El 19 de febrero de 2013, la Universidad de Chipre le concedió a Bruno D´Amore un PhD ad Honorem en Social Ciences and Education, por su militancia activa en el mundo de la investigación científica sobre Didáctica de la Matemática y por los resultados internacionales que ha obtenido.
La ceremonia se llevó a cabo en Nicosia, el 15 de octubre de 2013 a las 19 horas. El profesor D´Amore pronunció un discurso de aceptación en inglés; la que sigue es la versión en español, que nos complace publicar integralmente.

Capítulo 6

Aprender la matemática para usar su lenguaje en modo universal

Bruno D´Amore, PhD.
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
bruno.damore@unibo.it

Sumario. La matemática es la única disciplina que se enseña en todos los países del mundo y cuyos contenidos son más o menos los mismos, dependiendo de la edad de los alumnos. Recientemente la Unesco publicó un extenso documento en el cual se delinean los conocimientos de matemática que son necesarios para los ciudadanos del futuro. Todos nosotros tendemos a resaltar que el rol de la matemática no es solo aplicativo, sino que hay una importancia extraordinaria en el lenguaje que la matemática es capaz de desarrollar, y este es uno de los principales objetivos de su complejo proceso de enseñanza/aprendizaje. Debemos asegurarnos de que los futuros ciudadanos sepan aprovechar el lenguaje de la matemática para interpretar todos los fenómenos de la Naturaleza y las disciplinas que el ser humano está en capacidad de crear. Entre estas el arte y, en modo particular, la música y las artes plásticas. Desde hace décadas, varios críticos del arte usan el lenguaje matemático para interpretar el fenómeno de la creación artística y para describir la obra de artistas que a veces ni siquiera se dan cuenta de la matemática que están usando. La potencia descriptiva y racional del lenguaje matemático revela aquí su extraordinario poder. En esta dirección, se hace cada vez más importante la exigencia de estudiar mejor y más a fondo la didáctica de la matemática para entender cómo se desarrollan las situaciones en el aula. La didáctica de la matemática es una ciencia autónoma que ha asumido

una importancia enorme en las últimas décadas; la investigación científica específica hace que sea cada vez más rica en resultados, gracias, entre otras cosas, a las contribuciones de otros ámbitos del conocimiento humano.

1.

Hay quien hoy en día aún confunde la Pedagogía con la Didáctica. La Pedagogía se puede interpretar en muchos modos; es común la posibilidad de verla como aquel aspecto específico de la Filosofía que pone en evidencia fundamental términos como ética, educación, relaciones entre educando y docente, rol de la escuela en la sociedad, etcétera. La didáctica hace hincapié en conceptos como aprendizaje, instrumentos generales para la construcción cognoscitiva, individuo y sociedad en la formación, relación entre educando y Saber, y entre docente y Saber, etcétera.

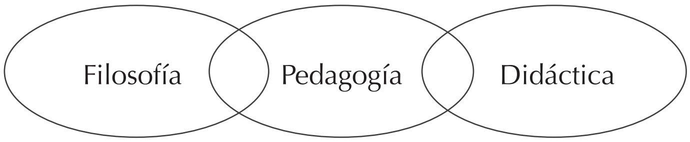


Figura 1

Hoy se puede hablar de al menos tres diversas especializaciones del término Didáctica: una Didáctica General que está a cargo de los temas mencionados en su más amplio sentido problemático; una Didáctica Especial, que se encarga de casos fuera de la norma, casos debidos ya sea a estudiantes particulares, o a situaciones de enseñanza/aprendizaje específicas; una Didáctica Disciplinaria, que pone de relieve las disciplinas individuales en cuanto a su enseñanza/aprendizaje.

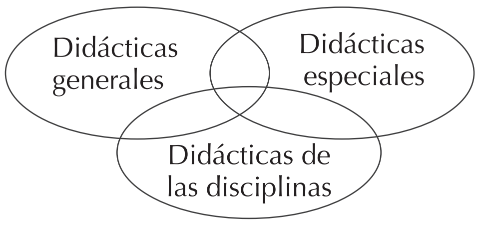


Figura 2

Ya los pedagogos de los siglos XVIII y XIX habían hecho énfasis en el problema del aprendizaje, pero sin distinguir las particularidades de las disciplinas; hoy es claro para todos que aprender Matemática es diferente a aprender natación o Historia del Arte; la prueba es evidente: existen estudiantes que tienen dificultad *solo* con la Matemática. Esta especificidad del aprendizaje, debida a la cada vez más amplia erudición cognitiva de disciplinas individuales, ha llevado en los años 80 a hablar de su fundación epistémica y, por ende, a una Epistemología del aprendizaje específico, por ejemplo de la Matemática, precisamente para destacar las características que lo distinguen de las demás materias.

Así que hoy en día existe una teoría específica que, al interior de las Didácticas disciplinarias (en plural), apunta al aprendizaje específico; en nuestro caso, existe una didáctica de la Matemática que, aunque tiene en común (por ejemplo) con la Didáctica del Idioma algunas características que pueden llevar a pensar en una matriz común en la Didáctica General, se encuadra en los intereses específicos de la Matemática, mucho más que en los de la Pedagogía. Generalmente son los matemáticos quienes se ocupan de la Didáctica de la Matemática en el mundo.

2.

La Matemática es la única disciplina que se enseña en todos los países del mundo y cuyos contenidos son más o menos los mismos, dependiendo más de la edad de los alumnos que de la diversidad de las regiones geográficas o de las condiciones sociales. Recientemente la Unesco publicó un extenso documento en el cual se delinean los conocimientos de Matemática necesarios para los ciudadanos del futuro (Artigue, M., 2011). La lectura de dicho documento es muy estimulante, pues en él se distingue entre conocimientos básicos para el ciudadano común y conocimientos avanzados para poder hacer un uso significativo de la Matemática en sentido crítico y analítico, incluso desde un punto de vista profesional y no solo cívico.

Tal y como se propone en dicho documento, todos nosotros tendemos a evidenciar que el rol de la Matemática no es solamente aplicativo, sino que una importancia extraordinaria está en el lenguaje que la Matemática es capaz de desarrollar, y ese es uno de los principales objetivos de su complejo proceso de enseñanza/aprendizaje.

Tenemos que lograr que los futuros ciudadanos sepan aprovechar el lenguaje de la Matemática para interpretar todos los fenómenos de la Naturaleza y las disciplinas que el ser humano es capaz de crear. Entre ellas el Arte, y particularmente la Música y las Artes plásticas.

A este deber social, un investigador de Didáctica de la Matemática puede decidir dedicarle todo su trabajo.

3.

Mis investigaciones en Didáctica de la Matemática comenzaron muy temprano, cuando yo aún era un joven matemático y nunca me hubiera imaginado que abandonaría la investigación matemática pura para dedicarme a aquella aplicada de la enseñanza/aprendizaje. En el año 1971, dos años después de graduarme como matemático, respondí a la convocatoria de una revista de Didáctica para examinar algunas propuestas didácticas hechas por algunos investigadores. Pero se trató de un evento esporádico.

Cinco años después, regresé con determinación, fruto de una decisión personal, a la Didáctica de la Matemática, abandonando entonces la investigación en matemática pura.

En este nuevo campo, me he dedicado al estudio de las interferencias entre diversos tipos de lenguajes en la actividad escolástica, por ejemplo al «choque» entre un lenguaje formal y uno natural (everiday language) en la práctica escolástica.

Repliqué, con investigaciones adecuadas, la errada tendencia de los años 80 a tratar de transformar la resolución de un problema en un algoritmo, tendencia que nació a raíz de la interpretación ingenua de los libros de divulgación de George Polya; fui más allá, mostrando que este reduccionismo era imposible, y busqué las causas lingüísticas del fracaso de los estudiantes frente a los problemas, en cualquier nivel escolástico.

Examiné durante mucho tiempo el ambiente de trabajo de «laboratorio», lugar del aprender a través del hacer, en el cual el problema se transforma en necesidad concreta, interpretando la acción del alumno en términos de teoría de las situaciones y proporcionando instrumentos para el análisis del fenómeno, en positivo y negativo.

He estudiado ciertos aprendizajes específicos con Martha Isabel Fandiño Pinilla: el cero, las relaciones entre área y perímetro de las figuras bidimensionales, el aprendizaje de la idea de infinito matemático, lo cual me condujo a ser Chief Organizer del Topic Group 14: *Infinite processes throughout the curriculum*, en el VIII ICME, Sevilla, del 14 al 21 de julio de 1996; en esa ocasión, uno de los *advisory panel* fue Raymond Duval. Sobre el tema de las convicciones de los profesores respecto al infinito matemático, dirigí la tesis de doctorado de Silvia Sbaragli, llevada a cabo en Italia pero discutida en Eslovaquia.

He dedicado mucha energía a defender la necesidad del estudio del aprendizaje de la Matemática por parte de estudiantes muy jóvenes, aún del preescolar, pues este posee características muy específicas que proporcionan información sobre los aprendizajes «ingenuos», es decir no formales, incluso a los demás niveles escolásticos.

He dedicado años de investigación y de experimentación a la acción didáctica en el aula a través de la Historia de la Matemática (con Francesco Speranza). Esto me ha llevado a la redacción de un gran número de artículos sobre la Epistemología de la Matemática, labor que prosigue hasta hoy.

En 1986 creé un congreso nacional (internacional en realidad) que se lleva a cabo desde entonces sin interrupción, en el mes de noviembre de cada año, y que reúne miles de participantes; han intervenido algunos de los más famosos investigadores del mundo; en el 2013 tuvimos la edición número 27; durante el mismo año de 1986, fundé una revista de Didáctica de la Matemática que dirigí por 24 años y que cerré, pues me trasladé de Italia para vivir en Colombia; la revista ha publicado investigaciones de los mayores especialistas mundiales y alcanzó la clasificación internacional B.

Quise incluir en mis investigaciones elementos de Etnomatemática y análisis de términos específicos (por ejemplo el término «competencia» con Martha Isabel Fandiño Pinilla y Juan Godino).

Sorprendente fue el resultado de un larguísimo estudio sobre las «demostraciones» espontáneas producidas por los estudiantes al nivel de los grados 9°-10°; puse en evidencia el hecho de que algunas de las «demostraciones» que los profesores juzgaban como no oportunas, lo eran simplemente porque la lógica que las sostenía no era aquella aristotélica, sino la *nyaya* hindú, mucho más concreta y por ende más cercana a las necesidades de los estudiantes, los cuales tratan de anclar su razonamiento no siempre a la deducción lógica (que a su vez se basa en la implicación material, muy difícil de hacer propia) sino al «ejemplo» y a la tesis considerada como hipótesis de partida, las cuales son actitudes típicas de la *nyaya*.

He dedicado mucho tiempo a las dificultades objetivas que los estudiantes de cualquier nivel encuentran en la construcción cognitiva de los objetos de la Matemática, buscando instrumentos para interpretar los errores y para describirlos y evaluarlos (por ejemplo los trabajos sobre los TEP llevados a cabo con Hermann Maier).

He participado en congresos internacionales, siempre con seminarios o conferencias, en Europa, América y Asia; me alegra recordar, particularmente, las numerosas ocasiones de trabajo con el colega y amigo Athanasios Gagatsis («commendatore» de la República Italiana) primero en Thesaloniki y luego en Nicosia, Chipre; compartimos intereses profundos en el campo de las representaciones y de la semiótica.

Siempre he replicado la malsana costumbre de considerar una nueva teoría emergente como la declaración de muerte de las teorías anteriores; en mi opinión, no obstante la presencia de teorías muy significativas y profundas nacidas posteriormente (y en las cuales he colaborado, especialmente en la EOS con Juan Godino), las teorías fundacionales permanecen en la base de la Didáctica de la Matemática, en primer lugar la teoría de las situaciones de Guy Brousseau, fundamento histórico básico de nuestra disciplina; así que siempre he tratado de reevaluar las disciplinas fundacionales, mostrando su coherencia recíproca, y aún más: su necesidad, respecto a problemas específicos de interpretación de las situaciones en el aula, concepto que ubiqué en la base de la descripción de mi investigación que hoy tiene 42 años.

Me he dedicado al estudio de las convicciones sobre la Matemática que tienen los estudiantes y sobre su operar en Matemática, entendiendo de inmediato que era necesario situar en la base de la interpretación de las situaciones en el aula, las convicciones de los profesores, argumento al cual le he dedicado años de investigación (junto con Martha Isabel Fandiño Pinilla), creando además instrumentos para su análisis; las convicciones de los profesores determinan el trabajo matemático en el aula e influencian en gran medida en las convicciones que los estudiantes construyen.

Y, finalmente, fascinado primero por los estudios de Raymond Duval y luego por los de Luis Radford, he dedicado y estoy dedicando todas mis energías a la presencia multiforme de la semiótica en la acción de la enseñanza/aprendizaje de la Matemática; he buscado en la historia de la evolución de la Matemática ejemplos e inspiraciones para la definición de los objetos varios de la Matemática, para analizarlos desde un punto de vista primero epistemológico, y luego didáctico, buscando definiciones oportunas de «objeto matemático». En este sentido, he estudiado por largo tiempo, junto con Martha Isabel Fandiño Pinilla, las variaciones de significado que los estudiantes y profesores les atribuyen a diferentes representaciones semióticas obtenidas entre sí con transformaciones de tratamiento realizadas por ellos mismos. Sobre este ámbito específico hemos publicado varios artículos, participando en congresos internacionales, y he dirigido dos tesis de doctorado internacionales, una en Italia y la otra en Colombia, aunque creo que el problema permanece parcialmente abierto.

A estas alturas estaba maduro para dar un salto en mis convicciones filosóficas profundas, de un moderno pero ingenuo realismo a un maduro pragmatismo, en el cual hoy creo con todo mi ser, debido, además, al hecho de haber colocado teorías antropológicas en la base de mi descripción de los fenómenos didácticos.

4.

Desde el principio he amado mucho el dedicarme a la divulgación de la Matemática, pensando en dirigirme a estudiantes y adultos que no aprecian la Matemática simplemente porque, de hecho, no la conocen; en este campo he escrito un número considerable de libros, coadyuvado en los últimos años por Martha Isabel Fandiño Pinilla y por otros colegas, llegando incluso a recibir premios.

Desde el comienzo de mis estudios he estado fascinado por el lenguaje de la Matemática y por el modo en que este puede ser entendido como base para todos los demás; animado a hacerlo no solo por motivos doctos o cultos –seguro como estoy– de la unidad de la cultura humana, en contra del intento por partir el saber en «dos culturas», sino además por la fascinación que siempre han ejercido sobre mí, desde que era un joven estudiante, la Poesía y el Arte figurativo.

Es así que he dedicado muchos años de estudio a la presencia de la Matemática en las obras de Dante Alighieri y, sobre todo, a esa joya monumental de la poesía universal que es la *Comedìa* (la *Divina Comedia*); gracias a estos estudios he publicado muchos artículos y libros, y he dictado conferencias en varios congresos específicos.

Figura 3

Después de 700 años de la escritura de este monumento al conocimiento humano, he proporcionado indicaciones sobre la interpretación matemática de algunos versos que permanecieron sepultados a causa de la ignorancia matemática de críticos e historiadores de la literatura; hoy en día, algunas interpretaciones usuales de esos versos han sido modificadas por los mismos expertos en el tema que han acogido mis interpretaciones. He usado estos resultados para reiterar la falta de fundamento de la división de las culturas: Dante, en el Medioevo, lograba usar la (escasa) Matemática de la época para describir la Naturaleza y los sentimientos humanos, la Teología y la Lógica, para usar metáforas, para narrar en forma mucho más profunda de lo que la pseudocultura matemática de algunos literatos lo permita en la actualidad. Un motivo más para conocer y hacer propia la matemática, incluso por los humanistas.

Figura 4

5.

A continuación daré un par de ejemplos de cómo la Matemática puede ayudar a entender algunos versos de la *Divina Comedia* que hasta ahora habían permanecido velados para los críticos literarios que no aman la matemática.

Primer ejemplo

Consideremos una referencia aritmética que se encuentra en Par. Canto XXVIII 91-93:

…
L'incendio suo seguiva ogni scintilla;
ed eran tante, che `l numero loro
piú che 'l doppiar delli scacchi s'immilla.
...

Según la traducción de Juan de la Pezuela y Ceballos, Conde de Cheste (1809-1906):

…
y cada chispa a ciento y a mil pasa,
y a número mayor que el que doblado
se cuenta en ajedrez de casa en casa.
…
Según la traducción de Luis Martínez de Merlo:
…
Su incendio cada chispa propagaba;
y tantas eran, que el número de ellas
más que el doblar del ajedrez subía
…
Según otra traducción anónima:
…
A este incendio cada chispa lo imitaba
que eran tantas, que más millares cifraban
que los escaques cuando se duplican.
…

El gran número al que se hace referencia es el de los ángeles que nacen, a cada instante, para testimoniar la gloria de Dios; estos no se cuentan redoblándolos, sino de mil en mil.

¿Qué tan grande es el número de estos ángeles? Pues bien, Dante afirma que su multiplicación por millares pasa «a número mayor que el que doblado se cuenta en ajedrez de casa en casa» o que «más que el doblar del ajedrez subía» o, aún, que «más millares cifraban que los escaques cuando se duplican».

Evidentemente se trata de una referencia a la famosa leyenda de Sissa Nassir, el inventor del ajedrez. Él le pidió como recompensa a su entusiasta soberano, algo aparentemente muy modesto: tomando el tablero de ajedrez de 8 por 8, pidió que se le diera un grano de arroz en el primer escaque; el doble, es decir 2, en el segundo; de nuevo el doble, es decir 4, en el tercero; nuevamente el doble, es decir 8, en el cuarto; y así sucesivamente, hasta llegar al último escaque, precisamente el sexagésimocuarto.

Figura 5

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
2^{24}	2^{25}	2^{26}	2^{27}	2^{28}	2^{29}	2^{30}	2^{31}
2^{32}	2^{33}	2^{34}	2^{35}	2^{36}	2^{37}	2^{38}	2^{39}
2^{40}	2^{41}	2^{42}	2^{43}	2^{44}	2^{45}	2^{46}	2^{47}
2^{48}	2^{49}	2^{50}	2^{51}	2^{52}	2^{53}	2^{54}	2^{55}
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

Figura 6

Con cálculos bastante sencillos en la actualidad, especialmente con el uso de la calculadora, pero que resultan muy arduos con el sistema romano, encontramos que el número de granos de arroz que se le debían a Sissa Nassir es el siguiente: 18 446 744 073 709 551 615, casi ilegible. Con una escritura más compacta, hoy en día se prefiere la llamada notación científica, el número sería $1{,}8447 \cdot 10^{19}$.

Para captar la enormidad de este número, se puede acudir al siguiente recurso: imaginar que se distribuyen los granos de arroz de Sissa Nassir sobre toda la superficie terrestre, cuya medida, expresada con base en los datos actuales (y no en los de la época de Dante), incluyendo mares, océanos, desiertos, glaciares, montañas etc., es de aproximadamente $5{,}0995 \cdot 10^{18}$ cm^2. Si distribuimos los granos, encontramos 3,62 granos (incluso digamos, para redondear, que son 3 granos y medio) por cada cm^2 de superficie terrestre. (Lo cual explica por qué el soberano se sintió burlado y, en vez de premiar a Sissa Nassir, le hizo cortar la cabeza, obteniendo, entre otras cosas, un inmenso ahorro).

Pero el número de los ángeles «más que» redoblarse, como los granos de arroz en el tablero de ajedrez, «se multiplica por millares»; si en vez de redoblar se realiza el mismo cálculo multiplicando por millares (según nuestra interpretación, es decir: un grano en el primer escaque, 1000 en el segundo, 1000000 en el tercero, 1000000000 en el cuarto, y así sucesivamente), se obtiene un número inmenso, pero aún así finito: 10^{189} (solo para hacerse una idea, serían $2 \cdot 10^{170}$ ángeles por cada cm^2 de tierra… Así que debemos regocijarnos por el hecho de que los ángeles sean inmateriales).

Más allá del tono un poco bromista que le quise dar a la historia, hay dos elementos de gran interés.

El primero es que Dante hubiera podido decir que los ángeles que nacen a cada instante para la gloria de Dios son infinitos; respecto al infinito, un número inmenso como 10^{189} es una gota en el mar; pero la elección de un número grandísimo es mucho más significativa que el adjetivo «infinito»; parece una paradoja, pero ese número te da más qué pensar que la palabra «infinito», usada con frecuencia indebidamente.

El segundo es que muchos autores declaran que Dante no conocía los números indoarábigos que, en su época, ya circulaban por Europa pero cuyo dominio estaba aún reservado a pocos. Pero para tener una idea del inmenso valor de esos ángeles, es necesario hacer uso del sistema posicional, pues nunca se lograría llegar a tanto con el sistema romano, no posicional. Una búsqueda banal en las antiguas bibliotecas florentinas arroja que el segundo hijo varón de Dante, llamado

Jacopo, era alumno en una de las tres escuelas fijas de Florencia, la escuela de *Santa Trinita*, donde tuvo como maestro de aritmética a un matemático de cierto prestigio llamado Paolo dell'Abaco, quien en efecto debía enseñar el sistema romano, obligado por los superiores, pero el cual aludía al nuevo sistema árabe del cual circulaban tratados justo en Toscana, a sus estudiantes más dispuestos.

¡Actualmente, la certeza de que Dante no tuviera idea del sistema aritmético posicional ya nos es tan segura!

Segundo ejemplo

Uno de los pasajes matemáticos más famosos de Dante es, sin duda, el constituido por estos estupendos versos de Par. Canto XXXIII 133-138:

…

Qual è il geomètra che tutto s'affige

per misurar lo cerchio, e non ritrova,

pensando, quel principio ond'elli indige,

tal era io a quella vista nova;

veder volea come si convenne

l'imago al cerchio e come vi s'indova;

...

Según la traducción de Juan de la Pezuela y Ceballos, Conde de Cheste (1809-1906):

…

Cual geómetra atento, que procura

el círculo medir, y nunca acaba

de encontrar el principio que le apura,

a aquella vista nueva, tal me hallaba:

ver yo quería cómo se convino

la efigie al cerco y cómo en él se grama;

…

Según la traducción de Luis Martínez de Merlo:

…

Cual el geómetra todo entregado

al cuadrado del círculo, y no encuentra,

pensando, ese principio que precisa,

estaba yo con esta visión nueva;

quería ver el modo en que se unía

al círculo la imagen y en qué sitio;

…

La «Vista Nova» –«Visión Nueva»– debe ser entendida aquí como el contacto directo entre Dante y Dios, a través de la vista. La *Divina Comedia* está por terminar, son los últimos versos. El poeta ha atravesado el Infierno, el Purgatorio, el Paraíso y dentro de poco su viaje terminará y regresará a la Tierra; para concluirlo, amerita la inmensa ventura del contacto visual con Dios.

Debe encontrar una metáfora que le permita explicar la grandiosidad de lo que le está sucediendo, debe relacionar la «Vista Nova» con algo que dé esa idea… y le viene a la mente la Geometría: recurre a aquel «misurar lo cerchio» –«el círculo medir»–.

La metáfora no es banal, pero ha sido mal interpretada durante siglos. En un texto crítico entre los más difusos, se encuentra la siguiente explicación: «como el geómetra que se dedica, concentrando todas sus facultades mentales, al *irresoluble problema* de la cuadratura del círculo…» (la cursiva es mía), «así estaba yo delante a esa extraordinaria visión, en vano…».

¿En qué consiste *exactamente* el problema de la cuadratura del círculo?

Se puede expresar al menos en dos modos, equivalentes entre sí: dada una determinada circunferencia, encontrar un cuadrado o un rectángulo cuyo perímetro tenga la misma longitud de la circunferencia; dado un círculo, encontrar un cuadrado o un rectángulo cuya área tenga la misma extensión del círculo.

Este problema fue resuelto de modo brillante en la antigüedad griega, por ejemplo por Dinostrato en el siglo v (pero no solo por él). Era un hecho bien conocido, difundido entre las personas cultas y no solo entre los matemáticos, bien explicado por Platón, entre otros.

Desde un punto de vista más modestamente escolástico, el lector recordará haber aprendido en IV o V de primaria que una circunferencia de rayo r mide $2\pi r$; así que si se toma un rectángulo de lados 1 y πr-1, la longitud de la circunferencia y el perímetro del rectángulo coinciden; así que el área de un círculo de rayo r es πr^2, como bien sabe cualquier niño de 10 años; entonces, un rectángulo de lados πr y r tendrá un área igual a la del círculo.

Pero entonces, ¿dónde está la *imposibilidad* del problema?

Dante ha recurrido a algo que se sobreentiende; siempre ha sido bien sabido que los matemáticos griegos preferían las soluciones con «regla y compás» (es un modo de decir que esconde algo más preciso que la simple referencia a los dos instrumentos; en este momento no me extenderé en las cuestiones técnicas: podemos imaginar, como primera aproximación, que se trate *verdaderamente* de la utilización de una regla [no graduada] y un compás).

La solución dada por Dinostrato y las dadas por los otros estudiosos griegos sobre la cuadratura del círculo son en efecto correctas, pero NO fueron obtenidas con regla y compás.

En vano y durante siglos, primero los matemáticos griegos y luego gradualmente todos los demás, trataron de cuadrar el círculo con estos instrumentos, inútilmente: hoy sabemos que eso es imposible (lo demostró Lindemann, pero solo en el año 1882). Los griegos debieron haberlo supuesto, aunque en modo implícito: no puede ser casual que los tres problemas más queridos y más estudiados (los tres «problemas clásicos de la geometría griega», muchas veces citados por Platón), entre los cuales se halla, de hecho, este que estamos analizando, fueran perennemente tomados como ejemplo. Los tres problemas, llamados de la Hélade clásica, en cuestión son: precisamente, la cuadratura del círculo; la duplicación del cubo; la trisección del ángulo genérico.

Pero ahora, el problema es: ¿visto que Dante no dice explícitamente «con regla y compás», podemos suponer que él también había caído en el error del Crítico moderno? ¿O que él conocía la cuestión y creía que sus lectores también la conocían, al punto que no valía la pena extenderse en explicaciones meticulosas?

Nunca podremos responder esta pregunta; pero la pericia geométrica de Dante, que se puede detectar en muchos otros puntos de la *Divina Comedia*, así como en otras obras, casi me impulsaría a aventurar que nos encontramos frente a otro ejemplo de derrota actual de la unicidad de la cultura: en Dante las «dos culturas» convivían; en sus lectores actuales, que por desdicha son con frecuencia no solo no-matemáticos sino petulantes y ridículos anti-matemáticos, no conviven en absoluto.

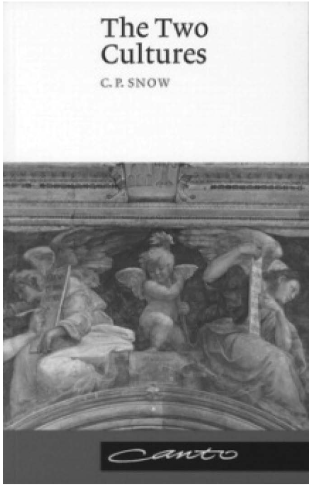


Figura 7

6.

De la misma manera, he dedicado parte de mi actividad de estudio e investigación a las relaciones entre Matemática y Arte figurativo o, mejor, a las relaciones entre sus lenguajes; no solo, como es usual y fácil hacer, buscando aquellos autores y aquellas obras que bien se prestan a interpretaciones matemáticas, como los azulejos decorativos árabes, por ejemplo en La Alhambra de Granada:

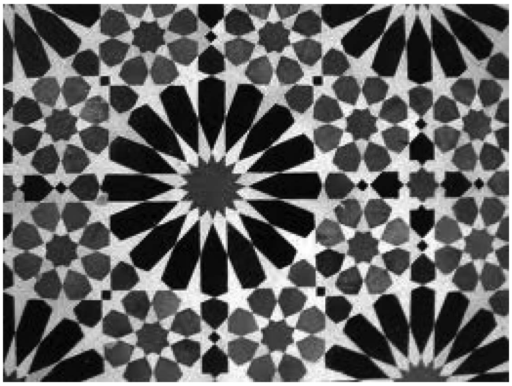


Figura 8

las obras del Renacimiento italiano y alemán, la obra de Maurits Escher o de Oscar Reutersvärd etcétera.

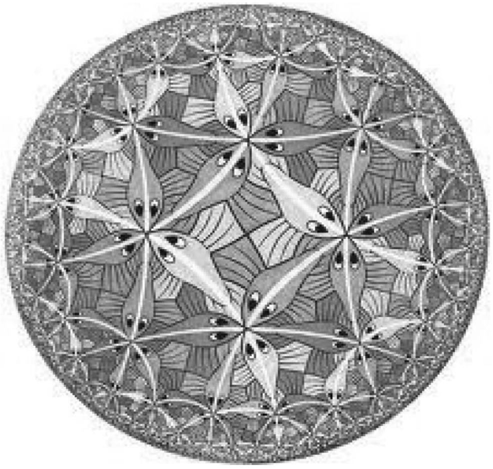


Figura 9.

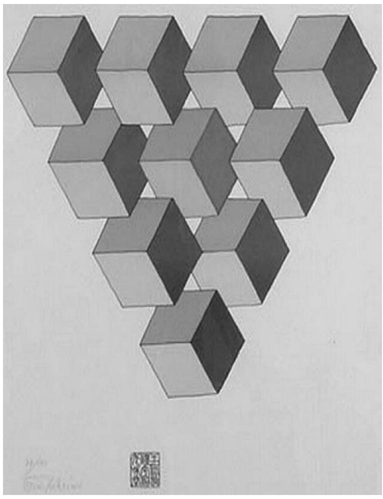


Figura 10

No, demasiado obvio. Mi idea fue y es la de considerar la historia del arte, de todo el arte, y buscar allí interpretaciones diferentes a las típicas de la Crítica del Arte con molde literario, filosófico o psicológico, sustituyéndolas por interpretaciones racionales, matemáticas, formales.

Los amplios resultados, documentados y testimoniados, me han dado la razón.

Entrado a hacer parte de la *Association International des Critiques d'Art*, presentado por Filiberto Menna en 1977, y por ende en contacto con críticos de arte abiertos y con artistas incluso de altísimo nivel, logré imponer un modo de hacer y escribir crítica del arte y organizar muestras internacionales en el sector que se llama *Arte conceptual*, haciendo notar una línea, llamada *Arte exacto*, acogida y seguida después por artistas incluso de gran nombre.

La dicción «Arte exacto» pretende incorporar, al interior del arte, el hecho de que la matemática, al interior de las ciencias, viene siendo llamada «ciencia exacta», según la siguiente «proporción»:

arte exacto : arte = ciencia exacta : ciencia

Sobre este tema he escrito varios centenares entre libros y artículos; el último libro, escrito luego de 20 años de estudios e investigaciones, está finalmente a punto de ver la luz; pero su mole, 1 000 páginas y 4 000 imágenes, todas a color, causan dificultades objetivas de redacción.

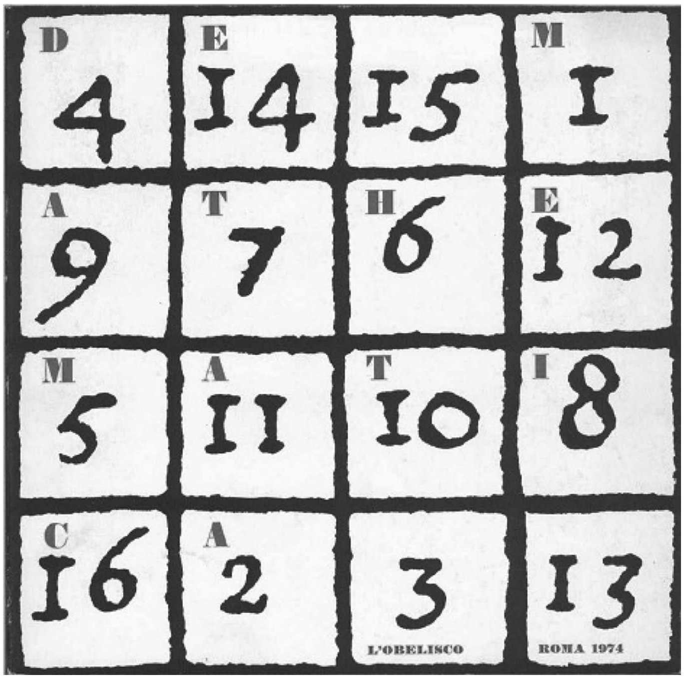


Figura 11. Filiberto Menna y Bruno D'Amore, 1974. *De Mathematica*, International Art Show, Roma, L'Obelisco.

Muchos creen que el estudio de las perspectivas imposibles nació a mitad del siglo XIX, pero eso es completamente falso.

La inteligencia del ser humano se manifiesta en mil modos, uno de los cuales es el gusto por la contradicción. Después de haber buscado durante miles de años las reglas férreas, matemáticas, formales, perfectas de la representación en perspectiva, después de haberlas encontrado, ha querido contradecirlas por el puro gusto cultural e intelectual del reto. Y así, comienza otra historia, regresiva, la historia de quien trata de representar en el plano, por consiguiente en el cuadrado, perspectivas imposibles que sorprenden a quien las descubre y que divierten a quien las analiza.

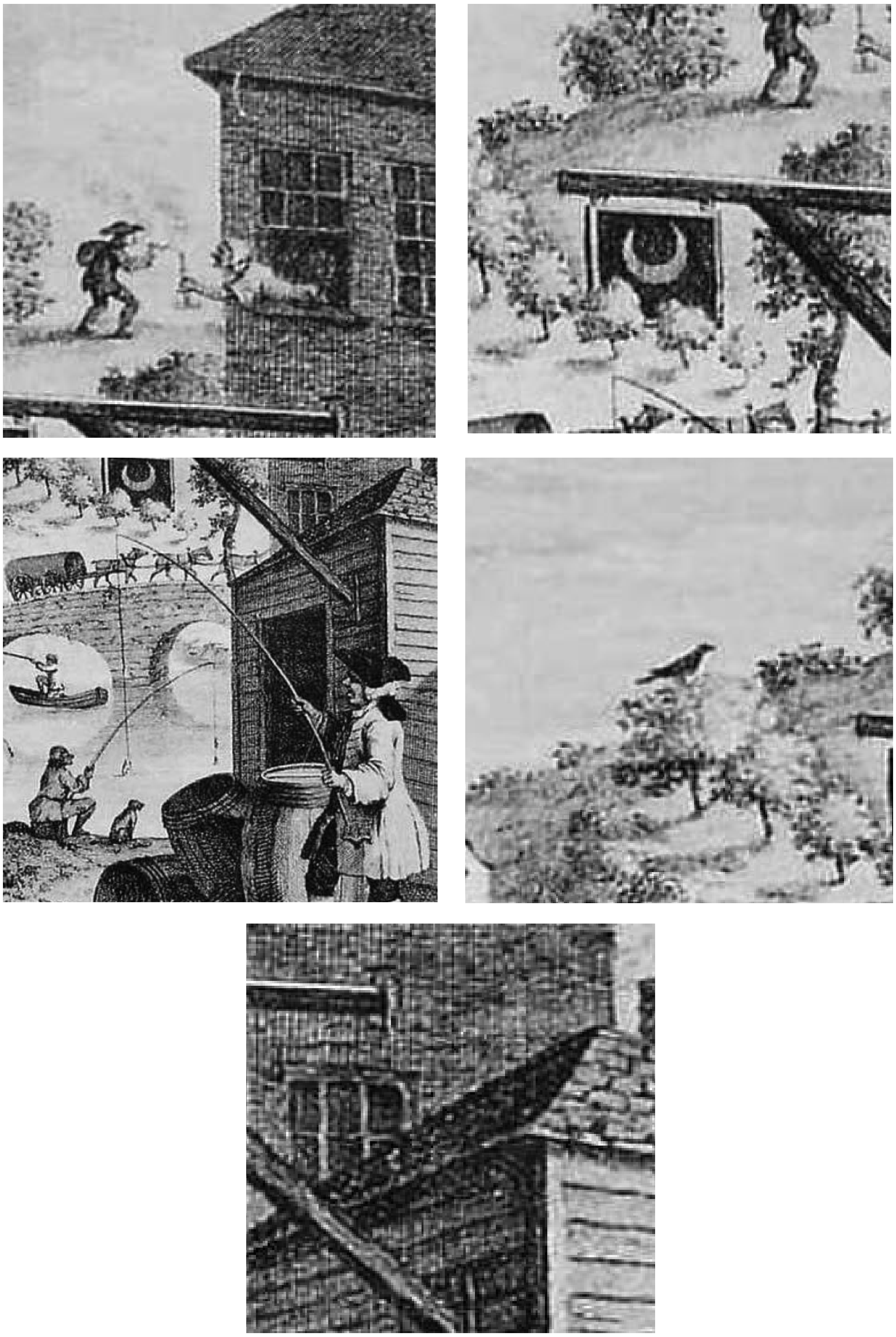
En 1754 viene publicado el libro del estudioso inglés de diseño arquitectónico John Joshua Kirby (1716-1774), con el título kilométrico (como era costumbre en la época): Dr. Brook Taylor's Method of Perspective Made Easy both in Theory and Practice, Being an attempt to make the art of perspective easy and familiar to adapt it intirely to the arts of design; and to make it an entertaining study to any gentleman who shall chuse so polite an amusement. El libro se imprime por W. Craighton en Ipswich, Londres; lo que hoy se llamaría el editor, fueron los señores J. Swan, F. Noble y J. Noble.

El libro es muy curioso, por ejemplo en la numeración de las páginas que no siempre es progresiva. Pero lo que lo hace digno de mención es su ilustrador, el gran pintor, dibujante y grabador inglés William Hogarth (1697 – 1764), autor de irreverentes grabados satíricos que, en su época, causaron sensación.

Ultra famosa y siempre citada es la figura que se encuentra en la portada, titulada *Perspectivas Absurdas*.

Figura 12. William Hogarth, *Prospective Absurdities*, 1754.

Revisemos algunos detalles.



Figuras 13, 14, 15, 16 y 17.

El juego es obvio: cerca-lejos, adelante-atrás se intercambian, gracias, además, a un sutil juego de proporciones y de medidas.

Pero creo que, en el ámbito de las perspectivas imposibles, los artistas más citados del mundo son y deben ser el holandés Maurits Escher (1898-1972) y el sueco Oscar Reutersvärd (1915-2002).

Cuando se citan las perspectivas, y por lo tanto los diseños imposibles, siempre se hace referencia a los estudios de Penrose, padre (Lionel Sharples, psicólogo, 1898-1972) e hijo (Roger, nacido en 1931, matemático y físico, celebérrimo estudioso del espacio-tiempo y de los hoyos negros, narrador formidable), y en particular a un artículo publicado en el *British Journal of Psychology* en 1958 (Penrose, Penrose, 1958) en el cual aparece un célebre «triángulo» imposible.

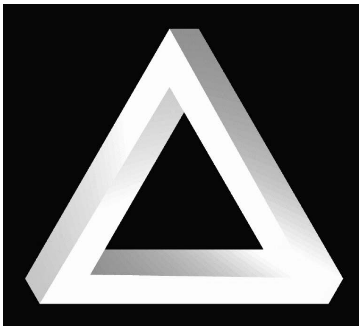


Figura 18. L. S. Penrose y R. Penrose, *Tribar*, 1958

Pero el primer dibujo imposible de Reutersvärd es de 1934, y por lo tanto muy anterior al triángulo de los Penrose (1958).

Entre las famosas ilusiones ópticas, una de las primeras en ser propuesta (1832) fue el cubo de Necker, cuyo nombre se debe al cristalógrafo suizo Louis Albert Necker (1786-1861), presente en la obra *Belvedere* de Escher.

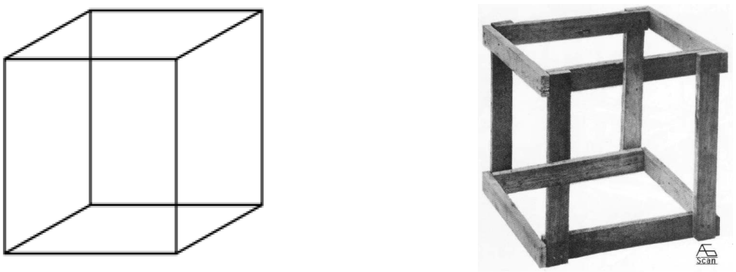


Figura 19

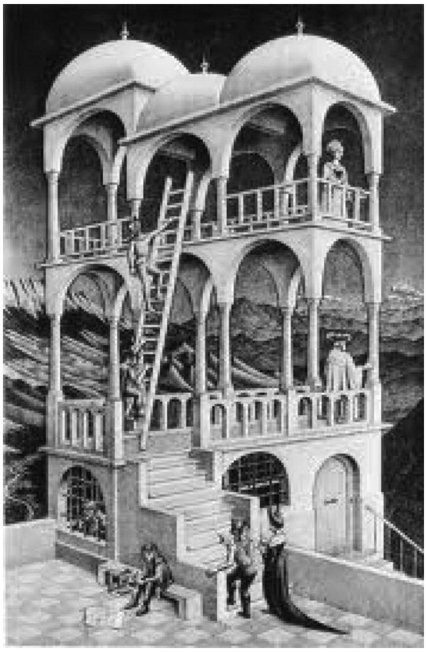


Figura 20

Figura 21

En el libro de Jan Gullberg (1936-1998), *Mathematics, from the birth of numbers,* publicado en 1997, en el capítulo dedicado a la geometría, se hace referencia (p. 347) a *Geometrías Fantasmagóricas*; aparte de una citación rápida de la labor de los Penrose, todo el argumento se centra en el trabajo de Oscar Reutersvärd.

Deseo señalar aquí que una amistad profunda, incluso familiar, y una sólida colaboración, me unieron a Oscar toda la vida; y es gracias a ello que mi esposa Martha y yo tenemos el privilegio de poseer en Bogotá una colección de cientos de sus obras originales, tanto así que las prestamos para un Festival de la Matemática en Roma y para una Muestra de gran relieve cultural en los Museos de Reggio Emilia.

7.

Desde hace décadas, varios críticos de arte usan un lenguaje matemático para interpretar el fenómeno de la creación artística y para describir la obra de artistas que, a veces, ni siquiera se percatan de la Matemática que están usando en su obra.

La potencia descriptiva y racional del lenguaje matemático revela aquí su extraordinario poder. Por lo tanto, además de las motivaciones generales y de las aplicaciones concretas, también en esta dirección está adquiriendo siempre mayor importancia la exigencia de estudiar cada día mejor y más a fondo la Didáctica de la Matemática para entender cómo se desarrollan las situaciones en el aula, el aprendizaje de la Matemática y de sus múltiples lenguajes, los matices semióticos que permiten representar objetos que no captan los cinco sentidos y que por lo tanto pueden ser comunicados y tomados en consideración solo gracias a representaciones semióticas en registros oportunos, sometiéndolos luego a las dos diversas transformaciones semióticas: el tratamiento y la conversión.

La Didáctica de la Matemática es una ciencia autónoma que ha alcanzado una gran importancia en las últimas décadas; la investigación científica específica la hace cada vez más rica en resultados, gracias, además, a las contribuciones de otros ámbitos del conocimiento humano.

Finalmente

Quiero dedicarle este prestigioso reconocimiento a mi esposa Martha, compañera y cómplice, incansable colaboradora en cada aventura, cultural y de vida, persona de una profundidad humana inigualable y de una capacidad crítica portentosa.

Sin su apoyo, sin su fe en mí, nada de esto hubiera podido suceder.

Hoy, y por siempre, cualquier reconocimiento otorgado a mí, en realidad nos viene otorgado a ambos.

Referencias

Artigue, M. (2011). *Les défis de l'enseignement des mathematiques dans l'éducation de base*. Disponible en: http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776f.pdf.