Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos

Pedro Javier Rojas Garzón

1

COLECCIÓN
TESIS
DOCTORAL

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Articulación de saberes matemáticos:
Representaciones semióticas y sentidos

Articulación de saberes matemáticos:

Representaciones semióticas y sentidos

COLECCIÓN TESIS DOCTORAL

TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR
Pedro Javier Rojas Garzón

DIRIGIDA POR
Bruno D'Amore

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

ISBN impreso: 978-958-8832-19-7
ISBN digital: 978-958-8832-33-3
Primera edición, 2014

Preparación Editorial
Doctorado Interinstitucional en Educación
Sede U. Distrital Francisco José de Caldas
http://die.udistrital.edu.co

Elban Gerardo Roa Díaz
Asistente Editorial
eventosdie@udistrital.edu.co

Fondo de publicaciones
U. Distrital Francisco José de Caldas
Cra. 19 No. 33-39. Piso 2.
PBX: (57+1) 3238400, ext. 6203
publicaciones@udistrital.edu.co

Corrección de estilo
Luisa Juliana Avella Vargas

Impreso en Javegraf

Bogotá, Colombia, 2014

Dedicatoria

A Soraya, por su amor y apoyo.
A Sebastián, Carolina y Santiago,
por alegrar nuestras vidas.

Agradecimientos

A Bruno D'Amore, maestro y amigo,
por su orientación, sus aportes y su confianza.

A Carlos Vasco, Olga Lucía León, Vicenç Font y
Juan D. Godino, por sus enseñanzas y valiosos aportes.

A mis compañeros del énfasis en Educación
Matemática, por su amistad y aportes críticos.

A los estudiantes y profesores de grados 9° y 11°,
por su colaboración y apoyo para realizar este trabajo.

A Jenny Martínez, por su aporte en la organización de la información.

A todos, gracias por ayudarme a «ser con otros».

Contenido

Prefacio

A principios de los años 2000, durante las usuales sesiones de observación pasiva en clases escolares de diferentes niveles (desde primaria hasta secundaria), Martha Fandiño y yo observamos un fenómeno que parecía extraño e interesante.

Lo describo en una forma muy simple. Un estudiante se encuentra ante la representación semiótica $R^i_h(O)$ del objeto matemático O en el registro semiótico r^i y atribuye un significado S_1 al objeto O, estrechamente vinculado de manera obvia a esa representación; posteriormente él ejecuta correctamente una transformación semiótica de tratamiento que lo conduce a la representación $R^i_k(O)$ del mismo objeto O (es decir, se mantiene el registro semiótico r^i y se cambia de representación al interior de r^i, mientras que $h \neq k$), y consecuentemente atribuye un nuevo significado S_2 a O, estrechamente vinculado a la nueva representación semiótica.

Si se busca conseguir del estudiante una declaración del tipo: los dos significados son entre ellos intercambiables, o bien: existe en el origen de ambos un mismo significado de O, el estudiante principalmente no acepta el discurso y persiste en ver, en las dos representaciones, representaciones de objetos diversos.

Lo que más nos llamó la atención fue que los propios docentes asumieran posiciones similares o idénticas a aquellas de sus estudiantes, señal de que las diferenciaciones de los significados, o mejor, la falta de referencia posible de un significado a otro, no está vinculado con la posición del aprendiz, sino con cuestiones de mayor interés, más semiótico-interpretativas, que de simple formación conceptual.

Decidimos estudiar este fenómeno en diferentes niveles de escolaridad, con lo cual elaboramos una primera publicación en el año 2006, en la que se ilustraba el problema pero no se daban explicaciones o interpretaciones al mismo.

Desde los estudios de Duval siempre se pusieron en evidencia las problemáticas relativas a la transformación de conversión; al parecer valía la pena dedicar tiempo a los estudios sobre este argumento, sobre el cual publicamos una serie de artículos descriptivos. La comprensión del motivo de este comportamiento aún estaba lejana.

En varios congresos internacionales, por ejemplo en Rodas (Grecia), en Nicosia (Chipre), en Turín (Italia), en Roma (del 5 al 8 de marzo de 2008, en la Accademia dei Lincei y el Instituto de la Enciclopedia Italiana: ICMI 1908/ 2008. *First Century of the International Commission on Mathematical Instruction. Reflecting and Shaping the World of Mathematics Education*. Grupo de trabajo 5: Educación Matemática: una perspectiva ICMI, dirigido por Gilah Leder y Luis Radford: *Change of meaning of mathematical objects due to the passage betwenn their different rapresentations*), todos con actas publicadas en inglés, comunicamos al público de los colegas investigadores esta curiosa situación que requería análisis específicos, los cuales encomendamos a dos estudiantes de doctorado que estuvieron bajo mi dirección: Giorgio Santi en Palermo, Italia y Pedro Javier Rojas Garzón en Bogotá, Colombia.

El primero para estudiar ciertos aspectos del fenómeno, obtuvo su doctorado con votación máxima, con una comisión internacional conformada por Luis Radford, Juan Godino y Luciana Bazzini, publicó su tesis en la página web de la Universidad de Palermo y un resumen de la misma en la revista *Educational Studies in Mathematics* en el año 2011.

El segundo estudió otros aspectos del mismo fenómeno; obtuvo su doctorado con tesis laureada, con una comisión internacional conformada por Giorgio Bolondi, Vicenç Font y Olga Lucía León; su artículo específico ya fue aceptado por la revista *Mediterranean Journal of Mathematics Education*, y ahora ve la luz la publicación de la tesis completa, revisada y ampliada, en la Editorial de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas en Bogotá.

Con inmenso placer he seguido la evolución de los estudios de mi alumno, colega y amigo Pedro; y aún con mayor placer acojo la invitación a escribir unas pocas líneas de prólogo a éste, su bello libro; sé con certeza que, además de dar explicación científica, la compleja investigación implementada por Pedro podrá serle útil a aquellos docentes universitarios y de colegio que se han encontrado a veces asombrados frente a situaciones como las aquí descritas.

Si es verdad, como lo es, que 3/6 representa la probabilidad de sacar un número par en el lanzamiento de un dado; si es verdad que la fracción 3/6 se puede expresar en su equivalente 4/8; ¿por qué el estudiante o el docente (incluso algunos docentes universitarios) no aceptan que la misma probabilidad puede expresarse con la fracción 4/8? ¿Qué sucede en la organización cognitiva de la sistematización semiótica de las representaciones elementales, en los pasos debidos a transformaciones de tratamiento?

No se trata solo de un problema científico interesante, sino también didáctico concreto, ya que abre el camino a reflexiones muy profundas sobre lo que sucede en el aula, en el mundo de la atribución de significados a objetos matemáticos o, mejor, a sus representaciones semióticas.

No me parece entonces que la fuente principal de dificultad de construcción cognitiva de los significados de los objetos matemáticos sea atribuible únicamente a la transformación de conversión; también aquella de tratamiento plantea algunos hermosos problemas de carácter concreto, didáctico, en el quehacer de todos los días.

Pedro –perdón: *el doctor* Pedro– ha puesto en el campo cuestiones teóricas de altísimo nivel e instrumentos de metodología de investigación de gran eficacia, perfectamente descritos en su libro.

Aquí, en cambio, en este breve prólogo, me he limitado a enfatizar la generalidad macroscópica del problema, sin ocuparme demasiado de detalles terminológicos y científicos.

De otra parte, ahora este interesante problema de estudio está en las manos expertas de mis dos ex doctorandos que han afrontado aspectos diversos y complementarios... óptimas manos.

Pedro, en particular, en su calidad de docente universitario responsable de especialización y maestría, podrá usufructuar la competencia adquirida para formar nuevas generaciones de futuros profesores, no evitando sino más bien afrontando explícitamente tal problemática desde un punto de vista didáctico.

Este libro, este hermoso libro, docto y profundo, será de gran ayuda para la comunidad internacional (y por tanto también colombiana) de investigadores y docentes de cualquier nivel escolar.

Bruno D'Amore

Introducción

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se hace fundamental el uso de representaciones de los objetos en una variedad de sistemas semióticos de representación,[1] más específicamente en diversidad de *registros* semióticos (Duval, 1999); pero en especial se hace necesario apropiarse de posibilidades para transformar una representación semiótica de un objeto matemático en otra. Tales transformaciones entre representaciones semióticas se dan tanto al interior de un mismo registro de representación semiótica como entre registros diferenciados, transformaciones que Duval denomina *tratamientos* y *conversiones*, respectivamente.

Duval reconoce la conversión como una de las operaciones cognitivas fundamentales para el acceso del sujeto a una verdadera comprensión, y centra la mirada respecto a las dificultades de aprendizaje de las matemáticas en dicho proceso. No obstante, en matemáticas, las transformaciones de tratamiento entre representaciones semióticas –al interior de la variedad de registros utilizados–, no solo resultan fundamentales sino que podrían ser fuente de dificultades en los procesos de comprensión de las matemáticas por parte de los estudiantes. Usualmente se afirma que los problemas cognitivos están vinculados con la conversión, mientras que lo relacionado con el tratamiento no suele considerarse como un problema relevante en los procesos de construcción y comprensión de objetos matemáticos. Es decir, este autor destaca explícitamente la complejidad que conlleva el reconocimiento de un mismo objeto a través de representaciones completamente diferentes, en

[1] Es decir, sistemas de signos usados para representar un objeto, una idea o un proceso.

tanto producidas en sistemas semióticos heterogéneos (conversión), pero no destaca la complejidad asociada a transformaciones realizadas al interior de un mismo sistema semiótico de representación (tratamiento).

En este texto se presentan los resultados de la investigación desarrollada por el autor como tesis doctoral, titulada *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento entre representaciones simbólicas de objetos matemáticos*, del Doctorado Interinstitucional en Educación, en el énfasis en Educación Matemática, de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, bajo la dirección del Doctor Bruno D'Amore, investigación que estuvo orientada a documentar el fenómeno relacionado con la articulación y el cambio de sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento. Se realiza una descripción y un análisis de los procesos de asignación de sentidos de nueve estudiantes –seis de grado 9º y tres de grado 11º– con base en el trabajo efectuado por ellos en tres pequeños grupos en relación con tareas específicas, en las que se indaga por el sentido asignado a ciertas representaciones semióticas y se requiere realizar transformaciones de tratamiento. Se asume un enfoque de investigación cualitativo, elaborando un análisis de tipo descriptivo-interpretativo desde diferentes perspectivas teóricas, tomando como referencia trabajos de Bruno D'Amore, Raymond Duval, Juan D. Godino, Vicenç Font y Luis Radford.

Así, el trabajo que aquí se reporta se sitúa en un contexto semiótico, y estudia de manera general la relación semiosis-noesis[2] en la construcción de conocimiento matemático por parte de estudiantes de grados 9º y 11º de la educación básica y media, respectivamente; estudio que, sin ser exhaustivo, incluye aspectos sobre la actividad matemática, la comunicación sobre objetos matemáticos emergentes y la construcción cognitiva de los objetos matemáticos.

[2] En términos de Raymond Duval, la *semiosis* es concebida como cualquier forma de actividad o proceso que involucra signos (creación de representaciones semióticas) y la *noesis*, como la aprehensión conceptual de un objeto.

Capítulo 1

Transformaciones semióticas, objetos matemáticos y sentidos

En la primera sección de este capítulo se describen dos situaciones, a manera de ejemplo, que permiten contextualizan algunas dificultades que encuentran los estudiantes, en el contexto escolar, relacionadas con la articulación de los sentidos asignados a representaciones simbólicas de objetos matemáticos, obtenidas mediante transformaciones semióticas, así como el planteaminto explícito de una pregunta de investigación en relación con el fenómeno aquí reportado. En la segunda se presentan, de manera sucinta, los antecedentes sobre el tema específico de esta investigación; y en la tercera sección se plantea una delimitación del problema de investigación que se abordará en los capítulos posteriores.

Transformaciones semióticas y sentidos

En las dos situaciones presentadas a continuación se puede evidenciar, en particular, una de las complejidades asociadas a las transformaciones semióticas de tratamiento, relacionadas con el *cambio de sentido* asignado a un objeto matemático (D'Amore, 2006b), o con la *articulación de sentidos* asignados a un objeto matemático. Cada contexto ayuda a generar sentido

–aunque no todos los posibles sentidos– (Font y Ramos, 2005). Es necesario reconocer la complejidad asociada al concepto *significado*, e incluso que en la actualidad aún no se cuenta con una teoría compartida sobre dicho concepto (D'Amore, 2005a), ya que existe una diversidad de definiciones y todavía está vigente el debate sobre el tema. Siguiendo ideas de Godino y Batanero (1994), se asumirá que el *significado de un objeto* (institucional/personal) es el sistema de prácticas (institucionales/personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado. En principio, el «sentido» es asumido aquí como un *significado parcial*, asociado más a lo contextual e incluso a lo temporal.[1]

- *Situación 1.* Propuesta a estudiantes de 5º grado de educación básica (en Italia). Calcular la probabilidad del siguiente evento: *lanzando un dado se obtenga un número par.*

  Después de trabajar en pequeños grupos, con la orientación del profesor, comparten que, en tanto los resultados posibles al lanzar un dado son 6 y los que hacen verdadero el evento son 3, la respuesta es 3/6. También reconocen que dicha probabilidad se puede expresar como 50%, en tanto aceptan la equivalencia entre 3/6 y 50/100, propuesta por el profesor. Incluso, algunos de los alumnos reconocen que hablar del 50% significa que *se tiene la mitad de la probabilidad de verificarse el evento respecto al conjunto de los eventos posibles* y que, por lo tanto, debe ser válida como respuesta la expresión 1/2, la cual es aceptada y validada por los demás compañeros y por el profesor; es decir, los sentidos asignados a los objetos matemáticos son compartidos.[2]

  Una vez concluida la sesión de clase, el investigador les plantea a los estudiantes que la fracción 4/8 también sería una respuesta adecuada, si se tiene en cuenta que es equivalente a 3/6. Los estudiantes y el profesor manifiestan que no y, por su parte, el profesor del curso afirma que la fracción 4/8 *no puede representar el evento porque las caras de un dado son 6 y no 8.*

En este caso, ¿qué explica este «cambio» en los sentidos asignados a las representaciones de los objetos matemáticos antes compartidos? o, mejor,

[1] Una precisión sobre el uso de los términos *sentido* y *significado* en didáctica de las matemáticas se abordará posteriormente en este escrito (ver sección 2.5).

[2] Posiblemente sea más adecuado afirmar que dichos sentidos «se tienen por compartidos», al menos por parte del investigador.

¿por qué no se «articulan» los diferentes sentidos, los «significados parciales» asignados a las representaciones, en uno más «amplio»? Si 4/8 es el resultado de tratamiento de 3/6, ¿por qué el sentido del objeto matemático «probabilidad de obtener un resultado par lanzando un dado» no se «conserva» con 4/8?

- *Situación 2*. El sentido asignado por estudiantes universitarios (en Italia) a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1 = 0$ es de «una circunferencia» y la de la ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ el de «una suma que tiene el mismo valor que su recíproca». Reconocen que, mediante transformaciones de tratamiento, pueden pasar de la primera ecuación a la segunda, pero ante la pregunta: ¿la segunda ecuación representa o no una circunferencia?, encuentra respuestas como las siguientes.

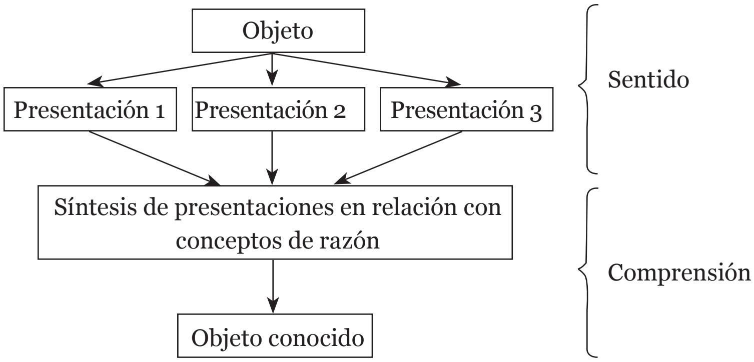
  Estudiante A: Absolutamente no, una circunferencia debe tener x^2+y^2
  Estudiante B: Si se simplifica, ¡sí!

Si bien la primera ecuación no corresponde a una circunferencia, no es de interés en este trabajo abordar dicho aspecto; lo interesante aquí es que, en el primer caso, «ser circunferencia» está asociado a una cierta expresión, que es vista como ícono y que, en el segundo, la transformación semiótica (de tratamiento) es la que da o no cierto sentido a la expresión; al realizar la transformación se genera un «cambio de sentido». El objeto matemático «circunferencia» está aceptado y relacionado con la primera ecuación, pero no es aceptado con la segunda, aunque ésta es obtenida por tratamiento de la primera ¿Por qué?

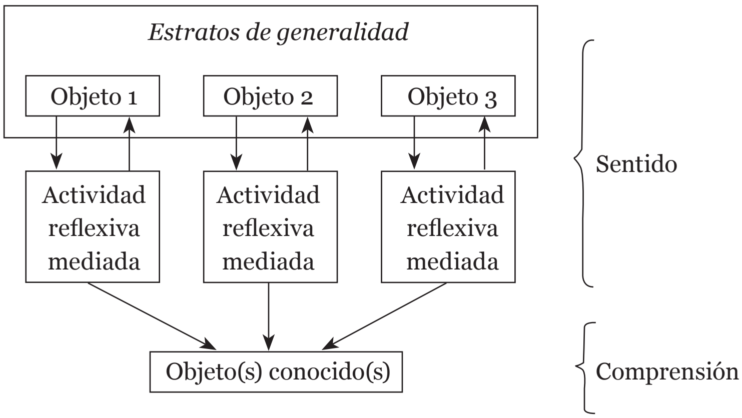
Desde lo descrito en las situaciones anteriores, los sentidos asignados a cada una de las representaciones específicas de un objeto matemático, al parecer, no tienen vínculo alguno entre sí que posibilite su articulación. Se cuenta con evidencia, en una variedad de situaciones, en diversos niveles de escolaridad (D'Amore, 2006b), respecto a un «cambio de sentido» cuando una representación semiótica se transforma en otra, al interior de un mismo registro de representación.

Hechos similares a los anteriormente descritos han sido evidenciados en el contexto colombiano por el autor del presente trabajo de investigación. Se plantea así la necesidad de indagar la complejidad del «sentido de los objetos matemáticos», asociada a la pareja (representación semiótica, objeto).

Una interesante relación inicial entre sentidos y comprensión es presentada por Radford (2004, p. 15):[3]



Si se incorporan resultados de trabajos posteriores de este autor, en los que plantea que los conceptos u objetos de conocimiento se componen de *estratos de generalidad* y que el significado debe asumirse como emergente de actividades reflexivas mediadas, en su dimensión personal y cultural (Radford, 2010) dicha relación puede afinarse un poco más. Así, como lo propone Santi (2011, p. 289), el esquema anterior puede reelaborarse de la siguiente manera:



[3] En autor presenta esta relación basado en Kant, quien cuestionó la idea de que el objeto conceptual sea la extensión del objeto concreto o que sea abstracción de lo particular.

Ahora bien, de situaciones como las dos referidas anteriormente surgen algunos interrogantes:

- ¿Qué origina estos cambios de sentido?
- ¿Por qué la dificultad para articular sentidos?
- ¿Qué criterios permitirían caracterizar un «cambio de sentido»?
- ¿Se trata del desconocimiento por parte del sujeto de las reglas propias de un registro semiótico que le dificulta realizar una transformación de *tratamiento*?
- ¿Esta dificultad está asociada a cada contexto y a que en él exista o no algún tipo de «motivación» para realizar una transformación?
- ¿Qué explicaciones son posibles desde un punto de vista cognitivo?, ¿cuáles desde una perspectiva sociocultural?

Este estudio está orientado por la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Qué explica la dificultad que encuentran los estudiantes para articular los diferentes sentidos asignados a representaciones de un objeto matemático obtenidas mediante transformaciones de tratamiento?*

OBJETOS MATEMÁTICOS Y MEDIACIONES SEMIÓTICAS: ALGUNOS ANTECEDENTES

En los últimos años se han retomado con cierta fuerza los estudios sobre representaciones semióticas y sus relaciones con el funcionamiento cognitivo, entre los que se destacan los desarrollados por Raymond Duval en las últimas dos décadas; como lo reconoce D'Amore (1999/2006a, p. 272), «sus análisis están obligando a reflexionar de un modo nuevo a todo aparato cognitivo puesto en acción en el acto del aprendizaje de la matemática».

En ciertos contextos cotidianos, y en algunos campos de conocimiento científico, es posible acceder a los objetos directamente mediante la percepción o la utilización de instrumentos; o, de manera indirecta, haciendo uso de representaciones de tales objetos. En otros campos, sin embargo, el acceso vía representaciones no solo resulta útil sino obligatorio. Las representaciones de los objetos, como lo plantea Duval (2004, p. 17), son producidas haciendo uso de sistemas de representación de diferente naturaleza.[4]

En matemáticas, en particular, el aprendizaje de los objetos es en primera instancia conceptual;[5] el sujeto no entra en «contacto» directo con los objetos, pues estos no son accesibles ni perceptual ni «instrumentalmente».[6] En tanto no son posibles las referencias ostensivas de tales objetos, se hace necesario servirse de representaciones.[7] En palabras de Duval (2004), «[la] mediación semiótica es tan indispensable en matemáticas como la mediación instrumental para la observación de los fenómenos» (p. 18). Sin embargo, en tanto en los procesos de aprendizaje es usual que el acceso a un objeto matemático se realice vía una de sus representaciones,[8] este hecho hace posible que se generen dificultades si no se toma conciencia o no se hace explícita la diferencia entre el objeto y la representación mediante la cual se «accede» a él, pues podría suceder que el objeto sea confundido con una representación específica de éste.[9]

De acuerdo con Duval (1999/2004, p. 20), en tanto todo conocimiento matemático debe servirse de representaciones y movilizar una variedad de

[4] Como lo afirma este autor, tales sistemas pueden ser *no semióticos* –redes neuronales (como las diferentes formas de memoria), instrumentos físicos (como microscopios y telescopios)–, o pueden ser *semióticos* (por medio de signos). La producción de una representación semiótica, necesariamente, es intencional. Esta es, para algunos autores, la diferencia entre semiótica y semiología.

[5] Para Duval, la adquisición conceptual de un objeto pasa por adquirir *representaciones semióticas*, esto es, representaciones por medio de signos.

[6] Aquí, el término instrumento es usado de manera restringida, asociado más a lo técnico. Desde los planteamientos realizados en el presente libro, se reconocerá que las representaciones semióticas y sus transformaciones, se pueden constituir en potentes instrumentos conceptuales para «acceder» a los objetos matemáticos.

[7] Estas representaciones pueden ser *discursivas* –usando lenguas naturales o lenguas formales– o *no discursivas* –mediante figuras geométricas o grafos cartesianos–.

[8] Como se mencionó en la sección inicial, en el proceso de aprendizaje de las matemáticas se requiere apropiarse de una variedad de sistemas semióticos de representación, así como también de las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra –productos culturales que han posibilitado el desarrollo de las matemáticas–.

[9] Por ejemplo, por las maneras en que se trabaja el álgebra escolar, es usual que los estudiantes consideren los polinomios como objetos del álgebra y no como representaciones de una función polinómica. En el trabajo aritmético, en la escuela primaria, los números son los signos mismos que los representan.

sistemas semióticos de representación de sus objetos, resulta prioritaria la dupla (signo/objeto, o representación semiótica/objeto). Así, en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, los estudiantes requieren apropiarse de dicha variedad de sistemas semióticos de representación y, en especial, de las posibilidades de transformar una representación semiótica en otra, sea tal transformación de *tratamiento* o de *conversión* (Duval, pp. 44-45).

En relación con el planteamiento anterior, es importante aclarar que el hecho de usar una determinada representación no garantiza la existencia del «objeto matemático» al que se hace referencia. Por ejemplo, la función definida mediante la expresión f(x)=|x|, cuyo dominio es el conjunto de los números reales, es derivable para cualquier real diferente de 0, y f´(x) representa la derivada de la función f en el punto x, es decir, f´(x) existe para todo número real x diferente de 0. Si bien es usual hacer referencia a la derivada de f en 0, la cual se representa por f´(0), no por ello se le puede asignar existencia como «objeto matemático».

Por otra parte, es necesario llamar la atención sobre un hecho que en principio resulta paradójico: ¿cómo se explica que la actividad sobre los objetos matemáticos solo sea posible mediante representaciones semióticas, si el aprendizaje de los objetos matemáticos es un aprendizaje conceptual? En otras palabras, si el objeto matemático no es accesible ni perceptual, instrumentalmente no es posible decidir si algo es representación de dicho objeto; pero, por otra parte, si no se cuenta con representaciones del objeto, no es posible adquirir conceptualmente tal objeto. Esta paradoja, reconocida explícitamente por Duval en 1995, será analizada en el desarrollo de este trabajo.[10]

En el contexto internacional son varios los trabajos de investigación que abordan específicamente problemáticas relacionadas con las transformaciones semióticas, entre los cuales se resaltan los realizados por Duval (1995/1999, 1999/2004, 2006a); D'Amore (2006b); Godino, Batanero y Font (2007); Font, Godino y D'Amore (2007); D'Amore y Fandiño (2008); y Santi (2011). En el contexto nacional se destaca el trabajo realizado por León (2005),

[10] Esta paradoja se evidencia en una semiótica *representacionalista*, como la asumida por Duval, desde la cual el objeto preexiste a la actividad semiótica; pero no en una semiótica *mediacional,* como la asumida por Vygotski para quien, siguiendo ideas de Hegel, el signo es constitutivo de la actividad y del pensamiento.

en el que reporta dificultades asociadas a tratamientos entre representaciones en registro figural.[11]

Una investigación reciente, en la que se aborda la dificultad para articular los significados asignados a representaciones de objetos matemáticos, es la desarrollada como tesis doctoral por Giorgio Santi (2011),[12] quien siguiendo ideas de D'Amore (2006), estudió las dificultades que encuentran los estudiantes cuando tienen que atribuir el mismo significado a diferentes representaciones de un mismo objeto matemático. En particular, presenta un análisis de un experimento de enseñanza realizado con estudiantes de educación media en Bologna (Italia), en un trabajo sobre la tangente. Dicho análisis se realizó haciendo uso de dos herramientas teóricas, una tomada de la Semiótica Cultural de Radford (2006b): la *objetivación*, y la otra tomada del enfoque ontosemiótico de Godino (2003): la *función semiótica*.

En el trabajo antes referido, Santi (2011, p. 306) parte de reconocer que las matemáticas, en tanto han recurrido a la transformación de signos dentro de sistemas semióticos, se han convertido en la forma refinada de racionalidad que hoy conocemos y que, por tal razón, «la actividad matemática y el aprendizaje de matemáticas son, intrínsecamente, una actividad semiótica». Plantea que:

> *[...] para comprender cómo se utilizan los signos, debemos tener en cuenta, dentro de un enfoque cultural y social, la actividad reflexiva mediada que subyace a la coordinación de registros semióticos. La cuestión del significado y cambios de significado se desplaza desde el objeto que los*

[11] En esta tesis doctoral se reportan, en particular, dificultades asociadas con la relación pitagórica, especialmente cuando se realizan modificaciones mereológicas de las figuras, esto es, modificaciones de las relaciones entre partes de dichas figuras. El poco desempeño de los estudiantes en tratamientos figurales hace que recurran a registros algebraicos para la realización de tratamientos (p. 310); este cambio de registro hace que se produzca un «cambio de sentido» de la relación pitagórica, desde lo geométrico a lo numérico.

[12] George Santi y Pedro J. Rojas, autores de la investigación aquí reportada, hacen parte del Grupo de Investigación NRD de Bologna (Nucleo di Ricerca in Didattica). Algunas de las ideas relacionadas con las tesis doctorales de estos autores han sido discutidas conjuntamente, y socializadas en seminarios internos del grupo NRD que dirige el Dr. Bruno D'Amore.

> *signos representan a la práctica que ellos logran y median. Se pasó de la cuestión de coordinación de los sistemas semióticos a la cuestión de la integración de sistemas de la práctica de la cual emerge significado.*

Este autor presenta evidencias con respecto a que «el significado no puede ser identificado solo con la relación entre una representación semiótica y su objeto de referencia» (p. 306), y destaca que para dar cuenta de la complejidad de las matemáticas como un esfuerzo cultural e individual no es suficiente «reducir el aprendizaje y el pensamiento matemático a una coordinación de muchas representaciones con una denotación común» (p. 306). Tomando como referencia el objeto matemático «tangente», pone de manifiesto que la dificultad en la construcción de un significado unitario de este objeto no se remonta solo a la falta de transformaciones semióticas, pues se requiere que las prácticas que los sujetos exponen a través de diferentes medios semióticos se sinteticen en un significado cultural unitario. Plantea además que las dificultades de los estudiantes para atribuir sentido a las diferentes representaciones de un objeto matemático común, están relacionadas con el tipo de procesos de objetivación y con las funciones semióticas que ellos son capaces de establecer.

DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En esta investigación se pretende, tanto describir el fenómeno relacionado con la dificultad para articular los sentidos asignados a representaciones de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante transformaciones semióticas de tratamiento, como explicitar elementos de análisis sobre dicha dificultad.

Se parte del hecho de que la verbalización de los procesos de pensamiento y acción proporcionan importantes informaciones, no solo a partir de materiales escritos –como pueden ser los obtenidos mediante instrumentos de indagación (tareas o cuestionarios)–, sino también a partir de procesos de interacción –como los generados en los trabajos con pequeños grupos o mediante entrevistas–. Como opción metodológica se trabajará la entrevista estructurada basada en tareas, realizada a pequeños grupos de estudiantes de grado 9º (educación básica) y de grado 11º (educación media).[13]

El trabajo en pequeños grupos, basado en tareas, ofrece mayores posibilidades de interacción que posibilitan reconocer interpretaciones realizadas de los objetos matemáticos involucrados en dicha tarea e identificar los sentidos asignados a las expresiones, además de reconocer algunas razones que posibilitan o no dicha asignación de sentidos y la articulación de estos.

[13] En Colombia la escolaridad, previa a los estudios universitarios, está organizada en 11 grados, agrupados en 3 niveles: Educación Básica Primaria (5 grados, edades entre 6 y 10 u 11 años), Educación Básica Secundaria (4 grados, entre 11-12 y 14-15 años) y Educación Media Vocacional (2 grados, entre 15-16 y 16-18 años). Las edades de los estudiantes en un mismo grado de escolaridad, en algunos casos puede diferir en 2 o 3 años. Esta diferencia de edades se debe, entre otros, al ingreso tardío de los estudiantes a la educación formal, a la deserción (no culminación del año escolar por bajo rendimiento académico o retiro por problemas socio-económicos) o a la repetición de grados debido al no cumplimiento de «estándares» o «logros» asociados a cada uno de los grados o grupos de grado.

Capítulo 2

Articulación de saberes matemáticos y sentidos

El análisis de las producciones de los estudiantes reportado en esta investigación se realizó desde varias perspectivas, orientado desde tres propuestas teóricas, con niveles diferenciados de uso de las mismas. Por una parte, el enfoque estructural-funcional de Raymond Duval (2004), empleado básicamente para identificar el campo de investigación, en tanto permite realizar denominaciones que posibilitan ver y describir el fenómeno a estudiar, relacionado con la asignación de sentido y la articulación de saberes matemáticos. Por otra parte, el enfoque sociocultural de Luis Radford (2006b) y el enfoque onto-semiótico del grupo de Juan D. Godino (2003), utilizados para explicar y comprender las producciones de los estudiantes, en tanto no solo reconocen hechos cognitivos, sino también culturales e históricos. Para estos dos últimos autores, el uso de sistemas formales de signos es un fenómeno emergente de los sistemas de prácticas enmarcados social y culturalmente.

En la primera sección se realiza una presentación sobre dos elementos de tipo general de la perspectiva teórica asumida en esta investigación: el pragmatismo y la semiótica. En las siguientes tres secciones de este capítulo se presenta una breve descripción de cada uno de los tres enfoques antes mencionados, enfatizando nociones o conceptos que serán asumidos para el desarrollo de esta investigación; en la quinta y última sección, se presentan elementos específicos, particularmente en lo que tiene que ver con el concepto de sentido, asumidos para la realización de dicho análisis.

En el siguiente diagrama se presenta una organización temática de los aspectos abordados en este capítulo:

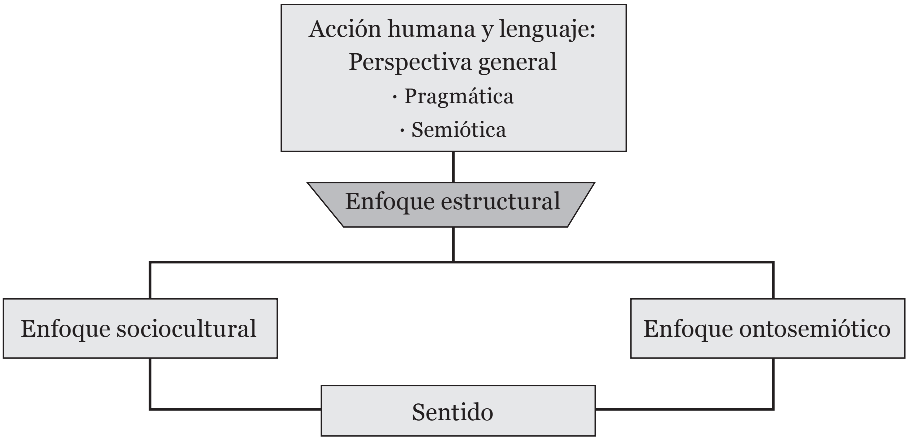


Diagrama 1. Organización temática

ACCIÓN HUMANA Y LENGUAJE: PERSPECTIVA TEÓRICA GENERAL

El lenguaje se ha constituido para el ser humano en una manera de describir el mundo y de comprender sus producciones, generando a su vez la necesidad de construir culturalmente significados. Desde los planteamientos de Jerome Bruner (1990/2006), el lenguaje se adquiere en su mismo uso, en procesos de interacción, donde las funciones e intenciones comunicativas están establecidas, adquisiciones que son bastante sensibles al contexto.

La forma de vida del ser humano, como lo plantea dicho autor (pp. 30-32), depende de formas de discurso compartidas, de significados y conceptos compartidos[1] que se hacen públicos en cada cultura, lo cual posibilita nego-

[1] Quizás sea más adecuado afirmar que tales significados «se dan por compartidos».

ciar entre seres humanos las diferencias de interpretación y de significado, reconociendo que los sistemas simbólicos usados por los individuos en la construcción de significado preexisten y están arraigados en el lenguaje y la cultura; es a través de los sistemas simbólicos que los seres humanos construyen y dan sentido al mundo. Se vive públicamente, es decir, no aisladamente, mediante significados e interpretaciones que deben ser públicamente accesibles; si los significados no se comparten con otros, no tienen utilidad. La cultura, y la búsqueda de significado dentro de la cultura, son las verdaderas causas de la acción humana (p. 38). En otras palabras, es la cultura la que moldea la vida y la mente humanas, confiriendo significado a la acción (p. 52).

Ahora bien, el proceso de comunicar a otros un «modelo mental» personal relativo a un concepto, como lo plantea D'Amore (2006, pp. 169-171), exige una «traducción» consciente a un «modelo externo» de dicho concepto, en un cierto lenguaje (verbal oral o escrito, gestual, gráfico, icónico, figural...). Para el caso de las matemáticas, y en relación con la problemática asociada a la «traducción» de un modelo interno a uno externo, este autor cita trabajos de Bruner, en particular de 1966, donde se plantea que se requiere el uso de diversas modalidades de representación: (1) *Ejecutiva* (o *enactiva*), representando eventos con un acto motriz, o en el cual se utiliza el mismo cuerpo o su parte para representar, como el movimiento de una mano; (2) *Icónica*, representando mediante imágenes abstractas eventos o situaciones reales, específicamente con figuras, dibujos o íconos que conservan cierto parecido con lo representado; y (3) *Simbólica*, representando algo únicamente con símbolos; postulando además que dichas modalidades de representación se dan y se desarrollan de un modo evolutivo.

En esta sección se presentan, de manera sucinta, ideas básicas que fueron asumidas como marco teórico general en el desarrollo de esta investigación, sobre la relación entre acción humana y lenguaje, además de elementos sobre el estudio de los sistemas de signos que median la comunicación. Estas constituyen las bases epistemológicas del trabajo de investigación.

Pragmática

Las ciencias, vistas como actividad humana, posibilitan interpretaciones para comprender los fenómenos del mundo, sin que por ello se deba asumir que existan maneras privilegiadas de hacerlo. Las problemáticas tienen diferentes facetas y existen maneras diversas de interpretarlas y abordarlas;

maneras que deben ser analizadas, contrastadas, criticadas, avaladas o replanteadas de acuerdo con su utilidad y eficacia. En esta investigación se asume un enfoque filosófico pragmatista, en el que necesariamente se alude a la experiencia, típicamente humana.[2] En palabras de Nubiola (2004, p. 5):

> *La búsqueda de certezas incorregibles característica de la modernidad es un desvarío de la razón. Para el pragmatista la búsqueda de fundamentos inconmovibles para el saber humano, típica de la modernidad, ha de ser reemplazada por una aproximación experiencial y multidisciplinar, que puede parecer más modesta, pero que muy probablemente sea a la larga más eficaz. El pragmatista no renuncia a la verdad, sino que aspira a descubrirla, a forjarla, sometiendo el propio parecer al contraste empírico y a la discusión con los iguales. El pragmatista sabe que el conocimiento es una actividad humana, llevada a cabo por seres humanos, y que por tanto siempre puede ser corregido, mejorado y aumentado.*

Desde un enfoque pragmatista, como el de Richard Rorty, las *ideas* no solo son asumidas como orientadoras de la *acción*, sino que su validez e importancia se derivan de la utilidad y eficacia en una situación o problema dado, que satisfaga las necesidades o requerimientos de un sujeto o sociedad.[3] Así, no hay «verdad objetiva», sino que la verdad es producto de acuerdos, es circunstancial. Como lo plantea Adolfo Vásquez (2005, p. 201):

> *Esta filosofía critica también la idea de una racionalidad ahistórica, capaz de definir de antemano el carácter de lo que es moral y de lo que no lo es, y finalmente rechaza la pretendida objetividad de los hechos y de las explicaciones que de ellos nos forjamos.*

En particular, y siguiendo los planteamientos de Rorty (1991, p. 25), la *realidad* es descrita mediante el uso de lenguajes, pero no es pre-existente a estos; se desarrolla con ellos, nace con ellos, adquiere sentido con ellos. El

---

[2] Desde los planteamientos de Wittgenstein (1958/1999, p. 48), no se trata solo de examinar el uso que de las palabras hacen los sujetos en situaciones específicas, sino también de reconocer la existencia de reglas sociales de uso de los signos en juegos de lenguaje, en contextos determinados.

[3] Utilidad, «entendida como lo que se usa dentro de contingencias -sin otro fundamento que ella misma […] aceptando la contingencia de nuestros puntos de vista» (Darós, 2001, p. 96). Lo que es contingente, lo es en un tiempo y lugar determinado y puede no resultar útil en otro tiempo o en otra situación. La temporalidad y la utilidad se convalidan, pues, mutuamente en el ámbito de las contingencias (Darós, p. 97).

lenguaje humano es contingente –puede suceder o no, puede ser de un modo o de otro(s)–, y la realidad se va configurando en y a través de los lenguajes. Por tanto, las descripciones de mundo y la verdad no pueden ser independientes del ser humano. La realidad es el conjunto de acuerdos entre seres humanos. El mundo, por su parte, es un conjunto de eventos, de hechos y no tanto de cosas. Interpretando a este autor, «solo las proposiciones pueden ser verdaderas, y [...] los seres humanos hacen las verdades al hacer los lenguajes en los cuales se formulan las proposiciones» (Vásquez, p. 208). Es decir, no hay algo que pueda considerarse como una «realidad objetiva», sino grupos humanos con discursos diferenciados, y la «objetividad» debe ser vista como el deseo de persuadir y llegar a acuerdos no forzados. En particular, no hay una jerarquía entre las disciplinas o géneros discursivos de las ciencias o de las humanidades, y el lenguaje *científico* es solo uno de los posibles lenguajes. Usando términos de Wittgenstein, el lenguaje científico solo es uno de los posibles *juegos de lenguaje*.

Como lo afirma Rorty, el lenguaje es contingente (pragmático, útil, resultado de negociaciones verbales o conceptuales) y su utilidad se da en un cierto tiempo y lugar determinados. En términos de Darós (2001, p. 98), «Las cosas son en el tiempo [...] nuestros problemas, nuestro sentido de existencia, nuestra filosofía solo se explica *dentro* de éste, nuestro mundo, en situaciones e interpretaciones culturales de espacio y tiempo determinados.»Por tanto, no es posible asumir la existencia de un léxico preferible a los demás, que permita representar la realidad «tal como ésta es». Arqueros (2005, p. 2), siguiendo ideas de Rorty, plantea que:

> *No es posible una conciencia pre-lingüística capaz de percibir una realidad a la que el lenguaje deba adaptarse lo más fielmente posible [...]. El mundo sí está ahí afuera pero las descripciones del mundo no y son éstas las que son verdaderas o falsas (propiedades de las proposiciones dentro de léxicos). Solamente existe una disposición a emplear el lenguaje que han usado nuestros ancestros y una conciencia que es tal dentro de un lenguaje determinado.*
>
> *A su vez los léxicos pueden redescribirse entre sí. La redescripción es un proceso en el cual se incorporan las situaciones u objetos a teorías que sirven para explicarlas y definirlas aunque en términos distintos a los propios; a los usados por los sujetos.*

Para Rorty la idea representacionalista de considerar *el* lenguaje como medio (de representación o de expresión) entre nosotros y *la* realidad no es operativa. *Conocer* algo no consiste en captar, representar o expresar ese algo (por ejemplo, un término en una teoría) de una determinada manera que sea considerada *exacta*, sino adquirir hábitos para hacer frente a la realidad, lo importante es su utilidad y eficacia en situaciones dadas (Garma, 2006, p. 1). No se trata, sin embargo, de aceptar un relativismo, según el cual «una creencia es tan buena como la otra», sino que «lo único que puede decirse de la verdad o racionalidad es describir los procedimientos que *nuestra* sociedad utiliza en su indagación» (p. 4). Desde los planteamientos de Rorty, como lo expresa William Darós (2001), el conocimiento o el pensamiento:

> *es un hacer acompañado de creencias justificadas. El conocimiento no está constituido por un acto entre las personas y los objetos, sino entre las personas y las proposiciones que expresan lo que las personas creen. A estas creencias justificadas se les puede llamar conocimiento (p.* 101).
>
> *La búsqueda de coherencia entre creencias es lo que da unidad a la persona en medio de las contingencias: es lo que forma y educa (p. 116).*

Y aprender consiste

> *[...] en saber manejarse con creencias que son útiles y en saber ser eficaz: si deseo tales o cuales fines debo saber usar tales o cuales medios. Primeramente, como no sé qué hacer, obro con finalidad y sentido: luego, al ver los resultados de la acción comienzo a corregirla para ser eficaz, y obtener ahora consciente y prácticamente lo que deseo (p. 119).*

Plantea entonces que *aprender a manejar conceptos* es aprender a manejar lenguajes, códigos, palabras:

> *Pensar es saber expresarse con palabras, las cuales no son depositarias de verdades, sino un medio útil para lograr cosas... [Las palabras] no representan exactamente las cosas; son herramientas que los hombres usan para actuar [...] aprender y enseñar implica adquirir la suficiente confianza para apoyarnos en nuestras creencias porque ellas son pragmáticamente útiles para obrar en el mundo, mediante el lenguaje, abandonando la búsqueda del ser de las cosas en sí mismas (la verdad, la objetividad, lo absoluto) (p. 119).*

En síntesis, para Rorty la mente humana es vista como trama de creencias y deseos. El conocer o el pensamiento, expresado con palabras, es un hacer acompañado de creencias justificadas, que resultan pragmáticamente útiles para obrar personal y socialmente en el mundo. Por tanto, lo importante no es analizar la naturaleza de la realidad o la verdad, sino las explicaciones dadas sociohistóricamente por grupos humanos. De hecho, «naturaleza» y «verdad» necesitan un absoluto a priori que la pragmática rechaza.

Rorty, al igual que Habermas, es un pensador hermenéutico. Además de reconocer la necesidad de interpretar textos, de redescribirlos para contextualizarlos y acercarse a la comprensión de las expresiones, reconoce la importancia del *otro* y el derecho a la diferencia. Para Habermas (1990, p. 84), «entender una expresión significa saber cómo puede servirse uno de ella para entenderse con alguien acerca de algo». Los juegos de lenguaje de Wittgenstein cumplen un papel importante en la configuración que hace Habermas de una teoría de la interacción social generada por actos de habla,[4] donde el reconocimiento de reglas en los procesos de interacción de los hablantes posibilita consenso. En palabras de Vygotsky (1987), «la regla que rige el lenguaje interiorizado es el predominio del sentido sobre el significado, de la oración sobre la palabra y del contexto sobre la oración» (p. 189).

Para hacer parte de una cultura, el hombre construye consensual y socialmente significados. Wittgenstein, desde los juegos de lenguaje, hace un planteamiento pragmático, reconociendo la intersubjetividad y el hecho de que los sujetos identifican reglas en ella. Wittgenstein (1958/1999, p. 23, 48) plantea que el significado de una palabra coincide con su uso, el cual es tan variado como los juegos de lenguaje; además, como lo plantea Rorty (1993), se reconcilia con la idea de que «el que un enunciado tuviese sentido dependía realmente de si otro enunciado era verdadero –un enunciado acerca de la práctica social de las personas que utilizaban las marcas y ruidos que componían ese enunciado–», y comparte la interpretación que hace Pears (1988, p. 67) respecto a que para Wittgenstein las «condiciones de sentido son inefables»:

[4] Una teoría social mediada por el lenguaje, la Teoría de la Acción Comunicativa; denominada también *pragmática trascendental.* Otros enfoques pragmáticos son: la *pragmática de la comunicación* o enfoque interaccional (conocido también como Escuela Palo Alto) y la *pragmática del lenguaje humano.*

> *La idea rectora [de Wittgenstein] fue que podemos ver más lejos de lo que podemos decir. Podemos ver todo el trayecto hasta el extremo del lenguaje, pero las cosas más lejanas que vemos no pueden expresarse en enunciados porque son las precondiciones para decir cualquier cosa.*

El sentido de una proposición está dado por el papel que desempeña en una práctica determinada, pero no siempre sea posible explicarlo mediante palabras (Wittgenstein, pp. 33-36).

La relación de los seres humanos con el mundo, como lo plantea Bagni (2009), no tiene un carácter cognitivo-observacional sino práctico-comprendente. En relación con el contexto escolar, como lo reconoce este autor, los estudiantes deben dar sentido a frases o proposiciones, a partes de un discurso que poco conocen o que incluso desconocen, deben dar sentido a signos particulares, deben «hacer hablar» a dichos signos; así, los aprendices deben moverse en el plano de la interpretación activa de los signos, en el plano de la hermenéutica. Lo planteado hasta ahora enfatiza un hecho que es asumido en esta investigación: los sujetos de un grupo, en procesos de interacción en torno a una tarea específica, necesariamente parten de interpretaciones diferenciadas de las palabras, de los signos y de las representaciones; y es en dicha interacción que van explicitando los sentidos asignados y construyendo consensualmente significados requeridos para abordar la tarea.

Semiótica

Los seres humanos reconocen la importancia de la comunicación en la vida social. Entre las diversas formas de comunicación, además de las que usan los lenguajes naturales, están la visual, la táctil, la sonora, la gestual, y en cada una de ellas requerimos el uso de *signos* (ya sea emisión de sonidos, «manchas» sobre un papel, gestos, entre otros) que se asumen –y son asumidos por otros– como dotados de algún significado; aunque se reconozca que en ocasiones tales significados no necesariamente son compartidos. Los signos son usados para referir algo en el mundo (cosas, sentimientos, ideas, etc.), en un cierto contexto y con un cierto sentido.

La *semiótica* precisamente hace referencia a la disciplina que estudia los signos en general, o mejor, que *estudia los sistemas de signos* y está ligada a una intención comunicativa. En principio el signo puede ser visto como todo aquello que, para un sujeto, está o hace las veces de otra cosa (el objeto del signo), aunque no en todos sus aspectos, sea que dicha cosa «exista» o no. El origen de la semiótica moderna se asocia a De Saussure y a Peirce, hacia finales del siglo XIX.

Es importante aclarar que, en realidad, semiótica no fue el término utilizado por De Saussure sino *semiología*. Aunque la mayoría de autores los consideran como términos equivalentes, en la actualidad algunos reconocen que éstas refieren dos disciplinas diferenciadas;[5] así, mientras la semiótica asume explícitamente una intención comunicativa, para lo cual requiere contar con sistemas de signos socialmente compartidos –se interesa más por lo interpretativo–, la semiología no se preocupa, según esta corriente, por si existe o no tal intención comunicativa sino por las estructuras semióticas –se interesa más por lo estructural–.

Para De Saussure, cuyo interés fundamental fue el estudio y comprensión de la lengua, la semiología es la ciencia que estudia los signos en el seno de la vida social –en qué consisten y qué reglas los rigen–. Los signos, vistos como unión de dos elementos de naturaleza psíquica: *significado* (identificado con concepto) y *significante* (identificado con «imagen» producida por la sucesión de sonidos o marcas gráficas),[6] permiten expresar ideas que un «emisor» comunica a un «destinatario» y no pueden verse como simples «marcas» ni por fuera de un sistema; así, como se mencionó anteriormente, De Saussure asume una visión estructuralista (como lo reconoce Radford, 2006a, p. 8).

Él introduce algunos conceptos básicos de la lingüística moderna, como aquellos de sincronía y diacronía, *lengua* y *habla*, signo, significado y significante (concepto asumido por todos los estudios posteriores sobre lingüística que llevan a las ciencias de la comunicación) e introduce la idea de arbitrariedad del signo lingüístico. De Saussure concibió también la lingüística como parte de un estudio más amplio de los signos, la semiología. La lengua, entendida como producto social de la facultad del lenguaje, es para De Saussure

[5] Ver, por ejemplo, Greimas, A. & Courtés, J. (1986). *Semiotica. Dizionario ragionato della teoria del linguaggio*. Firenze: S.E.S. s.r.l.-La casa Usher.

[6] Como lo afirma Castañares (1985, p. 372), el «significante» podría ser asociado, desde el punto de vista triádico, con *signo*, pero considera que la identificación entre significado y concepto es, por lo menos, reduccionista, en tanto el significado puede ser entendido, desde el punto de vista triádico, más como un interpretante.

un conjunto de convenciones utilizadas por un cuerpo social para permitir el ejercicio de tal facultad en los individuos.

Significante y significado están ligados por una relación de presuposición recíproca: la forma expresiva articula el contenido; el contenido puede ser manifestado solo a través de una forma significante. Por esto se dice que significante y significado son como dos caras de una misma moneda. Uno de los motivos de la inseparabilidad de significado y significante reside en la naturaleza misma de la relación que no es ni natural ni convencional, sino radicalmente arbitraria, lo que es innecesario e inmotivado. La relación de reenvío entre significante y significado es posible gracias a una doble exclusión entre dos significantes entre sí y los significados entre sí y la correspondencia de las clases de las dos entidades psíquicas indica, de hecho, la noción de valor, en el sentido saussuriano del término.

Para algunos autores, la misma semiótica de Piaget se enmarca dentro de esta tradición saussureana (Radford, 2006a, p. 12). Piaget reconoce la importancia de la habilidad para representar algo a través de un signo, un símbolo o cualquier objeto, para lo cual introduce el concepto de *función semiótica*, la cual surge cuando hay una diferenciación entre significado y significante; diferenciación que, afirma Radford, «provee al significado (signifié) con una permanencia espacio-temporal y abre la posibilidad de que un mismo significante pueda referir a varios significados» (p. 13). Como lo plantea este autor, para Piaget la función semiótica incluye «la imitación diferida, el juego simbólico, la imagen mental, los gestos y el lenguaje natural».[7]

Pasando a Peirce, para él la semiótica es «la doctrina de la naturaleza esencial y de las variedades fundamentales de *semiosis* posibles» (Eco, 1986, p. 20); entendiendo por semiosis «una acción, una influencia, la cual es, o involucra, una cooperación de tres aspectos, tales como un signo, su objeto y su interpretante, esta influencia tri-relativa no es de ninguna manera resoluble en acciones entre pares».[8]

[7] Para Piaget el lenguaje es condición necesaria del pensamiento, mas no suficiente.

[8] La *semiosis* es vista como proceso de significación, en decir, como objeto de estudio de la semiótica. Así, puede entenderse por semiosis cualquier tipo de proceso o actividad que involucre signos. Por su parte, Duval (1995/1999) llama semiosis a la «aprehensión o producción de una representación semiótica» y llama noesis a los «actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una inferencia» (p. 14).

Desde este enfoque, afirma Castañares (2000) –y a diferencia de la semiótica saussuriana–, no se establece un vínculo entre semiótica y lingüística. En De Saussure esto era necesario, en Peirce no. En la semántica peirciana los signos están conectados unos con otros, y es gracias a esta conexión que puede haber representación. Este autor reconoce además que «nuestra experiencia de la realidad se nos da ya "semiotizada", es decir, inserta en los procesos de semiosis» (p. 5) y aclara en qué sentido asume Peirce el sujeto:

> *o bien es un fenómeno de naturaleza semiótica (el hombre es un signo que se despliega y desarrolla según las leyes de la inferencia, como dice en CP 5.313) o bien es un sujeto trascendental (la mente para la que el interpretante es un efecto) o cuasi-trascendental (la comunidad de intérpretes, que sería el sujeto de la semiosis ilimitada). Más allá de estas consideraciones no hay en Peirce una teoría del sujeto en el que éste pueda ser considerado, al tiempo que una realidad exterior a la semiosis misma, su motor (Castañares, 2000, p. 8).*

Eco (1986) considera más amplia la definición de semiótica dada por Peirce y plantea que actualmente las investigaciones en este campo son muchas y de múltiples tipos, asociadas a sistemas de comunicación «naturales» o «espontáneos» y a otros considerados culturales, por ejemplo la comunicación táctil, la comunicación entre animales, los códigos musicales, los lenguajes formales y los lenguajes naturales; para este autor «todos los fenómenos de cultura pueden convertirse en objetos de comunicación [...] una semántica desarrollada no puede ser otra cosa que el estudio de todos los aspectos de la cultura vistos como significados que los hombres se van comunicando paulatinamente» (p. 26) y plantea que la semiótica estudia todos los procesos culturales como *procesos de comunicación* (p. 28).[9]

Por su parte, Radford (2006a) plantea que, además de las dos tradiciones semióticas antes referidas, estaría una tercera representada por Vygotski (1934/2001), quien pone de relieve el papel de lo social en la génesis de la significación, planteando que «el signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo in-

[9] Para Eco el *significado* de un término no es otra cosa que una «unidad cultural» (p. 61), entendiendo por unidad algo que está definido culturalmente y que se distingue como entidad.

terpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su internalización» (p. 11).[10]

Como lo afirma Wertsch (1988), Vygotski reconoce que si bien en el lenguaje hay un potencial implícito de descontextualización, usado sobre todo en la reflexión abstracta, «una parte de la organización lingüística tiene sus raíces en la contextualización [...] la estructura e interpretación de los signos lingüísticos depende de sus relaciones con el contexto en que estos aparecen» (p. 109-110), y basa la explicación del habla interna en la noción de sentido.[11] Parte de que la interacción social es posible solo en tanto la realidad es reflejada por el pensamiento humano de manera generalizada, es decir, tal interacción se basa en la generalización –el signo es usado con un significado generalizado–; sin embargo, una característica en el habla interna es el predominio del sentido de la palabra sobre el significado.

> *Para Vygotski, la cuestión del sentido no es un problema de ambigüedad lexical o de distinciones del significado que se mantienen constantes en diferentes contextos de habla. A la inversa, la noción de sentido tiene que ver con los aspectos contextualizados de la significación y la organización lingüística. De aquí que refleje su interés por cómo la mediación semiótica de las funciones mentales superiores puede utilizar un potencial del aspecto contextualizado de la organización lingüística y la interpretación (Wertsch, 1988, p. 136).*

Finalmente, y como vínculo entre los anteriores planteamientos teóricos de carácter general y el análisis de datos realizado, se presenta una perspectiva teórica en el campo de la Educación Matemática, que se explicita de manera sucinta en las siguientes tres secciones, en las cuales se describen tres

[10] Vygotski estableció una analogía entre signos y herramientas, en tanto la función mediadora que desempeñan; a las herramientas conceptuales las llamó «signos» (Wersch, 1988, p. 93).

[11] Vygotski (1934/2001) comparte con Paulhan que «el sentido de la palabra es la suma de todos los sucesos psicológicos evocados en nuestra conciencia gracias a la palabra» (p. 333), su formación es dinámica, variable y compleja, con diferentes zonas de estabilidad, y el significado «es solo una de esas zonas del sentido, la más estable, coherente y precisa». Afirma que la palabra «adquiere su sentido en un contexto y, como es sabido, cambia de sentido en contextos diferentes» (p. 333), mientras el significado permanece estable ante los cambios de sentido de la palabra en contextos diferenciados.

enfoques específicos que serán tenidos en cuenta, de manera diferenciada, en este proceso de mediación teórica.

ENFOQUE ESTRUCTURAL-FUNCIONAL: SISTEMAS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN

En los últimos años el estudio de aspectos relacionados con la semiótica ha sido abordado en y desde campos y disciplinas diversas; particularmente se ha avanzado en el estudio de los sistemas semióticos específicos de las disciplinas, reconociendo por supuesto al lenguaje natural como sistema semiótico por excelencia. En particular, en el campo de la didáctica de la matemática, Raymond Duval (1995/1999) destaca que toda iniciación en las matemáticas pasa por una apropiación individual de sistemas semióticos de representación específicos y desarrolla un trabajo en el que se reconoce la importancia de abordar semióticamente la comunicación.

En matemáticas, a diferencia de la mayoría de disciplinas, no es posible acceder a sus objetos desde la percepción, sino a través de representaciones, usando una gran variedad de sistemas semióticos de representación, los cuales requieren ser apropiados por un sujeto que pretenda adquirir conocimientos y estudiar los objetos propios de esta disciplina, en tanto algunos de estos sistemas culturalmente se han constituido en instrumentos generadores de conocimiento. Además del uso del lenguaje natural, se requiere del uso de diversos sistemas de representación para los números, del lenguaje figural, del lenguaje algebraico, de gráficos cartesianos, de representaciones tabulares, entre otros sistemas semióticos de representación.

Para Duval (1999/2004, p. 16), toda representación está constituida por tres polos:

- el objeto representado;
- el contenido de la representación, es decir, lo que una representación presenta del objeto;
- la forma de la representación, es decir, su modalidad o su registro.

Así, lo importante no es tanto la representación como el sistema semiótico que posibilita su producción; en palabras de Duval (1999/2004, p. 43), «una representación no puede ser comprendida independientemente del sistema que permitió producirla». Este autor denomina *registros* semióticos a aquellos sistemas con reglas que permiten combinar signos y «efectuar a su interior transformaciones de expresión o de representación» (p. 44), es decir, aquellos que posibilitan transformar cualquier representación semiótica en otra representación semiótica.[12] Reconoce que se apela al término registro como una manera de «designar la perspectiva que consiste en analizar los conocimientos desde la óptica de la adquisición no de los objetos, sino de los sistemas productores de representaciones que permiten al sujeto alcanzar tales objetos» (p. 64) y destaca tres actividades cognitivas de representación inherentes a la semiosis (Duval, 1995/1999, p. 30)[13] que debe posibilitar todo registro semiótico:

1. *Elegir un registro semiótico, al interior del cual producir* signos perceptibles, que puedan ser identificados como representación de «alguna cosa» en un registro semiótico determinado.

2. *Transformar* representaciones al interior de un registro semiótico de representación para obtener otras representaciones en el mismo registro, haciendo uso únicamente de las reglas propias del sistema.

3. *Convertir* las representaciones producidas en un determinado registro semiótico, en representaciones en otro registro semiótico.

Desde los planteamientos de dicho autor, la actividad cognitiva en matemáticas requiere no solo del uso de diferentes sistemas semióticos de re-

[12] Si bien todo registro es un sistema de representación, lo contrario no se cumple. Por ejemplo, las señales de tránsito constituyen un sistema semiótico de representación, pero no son un registro semiótico –no posibilita transformar representaciones–; mientras que el lenguaje natural y el lenguaje algebraico, entre otros, sí lo son. El *lenguaje de las flores*, especialmente usado en la época victoriana para enviar mensajes cifrados (rosas rojas: pasión; rosas amarillas: amistad; girasol: respeto; significados que actualmente se conservan en ciertos contextos), sería otro ejemplo de un sistema de representación que no es registro semiótico.

[13] Semiosis, entendida como «la aprehensión o la producción de una representación semiótica» (p. 14).

presentación, pasando por la distinción entre el objeto y su representación,[14] sino también de la articulación de estos diferentes sistemas semióticos. En relación con los registros semióticos, diferencia dos tipos específicos de transformaciones entre representaciones semióticas: *tratamientos* y *conversiones* (Duval, 1999/2004, p. 44). Un *tratamiento* es una transformación de una representación semiótica en otra al interior de un mismo registro (por ejemplo, un cálculo numérico o la aplicación de una propiedad a una expresión algebraica), es decir, se trata de una transformación interna a un registro; mientras que una *conversión* es una transformación de una representación en un cierto registro, en otra representación en un registro diferente (por ejemplo, la representación ▮▮, en el registro figural, puede transformarse en la representación **2**, en el registro de escritura numérica), es decir, se trata de una transformación externa al registro inicial.[15]

Para Duval, el problema central del aprendizaje en matemáticas está asociado a la transformación de conversión, en tanto necesidad de reconocer representaciones totalmente diferentes, producidas desde registros diferentes, como representaciones de un mismo objeto; reconociendo que esta coordinación de registros de representación, esencial para la actividad matemática, dista de ser una actividad simple y natural.

Ahora bien, es importante precisar que, en la tesis que aquí se reporta, el enfoque de Duval (1995/1999, 1999/2004) se emplea básicamente para identificar el campo de investigación, en tanto permite realizar denominaciones que posibilitan ver y describir el fenómeno a estudiar; en particular, permite distinguir los dos tipos de transformaciones semióticas atrás mencionadas.

[14] Diferenciar, por ejemplo, el número de las distintas maneras de escribir dicho número, o un objeto geométrico de una figura que lo representa. Duval (1995/1999, p. 69) insiste sobre la necesidad de no confundir el objeto (lo representado) con su representación (el representante) y que, para no hacerlo, «cuando la intuición directa del objeto no es posible, es necesario disponer de varias representaciones semióticamente heterogéneas de ese objeto y coordinarlas». La comprensión de representaciones semióticas que procede de una coordinación de registros, es denominada «comprensión integrativa» (p. 69).

[15] En párrafos posteriores se plantea la necesidad de tener en cuenta la *relatividad de los registros* (ver, por ejemplo, D'Amore, 2004).

La primera de las tres actividades cognitivas, la elección de un determinado registro para representar, reviste de gran importancia,[16] pues quien quiere comunicar algo debe decidir qué registro es conveniente para resaltar lo que él quiere poner en relieve de ese algo, hecho que orienta la elección de uno y no de otro registro (D'Amore, 2004, 2005), y tal elección depende de la comunidad en la cual se está trabajando, pues habría una cierta relatividad de los registros dependiendo del nivel de refinación de la comunidad, así como también de la intencionalidad de quien elige la representación.[17]

En el caso de las matemáticas, resulta entonces fundamental reconocer no solo la importancia de las representaciones semióticas, sino también la diversidad y las múltiples posibilidades de dichas representaciones. Se insiste en que si existe un interés de comunicar, resulta importante no solo contar con diversos registros de representación, sino también escoger cuál de ellos permite representar mejor el rasgo que se quiere destacar, teniendo en cuenta a quién se quiere comunicar; por lo tanto, la elección de los rasgos no es neutral, pues depende de la comunidad en la cual se desarrolla la comunicación y de la intencionalidad de quien elige la representación.

Desde los planteamientos de Duval (1999/2004, p. 20), cuando se estudia la variedad de tipos de representaciones semióticas utilizadas en matemáticas, siempre se hace referencia a *objetos* matemáticos y no a *conceptos*, en tanto estos últimos con frecuencia son considerados representaciones mentales asemióticas. Así –afirma este autor– para comprender la actividad matemática, la noción de objeto –al menos operatoriamente– es más importante que la de concepto: «No se trabaja sobre conceptos; se trabaja sobre los objetos (números, funciones...) que tienen propiedades» (p. 20).[18] Por

[16] Lo cual es reconocido explícitamente, por ejemplo, desde enfoques socioculturales.

[17] Por ejemplo, mientras para una comunidad los registros usados para representar números decimales, fracciones o porcentajes son todos diferentes, para otra se trata de representaciones en un mismo registro, el registro lenguaje aritmético. Incluso, dependiendo de la situación, de sus objetivos, una misma persona podría asumir un registro más o menos amplio (ver, por ejemplo, D'Amore, 2004; D'Amore B., Fandiño M. y Iori, M., 2013).

[18] Quizá sea más adecuado decir *del cual se pueden predicar propiedades, relaciones y operaciones.*

tanto, plantea, lo que toma valor es la dupla (*signo/objeto* o *representación semiótica/objeto*); o quizás sea más adecuado decir que toma valor la dupla *representaciones semióticas del objeto/objeto.*

Para Duval, los objetos de conocimiento en matemáticas y sus aprendizajes se basan en la toma de conciencia de tales objetos, y esta emerge cuando se ha tomado conciencia de que dos presentaciones diferentes (imágenes, ideas o fenómenos, etc.) son presentaciones de un mismo objeto, y que el pasaje de la una a la otra da acceso indirecto a un invariante que no debe ser confundido con ninguna de sus presentaciones.

ENFOQUE SEMIÓTICO-CULTURAL: ACTIVIDAD Y SISTEMAS SEMIÓTICOS

En esta sección se presentan, de manera general, elementos básicos de la teoría cultural de la objetivación propuesta por Luis Radford (2006b). Este autor reconoce la importancia epistémica del lenguaje, pero plantea que si bien es un mediador de las actividades humanas, no es posible describir adecuadamente los modos pensar, conocer y conceptualizar solo en términos de prácticas discursivas. Radford (en D'Amore, Radford y Bagni, 2006, pp. 21-22) plantea que:

> *En calidad de mediador, [el lenguaje] sostiene, en larga medida, nuestra historia cultural, como hacen los artefactos, los monumentos, las pinturas, etc. Pero el lenguaje no tiene un poder creativo, en cuanto el lenguaje no piensa. Quienes piensan son los individuos que usan el lenguaje. Pensando, es decir, reflexionando sobre el propio mundo, los individuos usan el lenguaje, los artefactos, etc., y haciendo esto producen los propios objetos de conocimiento.*

En la búsqueda de conocimiento el ser humano habla, gesticula, escribe, usa artefactos, agarra objetos, etc., recurriendo a una diversidad de sistemas semióticos dispuestos culturalmente. En tanto los signos y artefactos usados median los actos de conocimiento, alteran la capacidad cognitiva de ser afectados por las cosas, y hacen que dicha capacidad – y por tanto el conocimiento– sea culturalmente dependiente (Radford, 2004, p. 17).

Inspirado en las escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento, Radford (2006b) plantea elementos de una teoría cultural de la objetivación, apoyada en una epistemología y una ontología no realistas. Este autor rechaza las concepciones mentalistas del pensamiento, acudiendo a una caracterización tanto por su naturaleza semióticamente mediatizada, como por su modo de ser en tanto praxis reflexiva. Así, en esta teoría, el pensamiento es considerado como «una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos» (p. 107), destacando el papel de los artefactos culturales (sistemas de signos, objetos, instrumentos, etc.) en las prácticas sociales, en tanto son partes constitutivas del pensamiento y no solo ayudas de éste.[19] En palabras de Radford (2006b, pp. 107-108):

> *Se piensa con y a través de los artefactos culturales, de manera que hay una región externa que [...] llamaremos el territorio del artefacto. Es en este territorio donde la subjetividad y la objetividad cultural se imbrican mutuamente y en el que el pensamiento encuentra su espacio de acción y la mente se extiende más allá de la piel [...].*
>
> *El pensamiento es una re-flexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios.*

Desde los planteamientos de Radford (2006b, p. 108), es clara la incidencia que tienen los significados culturales en la manera en que un individuo piensa y conoce los objetos del saber, en tanto no solo orientan la actividad en la cual esto ocurre, sino que le dan cierta «forma». En el siguiente diagrama, mediante flechas se muestra la interacción entre los *sistemas semióticos de significación cultural*, la *actividad* y el *territorio del artefacto*, descrita por este autor (p.109):

[19] La praxis social entendida no como una práctica contemplativa, sino como una actividad humana sensorial y concreta.

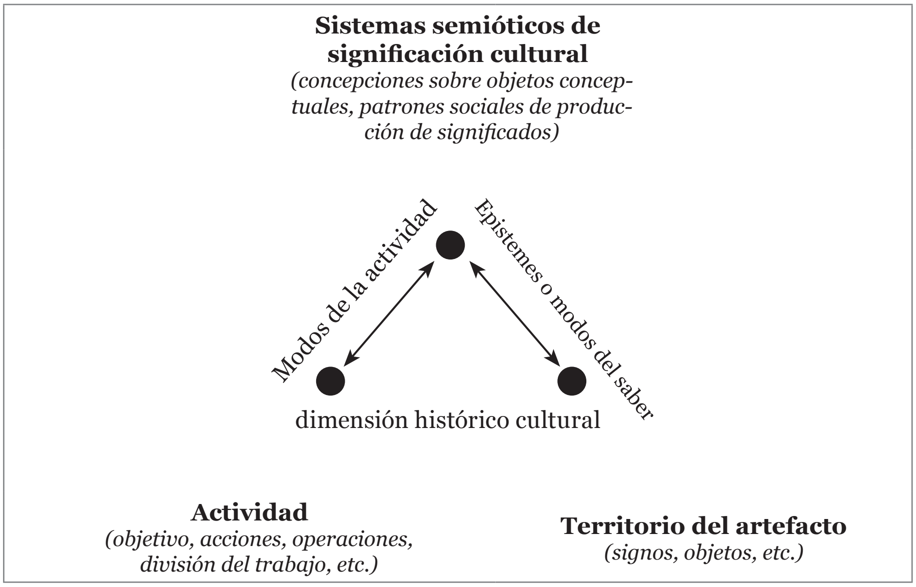


Diagrama 2. Relaciones entre actividad, sistemas semióticos y territorio del artefacto

Los *sistemas semióticos de significación cultural*,[20] en interacción con las actividades, dan lugar a formas o modos de *actividad*, esto es, a maneras particulares en que son realizadas las actividades en un momento histórico, y, en acción con el *territorio del artefacto*, dan lugar a modos específicos del saber, que incluye evidencias, argumentos, métodos que son considerados válidos, así como la identificación de situaciones o problemas de interés para una determinada cultura (p. 110).

Si bien en un contexto escolar el objeto de la actividad puede no ser conocido por el estudiante (por ejemplo, pensar algebraicamente), sí lo es por el profesor. Entonces la teoría de la actividad en el sentido de Leontiev postula un objeto y un motivo (o diversos motivos) y recursos para alcanzar el objeto. Una perspectiva antropológica establece que el sujeto que aprende es también un sujeto cultural, inmerso en una cultura de la cual hereda modos de actuar, de hablar y de razonar (Montagu, 1968). De acuerdo con White (1959), toda cultura se distingue por eventos (por ejemplo, actitudes humanas, una

[20] Incluyen concepciones sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, su modalidad de existencia, su relación con el mundo concreto, entre otras.

conversación) y cosas (objetos físicos) que suceden en un espacio y un tiempo específicos:

> i) dentro de organismos humanos, es decir, conceptos, creencias, emociones, actitudes;
>
> ii) dentro de procesos de interacciones sociales entre seres humanos; y
>
> iii) dentro de objetos materiales (hachas, fábricas, vías de tren, tazones de cerámica)

que se encuentran fuera de los organismos humanos, pero dentro de patrones de interacción social [existentes] entre ellos. White identifica a la *simbolización* como la característica principal de la existencia temporal y espacial de las cosas y de los eventos. Todos los objetos materiales, los conceptos, las creencias, las emociones y las actitudes adquieren significado en el momento en que los seres humanos interactúan entre sí.

En otras palabras, la cultura es el complejo que sirve para nombrar el cúmulo de conocimientos, técnicas, creencias y valores expresados en símbolos y prácticas, que caracterizan a cualquier grupo humano y que suele transmitirse –aunque no mecánicamente– en el tiempo (de una generación a otra) y en el espacio (de un lugar a otro). Por ejemplo las formas de argumentación, de explicación de los estudiantes, son manifestaciones de una cultura cuyo método de entender el mundo es el que se basa en la postulación de hipótesis y conclusiones.

Ahora bien, los individuos requieren tomar conciencia de los objetos culturales. Para hacer operacional su teoría, Radford (p. 124) introduce como un concepto fundamental, de naturaleza semiótico-cognitiva, precisamente esta toma de conciencia subjetiva del objeto cultural, concepto al que denomina *objetivación*.[21]

[21] La objetivación hace que los objetos matemáticos no sean vistos como simples objetos, generados por una lógica racional de carácter universal, sino [generados] a través de un proceso histórico-cultural de labor humana. Este objeto [matemático], que en el curso de la historia se convierte en patrón conceptual fijo (relativo a cierto momento histórico), aparece en el estudiante no como un objeto platónico, sino como objeto incrustado en su cultura (Miranda, Radford y Guzmán, 2007, p. 10). Desde esta postura, la objetivación hace que las formas de pensamiento de los estudiantes se modifiquen, es decir, se objetiva no solo el objeto matemático, sino también la forma de pensarlo.

Los objetos matemáticos, desde el punto de vista del enfoque antropológico y desde una teoría cultural de la significación, son generados históricamente en el curso de la actividad matemática de los individuos, son considerados como «patrones fijos de actividad integrados en el ámbito siempre cambiante de la práctica social reflexiva y mediada [por los artefactos]» (Radford, 2004, p. 18). El *aprendizaje* es definido por Radford (2006b, p. 124) como el proceso social de objetivación de patrones externos de acción fijos en la cultura. En términos metodológicos, como lo plantea este autor (p. 125), el concepto de pensamiento exige prestar atención a los *medios semióticos de objetivación* utilizados por los estudiantes, tanto para la elaboración de significados como para la toma de conciencia de los objetos conceptuales.[22]

Desde los planteamientos de Radford, los signos permiten a los sujetos reflexionar sobre el mundo, el cual es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que éstos son usados. Los signos no pueden reducirse a su función representacional, en tanto estos median culturalmente la actividad de reflexión que posibilita la objetivación de los objetos matemáticos. Así, como lo afirma Santi (2011, p. 289), en esta perspectiva, pensamiento, objetos matemáticos, signos y significado están indisolublemente entrelazados a través de la actividad reflexiva; por lo cual se hace necesario cambiar el foco de la dualidad objeto-representación a la actividad reflexiva que entrelaza objetos, signos y significados.

En una perspectiva pragmática del significado, los signos se debilitan en su función representativa y se convierten en los mediadores que no solo ayudan a realizar la actividad reflexiva, sino que también *son constitutivos de la actividad*. En este sentido, la elección de los signos no es neutra o independiente, en tanto orienta el destino en el cual se expresa el pensamiento, el destino de la comunicación. Dicha relación epistemológica es vista, entonces, de tal forma que el objeto de conocimiento es inseparable de la actividad de los individuos.

Para Radford (2004), todo pensamiento es un ir y venir entre lo particular y lo general, y entre los dos media una *superestructura simbólica* construida

[22] La característica social y cultural de los medios semióticos de objetivación radica en que contienen patrones históricos de actividad cognitiva; por ejemplo, la utilización de reglas para medir es uno de los casos de objeto cultural que lleva en sí mismo actividades históricas de medición (D'Amore, 2001; Radford, 2006b).

por los propios individuos a partir de la *praxis* social. Es en esta *superestructura simbólica* en la que se ancla la imaginación intelectual, de suerte que la objetivación del saber –en tanto que reflexión del mundo– es un punto de encuentro entre la experiencia personal y el saber cultural. El signo y la *forma* en que éste es usado –(esto es, su sintaxis) forma necesariamente cultural en tanto que inmersa en *Sistemas Semióticos Culturales* de significación– son considerados como constitutivos del objeto conceptual: éstos *objetivan* al objeto. Así, el significado es ya un fenómeno mediado culturalmente, cuya existencia depende de un sistema previo de símbolos compartidos, de acuerdo con convenciones culturales, expectativas y normas sociales.

A través de los recursos materiales y conceptuales del medio socio-cultural, el sujeto puede efectuar las generalizaciones y las síntesis sobre las cuales reposa la formación de conceptos. El conocimiento, entonces, no es la consecuencia de las acciones adaptativas de un estudiante en el momento de resolver un problema, pues éstas son situadas dentro de las condiciones particulares de cada cultura y de cada forma de comprender el mundo.

En síntesis, desde una aproximación socio-cultural, la manera como se configura el conocimiento matemático está íntimamente definida por la cultura en la cual ésta se desarrolla, así como por las actividades que realizan los individuos en un determinado contexto, lo cual significa que el conocimiento (matemático) se encuentra estrechamente enraizado en su contexto cultural, más precisamente, la *cultura es consustancial al conocimiento*. Por ello, en un contexto escolar, uno de los papeles atribuibles a la cultura es *sugerir a los estudiantes formas de percibir la realidad y sus fenómenos*.

Resulta importante resaltar que desde el enfoque semiótico-cultural se asumen los siguientes dos principios:

(i) los signos permiten a los individuos reflexionar sobre el mundo y

(ii) el mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que éstos son usados.

Estos principios llevan a considerar la semiótica no solo en su papel de representación de los objetos matemáticos, en tanto la actividad matemática está anclada en los complejos simbólicos de la cultura en que se desarrolla.

ENFOQUE ONTO-SEMIÓTICO (EOS): SISTEMA DE PRÁCTICAS Y CONFIGURACIÓN DE OBJETOS MATEMÁTICOS

Desde la propuesta orientada por Godino (2003, p. 137), el concepto de sistema de prácticas es concebido como un conjunto de prácticas significativas para resolver un campo de problemas. La actividad matemática –organizada en sistemas de prácticas discursivas y operativas– tiene un papel esencial en la generación de entidades matemáticas (culturales/mentales). Para este autor, los objetos matemáticos son concebidos como emergentes de un sistema de prácticas, como «entidades complejas que se construyen progresivamente y se van enriqueciendo y completando a partir de la actividad reflexiva en la resolución de ciertos tipos o campos de problemas» (p. 85), enfatizando que estos «son fruto de la construcción humana, cambian a lo largo del tiempo y pueden ser dotados de significados diversos por personas e instituciones diferentes» (p. 86), desplazando el centro de atención de la mente a la acción de los sujetos en contextos,[23] mediada por instrumentos.

Para Godino (2003), las nociones teóricas *sistema de prácticas* y las categorías funcionales de *entidades primarias* o tipos de objetos (lenguaje, situaciones, procedimientos, definiciones, propiedades y argumentos), las cinco *facetas duales* (personal/institucional, ostensiva/no ostensiva, ejemplar/tipo, elemental/sistémica, expresión/contenido) desde las cuales pueden considerarse dichas entidades, así como la noción de *función semiótica* (expresión/contenido, toda expresión remite a un contenido), constituyen una adecuada posibilidad para el análisis de la cognición humana.[24] Para el presente trabajo, el análisis se focalizó en la dimensión o faceta *expresión-contenido*.

Las funciones semióticas, como lo plantean Font, Godino y D'Amore (2007, p. 5), pueden ser asumidas como:

[23] El *contexto* visto como conjunto de factores extra/inter lingüísticos que soportan o determinan la actividad matemática y, por tanto, la forma, la adecuación y el significado de los objetos puestos en juego en la misma.

[24] Esta noción, como lo comenta Godino (2003), proviene de Hjemslev (1943), quien llamó *función de signo* a la relación de dependencia establecida entre las partes de un texto y sus componentes, así como entre las componentes mismas; noción que posteriormente fue descrita por Eco (1979) como *función semiótica.*

> *[...] correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante, representante) y un consecuente (contenido o significado, representado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. Estos códigos pueden ser reglas (hábitos, convenios) que informan a los sujetos implicados sobre los términos que se deben poner en correspondencia en las circunstancias fijadas.*

Con respecto a las relaciones de dependencia entre expresión y contenido, estos autores plantean que el papel de la representación no es asumido solo por el lenguaje. Tales relaciones pueden ser de tipo representacional, instrumental y estructural (p. 6):

> *[...] representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental (un objeto usa a otro u otros como instrumento), y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos). De esta manera, las funciones semióticas y la ontología matemática asociada, tienen en cuenta la naturaleza esencialmente relacional de las matemáticas y generalizan de manera radical la noción de representación. El papel de representación no queda asumido en exclusividad por el lenguaje: en consonancia con la semiótica de Peirce, se postula que los distintos tipos de objetos (situaciones-problemas, acciones, conceptos, propiedades y argumentos), pueden ser también expresión o contenido de las funciones semióticas.*

En este enfoque, como lo afirma también Santi (2011, p. 290), las transformaciones semióticas son el aspecto emergente de una función semiótica que relaciona una representación R (antecedente) en la pareja sistema de prácticas-configuración de objetos, con una representación S en otra pareja sistema de prácticas-configuración de objetos. Este mismo autor evidencia vínculos del enfoque onto-semiótico con el enfoque sociocultural, además de la potencia de la noción de función semiótica como herramienta de análisis (p. 290):

> *[...] la noción de objetivación desempeña un papel central en la definición de las prácticas, la configuración de objetos y los criterios que conectan el antecedente con el consecuente en la función semiótica [...] La introducción de la función semiótica es una potente herramienta que conecta*

las diferentes actividades reflexivas en un significado personal y cultural unitario.

En la realización de toda *práctica matemática,*[25] los sujetos hacen uso de conocimientos básicos y en ella activan un conjunto de relaciones entre diferentes tipos de objetos (entidades primarias): situaciones-problema, lenguaje, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos; en otras palabras, las prácticas matemáticas personales activan una red de objetos intervinientes y emergentes, es decir, la *configuración cognitiva* puesta en juego (Godino, Batanero y Font, 2007).

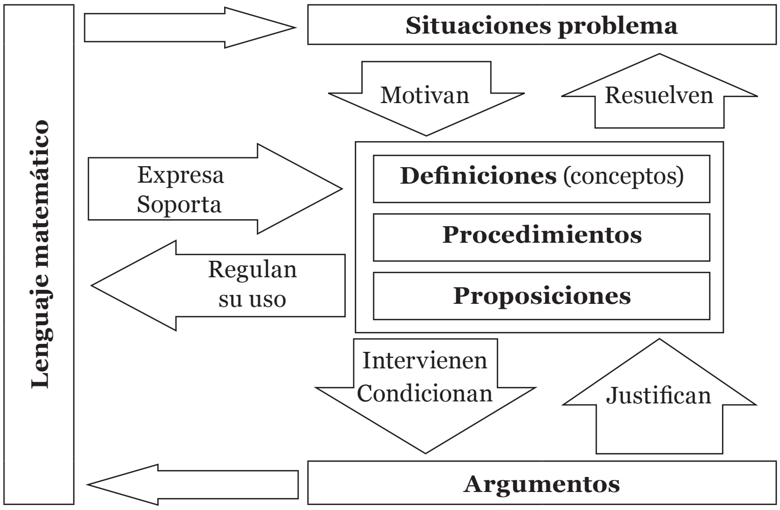


Diagrama 3. Configuración de objetos primarios

Desde el EOS los *significados* son vistos como sistemas de prácticas, con las configuraciones activadas por éstas; por tanto, para su uso en el análisis, es necesario tener en cuenta la relatividad de dichos significados. La noción de *función semiótica* que estos autores toman de Umberto Eco, como se mencionó anteriormente, es caracterizada mediante la pareja expresión/contenido o

[25] Desde el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), la práctica matemática es considerada como cualquier acción o manifestación –no solo de carácter lingüístico– realizada tanto en la resolución de problemas matemáticos como en la comunicación a otros de las soluciones encontradas, con el propósito de validarlas o de generalizarlas a otros contextos y situaciones o problemas.

significante/significado, que presupone una regla de correspondencia entre las componentes de dicha pareja y, por tanto, un acto de interpretación. Así, la comprensión de un objeto matemático por parte de los sujetos puede ser interpretada en términos de las funciones semióticas que éstos pueden establecer al poner en juego dicho objeto, ya sea como expresión o contenido de tales funciones.

Los dos últimos enfoques presentados anteriormente –el sociocultural de Radford (2006b) y el onto-semiótico del grupo de Godino (2003)– son usados en esta investigación para explicar y comprender las producciones de los estudiantes. Desde estos dos enfoques no solo se reconocen hechos cognitivos, sino también culturales e históricos; y el uso de sistemas formales de signos es un fenómeno emergente de los sistemas de prácticas enmarcados social y culturalmente. La manera en que llegamos a pensar y conocer los objetos del saber está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido de la actividad en cuyo interior ocurre el acto de pensar (los sistemas de representación están culturalmente dados).

OBJETOS MATEMÁTICOS, SIGNIFICADOS Y SENTIDOS

Siguiendo ideas de Bruner (1990/2006, p. 30), los seres humanos construyen significados utilizando sistemas simbólicos preexistentes y «profundamente arraigados en el lenguaje y la cultura» con la intención de compartirlos,[26] de hacerlos públicos en procesos de interacción. La cultura es la que «moldea la vida y la mente humanas, la que confiere significado a la acción situando sus estados intencionales subyacentes en un sistema interpretativo» (p. 52). En los procesos de interacción, los seres humanos «crean un sentido de lo canónico y cotidiano que se constituye en telón de fondo sobre el que poder interpretar y narrar el significado de lo inusual» (p. 81).

Cuando se habla de *significado* se hace referencia al significado de algo, el cual está mediado culturalmente y, como lo plantea este autor:

> *[su existencia] depende de un sistema previo de símbolos compartidos [...] el significado depende no solo de un signo y de su referente, sino*

[26] Quizás deba afirmarse que los significados *se dan por compartidos*.

> *también de un interpretante:*[27] *una representación mediadora del mundo en función de la cual se establece la relación entre signo y referente (Bruner, p. 83).*

El significado de las palabras (signos), como lo plantea Putnam (1988/2000, p. 17), se fija socialmente. No se pueden considerar los significados o contenidos como objetos que pueden ser aislados, en tanto entidades que cumplen una función explicativa en una teoría; este autor establece una conexión entre problemas relativos al significado y a la fijación de creencias. Plantea que (p. 181):

> *[...] saber lo que significan las palabras de un lenguaje (pues sin saber qué significan no se sabe a qué se refieren) es captar la manera en que son usadas. Pero el uso es holístico, ya que saber cómo se usan las palabras implica saber cómo se fijan las creencias que contienen esas palabras, y la fijación de las creencias es holística.*

Sin embargo que el significado sea holístico no quiere decir, como bien lo aclara este autor, que cambios en nuestros procedimientos de fijación de creencias generen cambios en el significado de las palabras.

En el ámbito de la actividad matemática, D'Amore (en D'Amore, Radford y Bagni, 2006) reconoce dos tipologías de objetos: el *matemático* en sí mismo y el *lingüístico* que lo expresa. Para este autor:

> *el aprendizaje matemático de un objeto* O *por parte de un individuo* I *al interior de la sociedad* S *no es otra cosa que la adhesión de* I *a las prácticas que los otros miembros de* S *desarrollan en torno al objeto dado* O

y esta adhesión se expresa mediante la aceptación de prácticas que, aclara, son además lingüísticas. Si bien diferencia los objetos de la matemática y los objetos lingüísticos que los expresan, admite que tal adhesión ocurre sobre las modalidades de intercambio lingüístico, pues son sobre todo éstas las que determinan las prácticas. Si bien considera que los objetos no son creados

[27] Como lo plantea Peirce (1960, p. 228; citado por Bruner, 1990/2006, pp. 151-152): "Un signo, o *representamen,* es algo que está, para alguien, en lugar de algo en algún aspecto o capacidad. Está dirigido a alguien, es decir, crea en la mente de esa persona un signo equivalente, o quizás un signo más desarrollado. Al signo que crea lo denomino el *interpretante* del primer signo. El signo está en lugar de algo, su *objeto.* Está en lugar del objeto, no en todos los aspectos, sino en referencia a una especie de idea, que algunas veces he denominado el *trasfondo* del representamen".

por el lenguaje, reconoce que son creados *junto* al lenguaje mediante el cual son expresados. Así, el lenguaje media entre prácticas y pensamiento. Las prácticas son adoptadas y explicitadas por los seres humanos, pero el «puente comunicativo» es producido y realizado por los lenguajes compartidos.

Así, si se acepta que los procesos de enseñanza y de aprendizaje están mediados por la comunicación,[28] el lenguaje adquiere una importancia fundamental. Siguiendo las ideas de D'Amore (2006a, p. 259), la matemática posee un lenguaje específico, especializado, y los estudiantes, para aprender, requieren apropiarse de este lenguaje especializado,[29] que difiere del lenguaje común y, por tanto, puede constituirse en una fuente de obstáculos.[30]

Como lo afirma D'Amore (2001), y lo reconocen cada vez más otros investigadores en la actualidad (Radford, 2006a, p. 7), dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, ante todo, una actividad simbólica. Dependiendo de las personas con las que se pretende establecer comunicación, así como del contexto y de los elementos disponibles para tal comunicación, se opta por una u otra representación[31] en uno u otro sistema semiótico de representación, teniendo en cuenta, además, los «rasgos» que se quieren destacar, representar o comunicar del objeto.

Sobre el significado en matemáticas

Cuando se hace uso de un sistema de comunicación, como se mencionó arriba, se utilizan signos (por ejemplo, términos o expresiones) para referirse

[28] Podría incluso decirse que *son* procesos comunicativos; para lo cual se requiere, entre otros, que quienes interactúen asuman responsabilidades en este proceso [no solo quien pretende enseñar, sino quien espera aprender].

[29] Laborde (1995, citada por D'Amore, 2006a, p. 263) asocia al lenguaje matemático por lo menos tres características: precisión, concisión y universalidad.

[30] Es necesario, sin embargo, reconocer la importancia de nombrar los objetos específicos de la matemática, en cuanto no solo permite referirlos de manera rápida con un cierto significado «compartido», o mejor, «que se da por compartido» –además de posibilitar una economía discursiva–, sino también permite volverlos objeto de reflexión.

[31] En la actividad de aula, es usual que las representaciones sean tratadas como si todas fuesen del mismo «tipo», desconociendo las dificultades que, como lo plantean varios autores (Duval 1995/1999; D'Amore, 1999/2006b; Radford, 2006a), encuentra el estudiante para realizar transformaciones entre diferentes sistemas semióticos de representación.

a algo que se reconoce dotado de una cierta existencia, que se asume en un cierto sentido. Uno de los primeros estudios sobre los signos, en el contexto matemático, fue realizado por Frege,[32] quien es considerado como uno de los primeros filósofos del lenguaje; no obstante, su interés no era propiamente el lenguaje natural sino fundamentalmente el lenguaje matemático; de hecho, estaba interesado tanto en la naturaleza y el sentido de la matemática, como de su lenguaje.

Por ejemplo, Frege (1892/1985, p. 51) se pregunta si la igualdad (en el sentido de identidad) es una relación entre objetos o entre nombres o signos de objetos. Afirma que los enunciados a=a, y a=b son de diferente valor cognoscitivo; mientras para un sujeto la primera puede afirmarse a priori, la segunda no, en tanto requiere ciertas ampliaciones de su conocimiento. Además, plantea que:

> *Si, en general, encontramos que el valor cognoscitivo de "a=a" y "a=b" es distinto, esto se explica por el hecho de que, para el valor cognoscitivo, el sentido del enunciado, o sea el pensamiento expresado en él, no entra menos en consideración que su referencia, es decir, su valor veritativo. Ahora bien, si a=b, la referencia de "b" es ciertamente la misma que la de "a", y por lo tanto, también el valor veritativo de "a=b" es el mismo que el de "a=a". Sin embargo, el sentido de "b" puede ser distinto del sentido de "a", y con ellos también será el pensamiento expresado en "a=b" distinto del expresado en "a=a"; pero entonces los dos enunciados tampoco tienen el mismo valor cognoscitivo (Frege, 1985/1892, p. 84).*

Dos de las ideas básicas de Frege, pueden resumirse así:

- El significado de las palabras o expresiones depende del contexto.
- El significado de las oraciones depende del significado de sus partes.

El significado de una expresión se compone de dos aspectos: el sentido y la referencia. Puede resultar ilustrativo el tradicional ejemplo dado por este autor, acudiendo a las siguientes dos expresiones clásicas:

- *(1) El lucero matutino*
- *(2) El lucero vespertino*

[32] Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848-1925), matemático y lógico alemán.

En ambos casos, usando expresiones diferentes escritas en lenguaje natural, se hace referencia a un objeto, que en este ejemplo es el mismo, al menos para una persona ilustrada: el planeta Venus, aunque cada una asociada a un contexto específico y por tanto con un sentido diferenciado; para un individuo no ilustrado, las dos expresiones no solo tienen diferentes sentidos sino que puede suponer que refieren objetos diferentes; así, a las expresiones dadas se les puede asignar significados diferentes.[33]

En el anterior ejemplo, en cada caso se hace referencia (*Bedeutung o Denotación*) a un objeto, acudiendo a un cierto signo (*Zeichen o Expresión*) que es usado de una determinada manera (*Sinn o Sentido*).[34] Desde lo propuesto por Frege, a cada *signo* le corresponde un determinado *sentido* (que puede ser expresado de diferentes maneras) y a éste una determinada referencia, aunque a cada referencia le pueden corresponder muchos signos. Para Frege la relación diádica *signo-sentido* es fundamental, pues reconoce que si bien en algunos casos un signo podría no tener referencia, como en la expresión «el mayor número natural», en tanto signo, siempre tendrá sentido.

Como lo explican Godino y Batanero (1994) desde las teorías realistas, el *significado* es una «relación convencional entre el signo y la entidad concreta o ideal que existe independientemente del signo lingüístico; en consecuencia suponen un realismo conceptual» (p. 4), es decir, el significado no depende del uso. Desde las teorías pragmáticas, estos dos autores (p. 12) citan a Vergnaud quien, por su parte, plantea que el significado de un objeto matemático, desde un punto de vista didáctico y psicológico, no puede quedar reducido a su mera definición:

> *son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en la representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo (Vergnaud, 1990, p. 158).*

[33] El signo de por sí no es portador de significado. Al sustituirse una expresión por otra «equivalente», en tanto tiene la misma referencia, puede tener un *valor* cognoscitivo diferente.

[34] El sentido tiene que ver con lo cognitivo –cómo el sujeto asume una expresión–, no con lo semántico; para Frege el pensamiento es el sentido del enunciado y no su referencia.

Para Vergnaud, si S es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto (la referencia), I es el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operatividad de los esquemas (el significado) y F es el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento (el significante), un concepto es una terna de tales conjuntos: C (S, I, F).

Así, desde un punto de vista pragmático, el significado depende tanto del contexto como del uso por parte de un sujeto. Para Wittgenstein, por ejemplo, el significado de una palabra, en un gran número de casos, es su uso en el lenguaje (siguiendo ciertas reglas). En otros términos, comprender una palabra o un concepto significa su uso gramaticalmente correcto –entender su función en un «juego lingüístico»– (D'Amore, 2001, p. 13).

Para Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006, p. 18), la noción de sentido propuesta desde la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) de Vergnaud corresponde a lo que desde el enfoque ontosemiótico se denomina *significado personal* de un objeto matemático; resaltan que este autor no introduce una versión *institucional* de la noción de sentido.

Objeto matemático, sentido y significado

El trabajo en didáctica de las matemáticas exige preguntarse por el sentido del conocimiento matemático y por la naturaleza de los objetos matemáticos (D'Amore, 2006b).

En relación con los objetos matemáticos, D'Amore y Godino (2007, p. 207) plantean que si se asume una teoría pragmática del significado, dichos objetos

> *[...] necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos, ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y van evolucionando con el tiempo. El hecho de que en el seno de ciertas instituciones se hagan determinados tipos de prácticas, determina la emergencia progresiva de los objetos matemáticos y que su significado esté íntimamente relacionado con los problemas y la actividad realizada para su resolución. Por ello no se puede reducir el significado del objeto a su mera definición matemática.*

Por tanto, estos autores comparten con Godino y Batanero (1994) que el *significado (institucional/personal) de un objeto* es el sistema de prácticas (institucionales/personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado [prácticas para las cuales el objeto es determinante].

Godino y Batanero reconocen que la tripleta propuesta por Vergnaud interviene en su definición de la noción de significado de un concepto, pues «situaciones y representaciones están íntimamente asociadas con la actividad de la que emergen los objetos matemáticos culturalmente definidos» (p. 18); así, destacan la relación diádica actividad-concepto:

> *En nuestra definición se encuentran presentes los elementos destacados por Vergnaud pero organizados de un modo específico, dando lugar al ente teórico que denominamos significado del objeto correspondiente. El concepto sería el emergente de este sistema de prácticas. El componente I de la tripleta conceptual de Vergnaud consideramos que describe adecuadamente el núcleo intensional del significado del concepto (Bunge, 1985), y lo podemos denominar significado en sentido estricto, pero aunque proporciona una definición operativa del concepto no agota toda la significación del mismo.*

Ahora bien, siguiendo ideas de Font y Ramos (2005), definir el significado de un objeto matemático en términos de configuraciones epistémicas y de prácticas asociadas, tal como se propone en el enfoque ontosemiótico, posibilita distinguir *sentido* de *significado*, en tanto el primero puede asumirse como un *significado parcial* en el marco de un subconjunto de sistemas de práctica; en tanto, por ejemplo, dependiendo del contexto o del tipo de notación, cada objeto matemático se puede relacionar con unos o con otros objetos matemáticos. En palabras de estos autores:

> *El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas permite agrupar prácticas específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación, y que adquieren un determinado sentido que permite establecer clases. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos (p. 319).*

El sentido no depende propiamente del objeto, sino que éste le es atribuido por un sujeto en una situación específica.[35] Es decir, el sentido atribuido a un objeto matemático depende tanto del sujeto como del contexto en el que se aborde, y por tanto es algo flexible, dinámico, en movimiento. El significado de un objeto, como lo asume Radford (2006b) es atribuido por la cultura y tiene una existencia que trasciende al sujeto, es más estable; podría decirse que el significado es más descontextualizado y general.[36] Es decir, el sentido es relativo a varias modalidades sensoriales y semióticas, y está asociado más a la pragmática, mientras el significado está más asociado a la semántica cultural. Así, el sentido de un objeto puede considerase como un significado contextual de dicho objeto.

Desde los planteamientos de Radford, la objetivación –considerada como toma de conciencia subjetiva del objeto cultural– es un proceso de dotación de sentidos cuya finalidad dentro del contexto de la actividad de la clase es precisamente una aproximación hacia el significado. Se trata pues del proceso del sentido del objeto en su camino hacia el significado. El problema didáctico, pues, es el de posibilitar o dar cuenta de un camino que lleva del(los) sentido(s) al significado.

Desde una perspectiva ontosemiótica, como lo afirman Font y Ramos, un criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas (y sus configuraciones epistémicas asociadas) en la institución escolar sea lo más representativo posible del sistema de prácticas (y sus configuraciones epistémicos asociadas) que son el significado institucional de referencia del objeto. Dicho en términos de contextos, como lo sugieren estos autores, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos, lo más representativa posible, que permita diseñar en la institución un significado pretendido que incorpore los diferentes «sentidos del objeto» que se consideran más importantes en el significado de

[35] Puede ser un individuo, un grupo de individuos o una institución; puede ser algo individual, el resultado de una negociación al interior de una comunidad de práctica o una aceptación de carácter institucional.

[36] Para este autor los objetos matemáticos son «patrones fijos de actividad reflexiva (…) incrustados en el mundo en cambio constante de la práctica social mediatizada por los artefactos» (p. 111), donde tales artefactos pueden ser objetos, instrumentos, sistemas de signos, etc.

referencia (pp. 319-320). Es importante aclarar que, respecto al planteamiento de estos autores, habría una diferencia en el desarrollo del presente trabajo en tanto *no* se asume que el objeto en sí mismo tenga sentidos, sino que éstos le son atribuidos por los sujetos.

Desde la concepción pragmática de Wittgenstein, el significado de una palabra, en un gran número de casos, es su uso en el lenguaje siguiendo ciertas reglas. En otros términos, comprender una palabra o un concepto significa su uso gramaticalmente correcto –entender su función en un «juego lingüístico»–. En palabras de Godino y Batanero (1994, p. 5):

> *Para Wittgenstein no existe siempre una realidad en sí que sea reflejada por el lenguaje, cuyas estructuras tengan, por tanto, que regirse de acuerdo con las estructuras ontológicas, sino que el mundo se nos revela solo en la descripción lingüística. Para este autor, hablar es ante todo una actividad humana que tiene lugar en contextos situacionales y accionales muy diversos y debe, por tanto, ser considerada y analizada en el plano de estos contextos. El lenguaje puede formar parte de diversas "formas de vida"; hay tantos modos distintos de empleo del lenguaje, tantos juegos lingüísticos, como contextos situacionales y accionales.*

En relación con lo planteado anteriormente, y desde el enfoque sociocultural de Radford (2006b), es importante tener en cuenta que tales prácticas y dichos contextos hacen parte de una realidad históricamente construida y que necesita un intercambio dialógico humano, al interior de una sociedad o grupo, con voluntad explícita de comunicación. Desde este enfoque, pensar no se reduce a asimilar una realidad externa, como tampoco a construir de la nada. El pensamiento es «una reflexión mediatizada del mundo de acuerdo con la forma o modo de la actividad de los individuos» (p. 107); en otras palabras, el pensamiento debe verse como «un movimiento dialéctico entre una realidad construida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios» (p. 108). Este autor reconoce que la manera en que cada sujeto llega a pensar y conocer los objetos de saber «está enmarcada por significados culturales que van más allá del contenido mismo de la actividad en cuyo interior ocurre el acto de pensar», por tanto, los significados culturales son «mediadores entre la conciencia individual y la realidad cultural objetiva [...] *orientan* la actividad y le dan cierta *forma*» (p. 109).[37]

De hecho, para Radford el aprendizaje consiste en dotar de sentido a los objetos conceptuales que el estudiante encuentra en su construcción individual y social, en su cultura. Un proceso de objetivación es, pues, un proceso de elaboración activa de significados.[38] En palabras de este autor, «[l]a objetivación es, precisamente, ese proceso social de toma de conciencia progresiva del *eidos* homérico, esto es, de algo frente a nosotros; una figura, una forma, algo cuya generalidad notamos gradualmente, al mismo tiempo que la dotamos de sentido» (Radford, 2006b, p. 116).

En palabras de Santi (2011, p. 286):

> *La semiótica cultural (Radford, 2002, 2003, 2004, 2005) y el enfoque ontosemiótico (Godino, 2002; D'Amore y Godino, 2006) van más allá de una aproximación funcional y estructural de la semiótica, sin embargo ellas reconocen aún el mismo papel fundamental de los signos en el pensamiento y aprendizaje matemático, pero de una manera más comprensiva. Su demanda es que el uso de los sistemas formales de signos es un fenómeno emergente derivado de sistemas de prácticas enmarcadas social y culturalmente. Para comprender el significado de los signos, no los podemos reducir a lo que ellos representan, sino que debemos entender el tipo de actividad que ellos realizan [...] las dificultades de los estudiantes tienen raíces no solo en las estructuras semióticas complicadas que tienen que manejar, sino principalmente en los sistemas de prácticas asociadas con las representaciones semióticas.*

Por otra parte, retomando las ideas iniciales de esta sección, en los trabajos de los estudiantes –individuales y/o grupales– se analiza tanto el aspecto sintáctico, relacionado con el reconocimiento y uso de transforma-

[37] Significados culturales, como pueden ser las concepciones sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, su modo de existencia, la relación de estos con el mundo concreto, etc.

[38] Para Radford (2006b) «el pensamiento es sobre todo una forma de re-flexión activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo (a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.), el lenguaje, los signos, etc.» (p. 123).

ciones entre representaciones semióticas al interior del lenguaje algebraico (de tipo tratamiento), como el aspecto semántico, relacionado con el sentido asignado a los objetos trabajados.[39] Si bien se habla de significados personales o individuales asignados a los objetos, debe tenerse en cuenta que, en tanto el estudiante está inmerso en una institución en la que se generan procesos de interacción relacionados con dichos objetos y sus significados, los análisis deben tomar en cuenta los objetos y significados institucionales; cada uno de los estudiantes tiene una razón cultural y social que busca en su «vida de clase» para aceptar o asignar sentidos a los objetos.

Retomando algunas de las ideas de Radford (2006b) planteadas en párrafos anteriores, el significado es atribuido por la cultura y tiene una existencia que trasciende al sujeto. El sentido es algo flexible, dinámico, en movimiento; es multimodal, en tanto relativo a varias modalidades sensoriales y semióticas. Puede afirmarse que para este autor la objetivación es vista como un proceso de dotación de sentidos, cuya finalidad –dentro del contexto de la actividad del aula– es precisamente posibilitar una aproximación hacia el significado. Así, podría decirse que un problema didáctico asociado es el de dar cuenta del proceso del sentido en su camino hacia el significado. El significado es ya un fenómeno mediado culturalmente, cuya existencia depende de un sistema previo de símbolos compartidos. Cuando el sujeto significa, sitúa dichos significados de acuerdo con convenciones culturales, expectativas y normas sociales (Bruner, 2006).

Para el análisis de las producciones de los estudiantes, resulta importante explicitar un hecho que se ha observado en el trabajo realizado en relación con la tarea propuesta. Cuando en el aula de clase se ha trabajado en un determinado «campo», los estudiantes tienden a permanecer en él y desde allí interpretan, haciendo uso del registro específico utilizado en el trabajo en matemáticas, como por ejemplo el registro algebraico. Si bien hacen uso del lenguaje natural, éste es reconocido como parte de la «costumbre comunicativa» y se le reconoce su función de mediación en la comunicación. Al respecto, resulta ilustrativo el resultado de la investigación realizada por D'Amore y Martini (1998/1999), relacionada con tareas matemáticas

[39] Para el análisis de respuestas a las tareas propuestas, particularmente en contexto algebraico, se debe tener en cuenta el problema relacionado con la toma de conciencia de la compleja diversidad de los procedimientos discursivos utilizados para designar los objetos (Duval, 2002).

propuestas a jóvenes de enseñanza secundaria superior en Bologna (14-19 años) en un «contexto natural»,[40] en la que se reporta la influencia que tiene el lenguaje natural en las interpretaciones de las preguntas de matemáticas que se hacen en el aula. Estos investigadores reportan que en las respuestas inicialmente dadas por los estudiantes se manifiesta la influencia de dicho contexto, y que el ámbito al que acuden para dar dicha respuesta es el de modelos intuitivos «ingenuos» de los primeros años de escolaridad, y solo después –en una entrevista que les fue realizada– reconocen la necesidad de reelaborar o reescribir sus respuestas iniciales, incorporando conocimiento matemático específicocon mayor formalidad.

Por lo tanto, de acuerdo con los planteamientos anteriores, se puede afirmar que cada sujeto tiende a interpretar desde el contexto cultural en el que trabaja en cada momento. Por tanto, podría afirmarse que el lenguaje natural, en cierta forma, es «absorbido» en la historia de clase, que en tanto hace parte de la costumbre, juega un papel auxiliar en la «normatividad» de la tarea propuesta.

Mientras los «expertos» frente a diversas representaciones de un objeto matemático ven representaciones diferentes de lo mismo, en tanto articulan los sentidos asignados a dichas representaciones, los aprendices no necesariamente las ven así y pocas veces «articulan» los diferentes sentidos. Es importante reiterar que el interés en este trabajo está relacionado con la multi-representación de un objeto matemático al interior de un mismo registro, no con las representaciones multiregistros. Ahora bien, las unidades mínimas del sentido asignado a un objeto matemático dependerán de si se trata de un experto o de un aprendiz. Cuando se trata de un aprendiz, dependen tanto de la situación como de la interpretación de las diferentes «componentes» de la expresión en el respectivo registro semiótico; por ejemplo, en el registro algebraico, podría depender de la interpretación de los símbolos literales, de los símbolos de las operaciones o de los símbolos de las relaciones.

[40] Caracterizado por «el uso de la lengua natural, con preguntas que incumben a hechos aritméticos en los que intervienen solo números naturales y hechos extra-curriculares, agradables y bien conocidos por los sujetos, que crea un contexto de espera (y por tanto de respuesta)» al que denominan *contexto natural*, «una especie de ambiente mental de referencia, en que se coloca el resolutor al buscar respuestas a las preguntas de la prueba» (D'Amore y Martini, 1998/1999, p. 78).

Para esta investigación, en principio no se definieron previamente indicadores respecto de sentidos asignados a una expresión dada o sobre dificultades para articular sentidos (como podrían ser frases, aceptación, declaraciones diferentes); se acudió a «preguntas reflexivas» dirigidas a los estudiantes para captar posibles dificultades que encuentran para articular dichos sentidos, posibilitándoles enfrentarse a declaraciones anteriores propias, analizarlas y precisar si las mantiene o si las cambia y por qué; podría decirse que se trata de metaindicadores. Sin embargo, en el desarrollo de las entrevistas, el investigador tuvo como referencia elementos en el significado sistémico de un objeto matemático (Godino, 2003, p. 107).

Por otra parte, el enfoque sociocultural de Luis Radford (2006b) y el enfoque onto-semiótico del grupo de Juan D. Godino (2003) son utilizados para explicar y comprender las producciones de los estudiantes, en tanto no solo reconocen hechos cognitivos sino también culturales e históricos. Para estos autores, entre otros, el uso de sistemas formales de signos es un fenómeno emergente de los sistemas de prácticas enmarcados social y culturalmente.

El conocimiento, entonces, no es la consecuencia de las acciones adaptativas de un estudiante en el momento de resolver un problema, pues éstas son situadas dentro de las condiciones particulares de cada cultura y de cada forma de comprender el mundo.

Un marco necesario para «sentido» y «cambio de sentido»

En relación con la organización de las lenguas, se diferencia la función social del habla de su función individual. En particular, Vygotski (citado por Wertsch, 1988, pp. 109-110) reconoce, por una parte, el potencial del lenguaje para la reflexión abstracta y de manera particular la descontextualización del «significado», y por otra, la importancia de la contextualización, de las relaciones con el contexto en la organización lingüística. Para Vigotski (1934/2001), el *sentido* de una palabra es:

> *[...] el agregado de todos los hechos psicológicos emergentes de nuestra conciencia a causa de la palabra [...]. Por tanto, el sentido de una palabra siempre resulta ser una formación dinámica, en curso, compleja, que tiene diferentes zonas de estabilidad. El significado es [...] la zona más*

estable, unificada y precisa. Como sabemos, una palabra cambia su sentido en varios contextos. Contrariamente, su significado es ese punto fijo, invariable, que se mantiene estable durante todos los cambios de sentido en varios contextos (citado por Wertsch, 1988, p. 136).

Este autor plantea también que:

En el lenguaje hablado, como regla, vamos del elemento más estable y permanente de sentido, de su zona más constante, es decir el significado de la palabra, a las zonas más fluctuantes, a su sentido en general. En cambio, en el habla interna este predominio del sentido por encima del significado [...] ocurre en una forma absoluta (citado por Wertsch, Óp. Cit., p. 137).

Como se planteó en el primer capítulo, el «sentido» fue asumido aquí, en principio, como un *significado parcial*, asociado más a lo contextual e incluso a lo volátil. Cada contexto ayuda a generar sentido –aunque no todos los posibles sentidos– (Font y Ramos, 2005). Es necesario reconocer la complejidad asociada al concepto «significado» e incluso que en la actualidad aún no se cuenta con una teoría compartida sobre este concepto (D'Amore, 2005b); existe una diversidad de definiciones y todavía está vigente el debate sobre el tema.

Siguiendo ideas de Godino y Batanero (1994), en este trabajo de investigación se asumirá que el *significado de un objeto* (institucional/personal) es el sistema de prácticas (institucionales/personales) asociadas al campo de problemas de las que emerge dicho objeto en un momento dado. A continuación se presenta la noción de sentido que será asumida en esta investigación:

Sentido de un objeto matemático primario. Dado un objeto matemático primario, el *sentido* de dicho objeto es el contenido de la función semiótica que tiene a dicho objeto primario como expresión de la función semiótica. Así:

Expresión	**Contenido**
Objeto primario	Sentido del objeto primario

Diagrama 4.1. Sentido asignado a un objeto matemático primario

Un mismo objeto primario puede tener diferentes sentidos. Por ejemplo:

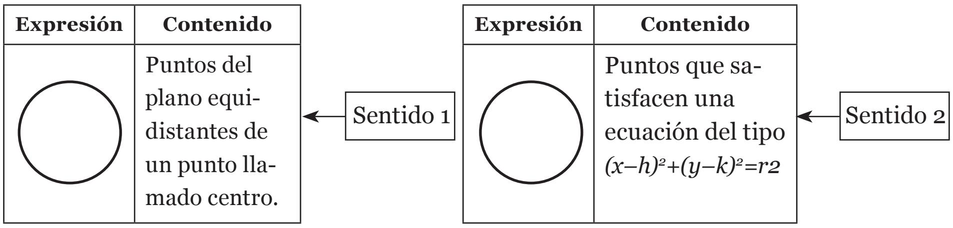


Diagrama 4.2. Diferentes sentidos de un objeto, que institucionalmente se espera construyan los aprendices

Articulación de sentidos. Se produce una articulación de sentidos cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático primario, esto es, cuando uno de los sentidos (contenido) del objeto primario se convierte en expresión de una nueva función semiótica que tiene como contenido a otro sentido de dicho objeto. Así, por ejemplo, en el caso del diagrama 4.2, la articulación producida se puede sintetizar en un diagrama como el siguiente:

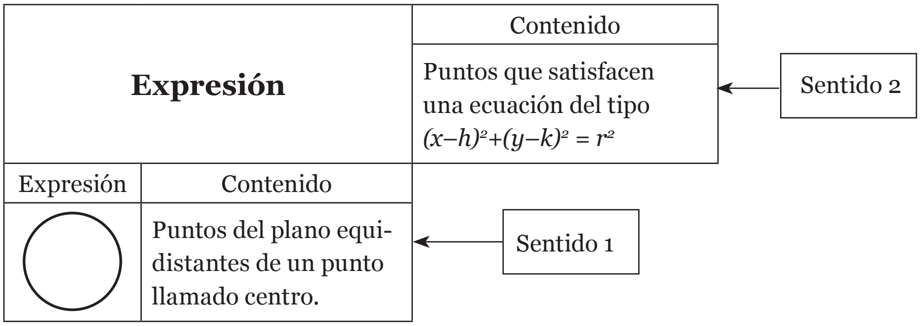


Diagrama 4.3. Articulación de sentidos

Esta articulación es el resultado de la concatenación de las dos funciones semióticas presentadas. Se tiene un objeto matemático primario al cual se le asignan dos sentidos diferentes. En otras palabras, se produce una articulación de sentidos cuando se establece una nueva función semiótica en la que una de las dos funciones semióticas anteriores juega el papel de expresión (Diagrama 4.3). Dicha combinación de funciones semióticas se puede simplificar en una sola función semiótica que pone en relación (articula) los dos sentidos:

Expresión	**Contenido**
Puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro.	Puntos que satisfacen una ecuación del tipo $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Diagrama 4.4. Articulación de sentidos (simplificación)

Así, la articulación de sentidos quiere decir que contenidos de funciones semióticas que antes se consideraban como diferentes (sin relación explícita), ahora se consideran, en cierta forma, equivalentes (con relación explícita).

Por otra parte, el *tratamiento* se puede caracterizar como una función semiótica que toma como equivalentes dos objetos primarios, considerados ambos como representaciones de un mismo objeto matemático. Por ejemplo, mediante transformaciones semióticas en el registro lenguaje algebraico, la ecuación se transforma en (=1, y ésta a su vez en $x^2+y^2+2xy-1=0$; es decir, las expresiones y $x^2+y^2+2xy-1=0$ son sintácticamente equivalentes y se establece una nueva función semiótica:

Expresión	**Contenido**
$x+y=\dfrac{1}{x+y}$	$x^2+y^2+2xy-1=0$

Diagrama 4.5. Transformación tipo tratamiento

Desde lo planteado anteriormente, a dos objetos primarios (especialmente dos representaciones) que se consideran sintácticamente equivalentes, en tanto uno de ellos es obtenido a partir de otro como resultado de un proceso de tratamiento, se les puede asociar el mismo sentido (el mismo contenido):

Expresión	**Contenido**
$x^2+y^2+2xy-1=0$	Es una circunferencia[41]

Expresión	**Contenido**
$x+y=\dfrac{1}{x+y}$	Es una circunferencia

Diagrama 4.6. Asignación del mismo sentido a objetos matemáticos primarios

[41] Como se afirmó al inicio de este escrito, aunque la expresión x2+y2+2xy–1=0 no representa una circunferencia, como lo asumen algunos estudiantes, para los propósitos de esta investigación no es relevante este hecho.

En este caso, cuando se asigna el mismo contenido a dos objetos primarios, se dice que tales objetos tienen el *mismo sentido*.

Cambio de sentido. Se da cuando el sentido asignado a una representación semiótica no se articula con el sentido asignado posteriormente a otra representación semiótica obtenida por tratamiento, en tanto se «abandona» el sentido inicialmente dado y se asume uno nuevo, es decir, se realiza un *cambio de sentido*. Por ejemplo a la ecuación se le asigna inicialmente el sentido «no es una circunferencia»; sin embargo, después de un proceso de tratamiento, se reconoce que las ecuaciones y $x^2+y^2+2xy-1=0$ son sintácticamente equivalentes. Ahora, a la ecuación se le *asigna un nuevo sentido*: «es una circunferencia»; en este caso, se genera un cambio en el sentido inicialmente asignado a la ecuación.

En otros términos, la situación inicial es la siguiente:

Expresión	**Contenido**
$x + y = \frac{1}{x+y}$	No es una circunferencia

Expresión	**Contenido**
$x^2+y^2+2xy-1=0$	Es una circunferencia

Diagrama 4.7. Sentidos inicialmente asignados

Como resultado de un proceso de tratamiento se tendría la siguiente situación:

Expresión	**Contenido**
$x + y = \frac{1}{x+y}$	$x^2+y^2+2xy-1=0$

Diagrama 4.8. Equivalencia sintáctica entre objetos primarios

Y posteriormente se tendría:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Expresión</td><td>Contenido</td></tr>
<tr><td>Es una circunferencia</td></tr>
<tr><td>Expresión</td><td>Contenido</td><td></td></tr>
<tr><td>$x + y = \frac{1}{x+y}$</td><td>$x^2+y^2+2xy-1=0$</td><td></td></tr>
</table>

Diagrama 4.9. Articulación de sentidos

Esta combinación de funciones semióticas se puede simplificar en una sola función semiótica, que sintetiza la situación final:

Expresión	Contenido
$x + y = \dfrac{1}{x + y}$	Es una circunferencia

Diagrama 4.10. Cambio de sentido (respecto al inicialmente asignado)

Capítulo 3

Instrumentos de indagación

En este capítulo se reporta el diseño de la investigación, la cual se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa de tipo descriptivo-interpretativo, y fue diseñado para realizar un análisis en contexto real del fenómeno descrito, relacionado con el cambio de sentido, generado por la dificultad que una persona encuentra para articular el sentido asignado a una representación semiótica con el sentido asignado a otra representación semiótica obtenida por tratamiento.

Desde los planteamientos de Goetz y Lecompte (1988), la fiabilidad del proceso investigativo se mejora proporcionando la mayor cantidad de información posible tanto de la situación en que es desarrollada la experiencia y de la selección de la población o muestra, como de los métodos de recolección de datos y el análisis de los mismos, así como posibilitando la revisión o una réplica del trabajo por parte de otros investigadores. La validez se mejora exponiendo presupuestos de base, realizando una permanente comparación de los datos y una descripción lo más profunda y detallada posible del análisis realizado.

Como se mencionó en el primer capítulo, se parte del hecho de que la verbalización de los procesos de pensamiento y acción proporcionan importante información, no solo a partir de materiales escritos –como pueden ser los obtenidos mediante instrumentos de indagación (tareas o cuestionarios)–, sino también a partir de procesos de interacción –como los generados en los trabajos con pequeños grupos o mediante entrevistas–. Como opción metodológica se trabajó la entrevista estructurada basada en tareas (Goldin, 2000), realizada a pequeños grupos de estudiantes:

> *Las entrevistas estructuradas basadas en tareas para el estudio del comportamiento matemático implica mínimamente un sujeto (un resolutor de problemas) y un entrevistador (el clínico), interactuando en relación con una o más tareas (preguntas, problemas o actividades) introducidas para el sujeto por el entrevistador de una manera planificada de antemano. El último componente justifica el término* basada en tareas. *Así que las interacciones de los sujetos no son solo con los entrevistadores, sino con el entorno de la tarea. La entrevista en grupo con dos o más sujetos cae también en el ámbito de esta discusión, lo que lleva a la necesidad de ampliar nuestras interpretaciones de algunas de las ideas (Goldin, 2000, p. 519).*

Las razones por las cuales se optó por realizar entrevistas grupales y no individuales, pueden resumirse así: la entrevista grupal (a pequeños grupos) ofrece un ambiente menos artificial y tenso para cada uno de los entrevistados, en tanto la atención del entrevistador no se centra de manera permanente en el trabajo de un solo individuo; los entrevistados pueden interactuar entre sí, acoger o poner en discusión las afirmaciones y argumentos presentados por sus pares, además de tener la posibilidad de conocer, analizar y contar con elementos adicionales en relación con las tareas propuestas y con los argumentos inicialmente considerados.

Si bien, como lo plantea Goldin, es necesario tomar ciertas precauciones con respecto a posibles contingencias que puedan producirse a medida que avanza la entrevista –insinuaciones o preguntas retrospectivas del entrevistador–, también es necesario prever que en un determinado momento se reconozca una situación de interés para el propósito de la investigación y sea necesario que el entrevistador modifique temporalmente el diseño previsto. En palabras de este autor, a diferencia de los métodos convencionales de test basados en lápiz y papel, la entrevista basada en tareas

> *[...] hace posible poner el foco de interés de la investigación más directamente en los procesos del sujeto al enfrentar la tarea matemática, más*

que solo en los patrones de las respuestas correctas o incorrectas que ellos producen, por lo tanto hay la posibilidad de ahondar en una variedad de tópicos importantes con más profundidad de la que es posible por otros medios experimentales (Goldin, 2000, p. 520).

Desde la perspectiva de Goldin (2000, p. 526), en el diseño de la investigación se hace necesario distinguir cuidadosamente entre lo que está controlado parcial o totalmente de lo que no lo está; por ejemplo, usualmente se realiza un control sobre las tareas,[1] sobre las preguntas de la entrevista (el lugar para realizarla y el tiempo asignado) y sobre las sugerencias ofrecidas, pero no siempre se puede tener control de la comprensión que tienen los estudiantes de algunos temas que podrían tener efectos importantes en la indagación. Por otra parte, afirma este autor, se debe distinguir lo que se observa de lo que se infiere o deduce de las observaciones empíricas.

En este capítulo se presenta una información, con el mayor detalle posible, sobre la situación en la cual se desarrolló el trabajo y los criterios de selección de la población, así como los métodos de recolección de datos y análisis de los mismos.

ASPECTOS GENERALES

A manera de contextualización, resulta importante tener en cuenta los estándares de matemáticas propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2003, p. 2), los cuales son entendidos como «criterios claros y públicos que permiten conocer cuál es la enseñanza que deben recibir los estudiantes» y están propuestos para cinco grupos de grados:[2] de 1º a 3º, de 4º a 5º, de 6º a 7º, de 8º a 9º y de 10º a 11º, asociados usualmente con el

[1] Abordando variables como «el contenido matemático y la estructura, la complejidad y la estructura lingüística y semántica» (Goldin, 2000, p. 520). La tarea presentada (no la tarea interpretada) debe estar sujeta a control experimental.

[2] La educación formal ofrecida desde el sector oficial incluye, en ocasiones, un grado previo denominado *Grado cero*; sin embargo, en la mayoría de estas instituciones oficiales (también llamadas púbicas) no se ofrece. Algunos niños, antes de ingresar formalmente a la educación, asisten a Guarderías ó Jardines Infantiles (oficiales o privados) en los cuales se les ofrece cierta educación no formal, aunque diferenciada de una institución a otra. Las instituciones privadas, en la mayoría de los casos, ofrecen este nivel previo, el cual usualmente denominan *Transición*, además de otros niveles (denominados Pre-kinder y Kinder).

nivel superior de cada grupo, así: 3º, 5º, 7º, 9º y 11º, grados en los cuales se realizan periódicamente evaluaciones externas de carácter nacional e internacional. Dichos estándares son «el punto de referencia de lo que un niño puede estar en capacidad de saber y saber hacer, en determinada área y en determinado nivel» (2003, p. 2) y se constituyen en punto de referencia para el desarrollo de propuestas curriculares. Los estándares están organizados en seis «formas de pensar matemáticamente» (p. 4): numérico, sspacial, métrico, aleatorio y variacional. A manera de ejemplo, y en relación con las temáticas abordadas en los tres cuestionarios diseñados, se plantean estándares específicos, a saber:

- Lo relacionado con *probabilidad* se propone para trabajar explícitamente desde el segundo grupo de grados en básica primaria (4º y 5º) de tal manera que, al finalizar el grado 7º (Pensamiento aleatorio, Estándar 6), los estudiantes estén en capacidad de «Hacer conjeturas acerca del resultado de un experimento aleatorio usando proporcionalidad y nociones básicas de probabilidad» (p. 17).

- El trabajo inicial con *sistemas algebraicos y analíticos* se propone desde la básica primaria, orientado a que en grado 7º puedan representar situaciones de variación mediante expresiones verbales generalizadas y en el grado 8º trabajen explícitamente el lenguaje algebraico (expresiones algebraicas, ecuaciones y equivalencia de expresiones).

- En grado 9º se trabajan relaciones entre propiedades de gráficas y propiedades de expresiones algebraicas, modelación con funciones polinómicas, racionales y exponenciales, familias de funciones y sistemas de ecuaciones. En general, el *trabajo con cónicas* se realiza en grado 10º.

Si bien hay evidencia de dificultades similares a la que aquí se pretende describir en diferentes grados de escolaridad (desde primaria hasta la universidad) en relación con objetos de diversos campos de la matemática, para el desarrollo de este proyecto se definió trabajar con estudiantes de grado 9° (14-15 años, aproximadamente) y de grado 11° (17-18 años, aproximadamente). La decisión sobre la escogencia del grado 9º fue motivada por dos razones; la primera de ellas es que una de las tareas propuestas está en el contexto algebraico y requiere de un trabajo específico por parte los estudiantes con expresiones algebraicas que, en el caso de Colombia, curricularmente está propuesto de manera explícita para los grados 8° y 9° de educación básica; la segunda razón es que en Colombia el grado 9º corresponde al último grado de la educación básica. Por su parte, la escogencia del grado 11° fue motivada por corresponder al último nivel de escolaridad, previo a los estudios de pregrado, es decir, el máximo de competencia matemática previo al ingreso a la universidad.

ASPECTOS METODOLÓGICOS ESPECÍFICOS

Población

La selección de la muestra, tanto de instituciones como de estudiantes, no fue aleatoria; se estableció de manera intencional mediante criterios establecidos a priori. En particular, las instituciones educativas de educación básica y media fueron seleccionadas de entre aquellas con las cuales el programa LEBEM[3] ha establecido relaciones a partir del vínculo de docentes de la universidad o de egresados del programa con ellas, así como las posibilidades de colaboración ofrecidas por directivas y profesores de las mismas. Inicialmente se seleccionaron cinco instituciones educativas (colegios) en la ciudad de Bogotá, dos de carácter oficial (CUN y MMC) y tres de carácter privado (EPE, CAF y CHA) para tener una muestra amplia.

Las dos instituciones oficiales –CUN y MMC– están ubicadas en la periferia de la ciudad en sectores considerados vulnerables, las cuales cuentan con dos jornadas (mañana y tarde),y a las asisten diferentes estudiantes. Se trabajó solo con estudiantes de la jornada de la mañana (jornada escolar de 6:30 am a 12:20 pm). Los estudiantes que asisten a estas instituciones son de estrato

[3] LEBEM: Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, programa de pregrado para la formación de profesores de matemáticas de la Facultad de Ciencias y Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá-Colombia.

socioeconómico bajo (1 y 2).[4] La institución EPE está ubicada en las afueras de la ciudad, en un sector no considerado vulnerable. Las otras dos instituciones privadas –CAF y CHA– están ubicadas en zonas céntricas. La mayoría de los estudiantes de CAF provienen de estratos bajo y medio (2 y 3), los de la EPE, de estrato medio (3 y 4), mientras que los estudiantes de CHA provienen principalmente de estratos medio y alto (4, 5 y 6).

La institución educativa CUN fue seleccionada para realizar el pilotaje, específicamente con estudiantes de dos grupos de grado 9º.[5] Esta decisión se tomó por ser la primera institución en la cual se pudo concretar la realización del trabajo de indagación. Así, la población definida para el desarrollo de este trabajo se seleccionó del grupo de las cuatro instituciones restantes, una del sector oficial (MMC) y tres del sector privado (EPE, CAF y CHA). Por condiciones de las instituciones, en el colegio MMC (Institución 1) se seleccionó un grupo de grado 9º, en la EPE (Institución 2), un grupo de grado 11º y en las dos instituciones restantes, CAF (Institución 3) y CHA (Institución 4), se seleccionaron dos cursos, uno de grado 9º y otro de grado 11º, es decir, se seleccionaron en total, entre las cuatro instituciones, seis grupos (cada grupo con aproximadamente 40 estudiantes).

[4] Si bien en Colombia el *estrato* constituye un instrumento para clasificar los inmuebles de acuerdo con su ubicación (rural y urbano), su entorno y la dotación de servicios públicos, así como los impuestos que debe cancelar, también permite tener cierta información sobre la capacidad económica de quienes la habitan (salvo casos especiales, como por ejemplo los inmuebles considerados patrimonio histórico o cultural, a los que se les asigna un estrato bajo para disminuir el valor de impuesto y contar con subsidios en los servicios públicos). Oficialmente hay 6 estratos para inmuebles residenciales: bajo-bajo (estrato 1), bajo (estrato 2), medio-bajo (estrato 3), medio (estrato 4), medio-alto (estrato 5) y alto (estrato 6). En Colombia más del 60% de la población está clasificada en los estratos 1 y 2 y menos del 5% en los estratos 5 y 6. En Bogotá, más de la mitad de la población corresponde a los estratos 1 y 2, cerca del 35% al estrato 3, menos de un 8% al estrato 4 y solo cerca de un 4% está en los estratos 5 y 6 [datos del año 2009. Fuente: DANE-SDP: Proyecciones de población según localidad, 2006-2015].

[5] Cuando se hable de «grupo», se hará referencia al grupo total de estudiantes (40 jóvenes en promedio) en cada uno de los cursos de cada grado; cuando se hable de «pequeño grupo», se hará referencia a grupos de 3 estudiantes en promedio (solo en un caso se trabajó con 2 estudiantes y en otro con 4).

Diseño de instrumentos

El primer pilotaje se realizó con un grupo de grado 9º de la institución educativa CUN, a partir de una tarea basada en la experiencia reportada por D'Amore (2006b), la cual fue propuesta por el profesor a cargo del grupo (curso) para ser trabajada inicialmente de manera individual y luego ser socializada en pequeños grupos y ante el grupo general:

> Asuma que ***n*** representa un número entero cualquiera ($n \in \mathbf{Z}$)
>
> **1.** Diga qué es cada una de las siguientes expresiones:
>
> ***3n*** y ***(n-1)+n+(n+1)***
>
> **2.** ¿Qué relación hay entre la expresión ***(n-1)+n+(n+1)*** y la expresión ***3n***? Justifique su respuesta.
>
> **3.** ***¿La expresión (n-1)+n+(n+1)*** significa ***el triple de un número?*** Justifique su respuesta.

Con el primer grupo de grado 9º se trabajó sin entregar un cuestionario a cada uno de los estudiantes; se le propuso al profesor realizar una actividad de clase en el marco de la cual planteara de manera verbal las preguntas sugeridas (escribiendo solo las expresiones algebraicas en el tablero) para indagar sobre un posible cambio de sentido. El investigador estuvo presente en la sesión como observador no participante. Se evidenció que al menos la tercera parte de los estudiantes no se involucró en la actividad y que el tiempo invertido para abordar cada una de las preguntas era considerable (más de 20 minutos para cada una), lo cual generó que al docente le resultara difícil dejar de orientar e incluso direccionar la escasa participación de los estudiantes; no se reflejaba una intención del docente a cargo del curso por indagar posibles interpretaciones o dificultades que encontraban los estudiantes, es decir, no se generaba un ambiente previo de indagación sino más bien una intención de realizar «cierres» rápidos privilegiando o centrando la mirada en respuestas más cercanas a lo institucionalmente esperado.

Esta tarea contenía tres ítems. El primero de ellos consistía en una pregunta abierta sobre la interpretación o significado asociado por los estudiantes a dos diferentes representaciones (expresiones algebraicas) de un mismo objeto; la segunda, una pregunta cerrada para indagar si reconocían o no la *equivalencia sintáctica* entre las dos representaciones dadas, esto es, si podían realizar un proceso de tratamiento mediante el cual les fuera posible obtener una representación a partir de la otra; y la tercera, para indagar si reconocían en una de dichas representaciones el objeto asociado a la otra representación. Como se mencionó en el primer capítulo, el propósito básico es indagar sobre posibles dificultades que encuentran los estudiantes para articular los sentidos asignados a objetos matemáticos y/o posibles cambios de los sentidos asignados y encontrar elementos que permitan explicar dichas dificultades y/o tales cambios de sentido.

En relación con el primer ítem, respecto a qué es cada una de las expresiones, mientras algunos estudiantes de grado 9º (Colegio CUN) respondieron «es una expresión del álgebra», «es una variable», «es un número y una letra», otros preguntaban a qué se hacía referencia en esa pregunta; solo cuando el profesor les decía que debían decir qué significaba la expresión o cómo la interpretaban, varios de ellos afirmaban que era «una multiplicación», «3 veces ***n***», «3 veces el número» o «el triple de un número». Con respecto al segundo ítem, respondían que «ambas eran expresiones algebraicas», «que una tenía un término y la otra tres» o «que en ambas aparecía ***n***». Otra dificultad que se evidenció en esta indagación es que no se contaba con registros escritos de la producción de los estudiantes al abordar esta tarea.

Con base en esta indagación, se decidió presentar la tarea mediante el siguiente cuestionario, compuesto de tres ítems:

Asuma que ***n*** representa un número entero cualquiera ($n \in \mathbf{Z}$)

1. Diga qué es, qué representa o qué significa cada una de las siguientes expresiones:

(a) ***3n***
(b) ***(n–1)+n+(n+1)***

2. ¿La expresión ***(n–1)+n+(n+1)*** es igual a la expresión ***3n***?

(a) Marque con una X su respuesta ***Sí ( )*** ***No ( )***

(b) Justifique a continuación su respuesta.

3. ¿La expresión ***(n–1)+n+(n+1)*** significa ***el triple de un número****?*

(a) Marque con una X su respuesta ***Sí ( )*** ***No ( )***
(b) Justifique a continuación su respuesta.

Este cuestionario se trabajó con el otro grupo de grado 9º del colegio CUN (segundo pilotaje). Inicialmente se solicitó responder el cuestionario de manera individual y posteriormente en pequeños grupos para socializar las respuestas dadas, y luego proponer respuestas como grupo. Esto posibilitó no solo contar con escritos sobre la producción de cada estudiante, sino que también generó una mayor participación de los estudiantes en el trabajo en pequeños grupos. Sin embargo, en el segundo ítem la mayoría de los estudiantes (cerca del 80%) respondieron que las dos expresiones eran iguales pero no había evidencia de que pudieran realizar las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener una de las expresiones a partir de la otra usando propiedades algebraicas.

Con base en este pilotaje se tomó la decisión de proponer en total tres tareas, construyendo tres cuestionarios con un diseño similar al propuesto inicialmente, con el fin de contar con producción de los estudiantes en por lo menos dos contextos diferentes. Las temáticas seleccionadas para proponer las tres tareas para los cuestionarios fueron, respectivamente: (1) Probabilidad; (2) Equivalencia de expresiones algebraicas; y (3) Ecuaciones cuadráticas. Los cuestionarios propuestos fueron:

Cuestionario 1 *(Probabilidad):*

En lo que sigue, siempre se hará referencia a un dado tradicional de seis caras. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y solo continúe con el siguiente cuando haya respondido completamente el punto anterior.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que *lanzando un dado se obtenga un número par*?
(a) La probabilidad es:
(b) Explique brevemente cómo realizó el cálculo de la probabilidad:

2. ¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?
(a) Marque con una **X** su respuesta ***Sí* ( )** ***No* ( )**
(b) En caso afirmativo muestre cuál(es) sería(n) esa(s) manera(s). En caso negativo explique por qué no existiría otra manera de expresar dicha probabilidad.

3. ¿Puede afirmarse que la fracción 4/8 es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?
(a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta
***Sí* ( ) *No* ( )**
(b) Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Cuestionario 2 *(Equivalencia de expresiones):*

*En lo que sigue, asuma que **n** representa un número entero cualquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y solo continúe con el siguiente cuando haya respondido completamente el punto anterior.*

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión $3n$.

2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida:

(a) Marque con una **X** la respuesta que considere correcta
***Sí* ( ) *No* ( )**
(b) En caso afirmativo compruebe la igualdad; en caso negativo dé razones por las cuales no se cumple.

3. ¿La expresión puede interpretarse como *el triple de un número?*

(a) Marque con una **X** la respuesta que considere correcta
***Sí* ( ) *No* ( )**
(b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Cuestionario 3 *(Ecuación cuadrática):*

*En lo que sigue, asuma que **x** e **y** representan números reales cualesquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y no continúe con el siguiente sin haber respondido completamente el punto anterior.*

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$

2. *¿La ecuación* $x + y = \frac{1}{x + y}$ es equivalente a la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$?

(a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta
***Sí* ( ) *No* ( )**

(b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple.

3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente, en el primer punto, y luego respóndala.

¿ La ecuación $x + y = \dfrac{1}{x + y}$ es ______________________________ ?

(a) Marque con una **X** la respuesta que considere correcta: ***Sí* ( ) *No* ( )**

(b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.

Recolección de información

Teniendo en cuenta la importancia de disponer de diversos instrumentos de recolección de información para posibilitar una triangulación de los resultados, además de la indagación mediante el desarrollo de tareas (propuestas en los cuestionarios) y del contenido de las notas tomadas por el investigador, se cuenta con entrevistas grabadas en audio, las cuales fueron realizadas con cada uno de los pequeños grupos seleccionados con base en las respuestas dadas a la tarea propuesta en los diferentes cuestionarios. Desde los planteamientos de Goldin (2000, p. 519):

> *Normalmente, se prevé la observación y registro de lo que sucede durante la entrevista para su posterior análisis: a través de grabaciones de audio y/o video, notas de los observadores, y trabajo del sujeto. Explícita previsión se hace también para contingencias, como las que pueden ocurrir a medida que avanza la entrevista, posiblemente por medio de secuencias de ramificación de preguntas heurísticas, sugerencias, problemas relacionados en secuencia, preguntas retrospectivas u otras intervenciones por parte del clínico [entrevistador].*

Los dos primeros cuestionarios fueron propuestos para los estudiantes, tanto del grado 9º como del grado 11º, mientras que el tercer cuestionario solo fue propuesto para los estudiantes del grado 11º. Es decir, a los estudiantes del grado 11º se les propuso un total de tres cuestionarios.

En tanto se reconoce la importancia de que los estudiantes se involucraran en el desarrollo de la actividad, las tareas fueron trabajadas inicialmente de manera individual por cada uno de los estudiantes de los diferentes cursos (cada uno con aproximadamente 40 estudiantes) y luego en pequeños grupos (entre 2 y 4 estudiantes). Posteriormente, con la orientación del profesor de la institución a cargo del curso, se realizó una socialización de algunas de las respuestas dadas por los pequeños grupos,[6] los cuales fueron seleccionados por el profesor con base en la observación realizada por él durante el tiempo de trabajo de los estudiantes.

En cada una de las instituciones, previamente al trabajo con los cuestionarios, el investigador-entrevistador (P) dialoga con los estudiantes y les informa que el trabajo que van a realizar tiene como propósito indagar sobre las diferentes interpretaciones y usos que ellos hacen de las expresiones en el trabajo que realizan en matemáticas, relacionado con temas y conceptos previamente conocidos, aclarándoles que lo más importante para él es conocer las razones por las cuales interpretan de una u otra manera, ya que esto permitiría entender mejor cómo orientar actividades en el aula y reconocer posibles dificultades que encuentran los estudiantes en el trabajo en matemáticas, por lo que les solicita que en los cuestionarios que se les van a entregar para trabajar individualmente, sean lo más explícitos posible en la explicación del procedimiento o de las razones que apoyan su respuesta.

Desde las investigaciones en psicología social del aprendizaje, se reconoce que en este tipo de situaciones es importante tener en cuenta que los estudiantes no solo deben cumplir con la tarea propuesta, sino también responder a la complejidad de la situación social, en este caso entender las expectativas del investigador y la naturaleza del problema, además de entender su papel y el de sus compañeros en la interacción (ver, por ejemplo, Schubauer-Leoni, 1988; Schubauer y Grossen, 1993).[7]

---

[6] Se reconoce la importancia de que quien socialice una respuesta lo haga en representación del grupo, no solo para que dé cuenta del proceso del mismo sino también para que su intervención pueda ser apoyada por los demás integrantes y se disminuya en parte la tensión que usualmente puede generarse cuando se defiende individualmente un resultado.

[7] Estos autores reconocen la importancia del análisis conversacional en tanto consideran la conversación como el contexto natural en el que las habilidades cognitivas de los sujetos participantes en ella (compañeros) se disponen y son construidas en torno a la interacción social.

Con el propósito de aclarar el papel que los estudiantes deberán desempeñar en esta actividad, el investigador les comenta que una vez desarrollen individualmente los cuestionarios, podrán conformar grupos de 3 estudiantes en promedio para socializar sus respuestas y solucionar nuevamente el cuestionario como grupo. Adicionalmente les informa que, teniendo en cuenta la diversidad de posibles interpretaciones y de respuestas encontradas, posteriormente seleccionará al azar algunos grupos, formados por 2 o más estudiantes, para realizar una breve entrevista con el propósito de ampliar la información encontrada en los cuestionarios, y aclara que la participación en ellas es completamente voluntaria.

En resumen, la información recolectada se encuentra registrada en:

1. cuestionarios individuales (y de pequeños grupos),
2. entrevistas grabadas en audio[8] y
3. notas del investigador.

La selección de los pequeños grupos para entrevista se realizó a partir de las respuestas dadas a la tarea, la cual contenía tres ítems, con base en los siguientes criterios:

1. Que en el primer ítem la interpretación realizada por los estudiantes fuera compatible con el «significado institucional» (Godino & Batanero, 1994) asignado a dicho objeto.
2. Que en el segundo ítem al menos uno de los estudiantes pudiera reconocer explícitamente la equivalencia sintáctica entre las expresiones dadas (aritméticas o algebraicas), esto es, pudiera realizar un proceso de tratamiento que le permitiera obtener una de las expresiones a partir de la otra (haciendo uso de las propiedades al interior del registro aritmético o del algebraico).

---

[8] Teniendo en cuenta que algunos estudiantes seleccionados manifestaron que les incomodaría ser grabados en vídeo y que preferían que se utilizara un instrumento menos «intimidante», se acordó con ellos que lo más adecuado era realizar la grabación solo de audio, y que en las transcripciones se haría mención de sus nombres sin incluir los apellidos; tampoco se haría referencia explícita a las instituciones en las cuales estudiaban, sino que se usaría una sigla y se haría una descripción general sobre algunas características de la población estudiantil.

3. Que en el tercer ítem al menos uno de los estudiantes que hubiera reconocido la equivalencia sintáctica en el ítem anterior de las expresiones, respondiera negativamente.

De tales pequeños grupos de estudiantes se seleccionaron cuatro, uno por cada una de las instituciones, esto es 16 pequeños grupos en total, teniendo en cuenta la disponibilidad y el interés manifestado por los estudiantes para participar en las entrevistas. De estos 16 pequeños grupos finalmente se seleccionaron 3, uno por cada tarea propuesta, cuya producción oral y escrita se constituye en la principal fuente de datos reportados y analizados en esta investigación.

Los criterios establecidos para seleccionar estos tres pequeños grupos fueron: (1) contar con información sobre el trabajo realizado en cada una de las tres tareas propuestas; (2) disponer de información de por lo menos dos de las cuatro instituciones seleccionadas, una de carácter oficial y una de carácter privado; y (3) contar con información de cada uno de los dos grados seleccionados –uno de grado 9º y otro de grado 11º–; adicionalmente se tuvo en cuenta que se evidenciara un cambio en la interpretación inicialmente realizada a las expresiones, esto es, que se evidenciara una articulación de sentidos y/o un cambio del sentido asignado a los objetos matemáticos primarios.

Con base en las pruebas piloto, el tiempo de duración de las diferentes entrevistas se estimó entre 10 y 15 minutos, dependiendo de la interacción entre los estudiantes y la necesidad de indagar algún aspecto específico reconocido durante el desarrollo de la entrevista. Las entrevistas fueron programadas para ser realizadas con grupos de 3 estudiantes, exceptuando dos casos: en uno de ellos la entrevista se realizó con 2 estudiantes (Transcripción 5) y en el otro con 4 (Transcripción 10), quienes habían trabajado los cuestionarios como pequeño grupo. Para definir el número de estudiantes de cada grupo se partió de reconocer que en estos procesos de interacción es importante tener la posibilidad de contar más de una interpretación y frente a posibles polarizaciones, tener una alternativa que pueda mediar o exponer otra interpretación posible.

Para la realización de las entrevistas se acordó con los profesores de matemáticas que nos colaboraron para el desarrollo de las actividades previas (usualmente realizadas en dos sesiones de clase) que en una de las posteriores sesiones de clase ellos darían a los estudiantes el tiempo requerido para participar en las entrevistas y que se seleccionaría un lugar adecuado para el desarrollo de las mismas. En dos de las instituciones (MMC y CAF) las entrevistas se realizaron en la Biblioteca de la institución, y en las otras dos (EPE y CHA), en una oficina o sala independiente. Al inicio de cada entrevista el investigador (entrevistador) saluda a cada uno de los estudiantes, les agradece estar allí y les solicita su autorización para grabar la sesión (la cual fue concedida en todos los casos). Inicia preguntando los nombres para realizar el registro respectivo e iniciar la conversación.

Se realizó un total de 16 entrevistas en cuatro instituciones educativas de Bogotá, 8 de ellas con estudiantes del grado 9º (último grado de la educación básica) y 8 con estudiantes del grado 11º (último grado de la educación media).[9] Las primeras entrevistas fueron realizadas en dos de estas instituciones educativas (MMC y EPE, codificadas como 1 y 2 respectivamente) en el mes de mayo de 2009, y las otras fueron realizadas en las otras dos instituciones (CAF y CHA, codificadas como 3 y 4 respectivamente) en los meses de abril y mayo del 2010.

Recolección de datos

Como se mencionó anteriormente, los datos fueron obtenidos básicamente de dos fuentes: una, los escritos relacionados con el desarrollo de una tarea (cuestionarios), y otra, las transcripciones de las grabaciones en audio de entrevistas realizadas a pequeños grupos de dos o tres estudiantes.[10] El instrumento básico para la recolección de datos lo constituye la entrevista (basada en tareas), orientada a partir de la información obtenida de las respuestas dadas por los estudiantes, tanto a los cuestionarios trabajados individualmente como los trabajados en pequeños grupos, cuidando detalles como

[9] El grado 11°, en Colombia, es el último grado de la educación previo al ingreso a la universidad.

[10] El trabajo con cuestionarios se realizó al inicio del segundo periodo académico en cada una de las instituciones, en sesiones realizadas en los meses de abril y mayo, las cuales tuvieron una duración entre 45 y 60 minutos. Las entrevistas fueron realizadas entre 8 y 15 días después de trabajar con los instrumentos.
En la mayoría de instituciones educativas colombianas el año escolar inicia a finales de enero y culmina a finales de noviembre, dividido en 4 periodos académicos, cada uno de aproximadamente 10 semanas lectivas, con una intensidad total de 30 horas semanales para la básica secundaria (grados 6° a 9°) y para la educación media (grados 10° a 11°) y de 25 horas semanales para la básica primaria (grados 1° a 5°).

que los estudiantes no sintieran que sus respuestas eran censuradas y que el tiempo de la entrevista no fuera excesivo para evitar un posible desinterés.

En resumen, el proceso de recolección de datos se realizó en tres momentos. En el primero de ellos el profesor del curso, en una de las sesiones de clase, solicitó a los estudiantes desarrollar de manera individual el(los) cuestionario(s), basado en tareas diseñadas por el investigador; en el otro, conformó pequeños grupos de 3 estudiantes en promedio,[11] con el propósito de que compartieran sus respuestas a las preguntas del cuestionario y, en lo posible, propusieran respuestas compartidas a cada una de tales preguntas, las cuales registraban en una copia del cuestionario; en algunos casos, tales respuestas fueron socializadas a todo el grupo (registradas en notas del investigador). En el tercer momento, el investigador realizó la entrevista a cada uno de los pequeños grupos seleccionados, la cual fue grabada en audio y transcrita. Las entrevistas fueron realizadas en un espacio diferente del aula de clase, en la cual solo estaban presentes los entrevistados y el investigador (en una sala de reuniones o en la biblioteca, según la disponibilidad de espacios en cada institución). Para las entrevistas se elaboró el siguiente guión general:

- Confirmar explícitamente los nombres de los entrevistados al inicio de la entrevista y solicitar que, en lo posible, mencionen su nombre en las diversas intervenciones que realicen (para tener registro de las voces, además de las notas del investigador).
- Verificar si comparten al menos una de las interpretaciones respecto a las expresiones trabajadas en la(s) tarea(s) propuestas.
- Verificar que reconocen una equivalencia sintáctica entre las expresiones trabajadas, esto es, si se evidencia un dominio de las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener una de ellas a partir de las otras.
- Indagar sobre la posibilidad que tienen los entrevistados de reconocer que la interpretación asignada a una de las expresiones puede ser asignada a otra expresión sintácticamente equivalente a ésta, esto es, si logran o no articular los sentidos asignados.

[11] En cada curso la organización de los pequeños grupos fue realizada por los estudiantes; la intervención del profesor solo fue necesaria en dos o tres casos con estudiantes que dudaban con quién agruparse.

- Verificar si se generan cambios con respecto a las interpretaciones inicialmente dadas a las expresiones trabajadas, esto es, si se genera un cambio en el sentido asignado a los objetos matemáticos primarios.

Si bien el investigador contó con un guión para el desarrollo de la entrevista, incorporó algunas preguntas retrospectivas e incluso algunas insinuaciones para complementar la indagación, y estuvo atento a reconocer situaciones de interés para el propósito de la investigación, formulando preguntas específicas orientadas a contar con mayor información.

Análisis de los datos

Se realizó un análisis de la producción individual de cada estudiante de los tres pequeños grupos seleccionados en relación con la tarea, aunque el interés se centró en la producción que se generó durante la entrevista con los grupos, en la cual se posibilitó la intervención de cada estudiante, la interacción entre ellos y, en particular, la opción de aceptar o disentir de los planteamientos realizados por los integrantes de estos pequeños grupos en relación con los ítemes de la(s) tarea(s) propuesta(s). Se privilegió el trabajo grupal, en tanto se reconoce explícitamente el interés por posibilitar que los estudiantes puedan tanto compartir puntos de vista como reflexionar sobre los planteamientos de los demás integrantes con respecto al trabajo realizado sobre la tarea propuesta, así como la posibilidad de reconocer un «sentido compartido» en el desarrollo de la tarea.

Se realizó un primer análisis de tipo descriptivo de las diversas respuestas dadas a la tarea por parte de los estudiantes, a partir del proceso de socialización y de las notas de campo del investigador, y posteriormente un análisis específico a partir de las producciones escritas –tanto en los cuestionarios individuales como en los de cada pequeño grupo– orientado inicialmente por la posibilidad de realizar o no las transformaciones (de tipo tratamiento) de una de las expresiones requeridas para reconocer la equivalencia con la otra expresión.

Las transcripciones de las tres entrevistas seleccionadas serán presentadas en su totalidad, aunque intercalando comentarios no solo sobre el contenido de la conversación, sino también sobre diferentes momentos de la entrevista para posibilitar una contextualización sobre la misma y ofrecer la mayor información posible respecto a la manera en que se procedió para permitir una eventual nueva prueba y la repetición de la misma por parte de otros investigadores. En las diferentes transcripciones, la primera columna hace referencia al tiempo (en minutos y segundos), la segunda a la numeración de cada una de las intervenciones de las personas que interactúan en la conversación (línea correspondiente a cada intervención), la tercera columna, al código asignado a cada estudiante y al investigador-entrevistador (I) y la última, a los diferentes segmentos de la transcripción en distintos momentos de la conversación.

Para hacer referencia a las intervenciones de los estudiantes se usará la codificación $E_{a(b)}^{c,d}$*: Intervención del estudiante **a**, correspondiente al segmento **b** de la transcripción, estudiante del colegio* **c**, *en el curso **d***. Los números de la parte inferior (subíndices) corresponden al código del estudiante y el segmento (o segmentos, separados por guión cuando sean consecutivos, o por coma cuando no lo sean) de la transcripción, mientras que los números en la parte superior (superíndices) corresponden la institución y el grado que cursa el estudiante, respectivamente. Por ejemplo, el código $E_{1(4)}^{11,2}$ hace referencia a lo dicho por el estudiante 1 en el segmento 4 de la transcripción, en grado 11 del colegio 2 (EPE). El código $E_{7\,(11\text{-}15,27)}^{9,3}$ hace referencia a lo dicho por estudiante 7, en los segmentos 11 al 17 y en el 27, quien cursa grado 9º en el colegio 3 (CAF).

Para realizar el análisis de las transcripciones de las entrevistas se realiza una segmentación temática, la cual es a su vez segmentada en cada una de las intervenciones de los participantes en la entrevista, realizando una numeración de dichas intervenciones y usando un color diferente (gris) para la intervención del entrevistador-investigador (P).

Capítulo 4

Tareas matemáticas, trabajo en pequeños grupos y configuraciones cognitivas

En este capítulo se reporta el desarrollo de la investigación realizada: en las tres primeras secciones se realiza un análisis del trabajo de tres de los pequeños grupos seleccionados, uno por cada una de las tres tareas propuestas. En dichas secciones se presenta inicialmente una rejilla en la que se organiza la información correspondiente al trabajo de los estudiantes, tanto individualmente como en el pequeño grupo conformado por los tres estudiantes, así como lo planteado por cada uno de sus integrantes al iniciar la entrevista grupal; además, se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios de cada estudiante en el desarrollo de la tarea, resaltando las funciones semióticas establecidas por éstos en su proceso de significación. En la segunda parte de cada sección se realiza un análisis de tipo descriptivo-interpretativo de los diferentes segmentos de la transcripción de la entrevista grupal basada en tareas, y finalmente se presenta la *configuración cognitiva* (Godino, Batanero & Font, 2007) lograda o activada por cada estudiante durante la entrevista. En total se realizaron 16 entrevistas a pequeños grupos, en su mayoría de 3 estudiantes (con excepción de un grupo de 2 y otro de 4 estudiantes).

Las tres tareas en las cuales se basaron dichas entrevistas fueron presentadas mediante tres cuestionarios semi-abiertos: uno sobre probabilidad (Cuestionario 1), otro sobre el triple de un número (Cuestionario 2) y el tercero sobre cónicas (Cuestionario 3), respectivamente. Las dos primeras tareas fueron propuestas tanto a los estudiantes del grado 9º, como a estudiantes del grado 11º (Cuestionarios 1 y 2), mientras que la última (Cuestionario 3) solo les fue propuesta a los estudiantes del grado 11º. Cada entrevista se centró en una de las tres tareas propuestas, es decir, en uno de los cuestionarios antes mencionados.

En la última sección del capítulo se presentan los resultados básicos obtenidos de la presente investigación. Si bien el análisis que se presenta en las primeras secciones toma como referencia básica, en cada caso, una de las entrevistas realizadas, cuya transcripción se presenta en su totalidad, las evidencias son complementadas con extractos de las entrevistas restantes. Aunque se contó con todas las transcripciones de las entrevistas realizadas, en este libro solo se presentan de manera completa tres de ellas; de las restantes se incluyen algunos apartes.

TAREA SOBRE CÓNICAS (CUESTIONARIO 3)

A continuación se presenta la rejilla con la información del trabajo de los estudiantes de uno de los pequeños grupos respecto a la tarea sobre cónicas (ecuaciones cuadráticas) realizado tanto individualmente como en grupo, así como sus planteamientos al inicio de la entrevista. A continuación se presentan los diagramas obtenidos a partir de dicha rejilla, correspondientes a la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios lograda por cada integrante del grupo en relación con dicha tarea. Posteriormente se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la transcripción realizada (T-11) y en el cuaderno de notas del investigador. En lo que sigue, para hacer referencia a los diferentes segmentos de la transcripción se usará la codificación planteada párrafos atrás ($E_{a(b)}^{c,d}$). Las instituciones MMC, EPE, CAF y CHA, serán referidas con los códigos 1, 2, 3 y 4 respectivamente.

Rejilla de respuestas y diagrama de configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios

Esta rejilla corresponde al grupo de estudiantes integrado por María Elvira (E_1), Daniel A. (E_2) y Daniel D. (E_3), de grado 11 (código 11), del colegio CHA (código 4).

Tarea (Cuestionario 3)	Instrumento individual			Trabajo en grupo	Entrevista (Planteamiento inicial)
Ítem/Estudiante	E1: Ma. Elvira	E2: Daniel A.	E3: Daniel D.	E1, E2 y E3	E1, E2 y E3
1. Interpretación de la ecuación x2+y2+2xy-1=0	Una circunferencia*	Circunferencia	Circunferencia [plantea que no sabe si podría ser una elipse]	Circunferencia	Plantean que la ecuación es una «circunferencia»
2. ¿Son equivalentes las ecuaciones?: $x+y=\frac{1}{x+y}$ y $x^2+y^2+2xy-1=0$	Sí Muestra paso a paso que la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a $x^2+y^2+2xy-1=0$	No Porque se tiene 2xy y se transforma en x+y lo cual carece de sentido además se saca la raíz cuadrada a toda la ecuación, lo cual tampoco se puede.	Sí Porque al pasar el (x+y) del denominador a multiplicar al otro lado de la igualdad, se obtiene $x^2+y^2+2xy-1=0$ y lo que se hace es pasar el 1 a restar.	Sí Muestran paso a paso que la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a $x^2+y^2+2xy-1=0$	Reconocen y aceptan las transformaciones requeridas para verificar la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones.
3. ¿ La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una circunferencia?	Sí Sigue siendo una circunferencia [reitera la equivalencia entre las dos ecuaciones]	No Los valores de x e y no está[n] elevado[s] al cuadrado, por lo tanto no es una circunferencia.	No Las variables [no] son cuadradas [se refiere a que deberían estar elevadas al cuadrado]	No En una las variables están al cuadrado y en otra no.	E1: No, pues no, yo no diría que es una circunferencia [...] (S. 7) E2: Yo digo que no es una circunferencia [...] uno parte de que la circunferencia como ecuación básica es, ehh, cuando ambas variables están al cuadrado (Segmento 11). E3: Sí lo es, pero uno no lo ve así [...] (S. 19)

Tabla 1. Rejilla de respuestas –Ma. Elvira, Daniel A. y Daniel D.– Grado 11º, Colegio CHA

* Aunque la ecuación cuadrática x2+y2+2xy-1=0 no representa una circunferencia sino una «cónica degenerada» (dos rectas paralelas), para efectos del análisis que se presenta en esta sección no resulta relevante si dicha ecuación la interpretan como «circunferencia».

En los siguientes diagramas se presenta la configuración cognitiva (personal) de objetos matemáticos primarios obtenida a partir del trabajo realizado por cada uno de los tres estudiantes de grado 11º (último curso de educación pre-universitaria) del colegio CHA, tanto individualmente como en pequeño grupo a partir de la tarea propuesta[1]. En estos diagramas se señalan, mediante una línea continua, las funciones semióticas establecidas por cada estudiante entre la expresión y el contenido.

Problema (Tarea – Cuestionario 3)

En lo que sigue, asuma que x e y representan números reales cualesquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y no continúe con el siguiente sin haber respondido completamente el punto anterior.

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$
2. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$?

   (a) Marque con una X la respuesta que considera correcta ***Sí* ( ) *No* ( )**

   (b) En caso afirmativo compruebe la equivalencia; en caso negativo explique por qué no se cumple.
3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente, en el primer punto, y luego respóndala.

   ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una ... [circunferencia] ?

   (a) Marque con una X la respuesta que considere correcta ***Sí* ( ) *No* ( )**

   (b) Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Lenguaje
Circunferencia
Ecuación
Raíz cuadrada
$x^2+y^2+2xy-1=0$
$x+y=\frac{1}{x+y}$

Definición
Una circunferencia

Propiedad
Inverso multiplicativo e inverso aditivo (implícito)

Procedimiento
Aplicación de propiedades para obtener ecuaciones equivalentes

Argumento
Tesis: La ecuación es una circunferencia
Razón: Las dos ecuaciones son equivalentes

Diagrama 5.1. Configuración inicial de Ma. Elvira: $E_1^{11,4}$

[1] El texto completo de la tarea propuesta se presenta en el primer diagrama; en los dos diagramas restantes se presenta solo un resumen de la misma.

En el trabajo realizado individualmente, Ma. Elvira (E_1) establece tres funciones semióticas, una entre la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$ y el contenido «*una circunferencia*», otra entre la expresión (la ecuación) $x^2+y^2+2xy-1=0$ y el contenido (la ecuación) $x+y=\frac{1}{x+y}$ y la tercera entre la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ y el contenido «*una circunferencia*», es decir, las transformaciones de tratamiento entre las dos ecuaciones (equivalencia sintáctica) le permite articular los sentidos asignados a dichas ecuaciones.

Problema (Tarea – Cuestionario 3)

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$
2. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$?
3. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una ... [circunferencia] ?

Lenguaje

x, y

Circunferencia

Ecuación

Equivalencia

$x^2+y^2+2xy-1=0$

$x+y=\frac{1}{x+y}$

Definición

Una circunferencia

Procedimiento

Aplicación de propiedades

Argumento

Tesis: La ecuación no es una circunferencia

Razón: Las variables no están elevadas al cuadrado

Diagrama 5.2. Configuración inicial de Daniel A.: E_2 ^{11,4}

En su trabajo individual, Daniel A. (E_2) establece una función semiótica entre la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$ y el contenido *una circunferencia*. Considera que las dos ecuaciones no son equivalentes, debido a que en una de ellas aparece el término 2xy, el cual se transforma en *x+y, lo cual carece de sentido*; además de que en una de ellas aparecen las variables al cuadrado y en la otra no, *se saca la raíz cuadrada a toda la ecuación, lo cual tampoco se puede* [Tabla 1]. Si bien inicialmente no reconoció la posibilidad de realizar transformaciones de tratamiento para establecer la equivalencia de las ecuaciones dadas, en el trabajo de la tarea con sus compañeros reconoció dicha equivalencia[2].

[2] En el trabajo en pequeño grupo, se evidenció que Daniel A. reconocía y podía realizar las transformaciones de tratamiento adecuadas para establecer la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones, aunque para su respuesta en el cuestionario individual se basó únicamente en la forma de las ecuaciones.

Problema (Tarea – Cuestionario 3)

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$
2. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$?
3. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una ... [circunferencia] ?

<u>Lenguaje</u>

x, y

Circunferencia

Variables

Ecuación

$x^2+y^2+2xy-1=0$

$x+y=\frac{1}{x+y}$

<u>Definición</u>

Una circunferencia

<u>Procedimiento</u>

Aplicación de propiedades

<u>Propiedades</u>

Inverso multiplicativo e inverso aditivo (implícito)

<u>Argumento</u>

Tesis: La ecuación no es una circunferencia

Razón: Las variables son [deben ser] cuadradas

Diagrama 5.3. Configuración inicial de Daniel D.: $E_3^{11,4}$

En el trabajo realizado individualmente, Daniel D. (E_3) establece dos funciones semióticas, una entre la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$ y el contenido *una circunferencia*, y otra entre la expresión (la ecuación) $x^2+y^2+2xy-1=0$ y el contenido (la ecuación) $x+y=\frac{1}{x+y}$. Plantea que la ecuación de la circunferencia debe tener las variables elevadas al cuadrado y, como en la ecuación , éstas no están al cuadrado, entonces no puede ser circunferencia; es decir, aunque reconoce la equivalencia entre estas dos ecuaciones, no logra establecer una función semiótica entre la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ y el contenido *una circunferencia*, pues dicha expresión no tiene las variables al cuadrado.

A manera de síntesis

En relación con el reconocimiento de la equivalencia sintáctica entre las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$ y $x^2+y^2+2xy-1=0$ es decir, del reconocimiento por parte de los tres estudiantes referidos de las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener una de las ecuaciones a partir de la otra (usando propiedades de los números reales), así como el reconocimiento de la equivalencia semántica, en tanto posibilidad de articular los sentidos asignados a éstas, se cuenta la siguiente información:

	Ma. Elvira (E_1)	Daniel A. (E_2)	Daniel D. (E_3)	Pequeño grupo
Reconoce equivalencia sintáctica	Sí	No	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a ecuaciones	Sí	No	No	No

Tabla 2. Rejilla síntesis (inicial) –Ma. Elvira, Daniel A. y Daniel D.– Grado 11º, Colegio CHA

Dos de los estudiantes que conforman el pequeño grupo, Ma. Elvira (E_1) y Daniel D. (E_3), reconocen la equivalencia sintáctica de las dos ecuaciones; sin embargo, mientras Ma. Elvira hace uso de esta equivalencia y articula los sentidos de dichas ecuaciones, Daniel D. no logra tal articulación y se centra en la forma de las ecuaciones (referente icónico), asociando la ecuación de una «circunferencia» con variables elevadas al cuadrado. En el caso de Daniel A. (E_2), quien no reconoció la equivalencia sintáctica de las ecuaciones dadas ni articula los sentidos de éstas, se evidencia que desde un principio centra su mirada en el aspecto icónico de las mismas. En el trabajo como pequeño grupo, una vez socializan lo realizado individualmente, Daniel A. (E_2) reconoce la equivalencia sintáctica de las dos ecuaciones, pero al igual que E_3 no logra articular los sentidos asignados a éstas.

Análisis de la entrevista

Los segmentos de la transcripción de la entrevista [T-11] se presentan en cuatro columnas. En la primera se hace referencia al tiempo transcurrido (en minutos y segundos), en la segunda, al número asignado al segmento respectivo, en la tercera a la persona que interviene (profesor-investigador [P] y estudiantes [E_k]), cuyos textos se presentan en la última columna (en color gris las intervenciones del entrevistador y en color negro las de los estudiantes). Los entrevistados son estudiantes de grado 11º (final de la formación preuniversitaria).[3]

00:00	1	P	Colegio CHA, grado once, María Elvira, Daniel A. y Daniel D. Una solicitud inicial, cuando alguien vaya a hablar, en lo posible, me gustaría que si se acuerda, diera el nombre para que quede registrado.
01:50	2	P	Bien, respecto de los instrumentos que ustedes trabajaron, me interesaría hablar en particular de uno, del tercero. En este punto [ítem] decía: *Diga qué es, qué representa o que interpretación le asigna a la ecuación* $x^2+y^2+2xy-1=0$. Ehhh..., por lo menos dos de ustedes *[en el trabajo individual del cuestionario 3]* plantearon que era una circunferencia, otra persona, creo, planteó que era una ecuación cuadrática. En el segundo [punto] se les preguntaba si esta ecuación *[señala en la hoja la ecuación* $x^2+y^2+2xy-1=0$*]* era igual a ésta otra *[señala la ecuación* $x+y=\frac{1}{x+y}$ *]*, ustedes contestaron que sí y que se podía hacer la equivalencia; lo hicieron así *[...realiza las transformaciones de tratamiento realizadas por ellos en el trabajo en grupo]*. O sea, con este procedimiento ustedes comprueban que efectivamente la primera ecuación es equivalente a la segunda ¿estamos de acuerdo?
	3	E_2 y E_3	Sí

Como parte del guión establecido para las entrevistas, el entrevistador-investigador (P) inicia la entrevista con un saludo a los estudiantes, les agradece estar allí y les solicita su autorización para grabar la sesión. El entrevistador menciona los nombres de los estudiantes para realizar el registro respectivo e inicia la conversación en relación con la tarea relacionada con una ecuación cuadrática (una cónica), la cual está contenida en el cuestionario 3. Recuerda algunas respuestas dadas por los estudiantes tanto individualmente como en el trabajo en grupo, particularmente la interpretación que hicieron de la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$ como una circunferencia, así como los tratamientos

3 Los comentarios incluidos en paréntesis cuadrado, usualmente en cursiva, corresponden a aclaraciones realizadas por el investigador (P), a partir de las anotaciones realizadas por éste en su cuaderno de notas.

realizados por dos de ellos a la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ para obtener $x^2+y^2+2xy-1=0$. A continuación pregunta a los estudiantes si la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una «circunferencia» e indaga por las razones de la respuesta dada.

01:50–02:22	4	P	Bueno, vamos a centrarnos un poco en el tercer punto donde se pregunta *¿La ecuación* $x+y=\frac{1}{x+y}$ *es una circunferencia?* Debían responder sí o responder no.
	5	E_2 y E_3	Sí.
	6	P	Había que decir *sí* o *no*, ustedes dijeron *no*. Me gustaría conocer los argumentos, ¿cuáles son las razones por las cuales ustedes dicen que no es una circunferencia?, no sé quién quiera empezar ... ¿Ma. Elvira?
02:23-02:48	7	E_1	No, pues no, yo no diría que es una circunferencia, porque es que yo cuando lo relaciono es cuando está la… cuando ehh… $x+y$ está dividiendo o cuando está multiplicando, o sea cuando está dos veces, porque cuando está sumando dos veces pues sería *2x*, entonces no, no quedaría y cuando las dos variables están elevadas al cuadrado, pues eso es lo principal para que sea una circunferencia…
02:49–03:39	8	P	Y en el caso ¿de …? *[mira al estudiante que está a su lado]*.
	9	E_2	A… *[menciona su apellido]*
	10	P	Daniel A.
	11	E_2	Yo digo que no es una circunferencia, porque si a uno le plantean esta ecuación tal como está, $x+y=\frac{1}{x+y}$, pues uno no la ve como una circunferencia porque uno parte de que la circunferencia como ecuación básica es ehhh… cuando ambas variables están al cuadrado ¿cierto?
	12	P	Umjú *[sí, entiendo… continúe]*.
	13	E_2	… Si uno encuentra eso, uno puede realizar el procedimiento para, para… es posible que uno pueda determinar a partir de esto… es decir, si yo, si yo muevo los valores, cambio los valores, unos por otros, es posible que me dé la… la ecuación para una circunferencia, pero…

	14	P	Pero, en principio lo... lo que usted mira para decidir si es o no [una circunferencia], ¿qué es?
03:40-03:52	15	E_2	Que, digamos, que las variables estén elevadas al cuadrado.
	16	P	Que estén elevadas al cuadrado. Daniel D., ¿qué dice usted?
	17	E_3	Que es lo mismo que dijo María Elvira, si uno lo ve de esta forma *[señala la ecuación* $x+y=\frac{1}{x+y}$ *],* lo ve como una ecuación normal, pero si se pone a pensar en pasar esto *[señala el denominador en la expresión al lado derecho]* al otro lado quedan las dos variables al cuadrado, entonces uno así *[señala la ecuación* $x+y=\frac{1}{x+y}$ *]* lo ve como si no fuera una circunferencia, pero lo principal de una circunferencia es que las dos variables estén al cuadrado.

En el trabajo individual, Ma. Elvira (E_1) reconoció que la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ *sigue siendo una circunferencia* [Tabla 1]. En el trabajo posterior en pequeño grupo con Daniel A. (E_2) y Daniel D. (E_3), parece cambiar de opinión y se pone de acuerdo con ellos en que no podía ser una circunferencia porque *en una [ecuación] las variables están al cuadrado y en otra no* [Tabla 1], es decir, prima la percepción de la ecuación como un ícono asociado a la «circunferencia», caracterizado por tener las variables elevadas al cuadrado, sobre la comprobación de la equivalencia sintáctica realizada inicialmente por ella.

En la entrevista Ma. Elvira inicialmente plantea que si *las dos variables están elevadas al cuadrado [...] eso es lo principal para que sea una circunferencia* [$E_{1(7)}^{11,4}$][4]; sin embargo Daniel A. (E_2) comenta que, en principio, uno no ve la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ como una circunferencia *porque uno parte de que la circunferencia, como ecuación básica, es [...] cuando ambas variables están al cuadrado* [$E_{2(11)}^{11,4}$], pero casi inmediatamente plantea que realizando cierto procedimiento, es posible transformar la ecuación para que *dé [...] la ecuación para la circunferencia* [$E_{2(13)}^{11,4}$]. Por su parte, Daniel D. afirma que está de acuerdo con Ma. Elvira respecto a que lo principal para que una ecuación sea una circunferencia es que tenga las variables al cuadrado, y que si bien la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ en principio no se ve como una circunferencia,

[4] Como se comentó párrafos atrás, en esta codificación, el primer subíndice hace referencia al código asignado al estudiante (1) y el segundo, entre paréntesis, al segmento específico correspondiente a la transcripción (7), mientras los superíndices hacen referencia al grado (11) y a la institución educativa (4), respectivamente.

después de realizar una transformación de tratamiento se obtiene una ecuación donde *quedan las variables al cuadrado [... que] es lo principal de una circunferencia* [$E_{3(17)}^{11,4}$].

03:52-04:10	18	P	Bueno, pero digamos, la respuesta sería no, porque no aparecen [las variables al cuadrado] ¿o sí?
	19	E_3	Sí lo es [una circunferencia], pero uno no lo ve así, o sea uno no lo asimila así de una vez, porque uno no, como que en el proceso mental uno no pasa esto de una vez a multiplicar *[señala la expresión x+y del denominador].*
04:11-04:37	20	E_1	La cosa es que cuando uno lo ve solamente así *[señala la ecuación* $x+y=\frac{1}{x+y}$ *],* o sea es que cuando uno no, no ve las variables explícitas elevadas al cuadrado, pues no te pones de una vez a leer a ver qué es eso...
	21	P	Umjú *[sí, entiendo ... continúe].*
	22	E_1	Sino que... yo lo asimilo, porque cuando yo lo veo dividiendo la misma variable entonces pues... y está igualada, pues yo la paso a multiplicar de una vez, entonces ahí es que la... pues la asimilo al cuadrado o igual cuando me las dan expresadas que las dos... o sea las dos variables se están multiplicando ahí es cuando yo le pongo de una vez.
04:38–06:02	23	P	Ehhh... Daniel A. y Daniel D. contestaron no *[en el cuestionario]* a esa pregunta, mientras que María Elvira dijo sí. En este momento ¿qué piensan? ¿la respuesta es sí o es no? ¿o depende de algo?...
	24	E_2	Yo diría que, también depende de lo que en un punto, lo que a uno le pidan en el punto *[ítem].* Que a uno le planteen esa ecuación y le digan determine tal cosa... si es una, una función trigonométrica, si es para resolver, es decir, [a] uno le dan esa fórmula y dependiendo de lo que lea en el enunciado uno puede desarrollar esa ecuación ¿sí?
	25	P	Y en este caso particular, en que simplemente le dicen si esa ecuación es una circunferencia, ¿qué miraría usted?
	26	E_2	Pues yo en primera instancia diría que, que no.
	27	P	Umjú *[entiendo ... continúe].*

	28	E_2	¿Sí?, porque lo que, lo que uno ve… lo que uno tiene en la mente es que sea más explícito.
	29	P	Umjú.
	30	E_2	Que el enunciado sea muy explícito y uno no tiene la tendencia a mover los… las variables o las partes de la ecuación, para que le dé, lo que uno quiere, simplemente si me lo dieron así *[señala la ecuación* $x+y=\frac{1}{x+y}$ *]*, yo en primera instancia diría que no es una circunferencia.
	31	P	No es una circunferencia, y ¿cómo sería más explícito para que usted dijera que sí da una circunferencia?
	32	E_2	Pues, como dice Daniel D., de esta forma *[señala la ecuación* $x^2+y^2+2xy-1=0$*]*
	33	P	O sea …
	34	E_2	…[Así] ya uno sabe que es una circunferencia.
	35	P	Como ecuación cuadrática.
06:03–06:35	36	E_2	Sí
	37	P	Ehhh… Daniel D., la misma pregunta. En síntesis, en este momento, ¿para usted la respuesta sería sí o no? ¿Es o no es una circunferencia? *[la ecuación* $x+y=\frac{1}{x+y}$ *]*
	38	E_3	Pues sí lo es, pero como le dije ahorita, uno lo asimila diferente porque no ve esta forma que a uno le enseñaron, cómo una circunferencia tiene las dos variables cuadradas.
	39	P	Umjú *[sí, entiendo … continúe]*.
	40	E_3	Pero, a uno no se lo enseñan con las dos variables a los dos lados de la igualdad.
	41	P	Umjú…
	42	E_3	Sí es una circunferencia, pero uno no la ve así en primera instancia.

Daniel D. (E_3) explica por qué la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ no es reconocida inmediatamente como «circunferencia»: *uno no lo asimila así de una vez porque […] en el proceso mental uno no pasa esto [la expresión x+y del lado derecho de la ecuación] de una vez a multiplicar* [$E_{3(19)}^{11,4}$]. Ahora Ma. Elvira (E_1) acepta que la ecuación dada anteriormente sí puede ser una «circunferencia» y complementa lo afirmado por Daniel D.: *cuando uno no, no ve las variables explícitas elevadas al cuadrado, pues no te pones de una vez a leer a ver qué es eso [...] yo la paso a multiplicar de una vez, entonces ahí es que la... pues la asimilo al cuadrado* [$E_{1(20,22)}^{11,4}$], es decir, retoma aspectos planteados en su trabajo individual. El otro estudiante, Daniel A. (E_2), plantea que en primera instancia diría que no es una circunferencia, pues desde lo que ve no es explícito qué lo sea y debe realizar transformaciones, *mover [...] las partes de la ecuación*, las variables, lo cual no acostumbra a hacer; pero que dada la expresión de la forma *$x^2+y^2+2xy-1=0$ ya uno sabe que es una circunferencia* [$E_{2(26\text{-}34)}^{11,4}$].

Análogamente, Daniel D. (E_3) complementa lo dicho por su compañero; reafirma que sí es una «circunferencia» pero que *uno lo asimila diferente porque no ve esta forma que a uno le enseñaron, cómo una circunferencia tiene las dos variables cuadradas [...] Pero, a uno no se lo enseñan con las dos variables a los dos lados de la igualdad* [$E_{3(38,40)}^{11,4}$]; así, reafirman la mirada icónica que hacen de las ecuaciones –particularmente a la expresión que asocian con una circunferencia– como resultado de una misconcepción, posiblemente derivada de una interpretación asociada a una «historia de aula» diferente a la institucionalmente pretendida por el profesor.

06:36–07:22	43	P	María Elvira, ¿puede hacer una síntesis de su respuesta?... Empecemos por responder sí o no, y lo fundamental... ¿por qué?
	44	E_1	Digo que sí, porque está la misma variable al otro lado dividiendo y si estuviera al otro lado multiplicando, también diría que sí.
	45	P	Umjú *[sí, entiendo ... continúe]*... Entonces no hay ningún problema, ¿independiente de que aparezca o no *[la variable]* al cuadrado?
	46	E_1	Independiente de que aparezca o no al cuadrado.
	47	P	Esos argumentos de sus compañeros, ¿no los aceptaría?
	48	E_1	No es que no los acepte, lo que pasa es que yo cuando veo una ecuación yo de una vez pienso en igualarla a cero.
	49	P	Umjú.

50	E_1	… Yo la paso de una vez al otro lado y…
51	P	¡Ahhh, ya! *[entiendo]*.
52	E_1	… Y si, por ejemplo, estuviera restando, pues no la asimilaría así sino que… no sé, miraría si es una parábola o si es otra cosa, porque me toca pasarlo a restar, pero cuando es la… la operación inversa sí lo paso de una vez.
53	P	Muy bien, gracias a todos.

Como se evidencia en la transcripción, Ma. Elvira (E_1) ha afianzado su idea inicial, planteada en el trabajo individual, y ahora, después del proceso de interacción con sus dos compañeros, en el marco de la entrevista grupal basada en la tarea realizada, puede retomar elementos que le posibilitan articular nuevamente los sentidos asignados a las dos ecuaciones.

CONFIGURACIÓN COGNITIVA DE OBJETOS MATEMÁTICOS PRIMARIOS

En los siguientes diagramas se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios lograda por cada uno de los estudiantes, obtenida a partir del trabajo realizado por éstos en su interacción durante la entrevista a partir del trabajo con la tarea sobre cónicas. Las nuevas funciones semióticas, evidenciadas durante la entrevista en la interacción con sus compañeros, son señaladas en dichos diagramas mediante líneas punteadas de color gris.

Problema (Tarea – Cuestionario 3)

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$
2. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$?
3. Complete el enunciado de la siguiente pregunta, escribiendo en el espacio punteado la respuesta que usted dio anteriormente, en el primer punto, y luego respóndala.

¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una … [circunferencia] ?

Lenguaje
Circunferencia
Ecuación
Raíz cuadrada
$x^2+y^2+2xy-1=0$
$x+y=\dfrac{1}{x+y}$

Definición
Una circunferencia
Propiedad
Inverso multiplicativo e inverso aditivo (implícito)
Procedimiento
Aplicación de propiedades

Argumento
Tesis: La ecuación no es una circunferencia
Razón: Se transforma la ecuación hasta obtener explícitamente una ecuación cuadrática

Diagrama 5.4. Configuración final de Ma. Elvira: $E_1^{11,4}$

En el caso de Ma. Elvira (E_1), y en relación con la primera configuración lograda en su trabajo individual [Diagrama 1], si bien llegó a acuerdos con sus compañeros con respecto a otra configuración que no incluía una de las funciones semióticas establecidas por E_1, pues aunque pudieron establecer la equivalencia sintáctica entre la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$ y la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ realizando las transformaciones de tratamiento requeridas, no establecieron la función semiótica entre la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ y el contenido «circunferencia», argumentando que *en una [ecuación] las variables están al cuadrado y en [la] otra no* [Tabla 1]. Finalmente Ma. Elvira, después del proceso de interacción con sus compañeros durante la entrevista, nuevamente establece los sentidos inicialmente asignados a las ecuaciones y hace explícita la articulación de los mismos.

Problema (Tarea – Cuestionario 3)

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$
2. ¿La ecuación $x+y=\dfrac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$?
3. ¿La ecuación $x+y=\dfrac{1}{x+y}$ es una … [circunferencia] ?

Lenguaje
Circunferencia
Ecuación
$x^2+y^2+2xy-1=0$
$x+y=\dfrac{1}{x+y}$

Definición
Una circunferencia
Procedimiento
Aplicación de propiedades

Argumento
Tesis: La ecuación es una circunferencia
Razón: La ecuación se puede transformar hasta obtener las variables al cuadrado

Diagrama 5.5. Configuración final de Daniel A.: $E_2^{11,4}$

En el trabajo realizado individualmente, Daniel A. (E_2) solo establece una función semiótica entre la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$ y el contenido *una circunferencia*; posteriormente, a medida que transcurre la entrevista, toma en consideración los planteamientos de sus compañeros y logra establecer dos nuevas funciones semióticas, una entre la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ y el contenido $x^2+y^2+2xy-1=0$, y otra entre la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ y el contenido *una circunferencia*; es decir, el estudiante E_2 realiza las transformaciones de tratamiento requeridas para reconocer la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones dadas y logra articular los sentidos que le asignó a cada una de ellas [$E_{2(11,\,13)}{}^{11,4}$].

Problema (Tarea – Cuestionario 3)

1. Diga qué es, qué representa, qué significa o qué interpretación hace usted de la siguiente ecuación: $x^2+y^2+2xy-1=0$
2. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es equivalente a la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$?
3. ¿La ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ es una ... [circunferencia] ?

Lenguaje

Circunferencia

Ecuación

$x^2+y^2+2xy-1=0$

$x+y=\frac{1}{x+y}$

Definición

Una circunferencia

Procedimiento

Aplicación de propiedades

Propiedades

Inverso multiplicativo e inverso aditivo (implícito)

Argumento

Tesis: La ecuación es una circunferencia

Razón: La ecuación se puede transformar hasta obtener las variables al cuadrado

Diagrama 5.6. Configuración final de Daniel D.: $E_3{}^{11,4}$

Daniel D. (E_3), en su trabajo individual estableció solo dos funciones semióticas; una, entre la expresión $x^2+y^2+2xy-1=0$ y el contenido *una circunferencia*, y otra entre la expresión $x+y=\frac{1}{x+y}$ y el contenido $x^2+y^2+2xy-1=0$, realizando las transformaciones de tratamiento requeridas para justificar la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones; pero no estableció una función semiótica entre la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ y el contenido «circunferencia»; sin embargo, en el proceso de interacción durante la entrevista, logra establecerla [$E_{3(19)}{}^{11,4}$; $E_{3(38,40)}{}^{11,4}$].

A manera de síntesis

Como se ha evidenciado anteriormente, en el trabajo individual de cada uno de los tres estudiantes de grado 11º, solo uno de ellos (Ma. Elvira) pudo asignar el mismo sentido a las dos ecuaciones. En el trabajo realizado como pequeño grupo se generaron dos cambios; por una parte, Daniel A. aceptó la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones, en tanto reconoció que mediante las transformaciones de tratamiento podía obtener una de las ecuaciones a partir de la otra; por otra, Ma. Elvira acogió los argumentos de sus compañeros respecto a que, a pesar de las transformaciones de tratamiento realizadas, la ausencia en una de ellas de variables elevadas al cuadrado hacía que se descartara la opción de «verla» como una «circunferencia» [Tabla 1]. Posteriormente, durante la entrevista, los argumentos dados por unos y otros posibilitó que compartieran el sentido asignado inicialmente por Ma. Elvira a la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$, además de lograr una articulación de los diferentes sentidos asignados a las dos ecuaciones dadas. Es importante resaltar que para dos de los estudiantes, al parecer, siguió primando una imagen icónica de la ecuación de la circunferencia, según la cual ambas variables deberían estar elevadas al cuadrado.

Posterior a la entrevista, y en relación con el reconocimiento por parte de los tres estudiantes referidos en esta sección de la equivalencia sintáctica entre las ecuaciones $x+y=\frac{1}{x+y}$ y $x^2+y^2+2xy-1=0$, así como el reconocimiento de la equivalencia semántica, se generan cambios en cuanto al reconocimiento de la equivalencia sintáctica y la articulación de los sentidos asignados a las ecuaciones. La información obtenida se resume en la siguiente tabla:

	Ma. Elvira (E_1)	Daniel A. (E_2)	Daniel D. (E_3)	Pequeño grupo
Reconoce equivalencia sintáctica	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a ecuaciones	Sí	Sí	Sí	Sí
Cambio (reconocimiento de equivalencia)		✔		
Cambio (articulación de sentidos)		✔	✔	✔

Tabla 3. Rejilla síntesis (final) –Ma. Elvira, Daniel A. y Daniel D. (T-11)– Grado 11º, Colegio CHA

Es importante resaltar que el proceso de interacción durante la entrevista grupal generó cambios en las interpretaciones realizadas inicialmente por los estudiantes; por una parte, posibilitó que uno de los estudiantes (E_2), al no centrar su mirada en la forma de las dos ecuaciones dadas, reconociera la equivalencia sintáctica de dichas ecuaciones y, por otra, que dos de ellos (E_2 y E_3) lograran articular los sentidos asignados a las mismas. Además posibilitó que E_1 retomara la interpretación que había realizado en su trabajo individual, la cual había cambiado temporalmente en el primer trabajo realizado en pequeño grupo, para reafirmar la articulación de los sentidos asignados a las dos ecuaciones dadas.

TAREA SOBRE PROBABILIDAD (CUESTIONARIO 1)

A continuación se presenta la rejilla con la información del trabajo realizado por los estudiantes, tanto individualmente como en pequeño grupo, a la tarea sobre probabilidad (obtener un número par al lanzar un dado de seis caras), así como el planteamiento realizado por cada uno de ellos al inicio de la entrevista, y enseguida se presentan los diagramas obtenidos a partir de dicha rejilla, correspondientes a la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios lograda por cada uno de los integrantes del grupo en relación con dicha tarea. Posteriormente se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la transcripción realizada (T-9) y en los apuntes tomados por el investigador en su cuaderno de notas.

Rejilla de respuestas y diagrama de configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios

Grupo de estudiantes integrado por Pablo (E_4), Daniel (E_5) y Jonathan (E_6), de grado 9º del colegio CHA.

Tarea (Cuestionario 1)	**Instrumento individual**			**Trabajo en grupo**	**Entrevista** (Planteamiento inicial)
Ítem/Estudiante	**E_4: Pablo**	**E_5: Daniel**	**E_6: Jonathan**	**E_4, E_5 y E_6**	**E_4, E_5 y E_6**
1 ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?	La probabilidad sería del 50%	50%	3/6 o del 50%	50% o 3/6	Todos comparten que la probabilidad de obtener un número par es 3/6.

2 ¿Existe otra manera de expresar la probabilidad? ¿Cuál?	Sí 3/6	Sí 3/6	Sí *[Ver ítem anterior]*	Sí *[Ver ítem anterior]*	Sí Reconocen 3/6 y 50% como opciones para expresar la probabilidad
3 *¿La fracción* 4/8 es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?	No Porque se daría la información mal, y el dado tendría 8 caras.	No El dado está divido en 6 y no en 8 fracciones, se hace fácil determinar que el factor divisor no es derivado del dado, y por lo mismo no es partícipe del mismo enunciado.	No Ya que 4/8 es  y el dado tiene tan solo 6 caras y no 8.	No El dado tiene 6 caras y no 8.	E_4: Hay 3 opciones [...] de 6 y no puede ser ni de las 4 ni tampoco puede ser de 8 (Segmentos 21 y 23). E_5: si es un dado de 6 caras, la división da 3, tres de la probabilidad, no puede tomarse el número de referencia 4 (Segmento 18). E_6: ...pues no, no es tan representativo del dado, ya que el dado no tiene ni 8 caras, ni 4 números pares (Segmento 13).

Tabla 4. Rejilla respuestas –Pablo, Daniel y Jonathan– Grado 9º, Colegio CHA

En los siguientes diagramas se presenta la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios lograda por cada uno de estos estudiantes de grado 9º (final de la educación básica), obtenida a partir del trabajo realizado tanto individualmente como en pequeño grupo.

En su trabajo individual, Pablo (E_4) establece tres funciones semióticas, una entre la expresión 50% y el contenido «casos favorables sobre casos posibles», otra entre la expresión 50% y el contenido 3/6, y otra entre la expresión 3/6 y el contenido «casos favorables sobre casos posibles», es decir, puede articular los sentidos asignados. Si bien articula los sentidos antes asignados, para él la probabilidad no puede ser 4/8, pues de ser así, plantea, la información dada estaría mal y *el dado tendría 8 caras* [Tabla 4].

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

En lo que sigue, siempre se hará referencia a un dado tradicional de seis caras. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y sólo continúe con el siguiente cuando haya respondido completamente el punto anterior.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que ***lanzando un dado se obtenga un número par***?

(a) La probabilidad es:

(b) Explique brevemente cómo realizó el cálculo de la probabilidad:

2. ¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?

(a) Marque con una **X** su respuesta ***Sí* ( ) *No* ( )**

(b) En caso afirmativo muestre cuál(es) sería(n) esa(s) manera(s). En caso negativo explique por qué no existiría otra manera de expresar dicha probabilidad.

3. ***¿Puede afirmarse que la fracción 4/8*** es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

(a) Marque con una **X** la respuesta que considera correcta ***Sí* ( ) *No* ( )**

(b) Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:

Lenguaje
Probabilidad
Par
50%
3/6
4/8

Definición
Casos favorables sobre casos posibles
Procedimiento
Aplicación de definición

Argumento
Tesis: 4/8 no es la probabilidad
Razón: El dado no tiene 8 caras

Diagrama 5.7. Configuración inicial de Pablo: $E_4^{9,4}$

En su trabajo individual, Daniel (E_5) establece tres funciones semióticas, una entre la expresión 50% y el contenido «casos favorables sobre casos posibles», otra entre la expresión 50% y el contenido 3/6 y la tercera, entre la expresión 3/6 y el contenido «casos favorables sobre casos posibles», es decir, puede articular los sentidos asignados. Para él la probabilidad no puede ser 4/8, pues plantea que «el dado está dividido en 6 y no en 8 fracciones» [Tabla 4].

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

1. *¿Cuál es la probabilidad de que* ***lanzando un dado se obtenga un número par****?*
2. *¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?*
3. *¿Puede afirmarse que la fracción 4/8* es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

Lenguaje
Divisor
50%
3/6
4/8

Definición
Casos favorables sobre casos posibles

Procedimiento
Aplicación de definición

Argumento
Tesis: 4/8 no es la probabilidad
Razón: El dado está divido en 6 y no en 8 «fracciones»

Diagrama 5.8. Configuración inicial de Daniel: $E_5^{9,4}$

En su trabajo individual, Jonathan (E_6) establece cuatro funciones semióticas, una entre la expresión 50% y el contenido «casos favorables sobre casos posibles», otra entre la expresión 50% y el contenido 3/6, la tercera entre la expresión 3/6 y el contenido «casos favorables sobre casos posibles», y otra entre la expresión 4/8 y el contenido ; sin embargo, no articula los tres primeros sentidos asignados con el cuarto. Para él la probabilidad no puede ser 4/8, pues plantea que *el dado tiene tan solo 6 caras y no 8* [ver Tabla 4].

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

1. *¿Cuál es la probabilidad de que* ***lanzando un dado se obtenga un número par****?*
2. *¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?*
3. *¿Puede afirmarse que la fracción 4/8* es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

Lenguaje
Probabilidad
50%
3/6
4/8


Definición
Casos favorables sobre casos posibles

Procedimiento
Aplicación de definición

Argumento
Tesis: 4/8 no es la probabilidad
Razón: El dado no tiene 8 caras, sólo 6

Diagrama 5.9. Configuración inicial de Jonathan: $E_6^{9,4}$

A manera de síntesis. Los tres estudiantes que integran este pequeño grupo, Pablo, Daniel y Jonathan, encontraron la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par, la cual representaron al menos de dos maneras diferentes, mediante las expresiones numéricas 50% y 3/6; sin embargo, ninguno de ellos reconoce que la fracción 4/8 puede interpretarse como dicha probabilidad, es decir, no logran articular los sentidos asignados a las anteriores expresiones numéricas. En el trabajo en pequeño grupo estos estudiantes mantuvieron las interpretaciones realizadas individualmente en relación con la tarea propuesta. En resumen, la información obtenida puede resumirse así:

	Pablo (E_4)	Daniel (E_5)	Jonathan (E_6)	Pequeño grupo
Reconoce diversas maneras de representar la probabilidad	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados	No	No	No	No

Tabla 5. Rejilla síntesis (inicial) –Pablo, Daniel y Jonathan– Grado 9º, Colegio CHA

La razón fundamental por la cual dichos estudiantes no aceptan que la fracción 4/8 sea la probabilidad solicitada es que el número de caras del dado es 6 y no 8, es decir, el sentido asignado a la fracción 4/8 está «anclado» al dado, al objeto concreto referido en la tarea propuesta.

Análisis de la entrevista

Los segmentos de la transcripción de la entrevista [T-9] se presentan en cuatro columnas. En la primera de ellas se presenta el tiempo transcurrido (en minutos y segundos), en la segunda, la persona que interviene (profesor-investigador [P] y estudiantes [E_k]); en la tercera, un número asignado al segmento respectivo, cuyo texto se presenta en la última columna (en color gris las intervenciones del entrevistador y en color negro las de los estudiantes). Los entrevistados son estudiantes de grado 9º (final de la educación básica).

Como parte del guión, el entrevistador-investigador (P) saluda a los estudiantes, les agradece estar allí y solicita su autorización para grabar la sesión. Pregunta los nombres a los estudiantes para realizar el registro e inicia la conversación en relación con el primer cuestionario (Tarea sobre la probabilidad). Recuerda algunas respuestas dadas por los estudiantes en relación con diferentes maneras de representar *la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par* y a continuación pregunta directamente a uno de los estudiantes: ¿Puede afirmarse que la fracción 4/8 *es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?* Les solicita que expliquen las razones o argumentos tenidos en cuenta para dar su respuesta.

00:00 a 02:06	1	P	Les agradecería si me recordaran sus nombres …
	2	E_6	Jonathan L. *[menciona su apellido].*
	3	P	Jonathan L.
	4	E_5	Daniel P. *[menciona su apellido].*
	5	P	Jonathan, Daniel y… Pablo.
	6	E_4	Pablo H. *[menciona su apellido].*
	7	P	Bueno, me interesaría en particular que habláramos sobre este instrumento que tiene que ver con la probabilidad ¿cierto? Se les pedía a ustedes encontrar cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado salga un número par. Ustedes estuvieron de acuerdo en que la probabilidad era 3/6 y el argumento para justificar por qué 3/6 era la probabilidad fue relacionar el número de casos favorables con el número de casos posibles, en este caso los favorables son 3, porque hay 3 números pares, y los posibles son 6, en tanto el total de números en el dado, ¿cierto?
	8	P	Respecto a la pregunta de si existe otra manera de expresar esta probabilidad, ustedes respondieron que sí. No recuerdo quién, pero uno de ustedes dijo que… ehhh, se podía escribir como el «cincuenta por ciento», otro ya había escrito arriba *[en ítem anterior]* 50% y acá abajo *[en el segundo ítem]* colocaron 3/6, ½, expresiones como esas. Me interesa que ahora hablemos del tercer punto [ó ítem]. En el tercer punto dice: ¿Puede afirmarse que la *fracción 4/8 es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?…* Ustedes respondieron categóricamente ¡No!, ehhh… En uno de los cuestionarios la razón es clara pero en los otros no mucho, me gustaría que cada uno me dijera cuál es el argumento para dar la respuesta… por favor, con el mayor detalle posible para tener una información clara. Si les parece, empecemos por la derecha, me recuerda su nombre…
02:06		E_6	Jonathan.

Estos estudiantes, en sus cuestionarios individuales y en el cuestionario de pequeños grupos habían reconocido diferentes maneras de representar la probabilidad del evento referido, proponiendo expresiones como 50%, 3/6 y 1/2; sin embargo, todos ellos respondieron que la fracción 4/8 no expresa la probabilidad de dicho evento. El entrevistador les solicitó exponer sus argumentos al respecto y preguntó directamente al estudiante ubicado junto a él.

02:06 a 02:50	10	P	Jonathan… ¿Jonathan qué dice?
	11	E_6	Pues… como el tema principal es un dado, se le reconoce que el dado tiene seis caras…
	12	P	Umjú *[sí, entiendo … continúe]*.
	13	E_6	Si, si sacamos los pares serían tres… 4/8 pues no, no es tan representativo del dado, ya que el dado no tiene ni ocho caras, ni cuatro números pares.
	14	P	Umjú.
	15	E_6	Mmm… *[pensativo]*.
	16	E_6	…En este caso pues… los fraccionarios como bien se sabe pueden dar lo mismo, la misma igualdad, pero… expresándolo así, o por lo menos mirándolo desde la forma en que yo lo veo, no es exacto el cuatro octavos, entonces… ya, listo.
02:51 a 03:18	17	P	Daniel, ¿qué dice Daniel?
	18	E_5	Pues… si es un dado de 6 caras, la división da tres, tres de la probabilidad *[se refiere a la fracción 3/6]*, no puede tomarse el número de referencia cuatro.
	19	E_5	…Es decir, hay tres opciones, de las cuales… de seis ¿sí?
03:19 a 03:37	20	P	Umjú *[sí, entiendo … continúe]*.
	21	E_5	…y no puede ser, ni de las cuatro ni tampoco puede ser de ocho.
	22	P	Listo. …Pablo…
	23	E_4	Pues a mí me parece que no está… no, no serviría porque me parece que la fracción estaría mal planteada, para cómo se debería resolver el problema, en base de las caras del dado.
	24	P	Umjú.
	25	E_4	…Un dado nunca va a tener ocho caras… me parece eso.

Los estudiantes centran su atención en la situación propuesta, específicamente en el dado como objeto. Jonathan (E_6) plantea que en tanto el tema principal es el dado y éste solo tiene 6 caras, entonces 4/8 *pues no, no es tan representativo del dado, ya que el dado no tiene ni ocho caras, ni cuatro números pares* [$E_{6(13)}$]. Si bien Jonathan (E_6) reconoce que los faccionarios *pueden dar lo mismo [igualdad entre* 3/6, ½ y 4/8*]*, plantea que 4/8 *no es* *exacto* [$E_{6(16)}^{9,4}$]. Un argumento similar expone Daniel (E_5), quien plantea que hay 3 opciones de 6 y que *no puede ser, ni de las 4 ni tampoco puede ser de 8* [$E_{5(18,21)}^{9,4}$]. Para Pablo (E_4), la fracción 4/8 estaría *mal planteada* pues el problema debe resolverse con *base en las caras del dado [y éste] nunca va a tener ocho caras* [$E_{4(23\text{-}25)}^{9,4}$]. El entrevistador (P) indaga un poco más con respecto al argumento dado por Jonathan.

03:38 a 04:25	26	P	Listo... bueno, pero me gustaría que pensáramos en un argumento que da Jonathan, Jonathan dice: de todas maneras como fraccionario *[la expresión 4/8]* sí serviría. Es lo que dice Jonathan ¿cierto?
	27	E_6	Umjú *[Sí]*.
	28	P	¿Qué significa Jonathan? Veamos si sus compañeros comparten su argumento.
	29	E_6	Pues 3/6 es dos... ehh tres dividido seis es dos, cuatro dividido ocho es dos...
	30	P	¿Tres dividido en seis es dos?
	31	P	Daniel... *[silencio]*. Pablo, ¿tres dividido en seis es dos?
	32	E_4	Sí, seis dividido tres, sí.
	33	P	No, seis dividido tres no... 3 dividido 6.
	34	E_6	¡Ah! está al revés, ¡la embarré!
	35	P	No importa mucho ahora, yo entendí la idea, es solo para, para precisar...
	36	E_4	¡Ah, bien!...
	37	P	...Entonces tenemos 3/6 que sería ½ ¿cierto?
04:26a 04:43	38	E_4	Sí *[afirman también E5 y E6]*.
	39	P	Bien, podemos obtener ½ o 0.5,pero ¿cuál es su argumento?... Yo solo interrumpí para precisar, usted decía que las fracciones 3/6 o ½ dan lo mismo y... ¿Qué pasa con eso? *[...silencio]*.
	40	E_6	¿Cómo así? ¿Cómo así? No entendí.
	41	P	Es que [en] el argumento que usted daba al principio, usted decía 4/8 también serviría, le entendí ¿sí es eso?
04:44a 06:14	42	E_6	Sí.
	43	P	Pero, decía, no es tan exacto, ¿qué quería decir con eso?
	44	E_6	Pues lo que me han explicado pues... desde que veo fraccionario, es que los fraccionarios... un ejemplo, en la suma se debe dar el número de abajo [el denominador] para poder hacer la fracción ¿sí?

	45	P	Umjú *[sí, entiendo … continúe].*
	46	E_6	En este caso sería que 4/8 es una igualdad de número… o la división de un número en ocho, que sería 4, en el caso del dado que son seis caras la división es de 3, es la parte de… son los tres, son las tres partes de las caras que son pares, además de eso pues… con la explicación del dado se puede explicar de otra forma ya que… las posibilidades pueden sacarse por fracción generatriz, que es cuando uno, ehh… en forma de lista organiza el número de cada uno de los números por las 6 oportunidades, lo que significa que si usted le da 2 veces *[si lanza dos veces el dado o lanza dos dados],* el número más principal que le va a salir es el 7, ya que el dado se compone de los seis números principales que componen el número 7.

En la explicación ofrecida por Jonathan (E_6) se evidencia cierta confusión con respecto a la interpretación de las fracciones –pues asocia 3/6 con 3 divido en 6–, pero después de la aclaración realizada por uno de sus compañeros, con intervención del entrevistador, reconoce rápidamente su equivocación [$E_{6(34)}$]. Sin embargo, aunque realiza esfuerzos por aclarar la afirmación inicial de que *no es exacto cuatro octavos* [$E_{6(16)}^{9,4}$] y trata de explicar que las fracciones tienen una «generatriz», que para este caso sería ½, pero no logra expresarlo adecuadamente y centra su atención en el papel del denominador –dividir en 8 el número 4–, para posteriormente entrar a hablar sobre posibles arreglos de números en parejas. Al parecer trata de recordar alguna actividad escolar relacionada con dados, realizada tiempo atrás.

06:15 a 06:49	47	P	Daniel y Pablo ¿Ustedes entendieron el argumento de Jonathan?
	48	E_5	No, pues digamos que en cierto sentido si se refiere a que se puede obtener una… creo que el problema de la… de la fracción 4/8 sería que no daría con exactitud… se podría dividir… cada… los números pares y los impares en números decimales y podría dar ocho pero pues… sigue siendo la misma cosa… sería… sin exactitud y creo que lo que se busca…
06:50 a 07:32	49	P	Yo los invito, particularmente a Jonathan, [a] que piensen un poco qué es lo fundamental en lo que dijeron. Jhonatan habló mucho, dijo muchas cosas… sin duda tienen mucho conocimiento… pero cuando lo escuchamos no sabemos bien para dónde va, entonces me gustaría que pensara cuál es el argumento fundamental que quiere exponer… y lo mismo con Daniel. Ahora veamos qué dice Pablo.

	50	E_4	Pues... pues lo que yo digo es que la fracción... sí, lo mismo, es que la fracción sí serviría pero no está bien planteada... no se da al detalle ¿por qué? Porque se da mal la información sobre qué... sobre la probabilidad y sobre el... el... los lados del dado.
07:33 a 08:39	51	P	Bien, veo que... parece que ustedes ahora están cambiando de respuesta, de no pasaron a sí.
	52	P	¿Me puede decir cuál es la razón? ¿Por qué antes me había dicho que no era y ahora está diciendo que sí?
	53	E_4	No, o sea... a mí me parece que la... esto... si a mí me plantearan el problema en un dado no me serviría, pero si se diera la especificación ¿sí? ¿Me hago entender?
	54	P	Umjú *[sí, entiendo... continúe]*.
	55	E_4	Si dieran la especificación y se pusiera por ejemplo con un 3/6, ya quedaría un detalle, lo que pasa es que la fracción...
	56	P	Cuando usted dice: «ya quedaría un detalle» ¿a qué hace referencia?
	57	E_4	Mejor dicho, la fracción sirve pero no está bien especificada ¿por qué? Porque... 4/8 es básicamente lo mismo que 3/6 ¿Sí?
	58	P	Umjú.
	59	E_4	... Pero entonces para ser la fracción del dado no serviría porque no se especifica bien lo que se busca.
08:40-08:50	60	P	Ya. Usted dice: las expresiones 3/6 y 4/8 son equivalentes, son la misma, pero en la primera *[en 3/6]* queda claro que el 3 refiere a la probabilidad y el 6 a las caras del lado ¿es eso?
	61	E_4	Sí... *[en la fracción 3/6]* el 3 a los números pares y el 6 a las caras del dado, en cambio en 4/8 eso no estaría claro.

Inicialmente Daniel (E_5) ha planteado que la fracción 4/8 no puede ser la probabilidad de obtener un número par al lanzar un dado, ya que si el dado tiene 6 caras, hay 3 opciones de 6, entonces *no puede tomarse el número de referencia cuatro* ni ocho [$E_{5(18\text{-}21)}{}^{9,4}$]. Ahora, después de escuchar las ideas expuestas por Jonathan (E_6) y frente a la pregunta del entrevistador sobre el argumento antes presentado, Daniel (E_5) retoma la afirmación que en principio formuló su compañero respecto a *que no es exacto el cuatro octavos* [$E_{6(16)}$], e intenta superar la dificultad sobre la exactitud proponiendo un dado de seis caras que incluya números con cifras decimales [$E_{5(48)}{}^{9,4}$].

Por su parte Pablo (E_4) ha planteado inicialmente que la fracción 4/8 no serviría porque *la fracción estaría mal planteada, para [...] resolver el* *problema, en base de las caras del dado [...] Un dado nunca va a tener ocho caras* [$\text{E}_{4(23\text{-}25)}^{9,4}$]. Después de las intervenciones de Jonathan (E_6) y Daniel (E_5) cambia parcialmente de opinión y aclara que la fracción *sí serviría pero no está bien planteada... no se da al detalle [...] Porque se da mal la información [...] sobre la probabilidad y sobre [...] los lados del dado* [$\text{E}_{4(50)}$]. Reconoce que *4/8 es básicamente lo mismo que 3/6* [$\text{E}_{4(57)}^{9,4}$] pero afirma que *para hacer la fracción [4/8] del dado no serviría porque no se especifica bien lo que se busca* [$\text{E}_{4(59)}^{9,4}$], mientras en un dado tradicional la fracción 3/6 se puede ver en detalle, pues es claro que *el 3 [hace referencia] a los números pares y el 6 a las caras del dado, en cambio en* 4/8 *eso no estaría claro* [$\text{E}_{4(61)}^{9,4}$].

08:50-09:27	62	P	Jonathan... ¿ya? *[Se refiere a si ya pensó qué era lo fundamental en su intervención anterior]*.
	63	P	¿Cuál es su argumento?
	64	E_6	No, pues nada, que en este caso el planteamiento de la pregunta no está bien hecha, ya que... se está hablando de un dado de seis caras que tiene tres números pares, aunque la fracción 3/6 sea igual a 4/8 y dé lo mismo, es... ehh, en este caso *[4/8]* no sirve, o por lo menos para mí, porque... ¿cómo le digo? No afirma realmente la expresión del dado, que es 3/6 o lo que está preguntando realmente...
09:28-10:24	65	P	¿Qué dice Daniel, que lo veo pensativo?
	66	E_5	Yo digo que sí puede llegar a ser...
	67	P	En este momento, ¿cambiaría su respuesta de no por sí?
	68	E_5	Ajá *[Sí]*.
	69	P	O sea, ¿cuál sería su respuesta ahora?
	70	E_5	Mejor dicho, sí puede llegar a afirmarla y sí puede ser coherente la fracción 3/6 con la de 4/8 y también con un dado de 6 caras porque, como dije, hay números decimales, simplemente se divide el dado en ocho partes que quede bueno, equivalente par, impar; pero para un ejercicio por ejemplo, por ejemplo...
	71	P	Perdón, se divide dado el ocho partes ¿Cómo así?
	72	E_5	... Números decimales que lo...
			[Se oye un murmullo de otro estudiante...].
10:25-12:45	73	E_5	Números decimales que terminen por... o sea, que le den el equivalente al dado ¿sí?

	74	P	No entiendo qué quiere decir…
	75	E_5	Números decimales, por ejemplo 2.5 más 2.5, 4 así diera… para que diera 8, dos punto cinco, punto seis, bla, bla, bla… *["y así sucesivamente"].*
	76	P	¡Ah, ya! Lo que creo que usted quiere decir es que los números del dado no sean del 1 al 6, sino que sean otros *[se refiere a números con decimales].*
	77	E_5	Exacto.
	78	P	¡Ah, ya! pero, suponiendo que usted no tiene dados distintos y sabe que le están preguntando la probabilidad de que salga par con un dado tradicional, sin que podamos cambiar los dados, ¿cuál sería la respuesta? ¿qué le daría ahora?
	79	E_5	No, porque no hay exactitud.
	80	P	Mejor dicho, la única opción sería…
	81	E_5	Mejor dicho no sería lógico que a uno le dijeran… ehhh, hay un dado de seis caras, que se divide en cuatro octavos.
	82	P	Umjú.
	83	E_5	A menos que se pueda partir, pues… es un dado.
	84	P	O sea, el argumento suyo es que tendría que tener un dado con los números cambiados para que diera…
	85	E_5	… Exacto.
	86	P	Que diera exacto el 8, ¿significa…? ¿Cómo se haría? Es que me perdí un poco en lo que dijo… creo que le corté lo que estaba diciendo. Estaba diciendo que había que hacer algo con el dado pero no…
	87	E_5	Pues por ejemplo, pues sí, físico es muy fácil, se hace un dado de ocho caras, pero… tirando hacía los números decimales que a uno la suma de todos los números le de 8… y que a la vez pueda ser 6 ¿sí?… imagínese ese dado, la suma de ocho pero las caras sigan siendo seis.
12:45	88	P	Sí y ¿cómo sería eso?
	89	E_5	Pues, por ejemplo… no sé… un dado diferente… ¿cómo decirlo? Por ejemplo, que cambien los números o… que trabaje con los decimales *[… Silencio].*

Prosigue la conversación y Jonathan (E_6) mantiene su idea de que la fracción 4/8 no sirve para expresar la probabilidad y que la pregunta está mal planteada, pues si bien la fracción 3/6 es igual a 4/8 *[en tanto «da» lo mismo],* como el dado tiene 6 caras y tiene 3 números pares, la fracción 4/8 no sirve para este caso ya que *no afirma realmente la expresión del dado, que es 3/6, o lo que está preguntando realmente* [$E_{6(64)}{}^{9,4}$].

Daniel (E_5) se mantiene ahora en que dicha fracción sí puede *llegar a ser* la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número par, ya que *puede ser coherente la fracción 3/6 con la de 4/8 y también con un dado de 6 caras* [$E_{5(70)}{}^{9,4}$], pero aún tiene dudas y plantea que *no sería lógico que a uno le dijeran [...] hay un dado de seis caras, que se divide en cuatro octavos [...] A menos que se pueda partir, pues... es un dado* [$E_{5(81\text{-}83)}{}^{9,4}$]. Para él, físicamente es fácil construir un dado que sirva para este propósito; sin embargo, a veces menciona que se tendría un dado de 8 caras y otras veces que puede ser de seis caras siempre que la suma pueda ser 8, si se cambian los números usuales del dado por números con cifras decimales. No logra expresar claramente cómo sería este dado, que reconoce diferente pero posible: ¡imagínese ese dado!, la suma dé ocho pero las caras sigan siendo seis [$E_{5(87)}{}^{9,4}$].

12:45 a 14:02	90	P	¿Alguna otra cosa?... ¿Pablo?... *[Silencio].*
	91	P	Creo que Jonathan tiene aquí un argumento ¿cómo es? *[el estudiante ha escrito algo en una hoja].*
	92	E_6	... Equitativo *[En la hoja ha escrito parejas de números, todas las posibles combinaciones: 1-1, 1-2, 1-3, ..., 6-5, 6-6, organizadas en filas y algunas están resaltadas].*
	93	P	¿Qué significa 1-1, 1-2, 1-3, ...?
	94	E_6	... Éstas son las posibilidades que hay en un dado *[señala algunas de las resaltadas en cada fila]* de sacar número par si se utilizan dos dados...
	95	E_6	Eso, eso lo aprendí allá en Estados Unidos...
	96	P	Umjú *[le entiendo, continúe].*
	97	E_6	... Porque me... yo pasé tres grados allá... este paso es utilizado en los casinos de allá, ¿si ha visto que juegan con dos dados?...
	98	P	Umjú *[sí, entiendo ... continúe].*
	99	E_6	... La posibilidad de dos dados aproximadamente es 7, es el número más aproximado. Si mira en todas las filas está el número 7, se repite en todas *[ha resaltado las parejas de números cuya suma es 7].*

			[… Silencio].
	100	P	Umjú.
14:03a 14:37	101	E_6	Entonces la… lo que yo quiero expresar ahí es que si miramos los números pares que se encuentran aquí, tan solo es el 0.5 por ciento, o 3/6 o 4/8 que da lo mismo de posibilidad de que uno saque ese número […]
	102	P	Bueno, una cosa que hay que diferenciar entre la situación que usted está planteando y la nuestra, es que no estamos hablando de dos dados, o sea no estamos lanzando dos dados sino un dado simplemente… Yo tengo un dado ¿cuál es la probabilidad de que me salga par? ¿Sí? …
	103	P	En el caso que usted propone, de allá, estaban pensando en dos dados y en la probabilidad de que salga un determinado número, que es un poquito distinto… que la suma efectivamente dé 7, o dé… lo que usted quiere decir, es que 7 sería el número que tiene mayor probabilidad de aparecer, pero aquí estamos hablando de un solo dado, sólo tengo un dado ¿cuál es la probabilidad? *[… Silencio].*
	104	P	Quiero hacerles una última pregunta, basándome un poco en lo que ustedes han comentado. Sí alguien les dice a ustedes, como dijo un estudiante… oigan el siguiente argumento: «no importa si yo escribo 4/8, 10/20, 15/30, da lo mismo porque estamos hablando de 3/6 y como 3/6 es la mitad, entonces 3/6 también sería, como también lo sería 10/20 por ejemplo» ¿sí?
14:37 a 15:18	105	P	¿Qué le dirían ustedes a esa persona? ¿Estarían de acuerdo? ¿o le verían algún problema a esa afirmación?
	106	E_6	Yo sí estaría de acuerdo.
	107	P	Daniel, lo veo pensativo, cabizbajo y meditabundo… *[Sonríe].*
	108	E_5	No exactamente en cuanto… no contradigo que es la mitad y que sería lo mismo … *[el tono de la voz es de duda].*
	109	P	Umjú.
	110	E_5	… Pero si se busca una precisión, si es un dado de seis caras, yo trabajaría con los números que son 3 de 6.
	111	P	Tres de seis…
	112	E_5	… Porque a uno no le va a quedar claro que, por ejemplo, le diga 4/8 en un dado de 6 caras, no pensaría ¡no!… entonces es un dado de ocho caras ¿sí?

15:19a 16:05	113	P	Umjú.
	114	E_5	… Por ejemplo, si a usted le dicen en un problema: hay un dado que se divide en cuatro octavos ¿cuál es la probabilidad?, entonces es un dado de ocho caras, no en uno de seis.

Por solicitud del entrevistador, Jonathan (E_6) explica brevemente una actividad que trabajó en otra institución respecto al número que tiene mayor probabilidad de obtenerse al lanzar 2 dados, la cual intenta relacionar en un momento con la obtención de un número par [$E_{6(94)}{}^{9,4}$]. Una vez el entrevistador aclara la diferencia entre estas actividades [$P_{(102\text{-}103)}$], decide preguntar nuevamente si 4/8 es la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un número par, esta vez de manera indirecta acudiendo a un argumento de otro estudiante, quien explícitamente afirmaba que cualquier fracción equivalente a ½ podría representar dicha probabilidad, citando como ejemplos las fracciones 3/6, 10/20 y 15/30.

Frente a la pregunta de si estarían de acuerdo con el argumento de este estudiante o lo cuestionarían, Jonathan [$E_{6(106)}{}^{9,4}$] dice estar de acuerdo; al parecer cambia su posición inicial.[5] Daniel (E_5) mantiene su posición respecto a aceptar 4/8 como probabilidad de dicho evento, pero insiste en que si bien no contradice que 4/8 *es la mitad y que sería lo mismo*, si se busca precisión trabajaría *con los números que son 3 de 6* [$E_{5(108\text{-}110)}{}^{9,4}$], pues no considera claro que se acuda a 4/8 en un dado de 6 caras, *pues entonces sería un dado de 8 caras* [$E_{5(112\text{-}114)}{}^{9,4}$]. Al parecer retoma su idea inicial, que 4/8 no podría ser dicha probabilidad y se requeriría un dado de 8 caras.

16:06 a 17:03	115	P	Umjú *[sí]*... ¿Qué dice Pablo?
	116	E_4	Pues yo estoy de acuerdo también en que diez veinte *[se refiere a la fracción 10/20]* es lo mismo que 3/6.
	117	P	Umjú *[sí, entiendo ... continúe].*

[5] Esta técnica de pregunta indirecta, acudiendo a lo propuesto por otro estudiante (real o ficticio), ha reflejado ser útil (ver, por ejemplo, D'Amore, 1999/2006a, pp. 172-173) en tanto posibilita lo que podría denominarse un «descentramiento cognitivo» por parte del estudiante, quien puede hacer referencia a lo planteado sin asumir de manera directa la responsabilidad sobre lo inicialmente propuesto.

	118	E_4	… Pero no si se formulara la… la pregunta… si por ejemplo a usted le preguntan ¿Puede afirmarse que la fracción 10/20 es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga número par? Usted quedaría como nulo, porque… ¿cómo así que 10/20? Desde cuándo acá un dado tiene 20 caras ¿sí?, entonces el pedacito que a mí no me cuadra *[ríe un poco]*… El pedacito que a mí no me cuadra, es la especificación para armar el… el problema.
	119	P	Pero, digamos, ¿usted lo dice pensando en otra persona que podría no entender o está pensando en usted? O sea, ¿usted sí entendería o usted también vería…?
	120	E_4	Yo no entendería… la verdad.
17:04 a 17:30	121	P	Umjú.
	122	E_4	… Yo no entendería si a mí me pusieran la fracción 4/8 lanzando un dado ¿sí?
	123	P	Pero ahora, con lo que hemos hablado ¿aceptarían el 4/8 o todavía, como dice… Daniel, eso no es muy preciso?; o quizás dirían: oiga sí, pero no sería muy entendible si no hubiéramos hecho está discusión, o algo así ¿no?
	125	E_4	Lo que pasa es que en el sentido común de la población… de la… de todo el mundo eso no se entendería.
17:37a 17:48	126	P	Umjú.
	127	E_4	… Me parece, pues, a mí.
	128	P	Bueno, pero como no estamos hablando de todo el mundo sino de ustedes tres… en el caso de ustedes tres, y suyo en particular Pablo, ¿aceptaría ahora o no?, ¿o no lo convencería?
	129	E_4	No, no yo quedaría con la duda, mejor dicho.
17:49 a 18:41	130	P	Jonathan, usted en este momento ¿aceptaría que 4/8 es la probabilidad? ¿O no le parece?
	131	E_6	No.
	132	P	¿Y cuál es argumento por el cual no?
	133	E_6	Se está hablando del dado, son 6 caras, aunque la expresión de 4/8 pueda servir …
	134	P	Umjú.
	135	E_6	[Continúa…] No sirve, no se entiende, o mejor dicho esa pregunta que ustedes plantearon está basada en el sí y el no.
	136	P	Umjú.
	137	E_6	… Cualquiera de las dos respuestas está bien.

	138	P	Umjú.
18:42	139	E_6	¿Sí? pero expresándola… o como nos han enseñado a nosotros, es expresar realmente lo que… lo que está preguntando, que es con un dado, un dado tiene 6 caras, 3 números pares, 3 números impares, ya.

Un hecho que es importante resaltar aquí es que si bien Pablo (E_4) reconoce que las fracciones 3/6, 4/8 y 10/20 son *lo mismo,* comenta que con respecto de la formulación del problema no es claro que lo sean, pues se requeriría de un dado de 20 caras, lo cual no es usual. Explícitamente plantea que si le preguntaran: ¿Puede afirmarse que la fracción 10/20 es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga número par?, quedaría como *nulo [...] no entendería*, porque ¡¿Desde cuándo acá un dado tiene 20 caras?! [$E_{4(116\text{-}120)}{}^{9,4}$]. Destaca que para el común de la población eso no tendría sentido [$E_{4(125)}{}^{9,4}$] y que él quedaría con duda al respecto [$E_{4(129)}{}^{9,4}$].

Por su parte, frente a la pregunta de si aceptaría que 4/8 es la probabilidad, Jonathan (E_6) afirma que no, pues si bien la expresión 4/8 puede servir, *se está hablando de un dado de 6 caras* [$E_{6(133\text{-}135)}{}^{9,4}$], pero a continuación insiste en que *no sirve, no se entiende* y finaliza planteando que las dos respuestas, sí o no, pueden servir argumentando que, desde lo que le han enseñado,[6] debe expresarse lo que se le está preguntando sobre el dado, *y éste tiene 6 caras* [$E_{6(137\text{-}139)}{}^{9,4}$].

18:42 a 19:45	140	P	Umjú… ¿y Daniel? *[Silencio …].*
19:45	141	P	¿Si aceptaría? o…
	142	E_5	En este momento sí …
	143	P	¡Ah, ya! *[sí, entiendo].*
	144	E_5	… Después de hablar ya todo eso.
	145	P	Ya *[entiendo].*
	146	E_5	O sea, para alguien común no, pero…
	147	P	¿Y qué lo hizo cambiar de opinión?
	148	E_5	Porque… yo por ejemplo acá puse en la primera pregunta 50% *[señala el primer ítem del cuestionario, mientras suena el timbre para cambio de clase].*
	149	P	… Escribió en la tercera *[que]* 50% sí es equivalente a una mitad, 50% también es una mitad …

[6] Es decir, desde lo expuesto y trabajado en el contexto escolar.

	150	E_6	*[Interrumpe]* Nos puede tener aquí otra hora *[ríe, hace referencia al timbre con que se anuncia la terminación de la clase de matemáticas y el inicio de una nueva clase].*
	151	E_5	… De cien daría lo mismo, mitad *[se refiere a que 50 es la mitad de 100].*
	152	P	Entonces usted dice, 4/8 sería la mitad entonces da lo mismo, no importa …
	153	E_5	Equivalente… no mirándolo hacia las caras, ni hacia el dado, sino a la mitad.
19:46 a 19:58	154	P	… Solo lo escribo de otra manera, la expresión 3/6 es lo mismo que ½, es lo mismo que 4/8, entonces lo puedo nombrar como quiera, esa es la probabilidad. ¿Qué dice Pablo? ese argumento está como bueno ¿qué opina?
	155	E_4	Lo que pasa es que… no yo sigo diciendo que yo no lo aceptaría.
	156	P	A pesar de todo, ¿no lo aceptaría?
	157	E_4	No.
19:59 a 20:04	158	P	Jonathan, ya para cerrar …
	159	E_6	No, tampoco.
	160	P	Tampoco… Listo, les agradezco.

Inicialmente Daniel (E_5) mantuvo la idea de que la fracción 4/8 no podía ser *la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par* [$E_{5(18,\ 48,\ 81,\ 112)}$ ^{9,4}]; en el transcurso de la entrevista, después de diferentes interacciones con Pablo y Jonathan –sus compañeros de grupo– y con el entrevistador (P), Daniel recuerda que en su cuestionario había respondido que la probabilidad es el 50%, y que es *la mitad,* que como afirma el entrevistador 4/8 también es una mitad, entonces esta fracción sería *equivalente… no mirándolo hacia las caras, ni hacia el dado, sino a la mitad* [$E_{5(153)}$ ^{9,4}]. Es decir, cuando logra descentrarse del objeto, de las caras del dado, y centra su mirada en las expresiones que representan la mitad, logra reconocer que la fracción 4/8 expresa la probabilidad pedida [$E_{5(151,\ 153)}$ ^{9,4}]. Por su parte, Pablo (E_4) y Jonathan (E_6) no aceptan el último argumento dado por Daniel, y aunque el entrevistador reelabora lo afirmado por éste (E_5) y les plantea explícitamente que aquel parece un buen argumento [$P_{(154)}$], tanto Pablo como Jonathan no cambian de parecer e insisten en que si bien *la fracción* 4/8 *es igual a* 3/6, dicha fracción no es la probabilidad pedida [$E_{4(23,\ 53,\ 61,118,157)}$ ^{9,4}; $E_{6(13,\ 64,\ 81,\ 112)}$ ^{9,4}].

Configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios

En los siguientes diagramas se presenta la configuración cognitiva lograda por cada uno de los tres estudiantes después del proceso de interacción realizado durante la entrevista grupal, en relación con el trabajo realizado a partir de la tarea sobre hallar la probabilidad de obtener un número par lanzando un dado. En dichos diagramas, mediante una línea continua, se señalan las funciones semióticas establecidas por cada estudiante entre una expresión y un contenido. Mediante una línea punteada de color gris se señalan las nuevas funciones semióticas, evidenciadas durante la entrevista en la interacción con sus compañeros en el pequeño grupo.

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

1. *¿Cuál es la probabilidad de que* ***lanzando un dado se obtenga un número par****?*
2. *¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?*
3. *¿Puede afirmarse que la fracción 4/8* es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

Lenguaje

Probabilidad

50%

3/6

4/8

Definición

Casos favorables sobre casos posibles

Procedimiento

Aplicación de definición

Argumento

Tesis: 4/8 no es la probabilidad

Razón: La fracción 4/8 sirve, pero no está bien especificada pues el dado no tiene 8 caras

Diagrama 5.10. Configuración final de Pablo: $E_4^{9,4}$

Inicialmente, en su trabajo individual, Pablo (E_4) logró establecer tres funciones semióticas [Diagrama 7], y durante la entrevista logra establecer una nueva función semiótica entre 3/6 (expresión) y 4/8 (contenido); sin embargo, aunque reconoce la igualdad entre 4/8 y 3/6, considera que, en el caso del dado, la fracción 4/8 no puede representar el número de casos favorables sobre el número de casos posibles, pues argumenta que *la fracción estaría mal planteada, no se da en detalle, sirve pero no está bien especificada [...] porque... 4/8 es básicamente lo mismo que 3/6*, e insiste en que *para ser la fracción del dado no serviría porque no se especifica bien lo que se busca*

$[\text{E}_{4(24,50,57,59)}^{9,4}]$. Si bien articula los sentidos inicialmente asignados, considera que la probabilidad no puede ser 4/8 pues *no se especifica bien lo que se busca, [en la fracción* 3/6*] el* 3 *[hace referencia] a los números pares y el* 6 *a las caras del dado, en cambio en 4/8 eso no estaría claro* $[\text{E}_{4(59,61)}^{9,4}]$. Pablo reconoce que, por ejemplo, 10/20 *es lo mismo que 3/6,* pero considera que la fracción 10/20 tampoco podría ser la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par, pues ¡¿desde cuándo acá un dado tiene 20 caras?! $[\text{E}_{4(116,118)}^{9,4}]$; continúa manifestando su duda y reitera que 4/8 no puede ser la probabilidad pedida $[\text{E}_{4(129,155,157)}^{9,4}]$.

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

1. *¿Cuál es la probabilidad de que* ***lanzando un dado se obtenga un número par****?*
2. *¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?*
3. *¿Puede afirmarse que la fracción 4/8* es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

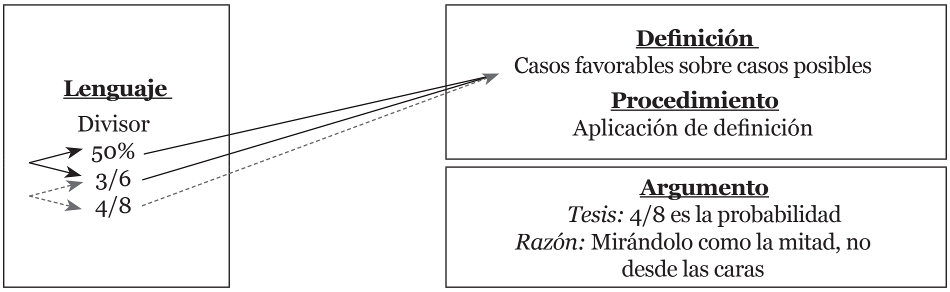


Diagrama 5.11. Configuración final de Daniel: $E_5^{9,4}$

En su trabajo individual, Daniel (E_5) había establecido tres funciones semióticas (Diagrama 8); durante la entrevista establece de manera explícita una nueva función semiótica entre 4/8 (expresión) y 3/6 (contenido), aunque inicialmente plantea que en la situación específica del dado, *si se busca precisión* preferiría trabajar con la fracción 3/6 $[\text{E}_{5(70,108\text{-}114)}^{9,4}]$. Posteriormente, después de unos 3 minutos escuchando atentamente las intervenciones de Pablo y Jonathan, y las preguntas del entrevistador (P), logra «separarse» de la situación concreta del dado y establece una nueva función semiótica, esta vez entre la expresión 4/8 y el contenido «número de casos favorables sobre número de casos posibles», logrando así una articulación entre los diferentes sentidos asignados $[\text{E}_{5(142,144,153)}^{9,4}]$.

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

1. *¿Cuál es la probabilidad de que* ***lanzando un dado se obtenga un número par****?*
2. *¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?*
3. *¿Puede afirmarse que la fracción 4/8* es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?

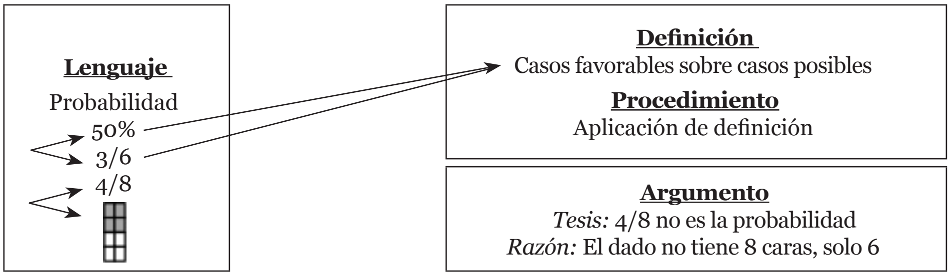


Diagrama 5.12. Configuración final de Jonathan: $E_6^{9,4}$

Desde su trabajo individual, Jonathan (E_6) estableció cuatro funciones semióticas (Diagrama 9), y durante la entrevista logra establecer una nueva entre 4/8 (expresión) y 3/6 (contenido); sin embargo, considera que si *bien pueden dar lo mismo, la misma igualdad [...] expresándolo así [como 4/8] no es exacto, aunque la fracción 3/6 sea igual a 4/8 y dé lo mismo [...] en este caso no sirve* [$E_{6(11,\,64)}^{9,4}$]. Aunque en un momento está de acuerdo con que cualquier fracción equivalente a 3/6 sería la probabilidad pedida [$E_{6(106)}^{9,4}$] y establece una nueva función semiótica en tanto considera que la fracción 4/8 podría ser la probabilidad pedida (cambio temporal), después de las intervenciones realizadas por Pablo y Daniel duda de su última interpretación y considera que podría ser válida cualquiera de las respuestas [$E_{6(129\text{-}135)}^{9,4}$]. Finalmente plantea que desde lo realizado en su trabajo escolar, desde lo que le han enseñado, la respuesta debe *expresar lo que realmente se está preguntando,* y que en este caso el dado tiene 6 caras, con 3 pares y 3 impares, por lo que decide cambiar de opinión y considera que la respuesta debe ser negativa [$E_{6(139,159)}^{9,4}$], es decir, mantiene la configuración realizada inicialmente (Diagrama 9).

A manera de síntesis. Después de la interacción en la entrevista, se evidencia que dos de los estudiantes –Pablo (E_4) y Jonathan (E_6)– reconocen explícitamente la equivalencia entre las fracciones 3/6 y 4/8, y que cualquier fracción equivalente a 3/6 podría representar la probabilidad pedida en la tarea, pero su «anclaje» al objeto –el dado y su número de caras– no les permite articular los sentidos asignados a tales expresiones y, por tanto, no aceptan que 4/8 sea dicha probabilidad. Por su parte Daniel (E_5) no solo reconoce la equivalencia entre las fracciones propuestas, sino que puede «separarse» de la situación concreta del dado y logra reconocer que la fracción 4/8 representa dicha probabilidad y, por tanto, logra articular los sentidos asignados a las diferentes expresiones numéricas. En resumen, la información obtenida puede expresarse así:

	Pablo (E_4)	Daniel (E_5)	Jonathan (E_6)	Pequeño grupo
Reconoce diversas maneras de representar la probabilidad	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados	No	Sí	No	No
Cambio (reconocimiento de equivalencia entre 3/6 y 4/8)	✓	✓	✓	✓
Cambio (articulación de sentidos)		✓		

Tabla 6. Rejilla síntesis (final) –Pablo, Daniel y Jonathan (T-9)– Grado 9º, Colegio CHA

El proceso de interacción durante la entrevista grupal generó cambios en las interpretaciones inicialmente realizadas por los estudiantes; por una parte, los tres reconocieron explícitamente la equivalencia entre diversas expresiones numéricas, y por otra, uno de ellos (E_5) reconoció que la fracción 4/8 era la probabilidad requerida, es decir, logró articular los sentidos asignados a dichas expresiones. No obstante, aunque dos de ellos (E_4 y E_6) reconocen la equivalencia entre las expresiones numéricas 3/6 y 4/8, no logran articular los sentidos de las mismas.

TAREA SOBRE TRIPLE DE UN NÚMERO (CUESTIONARIO 2)

A continuación se presenta la rejilla con la información del trabajo realizado, tanto individualmente como en grupo, a la tarea sobre triple de un número –equivalencia de expresiones algebraicas obtenida por tratamiento– y enseguida se presentan los diagramas obtenidos a partir de ésta, correspondientes a la configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios lograda por cada uno de los integrantes del grupo en relación con dicha tarea. Posteriormente se realiza un análisis de la entrevista, apoyado en la transcripción realizada (T–1) y en el cuaderno de notas del investigador.

Rejilla de respuestas y diagramas de configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios

Grupo de estudiantes de grado 9º (código 9), integrado por Cristian (E_1), Angely (E_2) y Dairon (E_3) del colegio MMC (código 1), respecto al trabajo realizado en la tarea presentada en el cuestionario 2, relacionada con el triple de un número (equivalencia de expresiones algebraicas).

Tarea (Cuestionario 2)	**Instrumento individual**			**Trabajo en pequeño grupo**	**Entrevista** (Planteamiento inicial)
Ítem	**E_1 (Cristian)**	**E_2 (Angely)**	**E_3 (Dairon)**	**E_1, E_2 y E_3**	**E_1, E_2 y E_3**
1 Interpretación de la expresión *3n*	Expresión algebraica Ej.: 3•n=3•4=12	Que se deben multiplicar entre sí, 3•n=Multiplicar	3n son 3 números como 2+2+2	Reconocen que la expresión 3n se interpreta como 3 multiplicado por un número o como el triple de n	3n es el triple de un número
2 ¿Es válida la igualdad *(n-1)+n+(n+1)= 3n* ?	Sí. Dan el mismo resultado las 2 expresiones *[Verifica adecuadamente el valor de ambas expresiones para n=4].*	Las dos expresiones son las mismas.	La n es un número cualquiera con el cual se hace el ejercicio.	Comprueban la igualdad para cualquier n y lo verifican para un valor específico (n=2).	Aceptan que *(n-1)+n+(n+1)* = *n+n+n-1+1=* *n+n+n+0=3n*
3 *¿La expresión (n-1)+n+(n+1)* puede interpretarse como el triple de un número?	No es el triple porque dan el mismo resultado *[Quiere decir que la expresión dada no es el triple pero al evaluarla da el mismo resultado que al evaluar la expresión 3n, que es el triple].*	Sí... es como si se quemara los -1 +1 *[se cancelan]* y quedaría n+n+n=3n	Sí es el triple porque la n es un número y hay 3 las cuales son sumadas y restadas y nos da el triple. Ej. *(n-1)+n+(n+1)* = *(2-1)+* *2+(2+1)=* *1+2+3=6* Este resultado es el triple de 2.	Aunque E_2 y E_3 sostienen que la expresión *(n-1)+n+ (n+1)* es el triple de un número, E_1 insiste en que da el mismo resultado pero no es el triple, sino una suma.	E_1: No, porque el triple de un número no es así... (segmento 20). E_2: Sí, sí... pues es como cuando yo lo resolví (segmento 24). E_3: Yo diría que sí... son tres números consecutivos iguales, entonces son el triple de un número (seg. 45 y 47).

Tabla 7. Rejilla respuestas- Cristian, Angely y Dairon–. Grado 9º, Colegio MMC

Comentario: *Este pequeño grupo mencionado participó en una socialización general orientada por la profesora del curso antes de la entrevista, en la cual se acordó que las interpretaciones más usuales de la expresión 3n eran «3 multiplicada por n» y «triple de un número», y que la expresión (n-1)+n+(n+1) se podía interpretar como la suma de tres números o más, específicamente de tres números consecutivos. Además verificaron la igualdad entre las expresiones (n-1)+n+(n+1) y 3n para el caso general, pero dejaron pendiente la socialización del tercer ítem [lo hicieron después de la entrevista].*

En los siguientes diagramas se presenta la configuración cognitiva lograda por cada uno de los tres estudiantes, obtenida a partir del trabajo realizado en grupo por dichos estudiantes de grado 9º del colegio MMC, con respecto a la tarea propuesta[7]. En estos diagramas se señalan mediante una línea continua las funciones semióticas establecidas por cada estudiante entre la expresión y el contenido.

Problema (Tarea – Cuestionario 2)

En lo que sigue, asuma que ***n*** *representa un número entero cualquiera. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y sólo continúe con el siguiente cuando haya respondido completamente el punto anterior.*

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión *3n*.
2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida: *(n-1)+n+(n+1)= 3n*
   - **(a)** Marque con una **X** la respuesta que considere correcta ***Sí*** **( )** ***No*** **( )**
   - **(b)** En caso afirmativo compruebe la igualdad; en caso negativo dé razones por las cuales no se cumple.
3. ¿La expresión *(n-1)+n+(n+1)* puede interpretarse como ***el triple de un número****?*
   - **(a)** Marque con una **X** la respuesta que considere correcta ***Sí*** **( )** ***No*** **( )**
   - **(b)** Explique o justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta.

Lenguaje

Expresión algebraica
Número
Triple
Equivalencia
Igualdad
3n
(n-1)+n+(n+1)

Definición

Resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera

Propiedad

(n-1)+n+(n+1)= 3n

Procedimiento

Evaluar la expresión en un valor específico

Argumento

Tesis: la propiedad es válida
Razón: Al evaluar la expresión en un valor específico, da el mismo resultado

Diagrama 5.13. Configuración inicial de Cristian: $E_1^{9,1}$

[7] El texto completo de la tarea propuesta se presenta en el primer diagrama; en los dos siguientes, este se presenta resumido.

En el trabajo realizado individualmente, Cristian (E_1) establece una función semiótica entre la expresión *3n* y el contenido *resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*.

Problema (Tarea – Cuestionario 2)

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión *3n*.
2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida: *(n-1)+n+(n+1) = 3n*
3. ¿La expresión *(n-1)+n+(n+1)* puede interpretarse como ***el triple de un número****?*

Lenguaje

Número
Multiplicar
Triple
Igualdad
3n
(n-1)+n+(n+1)

Definición

Resultado de multiplicar entre sí (3 y *n*)

Propiedades

(n-1)+n+(n+1)= 3n

Implícitas: Conmutativa y asociativa

Procedimiento

Aplicación de propiedades

Argumento

Tesis: Sí se cumple la propiedad

Razón: Aplicación de propiedades (implícitas)

Diagrama 5.14. Configuración inicial de Angely: $E_2^{9,1}$

En el trabajo realizado individualmente, Angely (E_2) establece tres funciones semióticas, una entre la expresión *3n* y el contenido *resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*, otra entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*, y una tercera entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y *resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*, es decir, el reconocimiento de la equivalencia obtenida mediante una transformación de tratamiento, le permite asignar el mismo sentido a las dos expresiones *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*.

Problema (Tarea – Cuestionario 2)

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión *3n*.
2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida: *(n-1)+n+(n+1) = 3n*
3. ¿La expresión *(n-1)+n+(n+1)* puede interpretarse como ***el triple de un número****?*

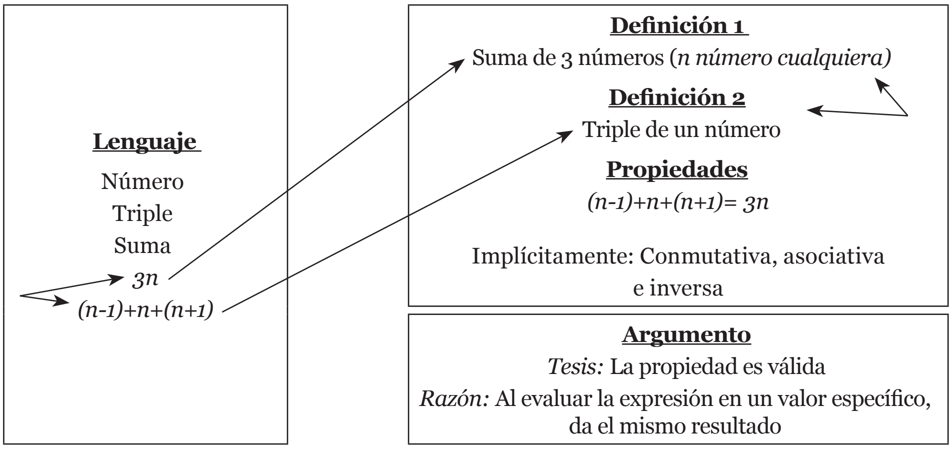


Diagrama 5.15. Configuración inicial de Dairon: $E_3^{9,1}$

En el trabajo realizado individualmente, Dairon (E_3) establece cuatro funciones semióticas; una entre la expresión *3n* y el contenido *suma de 3 números (n número cualquiera)*, otra entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y *3n [evaluando las expresiones, tomando un valor específico]*, una tercera entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y *triple de un número*, y finalmente una entre la expresión *suma de 3 números* y *triple de un número*; es decir, el reconocimiento de la equivalencia obtenida mediante evaluación, le posibilita articular los sentidos asignados a las expresiones *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*.

A manera de síntesis. En relación con el reconocimiento de la equivalencia sintáctica entre las expresiones *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*, es decir, el reconocimiento por parte de los tres estudiantes aquí referidos de las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener una de las expresiones a partir de la otra (usando propiedades de los números reales), así como el reconocimiento de la equivalencia semántica, en tanto posibilidad de articular los sentidos asignados a éstas, la información obtenida se resume así:

	Cristian (E_1)	Angely (E_2)	Dairon (E_3)	Pequeño grupo
Reconoce equivalencia sintáctica	No	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a expresiones	No	Sí	Sí	No

Tabla 8. Rejilla síntesis (inicial) –Cristian, Angely y Dairon– Grado 9º, Colegio MMC

Si bien E_1 acepta la equivalencia de las dos expresiones algebraicas, lo hace a partir de la evaluación con un valor específico de *n*, y plantea que aunque los resultados de la evaluación son los mismos, la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ no es el triple del número, es decir, no logra articular los sentidos asignados a dichas expresiones. E_2 y E_3, quienes habían reconocido individualmente la equivalencia sintáctica de las dos expresiones y lograron articular los sentidos asignados a éstas en el trabajo en pequeño grupo, aceptan la argumentación de E_1, y aunque reconocen como grupo la equivalencia sintáctica, no articulan los sentidos asignados.

Análisis de la entrevista

Los segmentos de la transcripción de la entrevista (Transcripción 1) se presentan en cuatro columnas. En la primera se presenta el tiempo transcurrido (en minutos y segundos), en la segunda, la persona que interviene (profesor–investigador [P] y estudiantes [E_k]), en la tercera, un número asignado al segmento respectivo, cuyo texto se presenta en la última columna (en color gris las intervenciones del entrevistador y en color negro las de los estudiantes). Como parte del guión establecido para las entrevistas, el entrevistador–investigador (P) saluda a los estudiantes, les agradece estar allí y les solicita su autorización para grabar la sesión. Inicia preguntando los nombres para realizar el registro respectivo y dar curso a la conversación.

00:00	1	P	Les agradezco que me recuerden sus nombres.
	2	E_1	Cristian.
00:18	3	P	Cristian (E1)… ¿del curso 901?
	4	E_1	Sí señor.
	5	E_2	Angely.
	6	P	¿An-ge-la? *[Deletrea el nombre].*
	7	E_2	Angely *[Ríe un poco].*
	8	P	¿Y? *[dirige la mirada al otro estudiante que está a su lado].*
	9	E_3	Dairon.
	10	P	Dairon (E3).
00:18 a 00:28	11	E_3	L. *[menciona su apellido].*
	12	P	Dairon L. […] Creo que puede hablar un poco más fuerte… está como un poco tímido hoy…
	14	E_{1-2-3}	… *[Todos ríen].*

El entrevistador presenta una síntesis de una de las conclusiones a las que ellos llegaron con su profesora de curso en el espacio de socialización, en relación con el cuestionario (correspondiente al segundo instrumento de indagación) en el cual se indagaba por el significado asignado a las expresiones algebraicas *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*, así como el reconocimiento hecho de la equivalencia (sintáctica) entre estas dos expresiones. Escribe en una hoja, mientras habla, cada una de las expresiones y el significado asignado consensualmente en la clase (suma de 3 números consecutivos y triple de un número, respectivamente) y, a partir de la primera, realiza las transformaciones requeridas (identidades algebraicas) para mostrar que las dos expresiones son sintácticamente equivalentes. Lo hace de manera pausada, mirando ocasionalmente a alguno de los tres estudiantes, intentando reconocer en ellos señales (gestos o palabras) de aprobación en diferentes momentos.

Pausa	15	P	Bien, quiero empezar haciendo un resumen sobre ciertas conclusiones a las que llegaron con su profesora *[Hace una pausa en la grabación y comenta el significado compartido por el grupo, asignado a 3n, «el triple de un número» y el significado asignado a (n-1)+n+(n+1), «la suma de tres números consecutivos», así como el reconocimiento de la igualdad entre estas dos expresiones; el investigador estuvo como observador pasivo en la clase en que trabajaron esta actividad]* ¿Están de acuerdo?
00:01 a 00:28	16	$E_{1\text{-}2\text{-}3}$	Sí *[responden todos]*.
	17	P	¿Quieren hacer algún comentario o alguna pregunta? ...
	18	E_1	No *[E_2 y E_3 niegan con un movimiento de cabeza]*.
	19	P	Bien, entonces estamos de acuerdo en que *(n-1)+ n + (n+1)* es igual a *3n;* la otra pregunta que se hacía en el instrumento es: ¿la expresión *(n-1) + n + (n+1)* es o significa el triple de un número?, había que responder sí o no y justificar... ¿Qué dice... Cristian?

Después de hacer explícito el reconocimiento de la igualdad entre las dos expresiones algebraicas y de consultar a los estudiantes si hay algún comentario o pregunta respecto de la síntesis realizada, se dirige a dos de ellos, Cristian (E_1) y Angely (E_2), indagando sobre el tercer ítem del cuestionario (segundo instrumento de indagación). Directamente les formula la pregunta de si la expresión *(n–1)+n+(n+1)* es o no, significa o no, el triple de un número.

00:28 a 00:53	20	E_1	[...] Si... ¿Cómo es? *¿(n-1)+ n + (n+1)* significa el triple de un número? Yo creo que, que no porque el triple de un número no es así, sino [*que*] esa es la suma de tres números consecutivos, no la suma de... o sea tres veces ese mismo número, o sea... *[silencio].*

La respuesta dada por Cristian (E_1) refleja un hecho cultural de la asignación de significados asociados con la forma de cada una de las expresiones algebraicas: *el triple de un número no es así [...] esa es la suma* [$E_{1(20)}{}^{9,1}$]. El sentido que le asigna a la expresión *3n* es de representación de un producto o multiplicación entre números, mientras el asignado a la expresión *(n–1)+n+(n+1)* es de una suma, aunque reconoce que la expresión *3n* es *tres veces ese mismo número* [$E_{1(20)}{}^{9,1}$], pero sin reconocer la posibilidad de articular dichos sentidos con base en la equivalencia sintáctica antes reconocida de tales expresiones. En el trabajo individual realizado con respecto al segundo instrumento, Cristian evaluó las dos expresiones (asignando el valor n=4) y reconoce que dan el mismo resultado, pero afirma que *(n–1)+n+(n+1)* no es el triple de un número, sin dar una explicación respecto a su afirmación.

00:54	21	P	... ehhh, qué pena... An-ge-ly *[deletrea nuevamente el nombre].*
	22	E_2	*[Ríe un poco]* Angely.
	23	P	Angely *[reafirma mientras verifica el nombre en su hoja]* ¿Qué dice Angely?
01:04 a 01:22	24	E_2	Sí, sí *[ríe con cierto nerviosismo]*; pues es que como, cuando yo lo resolví yo dije que sí, pues porque haciendo la operación con los números verdaderos *[se refiere a números enteros específicos],* o sea, ehh, uno le da el triple de un número, que equivalga a *n [contesta con cierto tono de duda o inseguridad].*
01:22 a 01:26	25	P	¿Cuáles son los números verdaderos?
	26	E_2	O sea, los números enteros, ¿sí? *[parece esperar la aprobación del profesor].*
	27	P	¡Ummjú!
01:26 a 01:48	28	E_2	*[Continúa]* Por ejemplo, uno le asigna un número a la *n,* entonces... asignándole un número a la *n,* entonces eso... o sea, que no estoy de acuerdo con... *[dirige la mirada a su compañero Cristian].*
	29	P	Cristian *[le recuerda el nombre del compañero a quien hace referencia].*

	30	E_2	O sea, algo así, ¿no?, sino con esta... ¿qué? suma de tres números consecutivos, porque se dice que *n*, es un... o sea, cuando usted coloca *n* es para todos, entonces...
01:48 a 02:03	31	P	¿Cuándo coloca *n* es qué?
	32	E_2	Es ese, ese número que equivalga a *n* es para... o sea *n* acá, *n* acá y *n*, el mismo número, entonces nos da el tre *[iba a decir tres]*... el triple de él, un múltiplo *[r*íe con cierto nerviosismo].

Por su parte, Angely [$E_{2(28)}{}^{9,1}$] difiere de lo planteado por Cristian (E_1) y reconoce que al operar, al evaluar cada una de las expresiones con números naturales específicos, llamados por ella *números verdaderos*, se obtiene una igualdad [$E_{1(24)}{}^{9,1}$]. Realiza una inducción espontánea –de carácter empírico– a partir de la cual garantizar que la igualdad se cumple para cualquier *número verdadero*, es decir, obtiene siempre el mismo resultado y esto, culturalmente, le da sentido a la igualdad entre las expresiones «suma de números consecutivos» y «triple de un número». Los sentidos asignados por E_2 a las expresiones se articulan y no se evidencia un cambio en el sentido asignado a la expresión $(n–1)+n+(n+1)$ para pasar a la expresión $3n$. En el trabajo individual respecto al segundo instrumento, Angely realizó las transformaciones algebraicas de tratamiento que le permitieron mostrar la equivalencia sintáctica entre ambas expresiones, y reconoció explícitamente que *las dos expresiones son las mismas*.

02:04-02:15	33	P	¿Nos puede resumir lo que ha dicho?
	34	E_2	¡Ayy! *[contesta, manifestando cierto cansancio].*
	35	E_1	*[Interrumpiendo]* Yo sí entendí... más o menos.
	36	P	*[Interrumpiendo]* Pero por ahora dejemos que Angely termine...
	37	E_2	Bueno, es cuando usted le da un número o le asigna... *[silencio].*
02:15-02:23	38	P	En este momento ¿está de acuerdo o no está de acuerdo en que esta expresión *[señala en la hoja la expresión (n-1)+ n + (n+1)]* represente el triple de un número? La pregunta es ¿sí o no? *[pregunta a Angely]*.
02:23-02:42	39	E_2	¡Sí!
	40	P	¿Si?
	41	E_2	Sí, porque yo al asig, asig, ehhh...
	42	P	... Asignarle.

	43	E_2	Sí, *[al asignarle]* un número a *n,* entonces *n* va a ser siempre ese número ¿sí?, entonces en la operación va a ser ese y entonces al yo sumar esos me va a dar el triple de un número.
02:42-03:00	44	P	Ya… y *[dirigiendo la mirada a Dairon]*
	45	E_3	Yo diría que sí.
	46	P	… Dairon ¿por qué?
	47	E_3	Pues yo, en mi operación, yo escribí que sí porque *n* son tres números consecutivos iguales, entonces son el triple de un mismo número.
	48	P	¡Ummjú!… ¿Cristian quiere agregar algo?
03:01-03:37	49	E_1	Sí, como decía Angely, que, que esto, al hacer la operación, queda… digamos *n* vale por 2, ehh *[empieza a realizar los cálculos]*, 1 *[el valor de n-1]* más *n*, *[da]* 3, ehh más *n*+1, ehh 2, 3 y 5, sí da 6, seis, entonces el triple de un número sería el *[de]* 2, que es lo que vale *n [el valor dado a n]*.
	50	P	¡Ummjú!
	51	E_1	El triple del número, como dice Angely.
03:37-03:55	52	P	O sea que en este momento estaría de acuerdo con Angely.
	53	E_1	Sí.
	54	P	Y de la respuesta inicial que usted había dado, ¿qué piensa ahora?
	55	E_1	Pues también… pueden ser esas dos [las dos respuestas].
	56	P	¿Es decir?
	57	E_1	Si, o sea, como decía Angely, puede ser esa o puede ser los tres números consecutivos, no…
03:56-04:12	58	E_2	Por lo que, pues por lo que dice consecutivos entonces uno se imagina 1, 2, 3; pues es… ¿sí? pero como uno está diciendo 2, 2, 2 (reemplaza n por 2), entonces ese es el problema ahí, que las dos respuestas pueden ser sí y no.
	59	E_1	Sí…
	60	E_2	… pero, por mi parte, está más entre el sí, que el no *[contesta con cierto tono de duda o inseguridad]*.

La explicación dada por Angely (E_2) permite a Cristian (E_1) reconsiderar su postura inicial al evaluar las expresiones con números específicos [$E_{1(35, 49\text{-}53)}^{9,1}$], aceptando que la expresión *(n–1)+n+(n+1)* es el triple de un número, es decir, se evidencia un posible cambio en el sentido asignado a la expresión *(n–1)+n+(n+1)*; sin embargo, al preguntársele por el trabajo individual [$P_{(54)}$], donde había respondido que dicha expresión no era el triple de un número, E_1 plantea que también esa respuesta podría ser: *pueden ser esas dos* [$E_{1(55)}{}^{9,1}$].

Pero ahora, ante las inquietudes planteadas por Cristian [$E_{1(20)}{}^{9,1}$], quien afirma que el triple de un número no es como la suma de la expresión dada, Angely (E_2) plantea explícita y claramente en qué consiste la dificultad que encuentran: *cuando se habla de números consecutivos entonces uno se imagina 1, 2, 3* pero cuando se habla de triple de un número *está diciendo 2, 2 ,2, entonces ese es el problema, que las dos respuestas pueden ser, sí y no* [$E_{2(58)}{}^{9,1}$], afirmación que es compartida por Cristian. No obstante Angely aclara explícitamente que entre las dos opciones ella *está más entre el sí, que el no* [$E_{2(60)}{}^{9,1}$].

Si bien Cristian (E_1) reconoce que al evaluar las dos expresiones algebraicas con un valor específico obtiene el mismo resultado (el número 6), no evoca explícitamente la equivalencia de las expresiones ni articula los sentidos asignados a cada una de ellas, centrando su atención fundamentalmente en las operaciones realizadas, perdiendo de vista, al parecer, la relación entre las dos expresiones que había sido recordada inicialmente por el entrevistador.

Dairon [$E_{3(45)}{}^{9,1}$] está de acuerdo con lo explicado por Angely (E_2) y afirma que, al evaluar lo obtenido en las dos expresiones, *son el triple de un mismo número* [$E_{3(47)}{}^{9,1}$]. Puede afirmarse que, implícitamente, Dairon articula los sentidos asignados a las dos expresiones. En el instrumento individual, Dairon (E_3) efectúo un procedimiento similar al realizado por Angely durante la entrevista, en tanto evaluó las dos expresiones dadas para dos valores específicos, *n=1* y *n=2*. Si bien no realizó transformaciones algebraicas, reconoció explícitamente que *(n–1)+n+(n+1)* es el triple de un número, argumentando que al evaluar con un número (tomó específicamente *n=2*) el valor de cada expresión era el triple de dicho número.

04:14-04:30	61	P	Veamos, cuando tenemos la expresión *(n-1)+ n + (n+1)*, usted dice que…
	62	E_2	*n,* digamos, lo podemos equivaler por 2, ¿sí? como él dice *[Cristian].*
	63	P	Digamos que sea 2.
	64	E_2	Luego…

04:31-04:41	65	E_1	*(Interrumpiendo)*... Se resuelve.
	66	P	Quedaría, 1 más 2 más 3.
	67	E_1	Sí... 6.
	68	P	Da 6.
	69	E_1	Sí.
	70	E_2	Que sería el triple de *n*.
	71	P	Sería el triple.
	72	E_1	Sí.
04:42-04:56	73	P	¿Y cuándo sería no?, ¿cuándo hay algo de dificultad? *(anteriormente E2 ha planteado que la respuesta puede ser a veces sí y a veces no).*
	74	E_2	Porque, por ejemplo, es que no; por ejemplo él *[Cristian, E1]* dice que no, pues porque tres números consecutivos, porque *n* aquí sería 3, o sea que ya no, o sea, pues no sé...
04:57-05:04	75	P	Miremos si fuese 3, ¿Cómo quedaría? ...
	76	E_2	Ahí sería el triple de 6, no... o sea ahí no quedaría... ese es el no, por ejemplo...
	77	E_1	*[Interrumpiendo]*... ehhh, 6 digamos éste...
	78	E_2	... el 3...
	79	E_1	Éste, *n* vale 3, entonces 2 más 3, ehhh 5, más 4 *[el número 2 hace referencia al valor de n-1 y el 4 al valor de n+1]*, ... 9 y pues también sería el triple de 3 *[... ríe].*
	80	P	No era el triple de 3 ¿quién?
05:22-05:50	81	E_1	No, sí, ¡sí es!
	82	E_2	¡aichh!
	83	E_1	Sí da, entonces, sí, esto es el triple de un número.
	84	E_2	*(Interrumpiendo)*... del número inicial.
	85	E_1	Sí.
	86	P	¿Qué lo está haciendo cambiar de opinión ahora?
	87	E_1	Las operaciones que estamos haciendo.
	88	P	O sea que al hacerlo con números específicos...
	89	E_1	*(Interrumpiendo)* Sí.
05:50	90	P	... ya, se convence.
	91	E_2	Recapacita *(ríe).*
	92	E_1	Sí, señor *(contesta convencido).*

Frente a la duda de Cristian (E_1) respecto a que para $n=2$ la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ es el triple de *n,* pero para otro valor puede que no lo sea, inquietud que ahora parece ser compartida por Angely (E_2, segmentos 74 y 76), el entrevistador les sugiere evaluar dicha expresión para *n=3* [$P_{(75)}$], lo que le permite a Cristian (E_1) evidenciar que para este valor numérico también da como resultado el triple del número y exclama *sí, ¡sí es! [...] sí* da, entonces, sí, é*ste es el triple de un número* [$E_{1(81-83)}{}^{9,1}$], frente a lo cual Angely (E_2) reconoce su posible error, que hace explícito cuando exclama ¡...aichh!, y complementa la afirmación de Cristian (E_1) diciendo *[es el triple] del número inicial* [$E_{2(84)}{}^{9,1}$].

Cristian (E_1) reconoce que el realizar la evaluación de la expresión *(n–1)+n+(n+1)* con dos valores específicos, con *las operaciones que estamos haciendo* [$E_{1(87)}{}^{9,1}$], en ambos casos se obtiene el triple del valor asignado, lo cual le permite convencerse de que dicha expresión algebraica sí es el triple de un número (E_1, segmentos 89 y 92); en palabras de Angely, Cristian *recapacita* y acepta [$E_{2(91)}{}^{9,1}$]; puede afirmarse que reconoce otro sentido para la expresión *(n–1)+n+(n+1)*, el cual logra articular con el sentido inicialmente dado.

Un aspecto a resaltar es que, para algunos estudiantes, el comprobar que para dos o tres valores específicos de *n* las dos expresiones dadas toman el mismo valor numérico, les permite «inducir» que dichas expresiones son iguales para todos los números naturales.

06:01	93	P	y Angely ¿qué dice?... Ahora ¿«más sí», o solo sí?
	94	E_2	Me quedo en mi respuesta.
	95	P	Su respuesta es cuál... ¿que sí?
	96	E_2	Que sí *(Contesta convencida).*
06:01-06:27	97	P	¿Y Dairon?
	98	E_3	Igual.
	99	P	Él no ha cambiado. Bueno, les agradezco, y por último quisiera saber si tienen algún otro comentario o inquietud sobre ese punto, que consideren importante *(silencio).*
	100	E_2	No.
	101	P	Cuando ustedes respondieron por primera vez este punto del cuestionario, o cuando lo respondieron nuevamente con los del curso, ¿lo hicieron igual que ahora o hubo diferencias?
06:27-06:50	102	E_2	Nooo... yo lo hice igual.
	103	E_1	Sí.
	104	P	Pero usted *(se refiere a Cristian)* había dicho al principio que no.

	105	E_1	Sí.
	106	P	¿Y no se había convencido de que sí hasta ahora?
	107	E_1	Sí señor.
	108	P	¿Y por qué cree que en esa ocasión no se convenció?
	109	E_1	Porque, es que, no estaba, o sea yo, yo estaba solo ¿sí? entonces yo estaba haciendo mi operación… no tenía más argumentos para… para aclarar eso…
06:50-07:00	110	P	En este momento, ¿fue el oír la explicación de su compañera lo que lo hizo pensar y cambiar de opinión?
	111	E_1	Ajá.
	112	P	Bueno, les agradezco, han sido muy amables.

A manera de síntesis. En la entrevista (T-1), Cristian (E_1) empieza afirmando que la expresión *(n–1)+n+(n+1)* no es el triple de un número, pues *el triple de un número no es así*… la suma de tres números consecutivos no es *3 veces ese número* [$E_{1(20)}{}^{9,1}$], pero el proceso de interacción durante la entrevista, especialmente con Angely (E_2), le posibilita repensar su respuesta al aceptar la sugerencia que ella hizo de realizar evaluaciones de las expresiones algebraicas con valores específicos (con los valores 2 y 3); es decir, acepta la equivalencia de las expresiones *(n–1)+n+(n+1)* y *3n* mediante el análisis de casos particulares, pero sin generalizar. Se trata de una especie de *inducción empírica*.

Angely (E_2) por su parte reconoce la equivalencia sintáctica de las expresiones algebraicas *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*, y aunque en el trabajo individual había realizado las transformaciones de tratamiento requeridas para verificar dicha equivalencia o identidad algebraica, en la entrevista se apoya en un caso particular, con uno de los que denomina *números verdaderos* [$E_{2(24\text{-}43)}{}^{9,1}$]. Ante la respuesta de Cristian (E_1), quien plantea que *el triple de un número no es así* [$E_{1(20)}{}^{9,1}$], pues reconoce la primera expresión dada como una suma, Angely (E_2) duda y dice que la respuesta puede ser sí o no [$E_{2(60,74\text{-}76)}{}^{9,1}$], lo cual parece compartir E_1.

Dairon (E_3) afirma que la expresión algebraica *(n–1)+n+(n+1)* sí puede ser el triple de un número y mantiene su posición durante la entrevista; si bien habla poco, todo el tiempo estuvo escuchando con atención a sus compañeros y se evidenció que puede operar los términos de la expresión desde lo general, sin requerir realizar evaluaciones con valores específicos [$E_{3(45\text{-}47)}{}^{9,1}$].

Es importante reconocer la fuerza del hecho cultural que «el triple de un número» se asocia casi exclusivamente y de manera inmediata con la operación «multiplicación» y no con una suma, como lo afirma Cristian (E_1), hecho que genera duda en Angely (E_2), quien desde el inicio había aceptado que «la suma de los números consecutivos» es el triple de un número, es decir, quien pudo articular los sentidos asignados a las expresiones a partir de verificar su equivalencia sintáctica, haciendo que cambiara temporalmente de opinión [$E_{2(58)}{}^{9,1}$]. Finalmente Cristian cambia de opinión y acepta [$E_{1(81\text{-}87)}{}^{9,1}$]; Angely, después de analizar dos casos particulares, despeja su duda y se convence [$E_{2(96)}{}^{9,1}$], lo cual, además, convence a Cristian de cambiar el sentido asociado con «el triple de un número», quien reconoce que el trabajo con casos particulares (valores específicos n) propuesto por Angely lo convenció, pues evidenció que «una suma» de números puede ser el triple de un número y, por tanto, también puede ser «una multiplicación» [$E_{1(79\text{-}87,111)}{}^{9,1}$].

Si bien Angely finalmente deja de dudar y acepta la equivalencia entre las dos expresiones, resulta importante destacar que previamente reconoció que veía un problema en cuanto al significado de las dos expresiones, pues cuando pensaba en suma de números consecutivos, evocaba números diferentes (1, 2 y 3), mientras que cuando pensaba en el triple de un número, evocaba números iguales (2, 2, 2) [$E_{2(58)}{}^{9,1}$].

Configuración cognitiva de objetos matemáticos primarios

En los siguientes diagramas se presenta la configuración cognitiva lograda por cada uno de los tres estudiantes, obtenida a partir del trabajo realizado por ellos en pequeño grupo. En este diagrama, mediante una línea continua, se señalan las funciones semióticas establecidas por cada estudiante entre la expresión y el contenido. Las nuevas funciones semióticas, evidenciadas durante la entrevista en la interacción con sus compañeros, son señaladas en el diagrama mediante líneas punteadas en color gris.

Problema (Tarea – Cuestionario 2)

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión $3n$.
2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida: $(n-1)+n+(n+1) = 3n$
3. ¿La expresión $(n-1)+n+(n+1)$ puede interpretarse como ***el triple de un número***?

Lenguaje

Expresión algebraica
Número
Triple
Equivalencia
Igualdad
3n
(n-1)+n+(n+1)

Definición

Resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera

Argumento

Tesis: la propiedad es válida
Razón: al evaluar la expresión en un valor específico, da el mismo resultado

Diagrama 5.16. Configuración final de Cristian: $E_1^{9,1}$

En el trabajo realizado individualmente, Cristian (E_1) estableció una función semiótica entre la expresión *3n* y el contenido «*resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*». Posteriormente, en la interacción con sus compañeros, se evidencia que establece dos nuevas funciones semióticas, una entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y el contenido *3n*, y otra entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y el contenido «*resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*», es decir, asigna el mismo sentido a la expresiones *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*.

Problema (Tarea – Cuestionario 2)

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión *3n*.
2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida: *(n-1)+n+(n+1) = 3n*
3. ¿La expresión *(n-1)+n+(n+1)* puede interpretarse como ***el triple de un número***?

Lenguaje

Número
Multiplicar
Triple
Igualdad
3n
(n-1)+n+(n+1)

Definición

Resultado de multiplicar entre sí (3 y *n*)

Propiedades

(n-1)+n+(n+1)= 3n

Implícitas: Conmutativa y asociativa

Procedimiento

Aplicación de propiedades

Argumento

Tesis: Sí se cumple la propiedad
Razón: Aplicación de propiedades (implícitas)

Diagrama 5.17. Configuración final de Angely: $E_2^{9,1}$

En el trabajo realizado individualmente, Angely (E_2) estableció tres funciones semióticas; una entre la expresión *3n* y el contenido «*resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*», otra entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y

3n, y una tercera entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y «*resultado de multiplicar 3 por un número cualquiera*», es decir, después de la interacción con sus compañeros no establece ninguna función semiótica adicional.

Problema (Tarea – Cuestionario 2)

1. Diga qué significa o que interpretación le asigna usted de la expresión *3n*.

2. Diga si la siguiente igualdad es o no válida: *(n-1)+n+(n+1) = 3n*

3. ¿La expresión *(n-1)+n+(n+1)* puede interpretarse como ***el triple de un número****?*

Lenguaje

Número

Triple

Suma

3n

(n-1)+n+(n+1)

Definición 1

Suma de 3 números (*n* número cualquiera)

Definición 2

Triple de un número

Propiedades

(n-1)+n+(n+1)= 3n

Implícitas: Conmutativa, asociativa e inversa

Argumento

Tesis: la propiedad es válida

Razón: al evaluar la expresión en un valor específico, da el mismo resultado

Diagrama 5.18. Configuración final de Dairon: $E_3^{9,1}$

En el trabajo realizado individualmente, Dairon (E_3) estableció cuatro funciones semióticas; una entre la expresión *3n* y el contenido «*suma de 3 números (n número cualquiera)*», otra entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y *3n (evaluando las expresiones, tomando un valor específico)*, una tercera entre la expresión *(n–1)+n+(n+1)* y «*triple de un número*», y finalmente, una entre la expresión «*suma de 3 números*» y «*triple de un número*»; es decir, la interacción realizada no genera el establecimiento de nuevas funciones semióticas.

Otras evidencias. Si bien en varios casos se evidencia que los estudiantes encuentran dificultad para reconocer la equivalencia sintáctica entre las expresiones algebraicas dadas, los argumentos dados por varios de ellos con respecto a que la expresión *(n–1)+n+(n+1)* no es el triple de un número, apoyan la idea de que no suele ser asociado con una expresión que represente una suma de términos diferentes, sino con una que pueda ser reconocida directamente como «multiplicación por 3» o como suma reiterada (3 veces un mismo número). A manera de ejemplo, se presentan algunas afirmaciones realizadas en otras entrevistas.

Dice Camilo [T-3]: *[...] pues acá, como está (n-1) y acá más, ehh, (n+1), pues ahí no está el triple* [$\text{E}_{7(9,11)}^{9,1}$]. Gina (E_8), integrante de este mismo grupo, tampoco acepta que la expresión *(n–1)+n+(n+1)* sea el triple de un número *porque es tres números consecutivos, no el triple de un número* [$\text{E}_{8(15\text{-}17)}^{9,1}$]. Posteriormente, después de reemplazar *n* por números específicos, reconoce que sí da el triple de un número [$\text{E}_{8(115\text{-}119)}^{9,1}$]. Realiza una especie de *inducción empírica*, y concluye *pues sí, porque si sirve con los números del 1 al... por ejemplo del 1 al 10, entonces sirve con todos, ¿no?* [$\text{E}_{8(140)}^{9,1}$].

César (E_9) plantea inicialmente que la expresión *(n–1)+n+(n+1) no es 3 veces n* [$\text{E}_{9(25)}^{9,1}$], pero procede a evaluar la expresión (toma *n=2*). Rápidamente reconoce que la expresión inicial sí da el triple de un número y da un argumento general: ¡Ahhh no!, sí, sí, ... es el triple de un número... sí porque el que se le resta *acá [se refiere al 1] se lo suma al otro lado* [$\text{E}_{9(34)}^{9,1}$]. Posteriormente lo reafirma para un número cualquiera y plantea un argumento de carácter general [$\text{E}_{9(56\text{-}60)}^{9,1}$].

A manera de síntesis. Después de la interacción en la entrevista, en relación con el reconocimiento de la equivalencia sintáctica entre las expresiones *(n–1)+n+(n+1)* y *3n*, y la articulación de los sentidos asignados a dichas expresiones, la información obtenida se resume así:

	Cristian (E_1)	Angely (E_2)	Dairon (E_3)	Pequeño grupo
Reconoce equivalencia sintáctica	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a expresiones	Sí	Sí	Sí	Sí
Cambio (reconocimiento de equivalencia)	✔			
Cambio (articulación de sentidos)	✔			✔

Tabla 9. Rejilla síntesis (final) –Cristian, Angely y Dairon (T-1)– Grado 9º, Colegio MMC

El proceso de interacción durante la entrevista grupal generó cambios en las interpretaciones realizadas inicialmente por los estudiantes; por una parte, posibilitó que uno de los estudiantes (E_1), quien no articulaba los sentidos de las expresiones, lograra hacerlo; también, que la duda generada en otro de ellos (E_2) se resolviera y afianzara la interpretación inicialmente realizada, posibilitándole afianzar la articulación de los sentidos.

Capítulo 5

Representaciones de objetos matemáticos y articulación de sentidos: algunas dificultades

En este último capítulo se sintetizan los resultados encontrados en la investigación reportada. En el trabajo realizado por estudiantes del grado 9º y del grado 11º en relación con tres tareas específicas, se evidenció la dificultad que encuentran varios de ellos para articular diversos sentidos asignados a expresiones asociadas con un objeto matemático. De hecho, si bien algunos reconocen la equivalencia sintáctica entre dos o más expresiones dadas –en tanto pueden, a partir de una de las expresiones, realizar las transformaciones de tratamiento requeridas para obtener la otra expresión–, no siempre logran articular los sentidos asignados a dichas expresiones e incluso pueden cambiar el sentido inicialmente asignado a una de ellas.

En el capítulo anterior se presentó evidencia de estudiantes que si bien desde el inicio pudieron realizar el proceso de tratamiento requerido para reconocer la equivalencia semiótica entre las expresiones dadas [por ejemplo, $E_3^{11,4}$], no lograron articular los sentidos asignados a dichas expresiones, y solo después de la entrevista en pequeño grupo, pudieron realizar tal articulación [ver Diagramas 5.3 y 5.4]. Por otra parte, estudiantes que a pesar de que inicialmente no pudieron realizar el proceso de tratamiento requerido para reconocer la equivalencia sintáctica entre las expresiones dadas [por ejemplo, $\text{E}_2^{11,4}$ y $\text{E}_1^{9,1}$] ni lograron articular los sentidos asignados a éstas, después de la entrevista en pequeño grupo lograron reconocer la equivalencia sintáctica y realizar la articulación de los sentidos asignados a cada una de las expresiones [ver Diagramas 5.2 y 5.5; 5.13 y 5.16].

Así, desde las evidencias presentadas, es posible cuestionar, o al menos relativizar, uno de los planteamientos realizados por Duval (1995/1999, pp. 16-17; 1999/2004, p. 16) según el cual los principales problemas en el desarrollo de los conocimientos matemáticos, más que estar relacionados con transformaciones tipo tratamiento, lo están fundamentalmente con las de tipo conversión.

Ahora bien, en relación con las transformaciones tipo tratamiento, las dificultades que los estudiantes encuentran para articular los sentidos asignados a expresiones pueden agruparse fundamentalmente en cuatro grupos, los cuales se describen en las secciones que se presentan a continuación.

RECONOCIMIENTO ICÓNICO DE LAS EXPRESIONES

Algunos estudiantes asignan sentido a las expresiones basados de manera casi exclusiva en un reconocimiento icónico de las mismas; así, la forma de éstas determina la interpretación realizada, como se evidencia en la transcripción (t-11), en las intervenciones de Daniel A. (e2) y Daniel D. (e3), para quienes la «ecuación básica» de una circunferencia es aquella en la que las variables están explícitamente elevadas al cuadrado y se encuentran a un lado de la igualdad [$\text{E}_{2(11)}^{11,4}$ y $\text{E}_{3(17)}^{11,4}$]. Estas interpretaciones, como lo plantea Daniel D., se afianzan en el trabajo escolar [$\text{E}_{3(38,40)}^{11,4}$]:

> *uno lo asimila diferente porque no ve esta forma que uno le enseñaron, cómo una circunferencia tiene las dos variables cuadradas [...] Pero, a uno no se lo enseñan con las dos variables a los dos lados de la igualdad.*

En la transcripción T-1 –correspondiente a una entrevista de un pequeño grupo de grado 9º del colegio mmc–, se evidencia que Cristian (e1) logra reconocer una equivalencia entre las expresiones *(n–1)+n+(n+1)* y 3*n*, al menos en casos particulares, para valores específicos de *n*, pero no logra articular los sentidos asignados a cada expresión; inicialmente interpreta la expresión *(n–1)+n+(n+1)* como una suma de tres números consecutivos, pero no como 3 veces un número: *[...] el triple de un número no es así sino [que] esa es la suma de tres números consecutivos, no la suma de... o sea tres veces ese mismo número* [$E_{1(20)}{}^{9,1}$]. Se refleja así un hecho cultural, la asignación de sentidos asociados con la forma de cada una de las expresiones algebraicas.[1]

Otro caso se evidencia en la transcripción (t-8), en las intervenciones de Manuel (e3) y Juan Francisco (e2), del grado 9º del colegio cha. Manuel también centra su mirada en la forma de las expresiones y los procesos asociados con cada una:

> *Porque son tres términos diferentes [se refiere a los términos n-1, n, n+1], para ser el triple de un término tienen que ser iguales, pues ahí no... [$E_{3(55)}{}^{9,4}$].*
>
> *Porque esta expresión tiene sumas, tiene restas, tiene paréntesis, tiene números agregados y tiene los... las, los números... las «enes». El simplemente tiene el «tres ene», el número que equivale a «ene» lo multiplicamos por tres y ya... no tenemos que hacer... [$E_{3(83)}{}^{9,4}$].*

Para E3 la expresión *(n–1)+n+(n+1)* da como resultado la expresión *3n*, pero la primera expresión no es el triple de un número, ya que es la suma de números diferentes; en cambio *3n*, el triple de *n*, requiere términos semejantes o iguales; es decir, cada una de estas expresiones incorpora procedimientos que las diferencian. Por tanto, considera que la expresión *(n–1)+n+(n+1)* no puede ser el triple de un número, pues si bien hay 3 términos, éstos son todos diferentes; pero *3n*, el resultado de realizar las operaciones planteadas en la primera expresión, sí lo es [$E_{3(49)}{}^{9,4}$, $E_{3(55)}{}^{9,4}$]:

> *... Para que sea el triple de un número, los tres términos tienen que ser iguales o semejantes y ahí no muestra eso; ahí muestra que es una operación de tres, pero... no, no creo sea el triple [$E_{3(61)}{}^{9,4}$].*

[1] Muchos docentes, en sus cursos, insisten sobre este tipo de hechos, en tanto consideran que enfatizar en la forma de las expresiones o ecuaciones constituye una «ayuda» para sus estudiantes.

Este estudiante (e3) insiste explícitamente en que la expresión matemática *(n–1)+n+(n+1)* no es el triple de un número, sino que sugiere la realización de un proceso que permite encontrar otra expresión, su resultado: *3n*, el cual sí es el triple de un número:

> *Yo opino que a pesar... es un argumento muy válido,*[2] *pero pues... también se podría tomar en cuenta que si vemos la expresión y la resolvemos la finalidad de la expresión daría como... el resultado, ¿sí? se podría dar como el triple de un número, pero ahí lo que nos están preguntando es si la expresión, nos refiere a eso. Lo que nos quiere decir la expresión es, bueno, ¿es el triple de un número? Y eso no es lo que hace la expresión, la expresión matemática lo que hace es decirnos, como ¡vea, hagan éste... proceso van a encontrar una cosa y eso sí puede ser el triple de un número!, por ese lado tal vez sí sería la respuesta así. Pero en sí la expresión, para mí, no es el triple [$E_{3(67)}{}^{9,4}$].*

> *Pero sí resuelta [después de realizar las operaciones], sí puede dar, sí es el triple de un número entonces por ese lado se podría tomar que sí, pero en sí la expresión no es [$E_{3(77)}{}^{9,4}$].*

Así, este estudiante resalta que cada expresión incorpora un proceso, *(n–1)+n+(n+1)* incluye sumas, restas, números «agregados» y paréntesis, mientras *3n* solo incluye una multiplicación:

> *Pero sí resuelta [después de realizar las operaciones], sí puede dar, sí es el triple de un número entonces por ese lado se podría tomar que sí, pero en sí la expresión no es [se refiere a la expresión (n-1)+n+(n+1)] [$E_{3(77)}{}^{9,4}$].*

> *Porque es una expresión, ahí no me dan términos semejantes y que yo pueda decir cómo, ¡mire! si multiplicamos esto por esto, por esto, o multipliquemos este número por 3; eso no me lo está dando la expresión, la expresión me dice como, ¡vea! haga la expresión y después sí va a encontrar lo que necesita [$E_{3(79)}{}^{9,4}$].*

---

[2] Hace referencia al argumento de su compañero Francisco, quien ha planteado que esa suma no es el triple de un número: «*Para que sea el triple de un número, los tres términos tienen que ser iguales o semejantes y ahí no muestra eso*» [$E_{2(61)}{}^{9,4}$].

> *Porque esta expresión tiene sumas, tiene restas, tiene paréntesis, tiene números agregados y tiene los... las, los números... las «enes». El simplemente tiene el «tres ene» el número que equivale a «ene» lo multiplicamos por tres y ya... no tenemos que hacer... [$E_{3(83)}^{9,4}$].*

> *Porque la expresión no tiene equivalencias... o, pues sí las tiene, pero también tiene otra serie de cosas, tiene los paréntesis, las sumas, las restas... le repito... por eso para mí, ¡no! [$E_{3(105)}^{9,4}$].*

Juan Francisco (E2), con respecto a la expresión $(n-1)+n+(n+1)$, plantea algo similar a lo afirmado por Manuel, diferenciando la expresión dada y la expresión $3n$ en tanto «resultado»:

> *Su resultado sí es el triple de un número, pero lo ahí nos preguntan es si sí es el triple [$E_{2(111)}^{9,4}$].*

> *O sea, que toca buscar la incógnita que es la «ene», entonces tiene que ser tres números iguales para que sea el triple [$E_{2(113)}^{9,4}$].*

> *... Entonces no pueden ser diferentes [los números], y ahí nos pone operaciones [$E_{2(115)}^{9,4}$].*

> *Eso es una simple operación para desarrollar, que sí nos puede dar el triple, no es que nos dé el triple, nos da un resultado que no necesariamente es el... ¿Cómo decirlo? [...] Bueno, a mí me parece que eso no, no es el triple de un número [$E_{2(117)}^{9,4}$; $E_{2(118)}^{9,4}$].*

Es importante resaltar que indagaciones similares a las que aquí se reportan se han realizado, de manera informal, con estudiantes universitarios que cursan carreras relacionadas con la formación de profesores de matemáticas y con profesores de matemáticas en ejercicio, tanto en Bogotá, Valledupar y Pasto (Colombia), como en Ciudad de Guatemala (Guatemala), encontrando resultados similares a los aquí reportados en relación con las tareas propuestas. Por ejemplo, varios estudiantes universitarios que cursaban cuarto semestre (final del segundo año) de licenciatura en el área de matemáticas (abril de 2009) reconocieron la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$ como una «circunferencia», o según otros como una «parábola», pero a pesar de aceptar la equivalencia sintáctica entre la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ y la ecuación $x^2+y^2+2xy-1=0$, no hacían el mismo reconocimiento con la primera ecuación, es decir, no reconocían en ella una «circunferencia», por cuanto no «veían» en la ecuación $x+y=\frac{1}{x+y}$ que las variables estuvieran elevadas al cuadrado.[3]

Otro caso, registrado en un curso corto con estudiantes para profesor de matemáticas y con profesores en ejercicio (Valledupar, octubre de 2009), es el de una profesora de educación secundaria con formación universitaria en el área de matemáticas y experiencia docente de varios años a cargo de estudiantes de los grados 8º a 11º; frente a la pregunta: ¿La expresión *(n–1)+n+(n+1)* puede ser, representar, o interpretarse como, el triple de un número?, planteó inicialmente, y de manera categórica, que no era el triple de un número, pues «*el triple es 3n... mientras que la expresión dada es la suma de tres números consecutivos*»; posteriormente, una vez realizó transformaciones de tratamiento a la expresión dada (las operaciones «indicadas»): *(n–1)+n+(n+1)=n+n+n+1–1=3n*, lo pensó unos segundos y luego, con una expresión de sorpresa, manifestó: «*esto me parece extraño, nunca había pensado en la posibilidad de que la suma de tres números consecutivos pudiese ser el triple de un número... ¡nunca lo había pensado así!» [notas del investigador].*

ANCLAJE A SITUACIONES DADAS

En las diferentes transcripciones se evidencia cierta tendencia a realizar interpretaciones ligadas casi exclusivamente con la situación propuesta, es decir, se evidencia un cierto «anclaje» a la situación dada en la tarea, como en el caso propuesto de encontrar la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par.[4]

Por ejemplo, Jonathan duda de aceptar la fracción 4/8 como la probabilidad pedida (t-9, grado 9º, colegio cha), pues no considera que esta fracción sea «representativa del dado»:

[3] Registrado en apuntes o notas tomadas por el investigador. A disposición de los investigadores interesados.

[4] Se evidencia una fuerte referencia al objeto concreto «dado». Se reconoce así una problemática de tipo cognitivo asociada con el uso de *modelos concretos* en la construcción de objetos de las matemáticas escolares. Si bien el material concreto puede proporcionar un apoyo eficaz a la intuición matemática, en algunos casos puede constituirse en un obstáculo; si bien para el profesor se trata solo de un modelo, para el estudiante puede constituir el objeto de aprendizaje (ver, Maier, 1998).

4/8 no es tan representativo del dado, ya que el dado no tiene ni ocho caras, ni cuatro números pares [$E_{6(13)}^{9,4}$]

Pablo, por su parte, considera que la fracción 4/8 está «mal planteada» pues el dado no tiene 8 caras:

la fracción estaría mal planteada, para [...] resolver el problema, en base de las caras del dado [...] Un dado nunca va a tener ocho caras [$E_{4(23,25)}^{9,4}$].

Daniel, quien acepta que las fracciones 4/8 y 3/6 son lo mismo, en tanto equivalen a la mitad, y que por tanto 4/8 podría ser la probabilidad pedida, considera que esta fracción no permite «precisión» ni sería clara, pues el dado tiene solo 6 caras:

la fracción estaría mal planteada, para [...] resolver el problema, en base de las caras del dado [...] Un dado nunca va a tener ocho caras [$E_{5(108\text{-}112)}^{9,4}$].

Ángela (T-13, grado 9º, colegio CAF) plantea explícitamente [$E_{7(68)}^{9,3}$]:

yo me guié... en las... en la cantidad de caras, de las caras del dado porque es que ahí estaba claramente mencionando [...] así sea el doble el de abajo de el de arriba, yo me guié fue por lo de las caras totales.

INTERACCIÓN Y CAMBIOS EN LA INTERPRETACIÓN

En relación con las entrevistas a pequeños grupos, se evidencia la importancia de contar con espacios de interacción[5] en tanto oportunidad de conocer argumentos de otras personas, dudas, formas de organizar sus ideas, que posibilitan afianzar o modificar las interpretaciones inicialmente realizadas. Es importante precisar que las opciones de interacción, en particular las funciones semióticas explicitadas por unos, no necesariamente son reconocidas o asumidas por sus compañeros; así, no siempre generan cambios en

[5] En relación con la importancia de los procesos de interacción en la construcción de significados, en el contexto escolar, puede consultarse trabajos como el de Cobb (1986) y el de Radford (2006b); este último, en particular destaca la importancia de «aprender a estar con otros, abrirse a la comprensión de otras voces y otras conciencias, en pocas palabras, *a ser-con-otros*» y concebir el aula de clase como «una comunidad de aprendizaje, cuyo funcionamiento está orientado a la objetivación del saber» (p. 117).

su interpretación, en la asignación de nuevos sentidos o en la articulación de los mismos. Por ejemplo Cristian (E_1) se refiere precisamente a las limitaciones del trabajo individual (t-1, Grado 9º, Colegio MMC) e implícitamente a la importancia de contar con otros argumentos para aclarar algunas ideas, particularmente:

> *Porque, es que, no estaba, o sea yo, yo estaba solo ¿Sí? [hace referencia al trabajo realizado inicialmente, de manera individual] entonces yo estaba haciendo mi operación… no tenía más argumentos para… para aclarar eso… [$E_{1(109)}{}^{9,1}$].*

En relación con la importancia de la interacción en el pequeño grupo (T-6, Grado 11º, Colegio EPE), Ricardo (E_8) afirma:

> *[…] a mí lo que dijo Carlos me abrió más a, a formar lo que iba a decir [$E_{8(143)}{}^{11,2}$].*

Si bien las intervenciones y argumentos de otros compañeros del pequeño grupo pueden generar cambios en la interpretación de alguno de los integrantes, cuando los argumentos no son claramente aceptados, dichos cambios pueden darse por periodos de tiempo cortos, como en el caso de Ma. Elvira ($E_1{}^{11,4}$), quien en relación con la tarea 3 (cónicas) realizó una interpretación en el trabajo individual que le permitió articular los sentidos asignados a las dos ecuaciones dadas, luego la cambió en el trabajo en pequeño grupo [Tabla 1], pero durante el desarrollo de la entrevista «retomó» la interpretación inicial [T-11]. Por su parte, los compañeros del pequeño grupo de E_1, Daniel A. (E_2) y Daniel D. (E_3), quienes inicialmente no articularon los sentidos asignados a las dos ecuaciones dadas, en el transcurso de la entrevista logran hacerlo [$E_{2(11,13)}{}^{9,1}$; $E_{3(19, 38, 40)}{}^{9,1}$].

El pequeño grupo integrado por Pablo ($E_4{}^{9,4}$), Daniel ($E_5{}^{9,4}$) y Jonathan ($E_6{}^{9,4}$) constituye otro ejemplo sobre los cambios en la interpretación posibilitados por la interacción en la entrevista en pequeño grupo [T-9], durante la cual se evidencia cómo dos de sus integrantes, Pablo (Diagrama 10) y Jonathan (Diagrama 12), mantienen la interpretación inicialmente realizada, mientras que Daniel (Diagrama 11) cambia su interpretación cuando logra establecer un nuevo sentido de la fracción 4/8 y puede articular los sentidos asignados a las fracciones.

DIFICULTADES CON EL LENGUAJE MATEMÁTICO

En el transcurso del trabajo realizado por los estudiantes con las diferentes tareas, se evidencian dificultades que encuentran varios de ellos en relación con las interpretaciones de las expresiones dadas y con la realización de tratamientos de dichas expresiones, particularmente en el contexto algebraico. Una de estas dificultades tiene que ver con la generalización a partir de algunos casos particulares, como se evidencia en las intervenciones de Ángela [$\text{E}_{7(114\text{-}118)}^{9,3}$, T-13]:

> *... Lo hice primero y pues empecé a hacerlo con casos particulares y me daba, por ejemplo lo hice con el 9, con el 3, por ejemplo con el 9 daba 27 y el 3 me daba 9... [114].*
>
> *En el resultado, entonces yo... pues de ahí, de hacer varios, varias pruebas, si se puede decir así, yo inferí que sí era el triple del número, porque pues 9x3 da 27 y 3x3 da 9 [116].*
>
> *Pues... yo puse... que sí y sostengo, porque pues con esta fórmula... que es igual a ehhh... es como tres veces y es el triple, además... la escritura... [118].*

Otros casos similares se evidencian en las intervenciones de Gina (T-3) [$\text{E}_{8(115,133)}^{9,1}$]:

> *... Dio el número y pues cogí otro número y me dio... 3 veces el mismo número, o sea, sumando 3 [veces] el mismo número dio el resultado entre toda la operación y así lo hice con hartos números y entonces así quedó; siempre daba... 3 veces el mismo número.*

Así como también en las intervenciones de Cristian (T-1) [$\text{E}_{1(35,\,49,\,79,\,83\text{-}89)}^{9,1}$]:

> *Sí, como decía Angely, que, que esto, al hacer la operación, queda... digamos n vale por 2, ehh [empieza a realizar los cálculos], 1 [el valor de n-1] más n, [da] 3, ehh más n+1, ehh 2, 3 y 5, sí da 6, seis, entonces el triple de un número sería el [de] 2, que es lo que vale n [el valor dado a n]. [49]*
>
> *Este, n, vale 3, entonces 2 más 3, ehhh 5, más 4 [el número 2 hace referencia al valor de n-1 y el 4 al valor de n+1]... 9 y pues también sería el triple de 3 [... ríe]. [79]*
>
> *Sí da, entonces, sí, esto es el triple de un número [83].*

En la transcripción t-2 hay evidencia sobre dificultades que encuentran estudiantes de 9° grado para realizar transformaciones de tratamiento de las expresiones algebraicas, por ejemplo Zulay (E_5) y Danna (E_6) afirman que *3n-1=2n* [$E_{5(40)}^{9,1}$; $E_{6(42)}^{9,1}$]; dificultades como ésta han sido reportadas en anteriores investigaciones (ver, por ejemplo, Grupo Pretexto, 1997).[6]

A manera de síntesis. En esta investigación se presenta evidencia que confirma el fenómeno reportado por D'Amore (2006), D'Amore y Fandiño (2008) y posteriormente por Santi (2011), sobre dificultades que encuentran los estudiantes para articular sentidos asociados a expresiones reconocidas por ellos como sintácticamente equivalentes, en tanto pueden establecer las transformaciones requeridas para obtener una de ellas a partir de la otra. La evidencia se obtuvo con estudiantes de grados 9º y 11º de cuatro instituciones educativas de Bogotá (Colombia), a partir de tres tareas asociadas con tres temáticas diferentes.

Se encontró evidencia que permite explicitar posibles causas de esta dificultad para articular los sentidos, asociadas a tres hechos fundamentales. Uno, que aunque los estudiantes «manejan» las propiedades básicas de los sistemas numéricos que les posibilita realizar las transformaciones de tratamiento requeridas para establecer la equivalencia sintáctica de las expresiones, encuentran dificultad para asociar sentidos diversos a las expresiones dadas; dos, la tendencia a anclarse en situaciones específicas planteadas en el contexto por la tarea propuesta; y tres, la «mirada» básicamente icónica de las expresiones algebraicas. De igual manera, se pone en evidencia la importancia de los procesos de interacción como elemento fundamental para posibilitar la articulación de sentidos asignados a expresiones sintácticamente equivalentes. No solo se dispone de cierto tiempo para socializar y reconocer los argumentos presentados por otros sino también, y sobre todo, para analizar los argumentos presentados por unos y otros, los cuales no son asumidos de manera acrítica.

[6] El autor de esta investigación integró el Grupo PRETEXTO durante el periodo 1992-2001, posteriormente sus integrantes conformaron el Grupo MESCUD (Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital).

Referencias

Arqueros, G. (2005). *Propuesta ética de Richard Rorty. La construcción subjetiva de valores y la tarea de la literatura*. Chaco (Argentina): Universidad Nacional del Nordeste. Recuperado de http://www.unne.edu.ar/Web/cyt/com2005/2-Humanidades/H-011.pdf

Bagni, G. (2009). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Bologna: Pitagora

Bruner, J. (1966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Bruner, J. (1988). *Realidad Mental y mundos posibles*. Barcelona: Gedisa.

Bruner, J. (2006). *Actos de Significado: Más allá de la revolución cognitiva* (J. Gómez & J. Linaza, Trads.). Madrid: Alianza (Original publicado en 1990).

Castañares, W. (1985). *El signo: problemas semióticos y filosóficos*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Madrid. Recuperado de http://www.unav.es/gep/TesisDoctorales.html

Castañares, W. (2000). La semiótica de C.S. Peirce y la tradición lógica. *Seminario de Estudios Peirceanos*. Recuperado de http://www.unav.es/gep/Castanares.html

Cobb, P. (1986). Contexts, Goals, Beliefs, and Learning Mathematics. *For the learning of Mathematics, 6*(2), 2-9.

D'Amore, B. (2001). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno, 27,* 51-76.

D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivísticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno, 35*, 90-106.

D'Amore, B. (2005). Pipas, caballos, triángulo y significados. Contribución a una teoría problemática del significado conceptual, de Frege y Manritte, hasta nuestros días. *Números, 61,* 3-18.

D'Amore, B. (2006a). *Didáctica de la Matemática* (A. Balderas, Trad.). Bogotá: Magisterio (Original publicado en 1999).

D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido (pp. 177-196). Radford, L. & D'Amore (Eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. *Relime. Número especial.*

D'Amore, B. & Fandiño (2008). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. *ICMI,* Rome, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, March 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education*, organizers: Gilah Leder and Luis Radford. Disponible en: www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008.

D'Amore, B. & Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. *Relime, 10*(2), 191-218.

D'Amore B. & Martini B. (1999). El «contexto natural». Influencia de la lengua natural en las respuestas a las pruebas de matemáticas. *Suma*, 30, 77-87 (Original publicado en 1998).

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettiva socio-culturale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 29B*(1), 12-39. Recuperado de: http://www.laurentian.ca/NR/rdonlyres/DD8532CD-4C15-48A5-ADEE-3912E865F572/0/DamoreRadfordBagniConversationpaperTraducci%C3%B3n Espanol.pdf

D'Amore B., Fandiño M. y Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendinento della matematica*. Bologna: Pitagora.

Darós, W. (2001). La propuesta filosófica de Richard Rorty. *Revista de Filosofía*, *23*, 95-121.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original publicado en 1995).

Duval, R. (2002). L'apprentissage de l'algebre et le probleme cognitif de la designation des objets. In: Drouhard, J. & Maure, M. (Eds.). *Actes des SFIDA 13-16*, *Vol. XIII* (pp. 67-94). Nice: IREM de Nice.

Duval, R. (2004). *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle (Original de 1999).

Duval, R. (2006a). Transformations de representation semiotiques et demarches de pensee en matematiques. In: J-C. Rauscher (Ed.). *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM* (pp. 67-89). Strasbourg: IREM.

Duval, R. (2006b). *Du mot au concept conversion*. Grenoble: Presses universitaires de Grenoble.

Eco, U. (1986). *La estructura ausente: Introducción a la semiótica*. 3ª Ed. Barcelona: Lumen (Original publicado en 1968).

Font, V. & Ramos, B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de Educación*, *338*, 309-345.

Font, V., Godino, J. & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2): 2-7.

Frege, G. (1985). Sentido y referencia (U. Moulines, Trad.). En: *Estudios sobre semántica* (pp. 51-86). Madrid: Orbis (Original publicado en 1892).

García, A. (2000). Un acercamiento pragmático a la teoría de la acción comunicativa. *Ciencias Humanas,* Nº 19. Recuperado de: http://www.utp.edu.co/~-chumanas/revistas/revistas/rev19/garcia.htm

Garma, A. (2006). El pragmatismo en R. Rorty. Alternativas a la acción comunicativa. *A parte Rei, 43,* 1-14. Recuperado de: http://serbal.pntic.mec.es/~c-munoz11/garma43.pdf

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm#signi_sistemicos

Godino, J. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf

Godino, J., Font, V., Contreras, A. & Wilhelmi, M. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Relime*, *9*(1), 117-150.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Goetz, J. & Lecompte, M. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Goldin, G. (2000). A scientific perspectives on structured, task-based interviews in mathematics education research (pp. 517-545). En A. Kelly & R. Lesh (Eds.). *Handbook of research design in mathematics and science education*. New Jersey London: LEA.

Grupo PRETEXTO (1997). *Transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Universidad Distrital-Colciencias.

Habermas, J. (1990). *Pensamiento postmeta-físico*. Madrid: Taurus.

Laborde, C. (1990). Language and mathematics. In: Nesher, P. & Kilpatric, J. (Eds.). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education*. Cambridge: Cambridge University.

León, O. (2005). *Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría*. (Tesis doctoral). Universidad del Valle. Santiago de Cali (Colombia).

Maier, H. (1998). L´uso di mezzi nelle lezioni di geometría. *La Matematica e la sua didattica,* N° 3, 271-290.

Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática, 19*(3), 5-30.

Montagu, A. (Ed.). (1968). *Man's adaptive dimension*. New York: Oxford University Press.

Nubiola, J. (2004). Pragmatismos y relativismo: C. S. Peirce y R. Rorty. *Intuición, 1*(2), 1-12. Recuperado de: http://revistaintuicion.info/index.php/int/article/view/13/html

Pears, D. (1988). *The false prison*. Oxford: Oxford University Press. Citado por Rorty (1993).

Peirce, C. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce, Vol. 2*. Cambridge (Mass.): Harvard University Press.

Putnam, H. (2000). *Representación y realidad. Un balance crítico del funcionalismo*. Barcelona: Gedisa (Original publicado en 1988).

Radford, L. (2004). Sensible things, essences, mathematical objects, and other ambiguities. *La Matematica e la sua didattica*, N° 1, 4-23.

Radford, L. (2006a). Semiótica y educación matemática (pp. 7-21). Radford, L. & D'Amore (Eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. *Relime, Número Especial.*

Radford, L. (2006b). Elementos de una teoría cultural de la objetivación (pp. 103-129). Radford, L. & D'Amore (Eds.). Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. *Relime*, Número Especial.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities, *PNA, 4*(2), 37-62.

Rorty, R. (1991). *Contingencia, ironía y solidaridad* (A. Sinnot, Trad.). Barcelona: Paidós. Recuperado de: http://www.bioetica.org/umsa/produccion/Rorty.pdf

Rorty, R. (1993). Wittgenstein, Heideger y la reificación del lenguaje (pp.79-99). En *Ensayos sobre Heidegger y otros pensadores contemporáneos. Escritos filosóficos 2* (J. Vigil, Trad.). Barcelona: Paidós.

Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies Mathematics*, *77*, 285-311.

Schubauer-Leoni M. (1988), L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée. In: Perret-Clermont A.-N. & Nicolet M. (eds.) (1988), 251-264.

Schubauer-Leoni, M. y Grossen, M. (1993). Negotiating the meaning of questions in didactic and experimental contracts. *European Journal of Psychology of Education, 8*(4), 451-471.

Vásquez, A. (2005). Rorty: Pragmatismo, ironismo liberal y solidaridad. *Espacios públicos, 8*(16), 200-209.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10(2-3),* 133-170.

Vygotski, L. (2001). Pensamiento y lenguaje (J. Bravo, Trad.). En Vygotski, L. *Obras escogidas*, Tomo II. Madrid: Machado Libros (Original publicado en 1934).

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente* (J. Zanón & M. Cortés, Trads.). Barcelona: Paidós (Original publicado en 1985).

White, L. (1959). The concept of culture. *American Anthropologist, 61*(2), 227-251.

Wittgenstein, L. (1999). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Altaya (Original publicado en 1958). Disponible en http://www.uruguaypiensa.org.uy/imgnoticias/765.pdf

Wittgenstein, L. (1982). *Lezioni sui fondamenti della matematica*. Torino: Boringhieri (1976, *Lectures on the foundations of mathematics*. Itacha: Cornell University Press).

Índice de diagramas y tablas

Diagramas

Tablas

UD Editorial

Este libro fue compuesto en caracteres
Georgia y Gill Sans 10/14,6 puntos.
Impreso en el mes de enero de 2014
en los talleres de Javegraf.
Bogotá, Colombia. 2014

Rojas Garzón, Pedro Javier
Articulación de saberes matemáticos : representaciones semióticas y sentidos / Pedro Javier Rojas Garzón. -- Bogotá : Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2013.
135 p. : il. ; 24 cm.
ISBN 978-958-8832-19-7 / ISBN digital 978-958-8832-33-3
1. Matemáticas - Enseñanza superior - Metodología 2. Semiología (Matemáticas) 3. Enseñanza de las matemáticas I. Tít.
510.7 cd 21ed.
A1423490

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

UD Editorial

La investigación desarrollada en el presente libro podrá serle útil a aquellos docentes universitarios y de colegio que se han encontrado a veces asombrados frente a situaciones como las aquí descritas.

Si es verdad, como lo es, que 3/6 representa la probabilidad de sacar un número par en el lanzamiento de un dado; si es verdad que la fracción 3/6 se puede expresar en su equivalente 4/8; ¿por qué el estudiante o el docente (incluso algunos docentes universitarios) no aceptan que la misma probabilidad puede expresarse con la fracción 4/8? ¿Qué sucede en la organización cognitiva de la sistematización semiótica de las representaciones elementales, en los pasos debidos a transformaciones de tratamiento?

No se trata solo de un problema científico interesante, sino también didáctico concreto, ya que abre el camino a reflexiones muy profundas sobre lo que sucede en el aula, en el mundo de la atribución de significados a objetos matemáticos o, mejor, a sus representaciones semióticas.

Este libro, este hermoso libro, docto y profundo, será de gran ayuda para la comunidad internacional (y por tanto también colombiana) de investigadores y docentes de cualquier nivel escolar.

Bruno D'Amore

FACULTAD DE CIENCIAS Y EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DISTRITAL