Del álgebra al cálculo: ¿transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica

Gloria Inés Neira Sanabria[1]

> *Si la ruptura numérico/algebraico se identificó de forma clara en las investigaciones sobre la comprensión del álgebra, la ruptura álgebra/cálculo, por el contrario, se ha trabajado muy poco hasta el presente en las investigaciones sobre la comprensión del cálculo.*
> *(Artigue, 1995, p. 115)*

Descripción del problema

Lo que se encuentra en una primera aproximación informal a los escenarios propios del trabajo universitario inicial del cálculo es incomprensión de los conceptos, un inadecuado manejo de los razonamientos, además de una no muy sólida competencia algebraica en la resolución de los nuevos problemas. Los cursos se suelen desarrollar en forma mecánica y el trabajo descansa en lo puramente algorítmico y en el álgebra, sin alcanzar una comprensión de los razonamientos y conceptos del cálculo. Todo lo cual revela que la reflexión profunda acerca de la comprensión de los conceptos fundamentales en el trabajo inicial del cálculo en la universidad es necesaria, fundamental y urgente en el ámbito de la educación matemática, en la línea del aprendizaje y enseñanza del cálculo diferencial e integral.

La evidencia de los problemas de comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del cálculo diferencial es tan fuerte que ha desencadenado –en diferentes partes del mundo– reformas curriculares, innovaciones didácticas, propuestas con el uso de la tecnología, programas dirigidos a los profesores y a la enseñanza (Tall, 1996; Ferrini-Mundy y Gaudard, 1992), y hasta se ha cuestionado si se debe enseñar cálculo en la educación media; y en caso de que la respuesta fuera afirmativa, de qué manera y con qué grado de rigor.

Por otra parte, basta echar una mirada a algunos "*handbooks*" de investigación, desde el *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, editado por Grouws en 1992, hasta los más recientes; a las memorias

1 Doctorado Interinstitucional en Educación (DIE) Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: gneira@udistrital.edu.co; nicolauval@yahoo.es; gerarlopez3@hotmail.com

de las reuniones anuales del PME[2] o de recientes eventos de Educación Matemática como el ICME o Ciaem,[3] a los reportes de investigación presentados en las últimas Relme[4], por ejemplo, para darse cuenta de lo actual y presente de las investigaciones didácticas en el campo del cálculo.

Según Artigue (1995), no existe un paso natural del álgebra al cálculo, no existe un progreso continuo y regular del conocimiento matemático, sino que se da un desarrollo caótico: una *ruptura* frente a la cual se debe emprender una investigación que se ubique en ese trabajo inicial y que impacte en una mejor comprensión de los conceptos básicos del cálculo diferencial, pues generalmente se han atacado dichos problemas de incomprensión con reformas e innovaciones al interior del cálculo mismo.

Artigue enfatiza que, mientras la ruptura numérico/algebraico no sólo se ha identificado, sino que ha desencadenado numerosas investigaciones que aportan respecto a la comprensión del pensamiento numérico y algebraico, no ha sucedido algo similar con la ruptura álgebra/cálculo: no existe una multiplicidad de investigaciones sistemáticas ni posturas paradigmáticas sobre lo que distingue esos dos pensamientos, esas prácticas escolares, ni se sabe cómo tender el puente y alistar el camino para iniciar el trabajo en el cálculo diferencial. Tampoco se tiene conciencia sobre la importancia de estudiar esa transición, esas prácticas escolares del trabajo inicial del cálculo como otra manera de entender los problemas de comprensión de esta disciplina, ya sea en los cursos de educación secundaria, media o bachillerato (o como se llame en cada país), o en los primeros semestres de la educación superior.

La reflexión acerca del paso, transición o ruptura del álgebra escolar al cálculo diferencial y de las dificultades, conflictos u obstáculos epistemológicos, semióticos, didácticos o culturales que se dan en dicha transición, en esas prácticas escolares iniciales, categorías todas cargadas semántica y teóricamente y que han generado diversas tendencias, constituye un punto crucial en las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del cálculo en la educación media y superior, punto central de este ensayo.

Del fenómeno didáctico de algebrización del cálculo diferencial escolar, ya detectado por Artigue (Contreras, 2000), que se manifiesta en un enfoque algebraico y reduccionista del cálculo, emerge un interés urgente y fundamental por la actividad matemática que se realiza en las aulas de clase, por las prácticas escolares, por la dimensión de significación y sentido de

2 Psychology of Mathematics Education.
3 Comité Interamericano de Educación Matemática.
4 Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.

estas prácticas, que toca también las dimensiones didáctica y matemática. Detectar, comprender y describir las rupturas o continuidades, los obstáculos, conflictos o facilitadores en el paso del pensamiento algebraico al pensamiento analítico, y por tanto, comprender cómo se establecen esas relaciones de ruptura o de continuidad, de obstáculo o de facilitador, de hecho aportará a la problemática que a diario viven maestros y estudiantes con el cálculo.

Artigue reagrupa las dificultades que presentan los estudiantes en la transición álgebra-cálculo en tres categorías:

- Las dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo: los números reales, las funciones y las sucesiones, entre otros, objetos que están precisamente en construcción cuando se empieza la enseñanza del cálculo.
- Las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de *límite*, que es la noción central del campo, y a su dominio técnico.
- Las dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

En esta última categoría, lo radical del término "*ruptura*" se puede ejemplificar mediante el tratamiento que se da en el cálculo a las desigualdades e inecuaciones, a la alternancia de cuantificadores, a las aproximaciones, al simbolismo, al lenguaje, a los razonamientos y, en particular, a las demostraciones, todo lo cual rompe con las formas de trabajo que se presentan en los cursos anteriores a la iniciación del cálculo escolar, por ejemplo en los cursos de álgebra.

Los intentos de identificar, describir, comprender y explicar los obstáculos que pueden inferirse a partir de las prácticas escolares universitarias de iniciación del trabajo del cálculo diferencial en esa transición del álgebra al cálculo, constituye una exploración novedosa dado que se instauran en analizar el paso a unas prácticas, a una semiótica, a una semántica propia del cálculo para explicar, describir y comprender si las causas de tantos problemas con la comprensión del cálculo no están solamente al interior de cualquiera de las prácticas llamadas "*cálculo*" en la universidad, sino en la iniciación del trabajo en él, más específicamente en ese paso, transición o ruptura del álgebra al cálculo. En adelante las Prácticas Escolares Universitarias se identificarán con la sigla PEU, y las Prácticas Escolares Universitarias vinculadas a la iniciación del Cálculo Diferencial, con la sigla PEUC.

Emerge entonces una mirada diferente que pretende aportar otros elementos constitutivos a la hora de describir, analizar y comprender los problemas de aprehensión de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial escolar, dado que toma su lugar principal en el paso, en el camino, en el puente que del álgebra lleva al cálculo, para luego sí posicionarse al interior de éste, con toda su problemática y teniendo en cuenta los diversos actores que participan en él.

En síntesis, en este escrito se plantea un abordaje descriptivo-analítico de las dificultades que encuentran los estudiantes al iniciar el estudio del cálculo diferencial en la universidad. También se propone decidir cómo se describen mejor esa práctica escolar y esa dificultad: si como barrera, ruptura, refundición, revolución, cambio, conflicto u obstáculo, o como un problema de semiosis de un cierto pensamiento variacional con la mediación de uno o más registros que ya tienen unas restricciones y limitaciones nada fáciles de superar, para lo cual, en este ensayo, se intenta construir un marco explicativo inicial que permita hacer interpretaciones y tomar decisiones para caracterizarlas.

Al iniciar los cursos de cálculo se debe concebir la *función* como un objeto, como una entidad sujeta a las operaciones que otros procedimientos efectúen sobre ella, cuando lo que se concebía en cursos de álgebra, por ejemplo, era una noción de función presentada como un procedimiento aplicado a ciertos objetos llamados números; ahora ese mismo concepto, el de función, deviene en objeto al ser operado bajo otros procesos como el límite, la diferenciación o la integración, y se convierte en un sujeto sobre el cual se predican propiedades como la existencia de límite, la continuidad, la diferenciabilidad o la integrabilidad. No en vano ha sido nominado como el concepto fundamental de la llamada matemática moderna.

El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los principales rasgos que caracterizan al pensamiento variacional. Pero para que los alumnos logren un acercamiento a esta forma de pensamiento es necesario que superen la idea de función como correspondencia entre dos valores y que comiencen a visualizar una situación cambiante. Según Cantoral y Farfán (2000), sabiendo que el significado y el sentido acerca de la variación se establecen a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios son los referidos a fenómenos de variación y cambio, se propicia el desarrollo de acercamientos didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto de los conceptos como de los procesos, basados siempre en ideas variacionales.

La propuesta básica que plantean es, para el nivel que corresponda, el desarrollo de los contenidos del currículo relacionados con las variables, las funciones y el cálculo desde un enfoque variacional, considerando el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprenda el contenido temático. A través de experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes, Cantoral, Farfán y sus coinvestigadores han constatado que, en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, los estudiantes suelen manejar la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación, se hará más posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones.

Aproximación histórica a los obstáculos epistemológicos

Desde la tradición filosófica

El término *obstáculo epistemológico* fue construido por el físico y filósofo francés Gastón Bachelard, quien postula que la naturaleza no nos es dada y nuestras mentes nunca son vírgenes en frente de la realidad, pues sea lo que sea que veamos, digamos u observemos, está direccionado por lo que ya conocemos, pensamos, creemos o queremos ver (Bachelard, 1938/2004, p. 15).

Algunos de estos pensamientos, creencias y conocimientos pueden funcionar como un obstáculo a la propia comprensión de los fenómenos. Nuestras generalizaciones pueden estar sesgadas por la particular tendencia a armonizar el conocimiento con unas pocas leyes o principios de explicaciones que funcionan adecuadamente, como "*todos los cuerpos caen*" o "*la luz se propaga en línea recta*", o sobre metáforas preestablecidas, como "*el aire es una esponja*".

Según Bachelard, frente a lo real el alma no puede mostrarse ingenua; lo que cree saberse obstaculiza lo que debiera saberse y no es posible hacer tabla rasa de los conocimientos anteriores:

> *Cuando se presenta ante la cultura científica, el espíritu jamás es joven. Hasta es muy viejo, pues tiene la edad de sus prejuicios. Tener acceso a la ciencia es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación brusca que ha de contradecir a un pasado (Bachelard, 1938/2004, p. 16).*

Para Bachelard, el obstáculo es un tipo de conocimiento ya disponible, usualmente instalado desde hace mucho tiempo en nuestra mente y que ya no percibimos como tal. Lejos de ser una dificultad mental, resulta de una facilidad intelectual que nos otorgamos, muy a menudo sin ser ya conscientes de ello. Y... el obstáculo está confortablemente asentado, de tal forma que se vuelve a él constantemente.

Enunció algunos obstáculos en su obra: la experiencia básica o conocimientos previos, el conocimiento general, el obstáculo verbal, el conocimiento unitario y pragmático, el obstáculo sustancialista y el animista. No dio una definición explícita de obstáculo epistemológico, aunque sí muchos ejemplos; sin embargo, ninguno de ellos se aplica a las matemáticas, como él mismo lo advirtió.[5]

Bachelard construye este aporte a la epistemología en 1938, pero solo en el año 1976 Guy Brousseau lo incorpora a la investigación en educación matemática en el marco de su *Teoría de las Situaciones Didácticas*, de la *Ingeniería Didáctica* y de todo ese fenómeno didáctico que se da en Francia en la década de los 70. A continuación se describe brevemente el tránsito de esta noción hacia el campo específico de la investigación en educación matemática, que se tarda alrededor de 38 años.

Desde la educación matemática

La noción de obstáculo epistemológico, tomada de Bachelard, hizo su aparición en la educación matemática (más precisamente en la didáctica francesa de las matemáticas) gracias a Guy Brousseau, quien la hizo manifiesta en el primer texto de didáctica de las matemáticas presentado en 1976 por él mismo en la conferencia de la CIEAEM, en Louvain la Neuve.

Brousseau ya veía –en particular en la noción de obstáculo– el medio de cambiar el estatuto del error, mostrando que:

> *El error y fracaso no tienen el papel simplificado que queremos a veces hacerles jugar. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de ese tipo no son erráticos e imprevisibles, ellos se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo de sentido del conocimiento adquirido.*

5 *En efecto, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce pausas. Ella no conoce los periodos de errores. Ninguna de las tesis que sustentamos en este libro apunta hacia el conocimiento matemático. No se refieren sino al conocimiento del mundo objetivo* (Bachelard, 1938/2004, p. 25).

Y esta idea muy pronto empezó a funcionar como una categoría, entendiendo *categoría* como una noción que aunque no está en el desarrollo de un dominio científico, es suficientemente general y potente para direccionar el pensamiento y determina un campo de investigación a su alrededor.

Y eso es precisamente lo que pasó con la noción de obstáculo epistemológico: empezó a direccionar el pensamiento; todo un programa de investigación comenzó a desarrollarse a su alrededor, mientras que se llevaban a cabo debates entre los teóricos acerca de la naturaleza de tales obstáculos, sus posibles definiciones y la coherencia y racionalidad de importarlos de las ciencias naturales a la matemática.

Ejemplos de investigación al respecto son la tesis sobre el aprendizaje de la noción de límite, sustentada por B. Cornu en 1983, y los trabajos de Sierpinska que la prolongan. A partir del debate que desató la incorporación del concepto a la educación matemática, se empezó a creer que sí tenía sentido hablar de obstáculos epistemológicos en matemáticas, y que podían ser la explicación para eso que a diario se detectaba como obstaculizante en los aprendizajes de los estudiantes. Se buscaba un fundamento teórico para el nuevo concepto, pero transferirlo de las ciencias naturales a las matemáticas requería adaptaciones cuidadosas y profundas reflexiones filosóficas acerca de la naturaleza de estas últimas.

Se concluyó que en vez de tratar de reemplazar el conocimiento errado de los estudiantes por el correcto, el esfuerzo de los profesores debía ser invertido en la invención de problemas especiales, en los cuales los estudiantes experimentaran un conflicto mental que los hiciera conscientes de que dichas formas de comprensión habituales posiblemente no son las únicas y que no son universales.

Según Sierpinska (1994, p. 133)[6], las investigaciones se enfocaron en el diseño de situaciones de enseñanza que proveyeran condiciones favorables para la superación de obstáculos epistemológicos y posibilitaran así una mejor y más profunda comprensión de los conceptos matemáticos. En esa tendencia se identificó *comprensión* con *superación de obstáculos*.

En la búsqueda de explicaciones acerca de las dificultades de comprensión en matemáticas que se evidencian en los estudiantes, se concluyó que éstas no dependen solamente de la falta de experiencia con esta disciplina ni de las habilidades o destrezas que puedan o no tener, ni de la idiosin-

6 La obra de mayor interés en este capítulo es *Understanding in Mathematics*. Fue publicada en inglés en 1994. La autora de este escrito ha elaborado ya una traducción, en particular del capítulo IV.

crasia de su pensamiento aún inmaduro, sino también de la naturaleza de los conceptos matemáticos mismos y de la cultura en la cual éstos han sido desarrollados.

Con este supuesto de base, se abre la puerta para la investigación acerca de los obstáculos epistemológicos: formas de comprensión basadas en algo inconsciente, esquemas de pensamiento culturalmente adquiridos, creencias no cuestionadas acerca de la naturaleza de las matemáticas. Dicho constructo creó interrogantes como ¿Es un obstáculo epistemológico un error, una mala comprensión, una incomprensión o sencillamente una cierta forma de conocer que funciona en algunos dominios restringidos pero se revela inadecuada en otros? ¿Es una actitud de la mente que permite tomar opiniones por hechos, y unos pocos casos de evidencia por leyes generales?

Sierpinska (1994) entonces postula una teoría para explicar la comprensión en matemáticas basada en la teoría de los obstáculos epistemológicos. El primer supuesto que enuncia al respecto es que de un nivel de conocimiento y comprensión a otro hay necesidad de integración y reorganización. Afirma que la cognición no es un proceso acumulativo, pues las nuevas comprensiones pueden solamente ser parcialmente construidas sobre caminos de desarrollo previos. Por ejemplo, cuando se pasa de los números naturales a los enteros o de la aritmética al álgebra, debemos hacer –para el "arrepentimiento intelectual"– una reorganización de entendimientos previos.

El otro supuesto de la filosofía de los obstáculos epistemológicos que enuncia es que no podemos hacer metafísica de la comprensión científica, lo cual significa que estos obstáculos son inevitables. Nuestras creencias acerca de la naturaleza del conocimiento científico, las visiones de mundo que tenemos, imágenes que tomamos y que están impresas en el lenguaje que usamos, esquemas de pensamiento, todo ello forma un punto de partida para nuestro manejo de los problemas científicos, tanto que ellos desvían nuestros acercamientos y soluciones. Se vuelven apoyos pero también obstáculos para un buen entendimiento. Su superación requiere una reconstrucción de comprensiones fundamentales.

Sierpinska (1994) argumenta una y otra vez que la comprensión no es independiente del desarrollo ni del lenguaje en el que se comunica, ni tampoco de la cultura en la cual se socializa. Las creencias, las normas cognitivas y las visiones del mundo pueden ser todas fuentes de obstáculos para comprender la estructura teórica del conocimiento científico. Tanto en la instrucción como en el desarrollo hay momentos críticos: esos momentos gobiernan lo que precede y también lo que sigue.

Mediante un cuidadoso estudio de la cultura, concluye que aquello considerado obvio y natural puede imprimirse como un esquema de pensamiento, como un hábito tan natural que se vuelve parte de nosotros mismos, y plantea que el progreso hacia otro nivel requiere siempre superar rutinas intelectuales y todo aquello que hemos considerado verdades infalibles.

Nociones epistemológicas relacionadas con la ruptura epistemológica

De otro lado, y continuando con consideraciones de tipo epistemológico acerca de los dos constructos importantes planteados aquí –obstáculo y ruptura epistemológica–,[7] Vasco (1991) analiza los conceptos de revolución científica, ruptura epistemológica y otros relacionados con ellos, tomados de la historia y de la epistemología de la física, para estudiar su aplicabilidad a la constitución de las disciplinas matemáticas. Discute y concluye las siguientes tres tesis:

- En cada una de las disciplinas matemáticas la ruptura epistemológica, si tiene sentido identificarla con la conformación de la respectiva disciplina, se da una sola vez.
- En cada una de las disciplinas matemáticas, una vez conformada, no se dan propiamente revoluciones científicas en el sentido de Kuhn, sino solo refundiciones de esas disciplinas.
- Los intentos de unificación de las disciplinas matemáticas en una sola ciencia llamada "la Matemática" –en singular y con mayúscula– no solo no son ni revoluciones ni rupturas epistemológicas, sino que puede decirse que han fracasado, y que las matemáticas, con o sin mayúscula, continúan, y previsiblemente continuarán siendo plurales.

Fichant y Pécheux (1969/1975) definen *ruptura epistemológica* como el origen o comienzo de una ciencia, en el momento que Kuhn llamó "*revolución científica*". Estos autores consideran la ruptura constitutiva de esa ciencia, que deviene en un nuevo paradigma. Podría plantearse que las revoluciones científicas constituyen un acercamiento más sociológico que

7 La *ruptura epistemológica* es un concepto introducido por el filósofo y poeta Gastón Bachelard (27 de junio de 1884, Bar-sur-Aube – 16 de octubre de 1962, París) en Filosofía de las Ciencias (posteriormente desarrollado en el ámbito de la sociología en 1975), a raíz de un ensayo publicado en Francia por Pierre Bourdieu, Chamboredon y Passeron, titulado *El oficio de sociólogo*. El concepto de *ruptura epistemológica* alude a la necesidad, en la praxis sociológica, de alcanzar una fisura que permita ir más allá de la evidencia, de las prenociones en sociología. Supone, en otros términos, superar los espacios de tópicos y lugares comunes para hacer "*verdadera ciencia*", para "*conquistar el objeto contra la ilusión del saber inmediato*".

epistemológico al problema de los cambios científicos. El término *ruptura epistemológica* marca, en cambio, el punto de no retorno[8] a partir del cual comienza una nueva ciencia; en particular es todo el hecho epistemológico que sucedió con la constitución de la física científica desde Copérnico hasta Newton. Pero una vez constituida la nueva ciencia o disciplina después de la ruptura, quedan aún muchas regiones del campo teórico abierto por esa ruptura, en las cuales se mantiene un agregado de proposiciones teóricas que pretenden ser científicas, a pesar de estar formuladas todavía con lenguaje ambiguo. El trabajo de elaboración de los nuevos conceptos, las propuestas de respuestas a las nuevas preguntas y la búsqueda de coherencia conceptual llevan a periódicas revisiones de esas sub-regiones que constituirían las *refundiciones* o cortes intracientíficos, terminología que se atribuye también a Regnault (Fichant y Pécheux, 1969/1975, p. 12, definición III y nota 6).

En este sentido, no se podría afirmar propiamente que, al pasar del álgebra al cálculo en la organización curricular y cognitiva, lo que se da sea una ruptura epistemológica en el sentido aquí planteado, pero sí se afirma como posición inicial, que hay una ruptura en cuanto a prácticas, simbolismo, lenguaje, modos de demostración y argumentación, respecto a lo que habitualmente se hace en los cursos de álgebra y lo que se empieza a trabajar en el cálculo.

Existen otras miradas o tendencias relacionadas con la noción de obstáculo epistemológico:[9] Michelle Artigue utiliza el término *concepción*; Díaz-Godino habla de *conflictos semióticos;* D'Amore reivindica el término *misconcepción*; Radford reconoce los obstáculos en cuanto culturales y didácticos; Luis Rico desarrolla su teoría acerca de los *errores*; Luis Moreno habla de *obstrucciones*; tendencias que revelan además la necesidad de una teoría que explique esas dificultades en general, y particularmente en lo relativo a ese paso, transición, refundición, ruptura del álgebra al cálculo.

Una primera aproximación a una conceptualización de los obstáculos

De este panorama posible: obstáculo epistemológico, concepciones, obstáculos culturales, obstáculos didácticos, conflictos semióticos, epistémicos, cognitivos e interaccionales, misconcepciones, podemos ver que, reconociendo sus diferencias sustanciales, han existido en la literatura distintos modos de enunciar esas dificultades, errores, caídas, tropiezos que

8 Expresión atribuida a F. Regnault que usan Fichant y Pécheux para describir la ruptura epistemológica, en un curso en 1967-1968 en París, según aparece en la advertencia inicial de Oscar Landi al libro de Fichant y Pécheux (1969/1975, pp. 7-8; ver definición I, p. 9, y la nota 6 de la p. 12).

9 Tendencias que se analizan en otro artículo de la misma autora del presente escrito.

los maestros detectamos en nuestros estudiantes en las aulas de clase, en todos los niveles de escolaridad, en toda clase de instituciones, de diferentes maneras, y se ha focalizado el interés de los investigadores por indagar lo que subyace a tales dificultades con el afán de proponer categorías de análisis para explicarlas potencialmente.

Tener en cuenta ese panorama de miradas y de perspectivas es importante para caracterizar las tendencias actuales alrededor de los obstáculos y conflictos, y sobre todo para "construir" un enfoque propio que se sustente con conocimiento de las diferentes miradas y perspectivas, y que sea lo suficientemente potente para dar cuenta de las "dificultades" detectadas.

Un inconveniente concreto que se presente en algún tema y que se revele en los errores que se cometen, en las dudas, en la perplejidad, puede deberse a que no se tienen los conocimientos necesarios, o a que los que se tienen dificultan el trabajo. A diferencia del que falta, el conocimiento que sí está pero que provoca dificultades y conflictos, dudas y errores, es síntoma de la existencia de conocimientos previos –presentes o ausentes– que entorpecen y/o dificultan el aprendizaje.

Esta misma diferencia se plantea en el tipo de errores detectados: accidentales, ocasionales, *lapsus* y errores sistemáticos, que se deben a algo… ¿a qué?

Planteamos como supuesta una contraposición entre el conocimiento ausente (ignorancias) y el presente, pero que a la vez es un factor dificultante, que son los obstáculos.

La noción de obstáculo será entendida en el presente documento como un conocimiento y no como su ausencia o como una equivocación; un conocimiento que funciona bien en algunos contextos, pero que al ser aplicado en otros produce "errores".

Se conciben los errores como síntomas, indicadores de la posible existencia de obstáculos. Aquí la palabra error no se entiende como juicio calificador de un comportamiento o respuesta errónea del estudiante, sino como aquella conducta que no sigue las reglas institucionales.

Se reconoce creatividad en los errores que cometen los estudiantes, comprensiones divergentes de las preguntas formuladas. Se trata de no cargar la palabra semánticamente con la tradición que la asocia al enjuiciamiento peyorativo y calificativo hacia los estudiantes. Los errores –mirados de esa manera– se convierten en la fuente de indagación más importante, pues los obstáculos pueden inferirse a partir de estos en las prácticas y de la dificultad experimentada por los que participan en ellas.

Si la conducta errática se repite sistemáticamente, se le ha de buscar la etiología en algo que no se reduce a la habilidad motora incipiente. Esa conducta, error, equivocación, violación de la regla institucional, es un síntoma de que ahí hay un obstáculo que no depende de falta de habilidades; vendrá entonces la caracterización para precisar su naturaleza.

Enseguida se plantean y profundizan algunas ideas específicas acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo en particular, propósito fundamental de esta reflexión.

Dificultades identificadas en el aprendizaje del cálculo

Las investigaciones sobre los errores y dificultades en el campo del pensamiento matemático avanzado no son uniformes en la terminología, ya que muchas veces se utilizan indistintamente las expresiones *dificultad* y *obstáculo*. En todo caso, los estudios que se han consultado están focalizados sobre la detección de éstos. Se citan algunas dificultades que se reportan bajo distintas nominaciones.

Se advierte que la palabra *dificultad* está más asociada a una tradición de la psicología del aprendizaje, pero en este escrito se quiere abrir su campo semántico, presentar un panorama desde la investigación en didáctica de la matemática y citar referentes iniciales mínimos que posteriormente sean objeto de un análisis mayor.

Mediante la observación de dos parejas de alumnos preparando la identificación de la tangente como límite de una secante variable, para encontrar la ecuación de la tangente de una curva representativa de la función seno en el origen, Sierpinska (1994) propone una lista de cinco grupos de obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite:

- El llamado "horror al infinito", que reagrupa los obstáculos ligados con el rechazo al estatuto de operación matemática para el paso al límite: la transferencia automática de los métodos del álgebra propuestos para manipular magnitudes finitas a las magnitudes infinitas, la transferencia de las propiedades de los términos de una serie convergente a su límite, y finalmente el obstáculo que consiste en asociar el paso al límite con un movimiento físico, con una aproximación.
- Los obstáculos ligados al concepto de función: ocultación de la noción de función subyacente, restricción a una sucesión de valores, reducción monótona, no distinción de la noción de límite y de extremo inferior o superior.
- Los obstáculos geométricos: la intuición geométrica se convierte en "un obstáculo serio en la formulación de una definición rigurosa, tanto al impedir la determinación de aquello que quiere comprenderse como la

diferencia de dos magnitudes, como por un apego de la noción de límite a la noción de extremo de un conjunto".

- Los obstáculos lógicos: ligados a la eliminación de los cuantificadores o de su orden.
- El obstáculo de símbolo: ligado a la reticencia a introducir un símbolo específico para la operación del paso al límite.

Sierpinska confirma, además, lo que ya había sido señalado por Bachelard: que aquello que está en la base de cualquier clase de obstáculo epistemológico, es su aparición y su resistencia en la historia de los conceptos considerados, así como la observación de concepciones análogas en los alumnos.

Artigue (1995) también resalta que el uso común de la palabra *límite* evoca las ideas de lo no traspasable, lo no alcanzable o de fin de un proceso. Señala también una segunda dificultad relacionada con la doble naturaleza –estructural y operacional– que tiene el concepto de límite, y enfatiza la dificultad proveniente de la necesidad de disociar el objeto límite del proceso que permite construirlo, asociándolo con el obstáculo señalado por Sierpinska en relación con la consideración del infinito. La formalización de la noción de límite es otra dificultad, que consiste en mostrar que en ella se concibe un solo proceso, en tanto los estudiantes parecen ver dos, uno que se efectúa sobre la variable y otro sobre los valores de la función.

Como ya fue reseñado anteriormente, Artigue (1995) reagrupa las dificultades en tres categorías, dando respuesta a la pregunta: ¿Qué elementos conceptuales trae el estudiante para trabajar las nociones intuitivas del cálculo? o ¿qué requiere para acceder al cálculo? Las posibles respuestas (Neira, 2000) involucran entidades como funciones, números reales, infinito, aproximaciones, continuidad, vecindades, entre otras, nociones que como tales tienen sus propios problemas de conceptualización y de representación, los que además están en construcción precisamente en este estadio de desarrollo cognitivo y conceptual, cuando se inicia el trabajo en el cálculo.

Con respecto a las funciones, en el álgebra se manejan muy dependientes de su representación gráfica o tabular, o de los procesos que las engendran, y ahora se deben trabajar como entes conceptuales sobre los cuales se van a aplicar nuevas nociones. El tema de funciones tiene su propio campo de estudio y es él mismo un núcleo de investigación en educación matemática; es, además, el eje central de toda la investigación sobre pensamiento variacional.

Vale la pena recordar aquí las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un registro semiótico de representación a otro, y para articular los distintos registros de representación con sus representaciones semióticas

(Duval, 1992, 1998) y reconocer en todas el mismo objeto matemático. Por ejemplo, se rechaza por parte de los estudiantes la función real constante de valor 4 si se presenta en la forma "y = 4", porque lo que existe en el estudiante es una asociación de la función con su fórmula dependiente de x o de función como variación; en cambio, si se presenta gráficamente por la asociación "recta = función", se presentan menos errores.

Aquí hay que destacar el doble estatus de los objetos matemáticos: el operacional (dinámico) y el estructural (estático). En la historia de los conceptos, el primer estatus precede al segundo, aunque luego se vuelve un proceso dialéctico, y las investigaciones realizadas muestran que en la comprensión individual sucede lo mismo. A ese salto cualitativo que se refiere al paso de una concepción en estatus dinámico a estatus estructural, se le ha denominado "encapsulación" o "reificación". D. Tall ha designado "proceptual" al carácter de las nociones matemáticas que representa a la vez los objetos y los procesos. Aquí se presenta un problema: esa flexibilidad es condición necesaria en la comprensión del cálculo, pero a la vez se evidencia la dificultad que hay para desarrollarla individualmente.

En cuanto a los números reales, ¿será que los estudiantes tienen una clara distinción de los diferentes referentes numéricos? Algunas investigaciones (como la de Artigue, 1995) muestran la tendencia de los estudiantes a asociar el número real con la aproximación que de él nos da la calculadora, por ejemplo las expresiones para π, $\sqrt{2}$... Entonces, en ese estadio, ¿los números decimales son iguales a los números reales? También se han detectado situaciones arraigadas en los estudiantes de *college* o de primeros semestres de universidad en los Estados Unidos, como que entre 3.25 y 3.26 no hay ningún número, o que 3.138 es mayor que 3.4, o que $(3.4)^2$ es igual a 9.16, situaciones que muestran la complejidad de estas simbolizaciones. No es difícil hacer un sondeo entre nuestros estudiantes para confirmar que adolecen de los mismos vacíos conceptuales respecto a estos referentes.

Para abordar el segundo de los problemas enunciados por Artigue, tomaré una idea de David Tall (1996), quien afirma que si bien la noción de función es el núcleo y centro de la matemática moderna, es el concepto de límite el que significa un paso a un plano más avanzado de pensamiento matemático y es el jalonador de procesos de desarrollo del pensamiento: sabemos bien que el concepto de límite no solo es fundamental en la historia y evolución del cálculo, sino que lo es también en la enseñanza del mismo.

Las dificultades que conlleva el concepto de límite tienen varias connotaciones, entre ellas una de tipo lingüístico, pues en la cotidianidad, dicho término en general tiene significados que no favorecen la idea matemática:

es entendido como algo que nunca puede ser alcanzado, el último término de un proceso, etc., nociones que refuerzan concepciones erradas del concepto matemático. El límite aparece en variados contextos matemáticos: de sucesiones, de series, de funciones, en la noción de continuidad, de diferencial, de integral; es pertinente, entonces, diferenciar entre estos tipos de límites, por ejemplo el carácter discreto del límite de una sucesión (a_n) y el carácter continuo del límite de una función f(x), categorías que han de tenerse claras para ganarle a las dificultades inherentes que conlleva el concepto.

Hay algunas justificaciones interesantes de los estudiantes respecto a los límites. Por ejemplo, que el límite de la sucesión 0.9, 0.99, 0.999, … debe ser menor que 1; que 0.9, 0.99, 0.999, … no tiende a 1 pero tiene límite 1; que 0.999, que es menor que 1, por más nueves que se le agreguen, siempre será estrictamente menor que 1; aceptan que nunca puede pasar de 1 (porque "tiende a tener" la propiedad de los números como 0.9999 que nunca pueden pasar del límite 1). Estas ideas se han catalogado como el *principio de continuidad* (Leibniz) o *generic limit property*, que consiste en creer que cualquier propiedad común a todos los términos de una sucesión también la tiene el límite.

Algunas consideraciones acerca de las prácticas escolares universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial

Las prácticas escolares universitarias vinculadas con el trabajo inicial en el cálculo diferencial –PEUC– de los estudiantes de primer semestre de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital incluyen las prácticas discursivas y no discursivas usuales con que estudiantes y maestros "viven" las clases, con las que participan en el aula alrededor de las temáticas propias de la disciplina. Contienen, entre otras, las formas de "hacer tareas", de discutir con otros, de estudiar individualmente y en grupo, y de participar.

Se indaga la entrada al mundo del cálculo diferencial –en un curso más formal que el acercamiento que da el bachillerato– como fuente rica de información acerca de los obstáculos epistemológicos, semióticos, culturales, didácticos o de la naturaleza que sea, precisamente en ese trabajo inicial, porque se empieza a construir un lenguaje, una forma de nominar, un rigor, un hacer que permea la práctica. Porque se empiezan a tratar funciones como objetos, sobre los cuales se van a definir límites, continuidad y derivadas. Porque se habla, se escribe y se significa de una cierta manera: es ahí donde se ubica esta reflexión, que parte del supuesto de que ese trabajo inicial es fuente de indagación importante.

Se concibe la práctica configurada por los desempeños de los sujetos, el contexto, el medio, el "currículo oculto" y el explícito por el que transita un curso.

La práctica escolar propone la apropiación de rutinas, cuyo sentido está dado por la práctica misma, y crea una cultura propia. En general, afirman Baquero y Terigi (1996), las prácticas escolares suponen un quiebre en la cotidianidad de los sujetos, pues la escolarización implica que el sujeto se apropie de una rutina específica. Las prácticas escolares se caracterizan porque constituyen una realidad colectiva, delimitan un espacio específico, actúan en unos límites temporales determinados, definen roles, predeterminan y sistematizan contenidos y proponen formas de aprendizaje descontextualizado.

En la escuela no solo se desarrollan contenidos formales y saberes explícitos, sino que la actividad sistemática incita a los alumnos a construir sus propios procesos intelectuales, compartiendo medios semióticos como la escritura o formales como las matemáticas.

Se describen a continuación algunos elementos constitutivos de esas prácticas, como los esquemas de clases, los textos usados, las tareas y ejercicios, las evaluaciones, los planes de estudio, los perfiles de profesor y el tratamiento más o menos general de algunas nociones. Descripción informal aún, pero basada ya no solo en la experiencia personal y la observación, sino confirmada a través de diálogos, entrevistas con un número significativo de maestros del ciclo básico de ingeniería, además de consultas con documentos curricularmente institucionalizados en el área de matemáticas de la facultad de ingeniería.

Acerca de los esquemas de clase. Las clases de introducción al cálculo diferencial en la universidad colombiana, en la Universidad Distrital y, específicamente, en su Facultad de Ingeniería, son clases tradicionales[10] en las que el profesor explica los contenidos inscrito en el esquema convencional: definiciones, teoremas,[11] ejemplos, ejercicios generalmente basados en un texto guía o de consulta, en los que el tratamiento de las temáticas es

10 Se reconoce que hay esfuerzos individuales innovadores y también algunos mediados por la tecnología. Pero la generalidad, la institucionalidad del enfoque del área y del ciclo básico de ingeniería está diseñado sobre una metodología tradicional.

11 Los teoremas tienden a desaparecer de la clase tradicional, no sus enunciados, sino sus demostraciones formales; a cambio, lo que generalmente se hace son "mostraciones" argumentadas del hecho que enuncia el teorema.

usualmente el mismo. Hay espacios para elaboración de talleres y trabajos en grupo.

Acerca de los textos guía y de consulta. Cálculo o Introducción al Cálculo, de autores como Stewart, Thomas, Swokowski, Purcell, Leithold, Protter, Larson, son libros que han reinado como textos guía según se vuelvan paradigmáticos en algunas facultades, como las de la Universidad Nacional, las de Los Andes, la Escuela Colombiana de Ingeniería… Todos ellos comparten un enfoque tradicional de por lo menos 50 años.[12]

Acerca de las tareas y ejercicios. Lo usual es que cada profesor disponga de un repertorio o archivo personal referente a ejercicios que ilustran mejor una situación, comúnmente tomados de los libros, de los solucionarios o generados en grupos de trabajo de docentes. Esto se puede corroborar en las notas de clase que publican algunos maestros por medio de la Oficina de Publicaciones de la Universidad Distrital, como también en las guías dejadas en las fotocopiadoras de las facultades.

Que el tratamiento sea clásico, convencional o tradicional, no significa que no se haga un buen trabajo, comprometido, responsable y guiado hacia lo que se considera juega un rol importante en el desarrollo conceptual de los estudiantes.

Acerca de las evaluaciones. Hay parciales y exámenes conjuntos, lo cual lleva al necesario consenso acerca de contenidos, enfoques, temáticas y metodologías. Los profesores llevan propuestas de evaluación y se conforma así la prueba, que se convierte en un verdadero calvario para los estudiantes, pues la "mortalidad" es significativamente alta en estas pruebas conjuntas: se vuelven todo un reto.

Acerca del currículo general de ingeniería en la Universidad Distrital. Hay un ciclo básico en matemáticas que comprende cálculo diferencial, cálculo integral, álgebra lineal, lógica, cálculo multivariado y ecuaciones diferenciales.[13]

Consultados los planes de estudio de facultades de ingeniería de varias universidades –Nacional, Distrital, Andes, La Salle, Central, Gran Colombia, Piloto, Antonio Nariño, UIS, América, Autónoma, Javeriana, Escuela Colombiana de Ingeniería, UPTC– hay un consenso general acerca de los

12 Por citar un ejemplo, la primera edición del Cálculo de Thomas es de 1952, y van en la 12a edición. Si comparamos la edición de 1945 y la de 1995, podemos efectivamente confirmar su enfoque tradicional.

13 Se consultará a Acofi y a Conaces con el fin de dar cuenta, de manera oficial, del currículo del ciclo básico de las ingenierías.

contenidos de los cursos que constituyen el Cálculo I (diferencial) y el Cálculo II (integral); en muchos casos los mismos profesores dictan los cursos en unas y otras universidades.

Tipos de profesor en ingeniería. En general, el perfil requerido es matemático o licenciado en matemáticas con posgrado en el área. Se encuentran profesores egresados de las Universidades Nacional, Distrital y de los Andes, quienes usualmente dictan cátedra en más de una institución; muchos de ellos cuentan con maestría en matemáticas o en áreas de la ingeniería; muy pocos tienen especializaciones o estudios en educación o en educación matemática. Ni en el área de matemáticas –ni en ningún área del ciclo de especialización en ingeniería– la pedagogía y la didáctica son consideradas un problema, pues se parte del hecho de que saber la materia es suficiente para saber enseñar.

Acerca del tratamiento de algunas entidades conceptuales. Al entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

Ya ha sido reseñado en Neira (2000) que, en el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura a(x) = b(x) en una sucesión de escrituras:

$$a\ 1\ (x) = b\ 1\ (x)$$

$$a\ 2\ (x) = b\ 2\ (x)$$

$$\ldots$$

$$a\ i\ (x) = b\ i\ (x),$$

hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. En cambio, en el cálculo se hace un encaje con la proposición "Si $\delta > 0$, y $0 < |a - x| < \delta$", lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar, por ejemplo, que en la vecindad de un punto *a*, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro *a* en donde tal desigualdad se pueda garantizar mediante aproximaciones y estimaciones. Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos, como la noción de función como expresión algebraica, la x como representación de la función idéntica, las constantes como representaciones de las respectivas funciones constantes (Vasco, 1995) y otros casos semejantes.

La noción de tangente proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas:

1. no corta al círculo,
2. lo toca solo en un punto
3. y en el punto de contacto es perpendicular al radio.

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común.

Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas. Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Acerca de la organización curricular en la educación básica y media

Curricularmente, el modo como ocurre la instrucción en la escolaridad institucional es así: dos cursos de algebra en 8º y 9º grado y un curso de cálculo en 11º grado, es decir, se presenta el álgebra como un dominio, como práctica anterior al cálculo; y no solo anterior, sino como prerequisito para entrar a él posteriormente. En la universidad, en primer semestre de ingeniería, el estudiante debe tomar un curso de cálculo diferencial para el cual es necesario, aunque no suficiente, un buen dominio del álgebra. Incluso hay universidades que han incluido un curso de fundamentos de matemática o matemáticas básicas, repaso del álgebra y de las funciones, para suplir los vacíos que puedan presentarse antes de entrar a un curso formal de cálculo. Históricamente también se desarrolló primero el álgebra y posteriormente el cálculo. Así que este primer acercamiento, paso o transición, significa el camino que ha dado tanto la humanidad como la escuela en la adquisición y ordenamiento de ciertos contenidos aceptados universalmente como básicos en la educación, particularmente en el álgebra y el cálculo escolar.

En la práctica pedagógica de la organización escolar actual, lo que se da es una separación de un año entre el álgebra y el cálculo (trigonometría y geometría analítica). De facto, se encuentra el 10º grado, que configura un estadio de transición escolar, del que podría discutirse si tiene alguna razón matemática o pedagógica, o solo de tradición escolar. Nos interesa la transición del algebra al cálculo en el sentido de lo que cambia semántica, sintáctica y semióticamente para el estudiante una vez que entra al mundo del cálculo, tanto en grado 11 como en el primer semestre de universidad. Pero no solo cronológicamente, sino también en qué momentos, en qué temáticas, con cuáles situaciones se está presentando ya una irrupción de elementos constitutivos del cálculo.

Se asumirá como supuesto inicial que hay un paso o transición y no una ruptura –que es un término que instaura de entrada una postura radical– para que la investigación misma arroje más claridad acerca de ese camino, de ese tránsito. Voy a decir "paso", no "paso curricular" ni "cognitivo", entendiendo que curricularmente se pone primero el álgebra y después el cálculo; que el álgebra se considera prerequisito para el cálculo; que para compartir las prácticas del cálculo se requiere, en gran medida, manejar las del álgebra. Hay un paso que algunos dan de una vez; otros se devuelven; hay quienes permanecen un poco ambiguos por un tiempo y otros tal vez nunca pasen, pero cualquiera de las situaciones confirma que este paso también se llama correctamente "transición". Dicha transición puede ser cognitiva, lingüística, curricular, semiótica, pero se advierte, eso sí, que no se está trabajando desde el punto de vista antropológico ni desde el punto de vista del análisis del discurso.

Tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece ser la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve, ante todo, por la ausencia de la composición; por el entendimiento del exponente menos uno (–1) como recíproco, no como inverso de la función; por el uso del apóstrofe para la derivada; por la manera de entender las igualdades que empiezan por "y =…" como funciones; por la yuxtaposición de letras –sin indicar multiplicación– en los nombres de las funciones (como "*lnx*"). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

Tenemos la conjetura de que la notación para la geometría analítica de décimo grado no es la misma que la del álgebra escolar ni la del cálculo. En geometría analítica, los términos "no significan nada"; sólo las igualdades –que también llamamos "*ecuaciones*"– significan algo, aunque en ellas no se trata de averiguar una raíz o un conjunto solución (o conjunto de soluciones). No importa que las gráficas cartesianas determinadas por esas ecuaciones sean funcionales o no. No se usa la composición ni la derivada. Podría, pues, haber otra transición del álgebra escolar a la geometría analítica y otra al cálculo, pero en este trabajo nos interesa la que va del álgebra al cálculo, entre otras cosas, porque en el cálculo de la universidad, la geometría analítica es una unidad más o una herramienta para las llamadas "*funciones trascendentes*".

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado los estudiantes nunca vieron una "o" pequeña entre dos términos algebraicos como 2x y x^2, pues no representaban dos funciones: la que duplica, *d(_)*, y la que eleva al cuadrado, *c(_)*, sino los números resultantes. En cálculo habría que escribir $c{\circ}d(x)$ o $d{\circ}c(x)$, que no es lo mismo. Los objetos del cálculo son, pues, muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q^+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza como función, tal vez "porque no hace nada". La *x* se considera como incógnita, como variable o como indeterminada, pero no como función (representa la función idéntica en los reales).

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre *función parcial* y *función totalmente definida*, ni entre *función en ("into")* y función *sobre o sobreyectiva ("onto")*. Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Algunas consideraciones sobre el álgebra escolar, el cálculo diferencial y el caso del límite

El tema central que abordaremos en esta sección es si el álgebra de octavo y noveno grados es solo aritmética genérica o generalizada sin pretensiones adicionales, o si las tiene, qué es lo que pretende. Creemos que es lo primero. Precisamente cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, todavía los términos reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico. Aquí pueden ser útiles las ideas de Ed Dubinsky en su Teoría APOE (*"APOS Theory"*).

Para la transformación sintáctica de expresiones a lápiz es más sencilla y rápida la notación del álgebra escolar con variables uniliterales y omisión de los símbolos de multiplicación y elevación a potencias. ¿Cuándo y para qué se empieza a utilizar la transformación sintáctica de expresiones algebraicas? Ahí es muy clara la importancia de pensar en la conversión y en el tratamiento según Raymond Duval: primero se hace la conversión del registro verbal natural al registro algebraico escolar, y luego, un tratamiento de la representación semiótica algebraica internamente en el registro algebraico escolar. En el tratamiento de una representación algebraica no se necesita pensar en lo que representa, sino pensar en las reglas y en sus restricciones para no equivocarse. Solo al final se vuelve a hacer una conversión al lenguaje natural.

Se consideran el álgebra y el cálculo como dos sistemas conceptuales diferentes, con registros semióticos para diferentes sistemas: diferente semántica, sintaxis casi igual. Como se señaló arriba, una diferencia en la sintaxis del cálculo (pero no del álgebra) es el uso del redondelito de la función compuesta. Una diferencia en la semántica es la interpretación de la *x* como función idéntica, que ciertamente no es del álgebra, dominio simbólico escolar que sirve para representar regularidades que se repiten en patrones y que se asocia con el pensamiento variacional, categorizado para sistemas algebraicos y analíticos. En el cálculo los tópicos más importantes que se suelen estudiar son el de razón o tasa de cambio, los límites, las derivadas, la continuidad, las integrales, nociones que giran alrededor del concepto de límite.

Desde nuestro punto de vista, el caso del área y del perímetro del círculo en los primeros grados de básica secundaria son ya casos del límite como proceso, aunque no estén aún axiomatizados o formalizados a la manera de Weierstrass. El obstáculo es la formalización: ¿por qué se pone valor absoluto y no se dice explícitamente que "x es distinto de x_o y que está en una vecindad de longitud dos delta (2δ) alrededor de x_o"? Puede ser mucho más claro decir esto que decirle al estudiante algo así como "cero es menor que equis menos equis-sub-cero valor absoluto es menor que delta" y escribir:

"$0 < |x - xo| < \delta$".

Se está poniendo el obstáculo en donde no es: en tratar de resumir dos desigualdades en una sola, suponiendo que el estudiante sí es consciente de que x_o puede ser cualquier número positivo o negativo, pero fijo, y que x es ahora variable, pero dentro de esa "vecindad perforada". ¿Podemos suponerlo?

Desde este marco conceptual, así como la longitud de la circunferencia, el área del círculo y otros problemas de cuadratura involucran ya el concepto de límite en el sentido que se quisiera lo manejara el estudiante de cálculo. Lo mismo puede decirse respecto a los decimales infinitos: ¿será que 0,9 periódico es igual a 1 o diferente de 1? Ahí está presente el concepto de límite como nosotros lo vamos a entender en el marco teórico: sin absolutamente ninguna preparación sobre sucesiones, series, límites y desigualdades, sin construcción de los números reales ni conciencia de su completitud, etc.

Para caracterizar lo que llamamos *"el caso del límite"*, es necesario citar la aproximación geométrica que tradicionalmente se presenta. *"La tangente es el límite de la secante (o de las secantes)"*, se dice en el tratamiento tradicional. Hay que plantear el límite de la secante como la tangente, pues eso se hace en los cursos: se traslada el problema al terreno geométrico, pero ese es otro tipo de límite, que no tiene ε ni δ; es bueno para mostrar que el profesor está usando una noción de límite que no es la que se define con ε ni δ, y también para llamar la atención sobre otro punto poco explicitado: el profesor utiliza la palabra *tangente* en dos sentidos: uno, con el significado del final de décimo grado, cuando se habla de las funciones trigonométricas, y otro, en el sentido de la primera parte del décimo grado, cuando se habla de la tangente a las gráficas; luego, ahí el que está poniendo un obstáculo didáctico es el profesor. Está tendiendo una trampa que distingue dos usos que el enunciador sabe que son diferentes, pero el estudiante no. El profesor debería decir: "*la tangente del ángulo que forma la recta tangente con el eje horizontal*". El concepto de pendiente como inclinación puede medirse por el ángulo, por el seno del ángulo o por la tangente del ángulo, y esto es más coherente que tratar de definirla como razón de dos variaciones $\Delta y/\Delta x$. ¿Dónde está la tangente?

En las expresiones simbólicas que involucran el símbolo de infinito, como

$$\text{Lim } x = \infty$$

$$x \to \infty$$

suele haber una inconsciencia en los estudiantes, pero también en el profesor, quien usa igual sintaxis y vocabulario cuando dice que "*la x que tiende a infinito es una variable y la otra x es una función*". Precisamente ahí hay un ejemplo de ese paso del álgebra al cálculo: en el álgebra, la *x* representa variables en el sentido de incógnitas para averiguar o de números genéricos, pero en el cálculo representa la función idéntica.

En Euclides ya se habla de límite y hay una diferencia entre segmento finito, semirrecta y recta indefinidamente larga. Para los profesores de educación media y de universidad, "cálculo" es lo que aparece en los textos sobre cálculo. La conceptualización básica involucra el estudio de los límites, las derivadas, las integrales… y el caso del límite lo conforman todas aquellas situaciones que requieren aproximaciones y vecindades; el mismo profesor en su lenguaje utiliza expresiones como "*acercarse más y más*", "*acercarse tanto como se quiera*", "*tender hacia*", "*infinitamente cercanas*", que involucran entidades como lo infinito y lo infinitesimal. Esquematizando, tenemos:

Algebra	Cálculo	Geometría Analítica	Análisis
Como tratamientos en un registro simbólico para la aritmética generalizada.	Como tratamientos en un registro simbólico para el análisis.	Como conversiones entre dos registros simbólicos de ecuaciones y gráficas.	Como sistema conceptual cuyos elementos son las funciones reales de valor real.

Hay tres operadores sobre funciones que son los que caracterizan el trabajo analítico que se suele hacer en el cálculo: el límite (L), la derivada (D) y la integral (∫).

El siguiente cuadro muestra en la primera columna cada operador analítico por sí solo y el mismo aplicado a su argumento, (que es una función reificada como objeto, como aparece en la segunda columna); en la tercera columna, el valor de esa función cuando se aplica a su propio argumento genérico (que es un número real); luego el argumento aparte (que es un número real todavía no determinado) y un caso particular de un número real.

Operador		Argumento del op	Valor	Argumento	Caso particular
L	L(f)	f	f(x)	x	1
D	D(g)	g	g(y)	y	2/7
∫	∫ (h)	h	h(z)	z	π

Tres elementos fundamentales: "*Procepts, reification, APOS theory*"

Tall y Vinner (1981, en Vasco, 2009) y Fischbein[14] propusieron dos tipos de nociones intermedias entre las nociones vagas y los conceptos científicos (en inglés los llamaron "*concept image*" y "*procept*").

"*Concept image*" ("*imagen conceptual*"). Para comparar el concepto con la imagen conceptual, Vasco propone pensar como ejemplo en el concepto de curva en geometría diferencial; el concepto matemático de curva difícilmente puede separarse de la imagen conceptual de una línea curva, aunque dicho concepto se refiere a una función que proyecta un intervalo de R en un espacio de dos o más dimensiones, no a la imagen del intervalo bajo la función, que es la que mantenemos indisociablemente ligada a la curva. La

14 Los autores se remiten a una idea de Fischbein, Tirosh y Hess de 1979 sobre las intuiciones del infinito y a una ponencia de Vinner y Hershkowitz de 1980 en el PME IV.

imagen conceptual es un conglomerado de todas las estructuras, imágenes, procedimientos y relaciones asociadas con el concepto, y muchas de sus regiones pueden estar muy alejadas y aun contradecir la definición formal del concepto, ya institucionalizada.

La palabra inglesa "*procept*" se podría traducir directamente por "procepto", en el sentido de concepto procedimental, pues se relaciona más con los procesos, procedimientos o algoritmos que con los objetos o las relaciones, pero oscila de uno a otro. Por ejemplo, el estudiante de primaria y secundaria suele rechazar la distinción entre *adición* y *suma*, pues no conceptualiza propiamente la operación binaria de adición, sino que la confunde con la manera como hace las sumas, sin distinguir la operación del resultado, ni éstos del algoritmo que aprendió (por ejemplo el algoritmo usual para sumar varios numerales decimales dispuestos en columna). En símbolos, $a+b$ puede significar sumar a con b, o el resultado de ese proceso.

Otro ejemplo es el del concepto de igualdad. Un estudiante promedio, aún "exitoso", puede pasarse todo el bachillerato sin configurar el concepto de igualdad como relación de equivalencia entre expresiones simbólicas que se refieren al mismo objeto y que permite la sustitución de la una por la otra. Le basta el procepto de igualdad, que condensa el proceso de obtener un resultado y la relación estática de igualdad. Este procepto le permite leer el símbolo "=" como "da", aunque se pierda la propiedad simétrica. Va a creer, por ejemplo, que la ecuación "$0 = x^2 - 1$" está "mal escrita". Pero la idea de Tall es que esa oscilación o confusión entre proceso y concepto no es rechazable, más aún, es una ambigüedad muy conveniente en el pensamiento de orden superior y los expertos también la utilizan sin darse cuenta de que a veces se refieren al proceso y a veces al producto conceptual de ese proceso.

Las palabras *reificación* o *cosificación*, según Vasco, son dos traducciones del inglés *reification*, que se extendió en la educación matemática con los primeros trabajos de Anna Sfard. En latín, "*res*" significa "cosa", y "hacer de algo, que no es cosa, una cosa", se puede decir *cosificación* o *reificación*.

La noción inicial de cosificación o reificación es la de formar mentalmente un objeto de lo que era un proceso, una acción, una operación o una relación. Por eso se encuentra a veces la palabra *objetivación*. Como toda palabra terminada en "*ción*", *cosificación, reificación* u *objetivación* a veces se refiere a la operación mental y a veces al resultado de esa operación.

Vasco enumera algunas pistas sobre la ocurrencia de la reificación de un nuevo producto mental:

- Separarlo de y contrastarlo con otras cosas, objetos, elementos o componentes.
- Operar sobre el nuevo producto.
- Nombrarlo con un sintagma nominal.
- Atribuirle predicados unarios o monádicos.
- Relacionarlo con otros y atribuirle predicados binarios, ternarios, etc.

La propuesta inicial de Anna Sfard, afirma Vasco, era que el progreso en la conceptualización matemática con frecuencia consistía en cambiar de una manera de concebir un proceso o procedimiento como algo activo, que ocurre en el tiempo, a una consolidación y detención del mismo como un nuevo objeto o cosa sobre la cual se empieza a actuar. Para el caso del análisis, se podría pensar en que el estudiante toma las expresiones del álgebra de bachillerato solo como instrucciones para calcular un resultado; por ejemplo, entendería el término "$x^2 - 1$" como "*eleve el número al cuadrado y quítele uno*". Es una comprensión limitada, porque no permite pasar a la función respectiva, pero es correcta. Por eso puede tener éxito en aprobar dos años de álgebra sin construir el concepto de función, pues ese concepto requiere una reificación del procedimiento de calcular el resultado. Si no se reifican las funciones como objetos, no puede construirse un sistema analítico en el que los elementos u objetos sean las funciones reales de valor real. Aquí podría estar la diferencia entre el álgebra de bachillerato y el análisis real.

En este caso Vasco plantea que la reificación es muy cercana al paso del procepto de Tall, Vinner y Fischbein al concepto respectivo. Así lo ha utilizado Ed Dubinsky en experimentos de enseñanza de la teoría de grupos. Pero no es el único caso. Por ejemplo, las relaciones simbolizadas por los signos "<" y ">", que los estudiantes leen *menor* y *mayor,* suelen quedarse en una comparación entre dos números y no pasan a configurar un sistema de relaciones con sus propiedades, su composición, su inversión, etc., pues esas relaciones no han sido reificadas, cosificadas u objetivadas. No se puede trabajar con un sistema cuyos elementos sean las relaciones si los estudiantes no las reifican, es decir, si no las vuelven cosas u objetos mentales.

Aquí también puede haber una barrera para el paso al análisis desde el álgebra de bachillerato y el estudio de pre-cálculo y cálculo con funciones como instrucciones o como relaciones, sin reificarlas. Mientras no se logre la reificación, el estudiante no puede pasar a los sistemas analíticos, cuyos elementos son las funciones como operaciones unarias reificadas. Tanto los estudiantes como muchos de sus profesores siguen pensando que el sistema simbólico que aprendieron en el álgebra de bachillerato representa lo mismo cuando se usa en el cálculo, pues en ambas asignaturas basta saber operar con algunas reglas que se refieren solo a los símbolos, sin tener que pensar en los conceptos.

Conclusiónes

A través del estudio de los obstáculos y dificultades detectadas en la transición del álgebra al cálculo diferencial, se espera aportar a los formadores de profesores, a los profesores y a los estudiantes tanto en la caracterización y explicación de la estructura y funcionamiento del obstáculo en el sistema didáctico, como en herramientas teóricas y metodológicas para el mejoramiento de su práctica docente y de su aprendizaje en el cálculo diferencial, en distintos niveles de escolaridad. En síntesis se pretende aportar herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial escolar en estudiantes universitarios, que han de servir también, por supuesto, para todo aquel que esté transitando del álgebra escolar al cálculo diferencial escolar, y dotar de elementos de profundización, sustentación y fundamentación epistemológica y metodológica a la investigación sobre obstáculos, conflictos y dificultades que se presentan al iniciar el estudio del cálculo diferencial escolar.

Asimismo, se esperan impactos a partir del uso de los resultados de investigación en lo institucional, en relación con la investigación en didáctica de las matemáticas y en la formación de profesores de matemáticas, con las comunidades de investigadores y con las políticas educativas. Se espera plantear propuestas didácticas para superar los obstáculos caracterizados y para desarrollar prácticas escolares que conduzcan a una transición más continua del conocimiento superando las rupturas y los obstáculos; una mayor sustentación teórica y metodológica en el área de matemáticas del ciclo básico de ingeniería para la evaluación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas y una ampliación de la base teórica y metodológica de los investigadores, grupos de investigación, formadores de profesores, profesores en ejercicio en la línea de investigación concerniente a la formación de profesores de matemáticas que tengan en cuenta la caracterización de las PEUC y los obstáculos inferidos a partir de su estudio.

Los acercamientos descritos anteriormente han de permitir obtener algunos resultados prometedores para la investigación que profundizará la tesis doctoral en esta dirección. Consideramos que estos favorecen la discusión y elaboración de propuestas. Hemos encontrado que la detección de dificultades, obstáculos y rupturas, y su clasificación en semióticos, didácticos, epistemológicos, culturales, etc., plantean un gran número de problemas no triviales. Cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos, lo cual es necesario pero no suficiente: lo evidenciamos todos los días en las aulas de clase, y en los "errores" persistentes en los exámenes y evaluaciones.

Se espera haber señalado varios elementos de análisis en dirección a elaborar reflexiones de orden epistemológico y didáctico en cuanto a comprender, interpretar y quizá aportar en la solución, de una manera más amplia, de las dificultades y obstáculos detectados en la comprensión del cálculo diferencial. El trabajo empírico, la recolección y análisis de datos, nos confirmarán las bondades y también las limitaciones de este acercamiento.

Referencias bibliográficas

Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Ed.). (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá/México: una empresa docente/Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (1938/2004). *La formación del espíritu científico* (25ª ed.). México: Siglo XXI. (Obra original publicada en francés en 1938).

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas. Módulo de Educación Matemática #1*. Buenos Aires: Embajada de Francia en la Argentina/Universidad de Buenos Aires.

______________ (1983/1998). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8*; Sevilla. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Contreras, A. et al. (2000). La enseñanza del análisis matemático en el bachillerato y primer curso de universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. En: N. de los A. Climent; L. C. Contreras y J. Carrillo (Eds.). *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 71-86). Huelva: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM. Actas EMA (Encuentro de Matemáticos Andaluces, Sevilla, pp. 305-320).

Duval, R. (1992). *Gráficas y ecuaciones. Antología de la Educación Matemática* (Trad. Parra, M., del original en francés: *Graphiques et equations. L'Articulation de deux registres, 1988. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, pp. 125-139). México: Cinvestav-IPN.

_____________ (1998). Perspectives on the teaching of Geometry for the 21 Century. En: C. Mammana y V. Villani (Eds.). *Geometry from a cognitive point of view* (pp. 37-51). Dordrecht: Kluwer.

Ferrini-Mundy, J. y Guadard, M. (1992). Secondary school calculus: preparation or pitfall in the study of college calculus. *Journal of Research in Mathematics Education*, 23(1), 56-71.

Fichant, M. y Pécheux, M. (1975). *Sobre la historia de las ciencias* (2ª ed.). México: Siglo XXI. (Obra original publicada en francés en 1969).

Kilpatrick, J. A. (1992). History of research in Mathematics Education. En: D. Grouws (Ed.). *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: MacMillan.

Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Ingeniería* (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), n. 1, 87-92.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. [Studies in Mathematics Education Series]. London: The Falmer Press.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En: D. Grouws (Ed.), *Handbook or research on Mathematics teaching and learning* (pp. 495-510). New York: MacMillan.

Vasco, C. E. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. En: D. Perkins; J. Schwartz; M. Maxwell y M. Stone (Eds.). *Software goes to school. Teaching for understanding with new technologies* (pp. 54-69). New York/Oxford: Oxford University Press.

__________ (1991). ¿Hay revoluciones o rupturas epistemológicas en las matemáticas? *Revista de la Facultad de Ciencias* (Universidad Javeriana), 1(4), 29-52.

__________ (2009). Acerca de "concept-image, procept, reification". En: *Seminario de investigación del DIE-UD*. Bogotá: DIE-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.