Relaciones dialécticas entre teoría, desarrollo y práctica en educación matemática: Un Meta-análisis de tres Investigaciones. The dialectic relationships between research and practice: A meta-analysis of

- three research works. En: N. Malara (Ed). *An International View of Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 13-22). Universidad de Módena.
- Goetz, J. P. & Le Compte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.
- Hammersley, M. y Atkinson, P. (1994). *Etnografía: Métodos de investigación*. Buenos Aires: Paidós.
- León, O. L. (2005). *Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría*. [Tesis doctoral]. Cali: Universidad del Valle.
- León, O.L. y Calderón, D. I. (2003). *Argumentar y validar en matemáticas. ¿Una relación necesaria?* Bogotá: Universidad del Valle-Colciencias.
- Marilier, M. C.; Robert A. y Tenaud (1987). Travail en petits groupes en terminale C. *Cahier des Mathematiques* (40). París: IREM París VII.
- Orozco, M. (2000). *El análisis de tareas: cómo utilizarlo en la enseñanza de la matemática en preescolar*. Cali: Centro de Investigaciones en Psicología, Cognición y Cultura, Universidad del Valle.
- Pérez Serrano, G. (1994). *Investigación cualitativa, retos e interrogantes I y II. Técnica de análisis de datos*. Madrid: La Muralla.
- Shullman, L. (1989). Paradigmas y programas de investigación, estudio de la enseñanza. Una perspectiva contemporánea. En: Wittrock, M. *La investigación de la enseñanza I*. (pp. 9-84). Barcelona: Paidós.
- Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: Some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics*, (3)2, 31-41.
- \_\_\_\_\_ (1994). Le rôle de l'enseignant à la lumière des concepts de schème et de champ conceptuel. En: M. Artigue et al. (eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Vygotsky, L. S. (1982-2001). Lenguaje y pensamiento. En: *Obras escogidas II*. Moscú: Editorial pedagógica. Madrid: A. Machado Libros.
- Wittrock, M. (1989). *La investigación de la enseñanza I*. Barcelona: Paidós.