

## Capítulo 5

# APLICACIÓN DEL MVA-N AL OVA: “LA PROPORCIÓN: UNIDAD DIDÁCTICA” DE LA COMUNIDAD ALTER-NATIVA DE MATEMÁTICAS

*Olga Lucía León Corredor*

*UDFJC*

*A mis colegas y amigos: Mariana, Edith, Rosa María, Napoleón, Marlon, William, Diana, Martha, Mónica, Cecilia, Jorge, Alejandro, Andrea y Jaime de la Comunidad ALTER-NATIVA de Matemáticas.*

Este capítulo presenta la aplicación del modelo MVA-N a los resultados de validación del OVA “La proporción: Unidad didáctica y Objeto Virtual de Aprendizaje”, con la pretensión de ofrecer otro enfoque en evaluación en el campo de la educación matemática.

### **Una perspectiva didáctica para la evaluación de OVA en educación matemática**

La validación que aquí se presenta es un proceso de evaluación estructural y relacional, que considera simultáneamente: diseño didáctico del OVA, sistema didáctico que lo aplica y valoraciones de los protagonistas del acto educativo (profesores, estudiantes y observadores) presentes en ciertas relaciones entre los distintos entes del sistema. Se propone como un instrumento para la evaluación de la didáctica vinculada a la formación de profesores de matemáticas para la educación básica.

En educación matemática se pueden percibir dos grandes corrientes de evaluación:

- Las que denomino *Evaluaciones Externas* a los sistemas didácticos, por cuanto son elaboradas por agencias internacionales como: la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA), el Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad (LLECE), la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Estas evaluaciones se aplican a estudiantes de los últimos niveles de la educación básica secundaria, son de tipo comparativo y proceden con instrumentos estandarizados, y son muy reconocidas; como por ejemplo las pruebas TIMMS de la IEA y las pruebas PISA de la OCDE. En ellas se pretende evaluar conceptos, procedimientos y últimamente competencias, lo cual “es el resultado tanto del desarrollo de la teoría de los test, como de la

aplicación de las tecnologías de la información para el procesamiento de los datos” (Díaz, 2006:584). Los profesores son evaluados como buenos o malos según que los estudiantes están en los primeros niveles con mayores puntajes o en los últimos niveles con puntajes bajos (Padilla, 2009). Con los mismos resultados se procede a evaluar los programas de formación de profesores de matemáticas de un país, indicando que ellos son buenos o malos según lo sean los resultados de los estudiantes.

- Las que denomino *Evaluaciones Internas* al acto didáctico, por cuanto son elaboradas por investigadores de la educación matemática o profesores de matemáticas y se realizan con varios tipos de instrumentos, en diferentes momentos de las clases de matemáticas (Sullivan, 2008). Algunas de ellas se aplican solo a los estudiantes y otras a estudiantes y profesores. En este tipo de evaluaciones se pueden ubicar las que el profesor aplica a sus estudiantes en clase “es el profesor quien valida las respuestas o los procedimientos de los estudiantes” (García y Montejó, 2009: 137).

Los resultados de las Evaluaciones Externas afectan las Evaluaciones Internas:

En Colombia el discurso en torno a conclusiones sobre resultados de las pruebas y estandarización del lenguaje de competencias ha impactado en la formación para la enseñanza de las matemáticas y en la manera de concebir las relaciones en el aula. Los modelos de normalización ofrecen métodos pedagógicos y didácticos que aseguran la replicación y uniformidad de una cierta experiencia particular para un conjunto mayor de población (García, 2015: 60).

Las evaluaciones externas e internas coinciden en dar prioridad al aprendizaje del estudiante e ignorar los elementos didácticos que aportan fundamentos para el proceso de enseñanza.

El OVA de la Comunidad ALTER-NATIVA de matemáticas, que es usado en la presente validación, se elaboró bajo los principios de la investigación sustentada en el diseño en educación matemática, los cuales se pueden encontrar en: los experimentos de enseñanza (Simón y Tzur, 2004; Clements y Sarama, 2007; Gómez y Lupiañez, 2007); la ingeniería didáctica (Artigue, 1998; Douady, 1995; León y Calderón, 2012) y la misma investigación acción (Elliot, 1994); así:

La investigación basada en diseño nos ayuda a entender las relaciones entre la teoría educativa, el artefacto diseñado y la práctica. El diseño es central en los esfuerzos para mejorar el aprendizaje, crear conocimiento útil y avanzar en la construcción de teorías sobre el aprendizaje y la enseñanza en ambientes complejos (Design-Based Research Collective, 2003: 5).

La investigación basada en diseño entrega una estructura-efecto de estrategias de trabajo en los que se propone la comprobación de los supuestos de un modelo teórico, transformados en hipótesis (Confrey, 2006). El diseño del OVA de la Comunidad ALTER-NATIVA de Matemáticas (CAM) seleccionó un conjunto de referentes curriculares para la formación de profesores de matemáticas en y para la diversidad.

La necesidad de estructurar un modelo de validación acorde con la estructura de la investigación basada en diseño y por la misma ausencia de modelos de evaluación de dispositivos didácticos en formato digital –acordes con necesidades de considerar sistemáticamente diseños didácticos con experiencias de profesores, observadores de la enseñanza y aprendices–, es satisfecha al presentar en este capítulo evidencia experimental de la aplicación del modelo MVA-N al OVA diseñado por la comunidad CAM.

## **El origen didáctico del OVA de la comunidad de matemáticas**

CAM entrega un sistema de objetos didácticos conformado por:

- Los referentes curriculares con incorporación tecnológica para la formación del profesorado de matemáticas en y para la diversidad. Se puede acceder y descargar la segunda edición de la obra en: [http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/referentes\\_curriculares\\_con\\_incorporacion\\_tecnologias\\_para\\_formacion\\_del\\_profesorado](http://die.udistrital.edu.co/publicaciones/referentes_curriculares_con_incorporacion_tecnologias_para_formacion_del_profesorado)
- La Guía denominada “Orientaciones para la integración de tecnologías para la interacción y comunicación (TIC) en la enseñanza de las matemáticas”. Se puede descargar este producto de: <http://alternativarepositorio.udistrital.edu.co>
- “La proporción”: Unidad didáctica y Objeto Virtual de Aprendizaje. Se puede descargar la unidad con sus OVA de: <http://alternativarepositorio.udistrital.edu.co>

Estos productos son considerados en un sistema didáctico amplio porque el propósito de cada uno de ellos es fundamentar procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y porque los tres objetos didácticos están relacionados, pero con funciones diferenciadas. Los Referentes son el fundamento de orientación y sentido para los demás; la Guía es el fundamento para el diseño pedagógico-didáctico de OVA y, como consecuencia, de la acción de enseñanza del profesor, el OVA es el organizador del proceso didáctico en el aula. A continuación se describe brevemente el contenido de los mismos y se presentan las coordenadas para su localización.

### **Los referentes curriculares con incorporación tecnológica para la formación del profesorado de matemáticas**

La CAM autora de los “Referentes Curriculares con Incorporación de Tecnologías para la Formación del Profesorado de Matemáticas en y para la Diversidad” (León et al., 2013), estuvo conformada por profesores, estudiantes para profesor, investigadores y poblaciones sordas y ciegas pertenecientes a las siguientes universidades: Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense –URACCAN de Nicaragua–, Pedagógica Nacional de México –UPN–, Distrital Francisco José de Caldas –UDFJC– de Colombia; y al Instituto Nacional para Sordos –INSOR–.

La CAM reconoce e incorpora como fundamento para la elaboración de referentes:

- Las múltiples experiencias con lo matemático y su didáctica.
- Las múltiples representaciones de lo matemático y de su didáctica.
- Los múltiples tipos de interacción en los ambientes de aprendizaje.
- Las poblaciones en vulnerabilidad educativa por sus condiciones sensoriales, étnicas o económicas.
- Una metodología de interacción y desarrollo definida por las comunidades de práctica.

Como producto de la conformación de una comunidad de práctica y de los fundamentos asumidos, la CAM entrega al proyecto ALTER-NATIVA los “Referentes Curriculares con Incorporación de Tecnologías para la Formación del Profesorado de Matemáticas en y para la Diversidad” como encuadre para Guía y OVA.

La organización de los referentes curriculares, se centró en tres campos de formación de profesores: la educación<sup>24</sup>, la pedagogía y la didáctica de la matemática: lo que permitió presentar de manera específica, explicaciones teóricas atendiendo a las condiciones pedagógicas y didácticas en educación matemática y a sus relaciones con las diversas poblaciones involucradas en ALTER-NATIVA. Además, permitió realizar un énfasis en las tecnologías, tanto TIC como diferentes a éstas, pero necesarias y útiles en el aprendizaje de las matemáticas. La metodología de trabajo se desarrolló desde los principios del trabajo colaborativo. Con el fin de propiciar un análisis de las relaciones pedagógicas y didácticas en educación matemática –que involucran las tecnologías empleadas en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas–, la CAM se manifestó a favor del compromiso por formar profesores en y para la diversidad. Esto último, con una actitud de acogimiento de la diferencia y de lo heterogéneo, tanto en los aspectos socioculturales y lingüísticos, como en los cognitivos, los sensoriales, los semióticos y los instrumentales, vinculados a la educación matemática.

La producción de referentes curriculares se organizó desde tres campos de formación para los profesores de matemáticas: el educativo como campo general, el pedagógico como campo de identidad profesional y el didáctico como campo específico para el ejercicio profesional. Al interior de cada uno de estos campos se identifican los núcleos generadores de referentes.

---

<sup>24</sup> Se considera la educación como el campo profesional del educador matemático y como la ‘Macro Práctica’ social que incorpora la acción profesional de todos los educadores.

Una educación matemática con todos	
Núcleos	Número y enunciado del referente
América Latina y el Caribe: una fuente de recursos para la formación del educador matemático	R1: La diversidad geográfica, cultural, poblacional y lingüística de América Latina y el Caribe es un recurso para el desarrollo de una experiencia formativa del educador matemático.
	R 2: Las condiciones de todas las poblaciones en América Latina y el Caribe son una fuente de problemas, preguntas y conflictos que orientan el desarrollo de políticas para la educación y la formación de profesores de matemáticas.
	R3: Las acciones matemáticas de las poblaciones en América Latina y el Caribe se constituyen a partir de las sinergias entre tecnologías que se producen por la necesaria relación entre poblaciones con tradiciones ancestrales en el manejo de herramientas y poblaciones que incorporan tecnologías de punta en sus prácticas profesionales, sociales y familiares.
La educación matemática es un factor de desarrollo social, cultural y científico de las poblaciones de América Latina	R4: La educación como eje de desarrollo humano en América Latina y el Caribe se conforma según las transformaciones que se dinamizan por relaciones entre tres tipos de acciones: de asignación de recursos, de acceso a recursos y de optimización de recursos, para la educación y para la educación matemática en particular.
	R5: El desarrollo de la educación matemática en un país vincula todos los sectores sociales que lo conforman.
	R6: La educación matemática prepara al estudiante para ser un actor social y político de su comunidad y de su cultura. R7: La educación matemática promueve y desarrolla los valores de las poblaciones y de su convivencia en comunidad.

**Tabla 12.** Referentes para la formación en una educación matemática con todos

Formación pedagógica del profesor	
Núcleos	Número y enunciado del referente
La pedagogía es un factor importante para favorecer el reconocimiento y coexistencia de la diversidad en los contextos educativos	R8: La pedagogía reconstruye las relaciones en la escuela y con la sociedad para hacer posible la coexistencia con la diversidad.
	R9: La pedagogía como generadora de currículos innovadores y dinámicos que propicien la formación de docentes de matemáticas para el trabajo en contextos de diversidad.
	R10: Las comunidades de práctica son una forma natural de organización de las comunidades educativas en contextos de diversidad, en los que la pedagogía contribuye a reconocer los diferentes tipos de poblaciones que coexisten en el ecosistema heterogéneo del aula.
La pedagogía, constructora de la identidad del educador matemático, para la atención de poblaciones en contextos de diversidad	R11: La pedagogía como constructora de sentido de la práctica educativa del profesor de matemáticas que reconoce a los estudiantes desde sus posibilidades como sujetos.
	R12: La formación pedagógica brinda las bases conceptuales y las competencias necesarias para transformar las prácticas educativas y las concepciones sobre la diversidad y las posibilidades del aprendizaje de las matemáticas en la población sorda, ciega, indígena o en condición de vulnerabilidad económica.

**Tabla 13.** Referentes para la formación pedagógica del profesor

Formación didáctica del profesor de matemáticas	
Núcleos	Número y enunciado del referente
Las experiencias con los objetos de la didáctica de las matemáticas son requerimientos para la formación didáctica de profesores de matemáticas en y para la diversidad	R13: Experiencias matemáticas y didácticas que permiten la interacción entre diversos, dinamizan la formación didáctica para profesores en situación de diversidad
	R14: Cantidad, forma y magnitud estructuran campos de la matemática, de la formación de profesores y de la organización de los contenidos escolares
	R15: Los tipos de experiencias matemáticas y didácticas que surgen de la interacción entre diversos enriquecen y problematizan la formación de profesores
Las experiencias en la formación en una didáctica de la didáctica de las matemáticas, basada en la interacción entre diversos, reconfiguran la didáctica del formador de profesores	R16: Experiencias para el diseño, gestión y evaluación para la interacción entre estudiantes para profesores en situación de diversidad.
	R17: Diseño gestión y evaluación desarrollan la identidad del profesor de matemáticas en la diversidad
	R18: Diseñar, gestionar y evaluar, son actividades que posibilitan instaurar procesos de negociación de significados en aulas de didáctica de las matemáticas con comunidades de profesores para la diversidad.
Las experiencias en ambientes de aprendizaje interculturales y pluritecnológicos son elementos estructurantes y estructuradores de las experiencias de aprender la práctica de enseñar las matemáticas	R19: Las experiencias en ambientes de aprendizaje interculturales y pluritecnológicos en la educación matemática desarrollan identidad del profesor de matemáticas en la diversidad.
	R20: Participación, interacción, comunicación y mediación semiótica instrumental renuevan la identidad del estudiante para profesor de matemáticas.
	R21: Los ambientes interculturales y pluri-tecnológicos dinamizan el desarrollo del conocimiento matemático de poblaciones.

**Tabla 14.** Referentes para la formación didáctica del profesor de matemática

### Guía Orientaciones para la integración de las TIC en la enseñanza de matemática

Las Orientaciones específicas para la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en procesos de formación de profesores de matemáticas en y para contextos de diversidad, se dirigen a los formadores de profesores, profesores en ejercicio, y estudiantes para profesor del área de matemáticas, como usuarios naturales de esta propuesta. Específicamente las Orientaciones surgen de una aplicación de los Referentes en la incorporación de tecnologías para el desarrollo y la formación profesional del profesor de matemáticas, presentan el uso de tecnologías como una mediación para una educación matemática en y para la diversidad.

En las orientaciones se asume que la diversidad en las poblaciones-objetivo presupone que el aprendizaje de la práctica de enseñar matemáticas por un estudiante para profesor, se da en un marco de actividades que auténticamente acogen la diversidad y las TIC; y que el aprendizaje de las prácticas de diseño, gestión y evaluación de ambientes didácticos, con incorporación de TIC para el aprendizaje de las matemáticas de niños y jóvenes, se da en escenarios donde la diversidad de las poblaciones tiene plena manifestación y las condiciones de acceso a la tecnología son motivo de gestión y revisión institucional.

Desde las orientaciones se propone una práctica que enfatiza:

- La diversidad y la tecnología, en la constitución de ambientes pedagógicos y didácticos.
- La didáctica de las matemáticas como eje que propone campos de formación específicos en la constitución del sujeto profesor de matemáticas.
- La formación de profesores como el gran eje curricular articulador de la educación como profesión.

Las orientaciones se organizaron en un formato digital y los formadores acceden a ellas a partir del repositorio ALTER-NATIVA. Las orientaciones se desarrollan en los siguientes apartados:

- Disposiciones para el uso de las orientaciones.
- Pedagogía y didáctica en la formación de educadores de matemáticas.
- Integración de las TIC en diseños didácticos de la didáctica de la matemática.
- Integración de TIC en la Gestión Didáctica.
- Integración de TIC en la Evaluación de la Intención Didáctica.
- Bibliografía y Glosario.
- Vocabulario para Población Sorda.

Se propone que el uso de estas orientaciones, en contextos educativos, pueda ser abordado desde tres aspectos relacionales, que constituyen una guía para el usuario en la navegación de este documento:

- Las sinergias entre tecnologías y educación matemática.
- Las relaciones entre tecnologías y protagonistas del hecho educativo.
- Los elementos de orden práctico y técnico que se ponen en relación.

### **La proporción: Unidad Didáctica y Objeto Virtual de Aprendizaje**

El Objeto Virtual de Aprendizaje (OVA) denominado: La unidad didáctica “La diversidad en el aula de matemáticas: el caso de la proporcionalidad”, ejemplifica el tipo de actividades de aprendizaje que la CAM propone para los programas de formación de profesores de matemáticas. Dichas actividades tienen la particularidad de enfrentar al estudiante para profesor a problemas relacionados con las posibles respuestas que los estudiantes de primaria o secundaria pueden dar en el momento de enfrentar una situación de aprendizaje acerca de la proporcionalidad. Además, las actividades tienen la intención de llevar a reflexionar y analizar las posibilidades de aprendizaje de las matemáticas por parte de todos los estudiantes, que por sus particularidades tienen una

condición de diversidad sensorial, vulnerabilidad económica, social o cultural. Todo esto se apoya en la utilización de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), como mediación comunicativa.

La estructura de la unidad didáctica “La diversidad en el aula de matemáticas: el caso de la proporcionalidad” está conformada por varios apartados y por tres objetos virtuales de aprendizaje (OVA). Éstos, a su vez, se disponen en dos guías. La guía del profesor contiene los propósitos de aprendizaje, la descripción de las actividades y la descripción de la metodología de clase. Por su parte, en la guía del estudiante se encuentran las actividades de aprendizaje clasificadas en: individuales, grupales y de evaluación.

Las tres experiencias de aprendizaje propuestas son:

OVA 1: La diversidad en el aula de matemáticas.

OVA 2: Comprender las producciones matemáticas de los alumnos.

OVA 3: La proporcionalidad y los dibujos a escala.

### Resultados de la aplicación del MVA-N al OVA CAM

Esta parte aplica el modelo de validación MVA-N construido para responder desde una perspectiva pedagógica y didáctica a la pregunta: ¿Es posible relacionar categorías analíticas –de carácter pedagógico-didáctico–, vinculadas a los Referentes Curriculares<sup>25</sup> para que profesores formadores de profesores de matemáticas, observadores del acto educativo de los formadores y estudiantes, valoren desde una perspectiva pedagógica y didáctica, el diseño de un OVA en escenarios naturales con incorporación de TIC? Se trata de identificar en la información recolectada por los instrumentos, si:

- La *acción cognitiva de identificación didáctica* que el profesor realiza cuando interactúa con: i) Guía Orientaciones para la integración de las TIC en la enseñanza de matemática y ii) Objeto virtual de aprendizaje de la proporcionalidad, para organizar un acto de enseñanza, está mediada por el reconocimiento de rasgos vinculados a los Referentes Curriculares (tablas 15 y 16). Esa acción cognitiva de identificación didáctica de ciertos rasgos en OVA, es estudiada mediante la función aritmética de Identificación:  $f_i(x)$ , en la que el comportamiento de  $f_i(x)$  será suficiente para concluir la Presencia (P) de los rasgos pedagógico-didácticos presentes en el OVA.
- La *acción cognitiva de interpretación de la enseñanza* que realiza un observador del proceso de enseñanza que el profesor realiza con el OVA de CAM en un aula de clase y distingue rasgos pedagógico-didácticos implicados en OVA, que fueron vinculados a los Referentes Curriculares. Esa acción cognitiva de interpretación de la enseñanza –a partir de rasgos pedagógico-didácticos puestos en ejercicio de docencia–, es estudiada mediante la

25 De origen curricular.



función aritmética de Interpretación Enseñanza:  $f_{ie}(x)$ , en la que el comportamiento de  $f_{ie}(x)$  será suficiente para concluir acerca del Uso (U) de rasgos pedagógico-didácticos implicados en el uso de OVA.

- *La acción cognitiva de interpretación desde el aprendizaje* que realiza el estudiante para profesor desde su experiencia de aprendizaje para distinguir los rasgos pedagógico-didácticos, implicados en la docencia con OVA, vinculados a los Referentes Curriculares, se ejecuta desde la experiencia que el estudiante para profesor tiene con el OVA a partir de la enseñanza que el profesor realiza con éste. Esa acción cognitiva de interpretación desde el aprendizaje es estudiada mediante la función aritmética de Interpretación Aprendizaje:  $f_{ia}(x)$ , en la que el comportamiento de  $f_{ia}(x)$  será suficiente para concluir acerca del efecto (E) de la presencia de los rasgos pedagógico-didácticos implicados en el uso de OVA.

La validación del sistema didáctico desde el MVA-N compromete: la acción, que selecciona los rasgos de los referentes que son objeto de observación de las tres funciones didácticas; y la acción que da presencia a una dimensión matemática de las funciones, en tanto hay una asignación numérica a un conjunto finito de categorías y subcategorías.

### **Rasgos de los referentes que son objeto de observación y análisis**

El MVA-N propone la validación didáctica de los OVA usando 7-8 categorías<sup>26</sup>, realizando un ejercicio metodológico de conexión entre categorías del MVA-N y rasgos de Referentes Curriculares<sup>27</sup>. El criterio para la selección fue aplicar marcadores textuales para vincular categorías y referentes. El análisis entregó como resultado una distribución no homogénea de los rasgos pedagógico-didácticos contenidos en los referentes curriculares sobre los instrumentos utilizados para recolectar información. La menor representación de referentes se tiene para las categorías Cognición y Aprendizaje (CD) y ATutor (AT) que vinculan rasgos de dos referentes de orden pedagógico y didáctico; la siguiente menor representación está en el Contenido Disciplinar (CD) que vincula tres referentes de orden didáctico; la categoría más representada es Enseñanza (E) con cinco rasgos de referentes de orden educativo, pedagógico y didáctico. La Tabla 15 presenta la relación entre rasgos de Referentes Curriculares en los instrumentos utilizados para validar el OVA. Es decir las 8 categorías hacen presente rasgos de los referentes directamente vinculados.

26 Siete en el caso del instrumento utilizado con profesores y ocho en el caso de los utilizados con observadores y estudiantes.

27 Se hizo un análisis comparativo de contenido entre los rasgos que describen las subcategorías y los enunciados de los referentes, para identificar similitudes de contenido.

Categorías del MVA-N	Referentes directamente vinculados
TIC y enseñanza (TIC),	R3, R19, R20 y R21
Cognición y aprendizaje (CA),	R12 y R19
Enseñanza (E),	R5, R6, R7, R11 y R13
Diversidad (D),	R1, R7, R 17 y R18
Conocimiento disciplinar (CD),	R13, R14 y R15
Enfoque didáctico (ED)	R9, R15, R17 y R18
Orientación a la diversidad (O),	R2, R8, R10 y R16
Uso del profesor de la plataforma de ATutor (AT).	R20 y R21

**Tabla 15.** Análisis relación categorías y referentes curriculares

En un análisis más profundo se pueden identificar desde el MVA-N las relaciones entre subcategorías y referentes y se explicita el intervalo de valores que puede ser asignados por subcategoría a las correspondientes funciones (Ver capítulo 2).

Categorías del MVAN	f <sub>id</sub>	f <sub>ie</sub>	f <sub>ia</sub>	Total sub	Referentes directamente vinculados
TIC y enseñanza (TIC)	4	5	2	11	R3, R19, R20 y R21
Cognición y aprendizaje (CA)	10	11	4	25	R12 y R19
Enseñanza (E)	2	3	2	7	R5, R6, R7, R11 y R13
Diversidad (D)	4	4	2	10	R1, R7, R 17 y R18
Conocimiento disciplinar (CD)	2	3	2	7	R13, R14 y R15
Enfoque didáctico (ED)	8	8	7	23	R9, R15, R17 y R18
Orientación a la diversidad (O)	2	2	1	5	R2, R8, R10 y R16
Uso del profesor de la plataforma de ATutor (AT)		3	4	7	R20 y R21
Totales:	8 categorías	32	39	24	95 subcategorías

**Tabla 16.** Análisis subcategorías y referentes curriculares

El primer resultado que entrega este análisis es:

- Para la *función de identificación didáctica* “f<sub>id</sub>(x)”, el dominio de esta función corresponde a  $1 \leq x \leq 32$ , con x número natural asociado a cada una de las subcategorías de las 7 categorías presentadas por el modelo para identificar presencia (P).

- Para la *función de interpretación enseñanza* " $f_{ie}(x)$ ", el dominio de esta función corresponde a  $1 \leq x \leq 39$ , donde  $x$  es un número natural asociado a cada una de las subcategorías de las 8 categorías presentadas por el modelo, para identificar Uso (U).
- Para la *función de interpretación aprendizaje* " $f_{ia}(x)$ ", el dominio de esta función corresponde a  $1 \leq x \leq 24$ , donde  $x$  es un número natural asociado a cada una de las subcategorías de las 8 categorías presentadas por el modelo, para identificar Efecto (E) en aprendices.

La imagen de estas funciones estará en el intervalo  $[0,100]$ , es decir el menor valor que se podrá asignar a  $x$  será 0 y el mayor 100.

- Las tres funciones didácticas van a informar de la Presencia (P), Uso (U) y Efecto (E) de rasgos de los referentes CAM, desde el uso didáctico que se haga del OVA Unidad Didáctica proporcionalidad; a partir de la visualización del comportamiento de las tres funciones mencionadas.
- A las categorías CA y ED, el análisis relacional vinculó rasgos de los Referentes Curriculares: R9, R12, R15, R17, R18 y R19, y el MVA-N asoció 25 y 23 subcategorías respectivamente. Las dos categorías son las que más variables aportan a las funciones de Identificación e Interpretación Enseñanza y Aprendizaje.
- A Las categorías TIC y D, el análisis relacional vinculó rasgos de los Referentes Curriculares: R1, R3, R7, R17, R18, R19, R20 y R21, y privilegian una amplia manifestación de las funciones de identificación e interpretación de enseñanza.
- A las categorías E, CD, AT, el análisis relacional vinculó rasgos de los Referentes Curriculares: R5, R6, R7, R11, R13, R14, R15, R20, R21, permiten la aplicación de las funciones de interpretación didáctica (enseñanza y aprendizaje).
- A la categoría O el análisis relacional vinculó rasgos de los Referentes Curriculares: R2, R8, R10, R16, privilegia la manifestación de las funciones de identificación y de interpretación de la enseñanza.

Esta aplicación del modelo relaciona de manera sólida las funciones de identificación y de interpretación de la enseñanza para la de la Presencia, Uso y Efecto de los rasgos de los Referentes Curriculares en los tres campos de formación de profesores de matemáticas propuestos.

### **Descripción de los escenarios naturales**

La validación en escenarios naturales se realizó en espacios académicos regulares de los programas de formación de profesores. La distribución de los grupos se presentó como lo indica la tabla 17.

País	Universidad	Número de estudiantes	Número de profesores	Número de observadores
México	Universidad Pedagógica Nacional de México UPN	51	1	1
Nicaragua	Universidad de la Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense URAC-CAN	27	1	1
Colombia	Universidad Distrital Francisco José de Caldas UDFJC	43	3	2
<b>Totales</b>	<b>3 universidades</b>	<b>121</b>	<b>5</b>	<b>4</b>

**Tabla 17.** Estudiantes y profesores que intervinieron en la validación por CAM

Se involucraron asignaturas vinculadas directamente con la didáctica de las matemáticas, la formación matemática y la práctica docente. Es decir, los tres ejes de formación considerados en el documento “Referentes Curriculares con incorporación tecnológica para la formación de profesores de matemáticas para poblaciones en contextos de diversidad”, fueron considerados en las asignaturas involucradas en escenarios naturales de validación.

Universidad	Nombre del programa	Asignatura	Semestre
Universidad Pedagógica Nacional de México UPN	Licenciatura de Educación preescolar y primaria para medio Indígena	Matemáticas y Educación indígena II	Séptimo
Universidad de la Regiones Autónomas de la Costa Caribe Nicaragüense URACCAN	Licenciatura en Ciencias de la Educación con Mención en Matemática	Didáctica de las Matemáticas	Quinto
Universidad Distrital Francisco José de Caldas UDFJC	Licenciatura en Educación Básica, con énfasis en matemáticas	Práctica Intermedia III	Sexto
		Transición aritmética-álgebra	Tercero
		Práctica intermedia II	Quinto
<b>Totales:</b>	<b>3</b>	<b>5</b>	<b>4</b>

**Tabla 18.** Programas curriculares y asignaturas

Aunque es evidente la diversidad temática de las asignaturas de formación, y los semestres en los que se aplicó el OVA, los escenarios de Nicaragua y Colombia tienen asignaturas que se vinculan a formación de licenciados en matemáticas, y el de México para la formación de primaria y preescolar.

## Resultados de la aplicación del modelo en los escenarios naturales de la comunidad CAM

### *Resultados generales*

En este apartado se presentan los resultados de utilizar el MVA-N para analizar los datos obtenidos por la CAM en la validación de OVA en escenarios naturales. El comportamiento macro de las tres funciones de la CAM se corresponden con lo anunciado por el modelo: mayor valor para la función de identificación y menor valor para la función de interpretación aprendizaje. Sin embargo, el análisis micro en cada escenario revela que no en todos los escenarios las funciones tienen ese mismo comportamiento. Se destaca el papel que cumplen la Guía y el OVA cuando entran en relación directa con las tres entidades consideradas por el modelo: Profesor, Observador y Estudiantes. La exigencia del modelo de una acción distinta por parte de cada una de estas entidades, permite informar que:

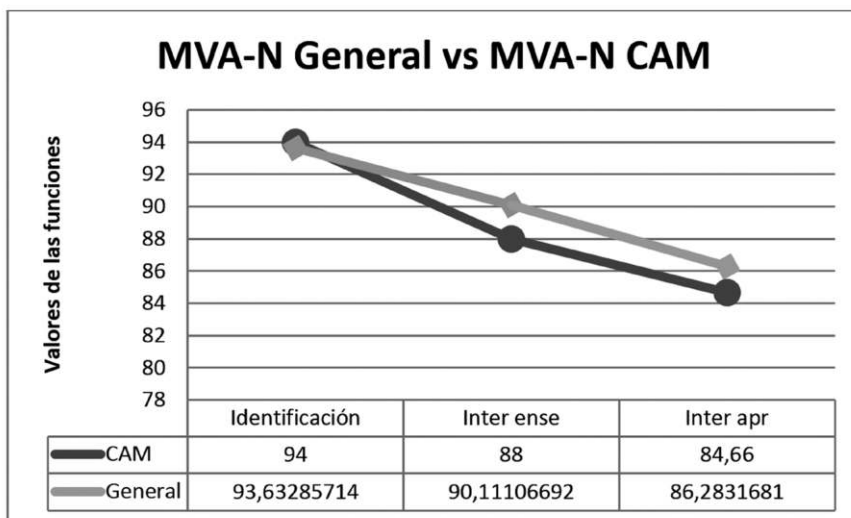
- Cinco profesores universitarios de las asignaturas presentadas en la Tabla 18 –con suficiente idoneidad en la formación de profesores de matemáticas, y en relación directa con la Guía de orientaciones y el OVA de sobre proporcionalidad–, intervienen para asignar valores numéricos de 0 a 100 a cada subcategoría, determinando con la asignación numérica desde la poca Presencia (P) de los indicadores de la subcategoría en OVA, hasta la total presencia de los mismos. Este proceso, que requiere de asignación de valor numérico a la identificación de rasgos pedagógico-didácticos, determina el comportamiento de la  $f_{id}$ .
- Cinco observadores de los procesos de enseñanza de los profesores con suficiente conocimiento de indicadores y categorías, asignan valores numéricos de 0 a 100 a cada subcategoría, determinando con la asignación numérica desde el poco Uso (U) de los indicadores de la subcategoría en la docencia con uso de OVA, hasta el total uso de los mismos. Este proceso, que requiere de asignación de valor numérico a interpretación en la enseñanza de rasgos pedagógico-didácticos, determina el comportamiento de  $f_{ie}$ .
- Ciento veintiún estudiantes, a partir de la experiencia de aprendizaje desencadenada por el proceso de enseñanza del profesor usando el OVA, asignan un valor numérico de 0 a 100 a cada subcategoría, determinando con la asignación numérica desde el poco Efecto (E) de los indicadores de la subcategoría en su aprendizaje, hasta el mayor efecto de los mismos. Este proceso, que requiere de asignación de valor numérico a interpretación en la enseñanza de rasgos pedagógico-didácticos, determina el comportamiento de  $f_{ia}$ .

El análisis general de validación de OVA, utilizando el MVA-N para comprender el comportamiento de los datos, se realiza con los promedios sin distinguir escenarios y, desde las características del modelo, se espera que:

- Los valores más altos se presenten en la función de identificación didáctica que da razón de (P), bajo el supuesto de que el profesor tiene formación específica en la educación, pedagogía y didáctica de la matemática, experiencia en enseñanza, y tendrá una relación directa con el OVA.
- Los valores intermedios se presentarán en la función de interpretación de la enseñanza que da razón de (U), bajo el supuesto de que el observador tiene formación específica y experiencia en enseñanza y no hay relación directa con el OVA.
- Los valores más bajos se presentarán en la función de interpretación didáctica desde el aprendizaje y que da razón de (E), bajo el supuesto que los estudiantes están en formación, no tienen experiencia en enseñanza y no tienen una relación directa con el OVA.

Es decir, la relación esperada entre los valores de la tres funciones en cada categoría debe ser  $f_i > f_{ie} > f_{ia}$

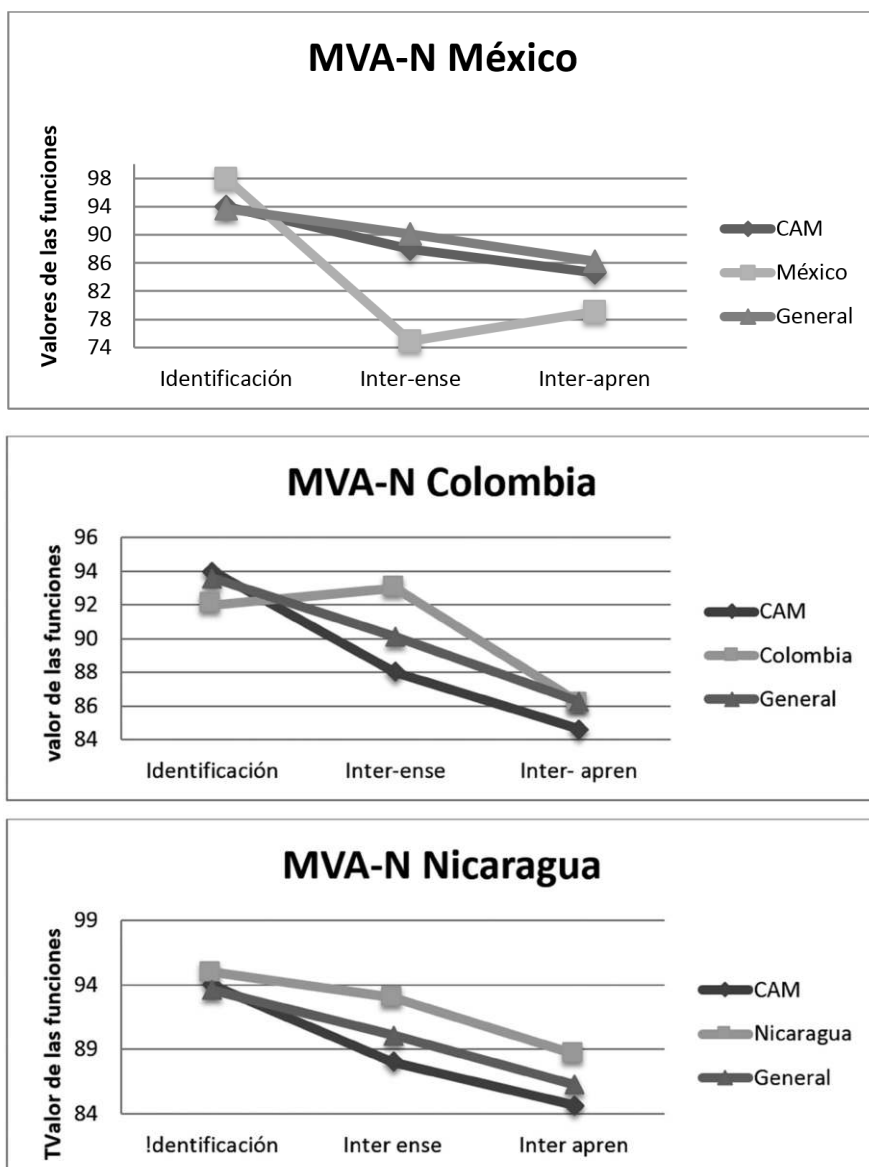
Los resultados macro de las tres funciones CAM se corresponden con lo anunciado por el modelo (CAM en la gráfica 10). En la comparación con los resultados generales de los promedios de las tres áreas (Promedio general en la gráfica 11), se puede destacar que  $f_i$  de CAM está apenas por encima de  $f_i$  de las tres áreas, mientras que  $f_{ia}$  y  $f_{ie}$  de CAM, se encuentran por debajo de los promedios de las tres áreas.



Gráfica 10. Resultados generales MVA-N vs MVA-N CAM

Los análisis por escenarios revelan que en el escenarios de Nicaragua  $f_i > f_{ie} > f_{ia}$ , con lo cual se verifica completamente el modelo y además sus valores se sitúan por encima de los resultados de generales de las tres áreas. Sin embargo, en el escenario Colombia  $f_{ie} > f_i$  y en escenario México  $f_{ie} < f_{ia}$ , es decir en estos

dos escenarios no se realiza lo que el modelo predice teóricamente. Para el caso Colombia la idoneidad del profesor y su relación directa con el OVA, no influyeron en mayores valores para su función que la del observador. Y en el segundo caso la idoneidad del observador, no influyó en mayores valores a su función que la de los estudiantes.



Gráfica 11. Comparativos de MVA-N general, MVA-N general CAM y MVA-N México, Colombia y Nicaragua

Es claro que los resultados generales de CAM se corresponden con lo que anuncia el modelo, por el efecto de promediar los resultados de los tres escenarios, pero no por el efecto de que los resultados de cada uno de los escenarios se correspondan con el modelo.

### **Análisis de las funciones pedagógico-didácticas**

La  $f_i(x) > 90$  en los tres escenarios, indica que el profesor reconoce plenamente los rasgos pedagógico-didácticos que asignan presencia en OVA desarrollada por CAM. Para los casos de México y Nicaragua esta función es la que toma los más altos valores, ratificando los supuestos generales del MVA-N.

La  $f_{ie}(x)$  se presenta de forma diferente en cada país: i) Tiene el más alto valor en Colombia y se puede concluir que todos los rasgos son identificados en el uso; ii) Tiene el más bajo valor en México, lo que puede indicar no visibilidad de los rasgos para la acción de interpretación; iii) Tiene el valor intermedio en Nicaragua, es decir que, además de verificar los supuestos generales de MVA-N, el valor asignado por encima de 90 indica un reconocimiento en el uso de rasgos con esos profesores.

Así, aunque los tres profesores identifican los aspectos relevantes vinculados a los referentes, la  $f_{ie}(x)$  del escenario México, presenta a este escenario como un contexto crítico para la identificación de rasgos en la enseñanza con el OVA 'proporcionalidad' y a Nicaragua como un contexto altamente favorable para identificar P, U y E de los rasgos a partir del uso del OVA.

La función  $f_{ia}(x) > 85$  en los escenarios de Colombia y Nicaragua, indica que desde el aprendizaje se valora el Efecto de los rasgos en aprendizaje de los estudiantes. El escenario de México con  $f_{ie}(x) < f_{ia}(x) < 80$  puede obedecer al tipo de asignatura en la que se validó el OVA, una asignatura con alta presencia de estudiantes indígenas, y menor formación matemática que en los otros escenarios.

El análisis en detalle de la presencia de rasgos se hace en el siguiente apartado donde se analiza función por función de manera aislada.

### **Resultados específicos de cada función**

Los resultados anteriores evidenciaron que, aunque globalmente los resultados de CAM verifican lo anticipado por el modelo, el análisis local indica que solo un escenario verificó el modelo.

Los valores de las tres funciones didácticas, desde lo global y lo local, requieren precisar:

- ¿Por qué la función de identificación ( $f_i$ ) estuvo por debajo de la interpretación enseñanza ( $f_{ie}$ ) en uno de los escenarios locales,  $f_{i < f_{ie}}$ ?
- ¿Por qué la función de interpretación enseñanza ( $f_{ie}$ ) estuvo por debajo de la interpretación aprendizaje ( $f_{ia}$ ) en otro escenario local,  $f_{ie < f_{ia}}$ ?

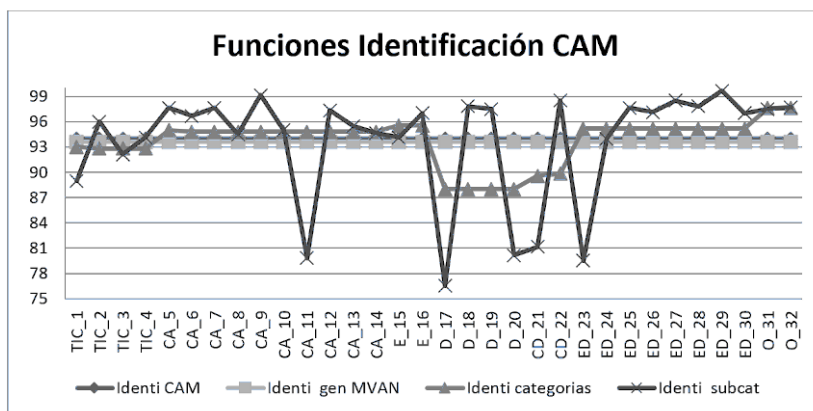


- ¿Por qué la función de interpretación enseñanza ( $f_{ie}$ ) tuvo comportamientos tan diversos en los tres escenarios?
- ¿Por qué los resultados de Nicaragua se sitúan en correspondencia con lo anticipado por el modelo y supera los valores generales del MVA-N de las tres comunidades?
- ¿Existe una explicación desde el modelo para menores valores globales de las tres funciones con respecto de los valores generales de las mismas?

### Resultados función Identificación Didáctica

A continuación se delinearán posibles respuestas a esas preguntas con un análisis en profundidad de cada función. Resultados específicos de la Identificación Didáctica. La acción cognitiva de identificar en un OVA (función cognitiva), ciertos rasgos didácticos propuestos en un instrumento y de asignar un valor numérico (función aritmética) en esa identificación, consolida cuatro tipos de función de identificación didáctica que se analizan a continuación:

- La  $F_{i1}(x) = 94$  función constante, cuyo valor corresponde a los promedios de los valores de las funciones identificación de las tres áreas de conocimiento para comunidad ALTER-NATIVA. Esta función es llamada identificación general del MVA-N.
- La  $F_{i2}(x) = 93,6$  función constante, cuyo valor corresponde al promedio de los valores de las funciones identificación de los tres escenarios de CAM. Esta función es llamada identificación general del CAM.
- La  $f_{i1}$  función definida a trazos por el promedio de los valores de identificación de para cada categoría. Esta función es llamada identificación por categorías CAM.
- La  $f_{i2}$  función definida por el promedio de los valores asignados a cada subcategoría por los profesores CAM. En el caso del análisis por escenarios esta función solo toma los promedios de los valores asignados por los profesores de ese escenario. Esta función es llamada identificación por subcategorías CAM.



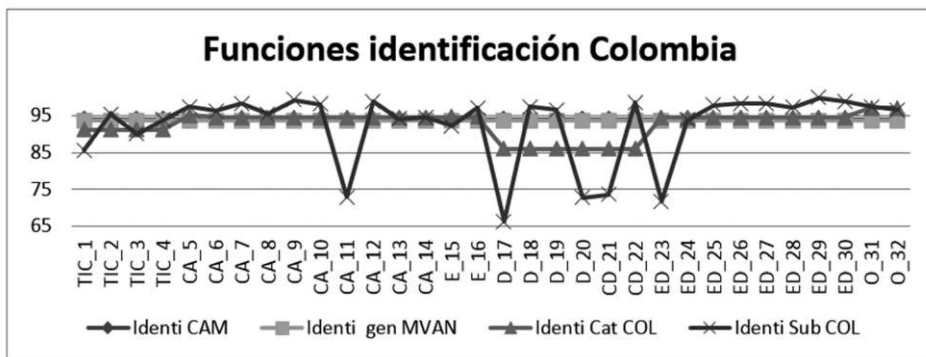
Gráfica 12. Cuatro niveles de la función de identificación en CAM

Las funciones identificación general del MVA-N y de CAM,  $F_{i1}$  y  $F_{i2}$  respectivamente, son tomadas como función de referencia para analizar el comportamiento de las funciones de identificación por categorías y subcategorías,  $f_{i1}$  y  $f_{i2}$  respectivamente. La Gráfica 12 evidencia que  $F_{i2} > F_{i1}$ , es decir, no solo los profesores formadores de profesores identificaron plenamente los rasgos que dan razón de la Presencia de los rasgos didácticos en el OVA y la Guía de CAM, sino también su valoración es mayor que los promedios de identificación general para la comunidad ALTER-NATIVA.

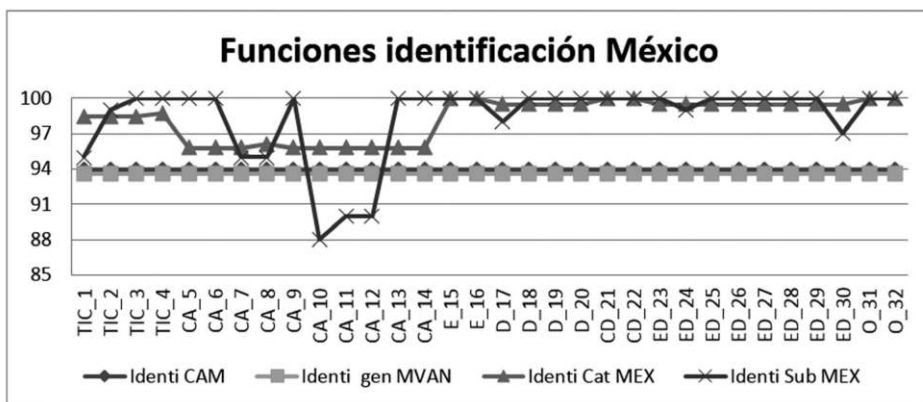
La función de identificación por categorías reportó para las categorías: Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), Diversidad (D) y Conocimiento Disciplinar (CD), menores valores para el promedio de estas categorías que el promedio de la Función identificación CAM ( $f_{i1} < F_{i2}$ ). Estas categorías están asociadas a rasgos provenientes de: R1, R3, R7, R13, R14, R15, R17, R18, R19, R20, R21.

La función de identificación por subcategorías reportó para las subcategorías CA\_11, D\_17, D\_20, CD\_21 y la ED\_23, bajos valores en relación con la de identificación por categorías ( $f_{i2} < f_{i1}$ ), estas subcategorías se relacionan con rasgos didácticos provenientes de los referentes R13, R14, R15, R17, R18, R19 y R20.

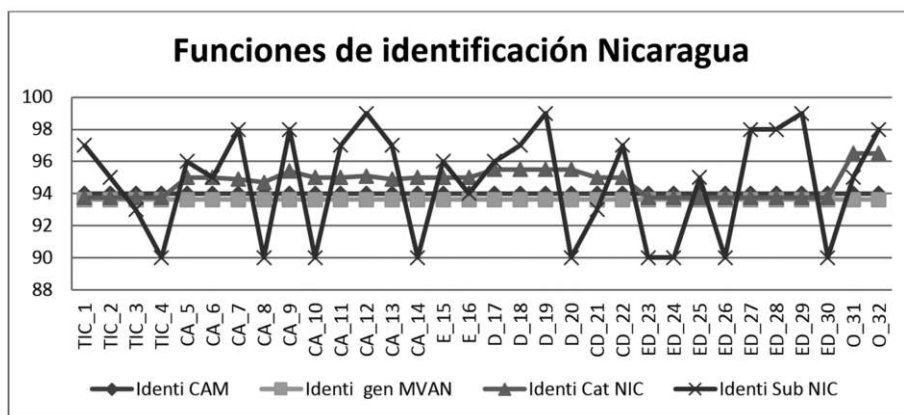
Al observar el comportamiento de las funciones de interpretación en Colombia, México y Nicaragua (Gráficas, 13, 14 y 15), se aprecia que, en el escenario de Colombia, la  $f_{i2}$  reporta valores críticos en las subcategorías ya identificadas en el análisis anterior.



Gráfica 13. Resultados funciones de identificación Colombia



Gráfica 14. Resultados funciones de Identificación México



Gráfica 15. Resultados funciones de Identificación Nicaragua

Los resultados por escenarios evidencian:

- $90 < f_{i2}$  en los escenarios de México y Nicaragua, da razón de una total identificación de subcategorías por los profesores formadores de profesores en esos nodos.
- La  $f_{i2}$  de Colombia en las categorías D, CD y TIC tiene valores más bajos que  $f_{i2}$  de los escenarios de México y Nicaragua.
- $f_{i2}(x) > F_{i2}(x) > F_{i1}(x)$  en México, (salvo la subcategoría CA) en donde la  $f_{i2}$  toma la forma de la Función  $f_{i2}(x)=100$ , indica que este escenario reconoce de una manera plena los rasgos de los referentes en el OVA.
- El comportamiento de la  $f_{i2}(x)$  en Nicaragua no es uniforme por subcategorías, las mayores variaciones están en CA, CD y ED.

Al contrastar los resultados más bajos en la función de identificación, con los resultados del análisis de vinculación de los rasgos pedagógico-didácticos procedentes de referentes curriculares se concluye que:

Resultados análisis en escenarios		Rasgos asociados referentes	
Menor valor en escenario	Escenario	Descripción de la subcategoría	Referentes
$f_i$ (TIC 1)= 86	Colombia	Incidencia de GUÍA en el uso del OVA hacia el proceso de enseñanza .	R19 y R21
$f_i$ (TIC 4)=90	Nicaragua	El OVA establece condiciones de aplicación necesarias para su uso.	R20
$f_i$ (CA 8)= 90	Nicaragua	El OVA exige acciones cognitivas acordes con el enfoque presentado en la GUÍA.	R19
$f_i$ (CA 10)<90	México y Nicaragua	El OVA define las actividades principales para el aprendizaje y su secuencia.	R19
$f_i$ (CA 11)<90	Colombia y México	El OVA determina las actividades cognitivas del sujeto al hacer uso del mismo.	R12
$f_i$ (CA 14)=90	Nicaragua	El OVA define una propuesta de evaluación en función del contenido y tipo de aprendizaje que promueve.	R12
$f_i$ (D 17)=66	Colombia	La GUÍA determina pautas docentes para el manejo del OVA según los rasgos de la población.	R1 y R17
$f_i$ (D 20)<90	Colombia y Nicaragua	El OVA determina el nivel de flexibilidad didáctica a utilizar, según rasgo de la población atendida.	R18
$f_i$ (CD 21)=74	Colombia	El OVA determina los conceptos, tópicos centrales problemas significativos en el uso del mismo.	R14
$f_i$ (ED 23)<90	Colombia y Nicaragua	La GUÍA determina el enfoque didáctico a ser utilizado en OVA.	R15
$f_i$ (ED 24)=90	Nicaragua	La GUÍA indica que para el abordaje de los contenidos, se requiere de utilizar múltiples experiencias –prácticas, ficticias, hipotéticas, etc.– con ellos.	R15
$f_i$ (ED 26)=90	Nicaragua	La GUÍA establece que, en el abordaje de los contenidos, debe considerarse el uso de diferentes ambientes de aprendizaje: grupal, individual; presencial, virtual; estructurado, poco estructurado, etcétera.	R17
$f_i$ (ED 30)=90	Nicaragua	El OVA presenta actividades de enseñanza acordes con los planteamientos teórico-didácticos presentes en la GUÍA.	R18

**Tabla 19.** Menores resultados de la función de Identificación en subcategorías y rasgos de referentes

El comportamiento de la función de identificación tiene las siguientes características:

- 1) Para el OVA Unidad didáctica proporcionalidad,  $f_i(X) > 90$  en los tres escenarios, indica un reconocimiento muy alto de los rasgos de todos los referentes en el OVA.
- 2) Los rasgos procedentes en la Guía, no siempre fueron siempre claramente identificados en OVA en los tres escenarios.
- 3)  $f_i(x) > 90$  en los rasgos de CA y ED que vinculan referentes de tipo pedagógico y didáctico.
- 4) Hay coincidencia en los resultados de Colombia, Nicaragua y México en lo que concierne a rasgos procedentes de R19, y coincidencia de Colombia y Nicaragua en lo que concierne a rasgos que provienen de R12, R15, R17 y R18.
- 5) La mayor coincidencia entre Colombia y Nicaragua en rasgos que se vincularon a referentes de tipo didáctico.

Debido a la coincidencia en rasgos que fueron vinculados al referente 19 es preciso recordar que el R19 enuncia que: “Las experiencias en ambientes de aprendizaje interculturales y pluri-tecnológicos en la educación matemática desarrollan identidad del profesor de matemáticas en la diversidad”, es un referente que por las coincidencias obtenidas en los resultados de identificación de rasgos que se vinculan a ese referente, se puede destacar que el diseño del OVA en lo que concierne a esos aspectos fue en alto grado asertivo.

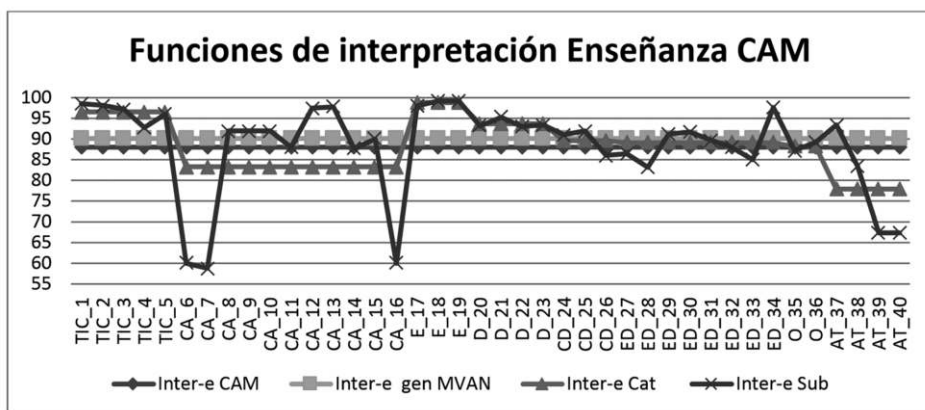
Estos resultados ponen en evidencia que el modelo permite resaltar aspectos precisos del sistema didáctico en validación ya sea en el comportamiento de la función de identificación, como de las categorías que la componen, en lo que concierne a características de tipo pedagógico y didáctico presentes en los rasgos valorados.

Para el modelo, las asignaturas son factores del sistema didáctico y los resultados en la valoración del OVA *unidad didáctica proporcionalidad*, evidencian que hay valoraciones más altas en los resultados de identificación, en aquellos escenarios en los que el profesor era profesor de asignaturas de enfoque didáctico en programa de formación de profesores de matemáticas para la secundaria como puede ser el caso de Nicaragua; en contraste con los resultados del escenario de México en los que la asignatura está en un programa de formación de profesores de preescolar y primaria.

### Resultados específicos de la Interpretación-enseñanza

La acción cognitiva de interpretar rasgos pedagógico-didácticos procedentes de observar un proceso de enseñanza con el uso de un OVA (función cognitiva) y encontrar evidencias de tales rasgos con la mediación de un instrumento de observación y valoración con asignación numérico (función aritmética) a dichos rasgos, consolida cuatro tipos de función de interpretación de la enseñanza que se analizan a continuación:

- La  $F_{ie1}$  función constante cuyo valor imagen corresponde a los promedios de los valores de las funciones de interpretación enseñanza de las tres áreas de la comunidad ALTER-NATIVA (línea con valor constante en 90, en la siguiente gráfica). Esta función es llamada interpretación de la enseñanza general involucrada en el MVA-N.
- La  $F_{ie2}$  función constante cuyo valor imagen corresponde al promedio de los valores de las funciones interpretación-enseñanza en los tres escenarios de CAM (línea con valor constante en 88, en la siguiente gráfica). Esta función es llamada interpretación de la enseñanza CAM.
- La  $f_{ie1}$  función definida a trazos por el promedio de los valores de interpretación-enseñanza para cada categoría (línea con valores oscilando entre 77 y 99). Esta función es llamada interpretación de la enseñanza por categorías CAM.
- La  $f_{ie2}$  función definida por el promedio de los valores de interpretación-enseñanza asignados a cada subcategoría por los profesores de los tres escenarios (línea con mayor variación en valores en la siguiente gráfica). Esta función es llamada interpretación de la enseñanza por subcategorías CAM.



Gráfica 16. Funciones de interpretación enseñanza CAM

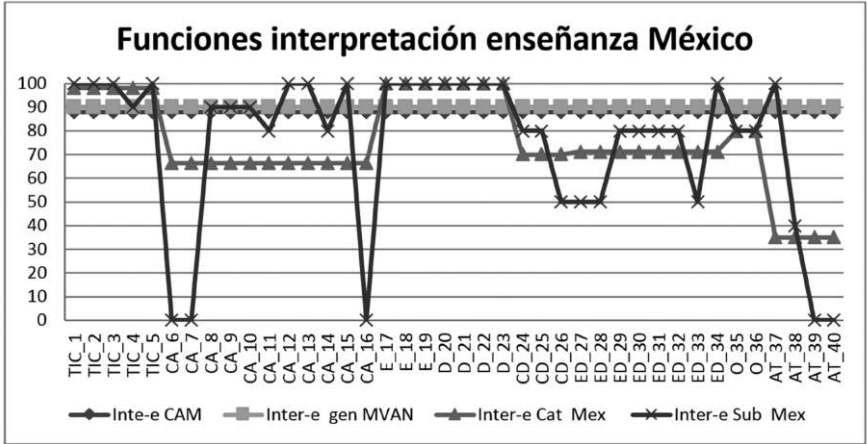
Las funciones interpretación de la enseñanza general a partir del MVA-N y de CAM,  $F_{ie1}$  y  $F_{ie2}$  respectivamente, son las funciones de referencia para análisis específico de interpretación de la enseñanza por categorías y subcategorías,  $f_{ie1}$  y  $f_{ie2}$  respectivamente. En Gráfica 16, se evidencia que  $F_{ie2} > F_{ie1}$ , es decir, que los observadores de la CAM percibieron de forma más clara los rasgos pedagógico-didácticos, que el promedio de los observadores de las tres áreas de conocimiento.

La función de interpretación de la enseñanza por categorías reportó: para las categorías TIC, E, D, CD, ED, mayores valores que el promedio de la Función Interpretación enseñanza CAM ( $f_{ie1} > F_{ie2}$ ), lo que las consolida como las categorías, en las que de manera muy clara, se perciben los rasgos pedagógico-didácticos en Uso por el profesor al utilizar OVA. Sin embargo, en las categorías CA y AT, se tienen menores valores en la función que el promedio de la Función Interpretación enseñanza CAM ( $f_{ie1} < F_{ie2}$ ), evidenciando que para esas categorías los rasgos pedagógico-didácticos no fueron muy diferenciados en el Uso que el profesor hace del OVA en su docencia; siendo más crítica la situación en la categoría AT que presenta el menor valor de  $f_{ie1}$ .

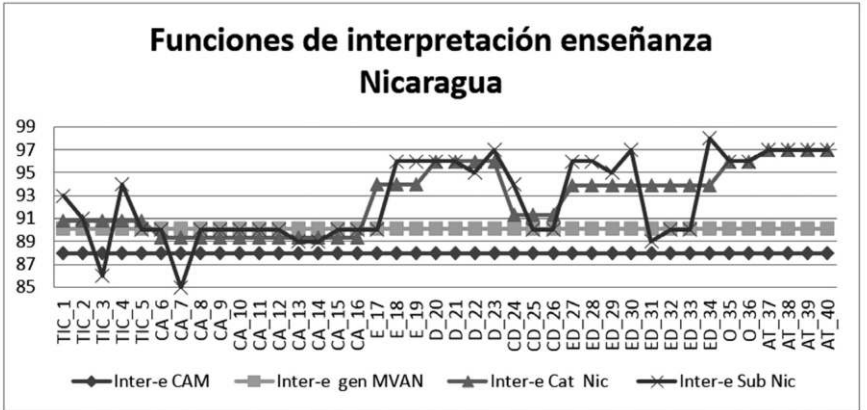
La función de interpretación de la enseñanza por subcategorías reportó para TIC\_1, CA\_8, CA\_9, CA\_12, CA\_13, CD\_25, ED\_34, AD\_37, mayores valores en relación con la de interpretación enseñanza por categorías ( $f_{ie1} < f_{ie2}$ ); en donde cuatro de las 11 subcategorías de cognición y aprendizaje reportan valoraciones que indican que en la interpretación de la enseñanza los observadores identificaron plenamente los rasgos que dan razón de los rasgos pedagógico-didácticos involucrados en el Uso del OVA. De otra parte, La función de interpretación de la enseñanza por subcategorías en CA\_6, CA\_7, CA\_16, AT\_39 y AT\_40, tuvo menores valores que la interpretación por categorías ( $f_{ie2} < f_{ie1}$ ), lo que revela, además, una situación crítica; dados los valores tan distanciados de los promedios generales, situación que será objeto de profundización en el siguiente análisis.

Los mayores valores de esta función en las categorías TIC y E, fueron asignados a rasgos que se asociaron a los referentes R5, R6, R7, R11, R12, y R13, lo cual indica que el diseño del OVA en lo que concierne a estos rasgos, fue apropiado para que se identificaran aspectos didácticos que se vinculan a esos referentes.

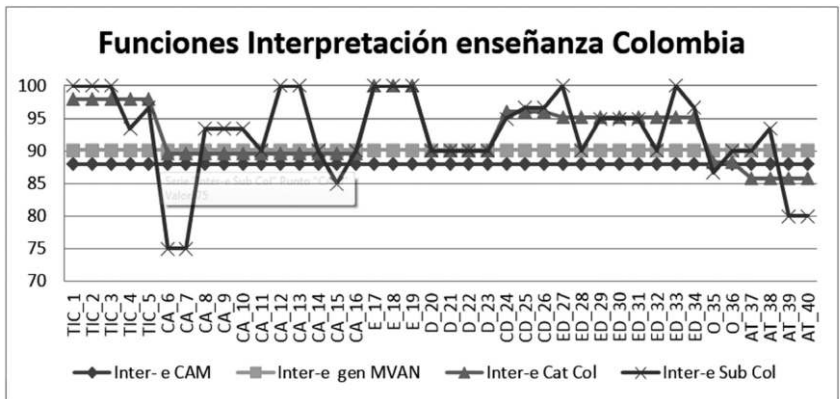
Es natural la pregunta, ¿tienen el mismo comportamiento las funciones  $F_{ie1}$ ,  $F_{ie2}$ ,  $f_{ie1}$  y  $f_{ie2}$ , en los tres escenarios? Una respuesta negativa nos la proporcionan los resultados de las funciones presentados en las gráficas 17, 18 y 19.



Gráfica 17. Funciones de Interpretación Enseñanza México



Gráfica 18. Funciones de Interpretación Enseñanza Nicaragua



Gráfica 19. Funciones Interpretación enseñanza Colombia



Los resultados por escenarios evidencian:

- $f_{ie2}(x) > 90$  para las categorías TIC, E y D, en los tres escenarios, da razón de una total identificación de rasgos pedagógico-didácticos en las subcategorías correspondientes.
- En el escenario México, los valores de la función interpretación de enseñanza en las categorías CA, CD, ED, O y AT están por debajo de los generales, ( $f_{ie1}(x) < F_{ie2}$ ), indican que en el uso del OVA por parte del profesor, no fueron identificados plenamente los rasgos pedagógico-didácticos de esas categorías.
- $f_{ie2}(6)=f_{ie2}(7)=f_{ie2}(16)=f_{ie2}(26)=f_{ie2}(27)=f_{ie2}(28)=f_{ie2}(33)=f_{ie2}(39)=f_{ie2}(40)=0$  en el escenario México: con justificación del observador de que el proceso de enseñanza no permitió evidenciar algún indicador para su valoración, puede llevar a la conclusión trivial de que un proceso de enseñanza requiere varias sesiones para su adecuada valoración. Sin embargo, observadores de Nicaragua y Colombia, además de visualizar los indicadores, asignaron valoraciones altas a esas mismas subcategorías.
- En los escenarios de Nicaragua y Colombia, los valores de la función interpretación de enseñanza en la mayoría de subcategorías fueron mayores que los de la Interpretación enseñanza general de ALTER-NATIVA ( $f_{ie2}(x) > F_{ie1}(x)$ ), evidencian que los rasgos que dan razón de rasgos pedagógico-didácticos, fueron identificados de manera más amplia en CAM que en el general de ALTER-NATIVA.

Al contrastar los resultados de las subcategorías de la función de Interpretación-Enseñanza, con los rasgos provenientes de referentes curriculares (Tabla 20), se hace notar que:

Resultados análisis en escenarios		Rasgos asociados a referentes	
Menor valor $f_{ie2}(x)$	Escenario	Descripción de la sub categoría	Referentes asociados
TIC 3	Colombia	Identifica la relación del OVA con el campo estructurante o con el tema abordado.	R21
CA 6	Colombia y México	Hace manifiesto un enfoque cognitivo.	R19,
CA 7	Colombia, México y Nicaragua	Explicita el enfoque cognitivo en el que está sustentado el OVA.	R19,
CA 15	Colombia	Despliega de forma pertinente las acciones propuestas en el OVA acorde con las necesidades educativas de la población a la que se dirige.	R12
CA 16	México	Destaca la propuesta de evaluación establecida en el OVA.	R12, R19

CD 26	México	Introduce los conceptos utilizados en la construcción del objeto de aprendizaje en su área de conocimiento de manera comprensible, según el tipo de población al que se dirige (considerando edad y grado escolar).	R14, R15
ED 27	México	Hace comprensible el propósito del OVA.	R9, R15, R18
ED28	México	Hace comprensible el enfoque didáctico del OVA .	R9, R15, R18
ED 33	México	Propicia ambientes de aprendizaje en el aula, que se distinguen por ser unos que alientan la interacción entre personas con rasgos diversos étnicos, físicos, cognitivos, etc.	R9, R15, R18
AT 39	México y Colombia	Revela la forma de navegar dentro de los distintos componentes de un OVA.	R21
AT 40	México y Colombia	Deja ver cómo se sale de un OVA o Guía y se ingresa a otro OVA o Guía en la plataforma tecnológica.	R21

**Tabla 20.** Resultados de la función Interpretación enseñanza con subcategorías de menor valor

Así, el comportamiento de la función de interpretación-enseñanza presenta las siguientes características en lo que refiere al OVA:

- La función interpretación-enseñanza en sus dimensiones cognitiva y aritmética, es el instrumento del modelo para concluir si en el uso que se hace del OVA por profesores en escenarios naturales, se manifiestan los rasgos pedagógicos y didácticas CAM.
- El menor valor de  $f_{ie2}(x)$  en  $x=7$  correspondiente a la CA\_7 en los tres escenarios, llama a una reflexión sobre el diseño del OVA y sus condiciones de aplicación, esto, porque el tipo de característica didáctica que está presente en esta subcategoría, requiere o bien un observador muy formado en aspectos cognitivos en la educación matemática o un tiempo prolongado de observación para inferir un enfoque cognitivo presente en el uso.
- $f_{ie2}(6)=f_{ie2}(7)=f_{ie2}(16)=0$ , indica que los rasgos que tenían más énfasis en aspectos didácticos (R15) y (R18), no se pueden valorar desde la enseñanza en el escenario de México, por el valor de cero asignado a esas subcategorías.
- $f_{ie2}(39)=f_{ie2}(40)=0$ , en el escenario México, además de explicar la ausencia de condiciones para valorar los ambientes de aprendizaje interculturales y pluritecnológicos R(19) y R(20), puede indicar que en este escenario la tecnología ATutor no se desplegó con todas sus características.
- Los valores de la función en las demás subcategorías evidencian que, al-

gunos rasgos que no fueron totalmente evidenciados en las acciones de los docentes, pero que fueron fundamentales en para el tipo de OVA que se quería diseñar, como es el caso de las subcategorías de orientación a la diversidad (O), los rasgos de esta categoría se vincularon a los referentes muestra que en las acciones del profesor hay presencia de los referentes R2, R8, R10 y R16, los cuales describen la importancia de reconocer la diversidad en el contextos de América Latina y el Caribe como factor importante para la formación de profesores de matemáticas..

### Resultados específicos de Interpretación-aprendizaje

La acción cognitiva de interpretar el aprendizaje mediante el uso de un OVA (función cognitiva) en clase, se realizó a partir de identificar rasgos pedagógico-didácticos considerados deseables y plasmados por estudiantes en un instrumento de recolección de datos y de asignar un valor numérico (función aritmética) a esos rasgos; lo que consolida cuatro tipos de función de identificación didáctica que se analizan a continuación:

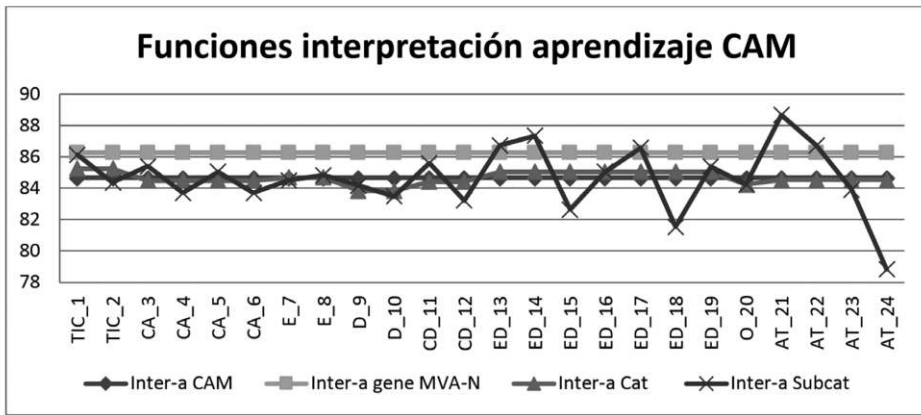
- $F_{ia1}(x)=84,66$  función constante cuyo valor corresponde a los promedios de los valores de las funciones de interpretación-enseñanza de las tres áreas. Esta función es llamada interpretación-aprendizaje general del MVA-N.
- La  $F_{ia2}(x)=86,28$  función constante cuyo valor corresponde al promedio de los valores de las funciones interpretación-aprendizaje de los tres escenarios CAM. Esta función es llamada interpretación-aprendizaje CAM.
- La  $f_{ia1}$  función definida a trazos por el promedio de los valores de interpretación-aprendizaje para cada categoría. Esta función es llamada interpretación-aprendizaje por categorías CAM.
- La  $f_{ia2}$  función definida por el promedio de los valores de interpretación-aprendizaje asignados a cada subcategoría por los profesores de los tres escenarios. Esta función es llamada interpretación del aprendizaje por subcategorías CAM.

La acción cognitiva de interpretar el aprendizaje mediante el uso de un OVA (función cognitiva) en clase, se realizó a partir de identificar rasgos pedagógico-didácticos considerados deseables y plasmados por estudiantes en un instrumento de recolección de datos y de asignar un valor numérico (función aritmética) a esos rasgos; lo que consolida cuatro tipos de función de identificación didáctica que se analizan a continuación:

- $F_{ia1}(x)=84,66$  función constante cuyo valor corresponde a los promedios de los valores de las funciones de interpretación-enseñanza de las tres áreas. Esta función es llamada interpretación-aprendizaje general del MVA-N.
- La  $F_{ia2}(x)=86,28$  función constante cuyo valor corresponde al promedio de

los valores de las funciones interpretación-aprendizaje de los tres escenarios CAM. Esta función es llamada interpretación-aprendizaje CAM.

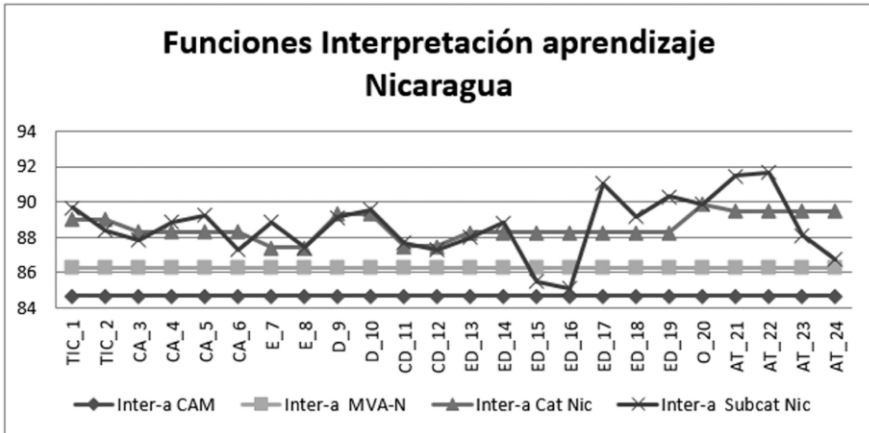
- La  $f_{ia1}$  función definida a trazos por el promedio de los valores de interpretación-aprendizaje para cada categoría. Esta función es llamada interpretación-aprendizaje por categorías CAM.
- La  $f_{ia2}$  función definida por el promedio de los valores de interpretación-aprendizaje asignados a cada subcategoría por los profesores de los tres escenarios. Esta función es llamada interpretación del aprendizaje por subcategorías CAM.
- 



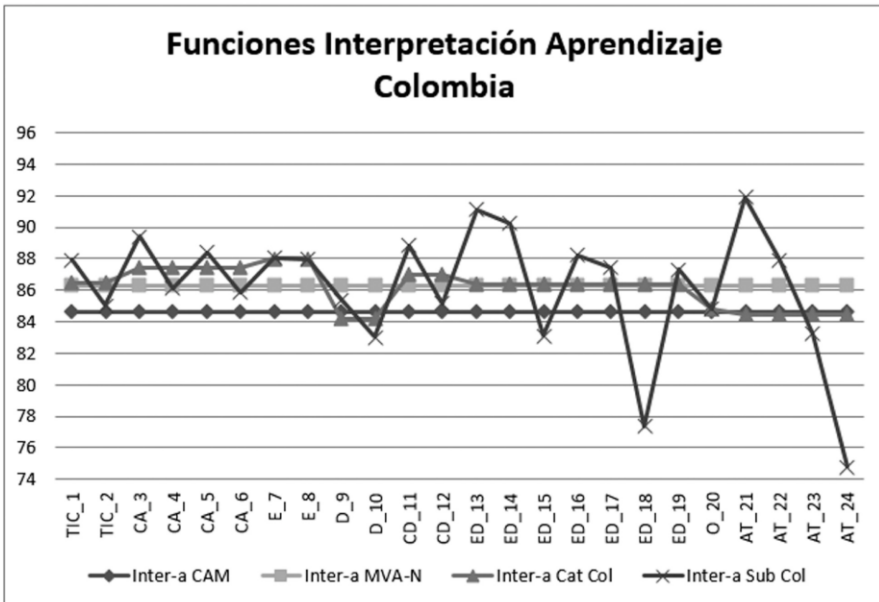
En el nivel de las funciones constantes  $F_{ia1}(x) > F_{ia2}(x)$  (Gráfica 20); en el nivel de las funciones específicas CAM, la  $f_{ia1}(X) > F_{ia2}(x)$  en las categorías TIC y ED y  $f_{ia1}(X) < F_{ia2}(x)$  en la categoría D; en el nivel de las subcategorías y las categorías,  $f_{ia2}(X) < f_{ia1}(X)$  en las subcategorías CA\_4, CA\_6, D\_10, CD\_12, ED\_15, ED\_18, AT\_23 y AT\_24 (este es el menor valor para toda la función). El mayor valor de la función está en  $f_{ia2}(21)=88$ , que corresponde a la categoría AT, lo que evidencia que esta categoría varió mucho para los estudiantes; pues el menor y el mayor de la función se presenta en AT. Algo similar ocurre con ED, es decir, que las categorías ED y AT registraron las mayores variaciones para la función interpretación aprendizaje para las subcategorías  $f_{ia2}(X)$ .

El análisis de las funciones por escenarios evidencia tres tipologías muy diferentes para el comportamiento en la función (Gráficas 21, 22 y 23), es evidente cómo la aplicación del MVA-N, entrega resultados que diferenciar el aprendizaje –como efecto de la aplicación del OVA *Unidad didáctica proporcionalidad*– en los tres escenarios.

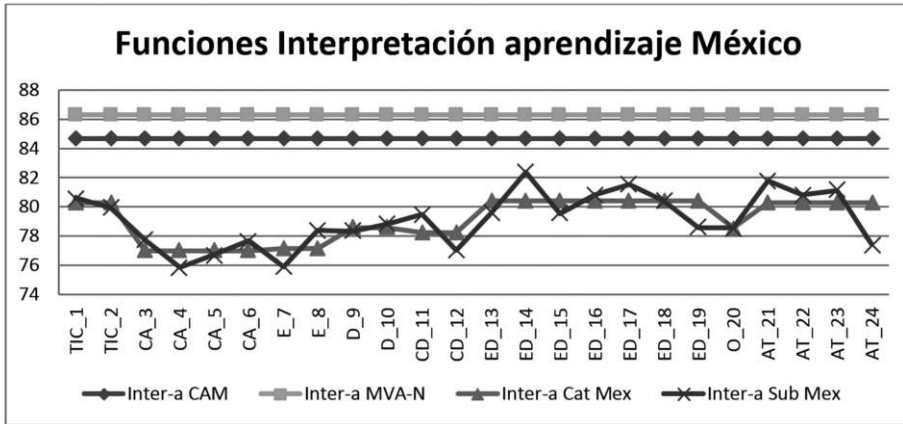
Los resultados evidencian que en el escenario de Nicaragua se producen los mayores valores de interpretación-aprendizaje por categorías y subcategorías,  $f_{ia1}(X)$  y  $f_{ia2}(X)$  respectivamente; en el de Colombia los valores de las cuatro funciones de interpretación-aprendizaje se hicieron muy cercanos entre ellos; en el escenario de México los valores de interpretación-aprendizaje por categorías y subcategorías ( $f_{ia1}(X)$  y  $f_{ia2}(X)$ ), son menores que los de la función general del MVA-N y los de la función de CAM.



Gráfica 21. Funciones de Interpretación Aprendizaje Nicaragua



Gráfica 22. Funciones de Interpretación Aprendizaje Colombia



Gráfica 23. Funciones de Interpretación Aprendizaje México

Aunque en general los comportamientos en los tres escenarios son diferentes, ellos coinciden en valores para  $f_{ia2}(14)$ ,  $f_{ia2}(17)$ , de la categoría ED con rasgos provenientes de referentes R9, R17 y R18. Esta coincidencia en tres escenarios tan diferentes indica que el Enfoque didáctico es un elemento muy valioso en el diseño del OVA y que se mantiene o es transversal a escenarios. De otra parte la también coincidencia en los tres escenarios en  $f_{ia2}(21)$  de la categoría AT, revela un segundo elemento del diseño que es identificado por los estudiantes de los tres escenarios.

El siguiente análisis se focaliza en las subcategorías que tomaron menor valor en los tres escenarios y la procedencia de tales rasgos procedentes de referentes curriculares.

Resultados análisis en escenarios		Rasgos de referentes asociados	
Menor valor $f_{ia2}(x)$	Escenario	Descripción de la subcategoría	Referentes asociados
CA 3, 4,5,6	México	3. El profesor hace clara la intención de efectuar la actividad propuesta en el OVA; 4. El profesor presenta la actividad sugerida en el OVA, siendo factible llevarla a cabo; 5. El profesor da a conocer con claridad el tipo de actividad o acción que intenta promover en el alumno con el OVA; 6. El profesor despliega actividades acordes con las necesidades educativas de la población a la que se dirige.	R12
E 7,8	México	El profesor adopta un rol docente claro en el uso del OVA; 8. El profesor asume un comportamiento acorde con el desarrollo de la actividad sugerida en el OVA.	R11 y R13
D 9	México	El profesor toma en cuenta características de poblaciones a las que se dirige el OVA.	R1, R7, R 17 y R18
D 10	México y Colombia	El profesor da instrucciones acordes con el OVA, según rasgos de poblaciones a las que se dirige.	R1, R7, R 17 y R18
CD 11, 12	México	El profesor identifica en su disciplina de conocimiento, los conceptos básicos, los temas o tópicos centrales o los problemas significativos en función de la especificidad del OVA; 12. El profesor introduce con pertinencia los conceptos disciplinarios involucrados en el uso del OVA según la población a la que se dirige.	R13, R14 y R15
ED 15	Nicaragua y Colombia	El profesor aborda los contenidos mediante la utilización de múltiples experiencias –prácticas, ficticias, hipotéticas, etc.–.	R9 y R15
ED 16	Nicaragua	El profesor conduce el abordaje de los contenidos mencionados en el párrafo anterior, alentando el uso de múltiples formas de representación: escritas, orales, icónicas, diagramáticas, gráficas, etc.	R9, R15 y R18
ED 18	Colombia	El profesor propicia ambientes de aprendizaje en el aula que se distinguen por ser unos que alientan la interacción entre personas con rasgos diversos –étnicos, físicos, cognitivos, etc.–.	R9, R15, R17 y R18
ED 19 y 20	México	El profesor dirige el uso de los OVA en el aula, con la participación activa y propositiva de los estudiantes.	R17, R18
AT 23,24	México y Colombia	El profesor revela la forma de navegar dentro de los distintos componentes de un OVA 24. El profesor deja ver cómo se sale de un OVA y se ingresa en otro OVA.	R20 y R21

**Tabla 21.** Resultados de la función Interpretación aprendizaje con subcategorías de menor valor

En el escenario de México  $f_{ie1}(x) < F_{ia2}(x) < F_{ia1}(x)$  en las 8 categorías, indican que los rasgos que identificaron los estudiantes tuvieron mayor valor que los identificados por los observadores, estos resultados pueden ser la manifestación de un diseño de OVA que evidencia rasgos de carácter pedagógicos y didácticos altamente percibibles por los estudiantes.

El comportamiento de la función de interpretación-aprendizaje presenta las siguientes características:

- La función interpretación-aprendizaje en sus dimensiones cognitiva y aritmética es el instrumento del modelo para concluir si desde el aprendizaje con el OVA se logra identificar un Efecto de aprendizaje, a partir de los rasgos provenientes de los Referentes CAM. El análisis de los resultados la función interpretación-aprendizaje en cada escenario revela efectos en los estudiantes que complementan el proceso de validación del OVA en tanto objeto de aprendizaje.
- Como se había anticipado en el análisis de rasgos y funciones, esta función es la que más revela efectos para identificar rasgos que consideran aspectos de la didáctica de las matemáticas. La coincidencia en menor valor en las categorías CA, CD, ED y AT del escenario México, hace emerger elementos fundamentales en la validación en lo que concierne al aprendizaje; pues además de exigir acciones al formador de profesor vinculadas con su saber matemático y el conocimiento de las tecnologías, también exige que estudiantes y profesor puedan desarrollar las actividades que se proponen en el OVA y en este caso en el escenario México, la acción de enseñanza desarrollada con el OVA de proporcionalidad no generó las condiciones para que los estudiantes pudieran identificar y valorar rasgos de estas categorías.
- Los valores de la función interpretación aprendizaje  $f_{ia1}(x)$  en el escenario Colombia, iguales o superiores a los de la función constante de las tres áreas  $F_{ia1}(x)$ , revelan que los rasgos provenientes de los referentes CAM son identificados de manera más clara por los estudiantes de CAM que de las otras tres áreas. Por lo que  $f_{ia1}(x) \geq F_{ia1}(x)$  en CA y E, CD y ED revela que uso del OVA de proporcionalidad en este escenario, permitió destacar que los aspectos considerados en el diseño vinculado a esas categorías fueron percibidos por los estudiantes.
- Los valores de la función en el escenario Nicaragua  $f_{ia1}(x) \geq F_{ia1}(x) > F_{ia2}(x)$  en todas las categorías indican que este escenario se valida por profesores, observadores y estudiantes la Presencia, Uso y Efecto de los rasgos provenientes de los referentes en el diseño del OVA. El valor de  $f_{ia2}(17) = 91$  que corresponde a la subcategoría ED, que enuncia: “El profesor afronta los contenidos, propiciando diferentes ambientes de aprendizaje –grupales, individuales–, los cuales propician la reflexión individual, al mismo tiempo que alientan el intercambio de puntos de vista”, es decir, para este escenario



los estudiantes con su valoración destacaron un tipo relación entre reflexión y comunicación manifiesta en el OVA.

- Los valores de la funciones  $f_{ia1}(x)$  y  $f_{ia2}(x)$  indican una relación muy fuerte entre tipo de escenario, tipo de estudiantes y tipo de programa de formación. En el escenario México los estudiantes son estudiantes de programas de licenciatura de Educación Preescolar y Primaria para medio indígena, es decir no es una Licenciatura con énfasis en matemáticas; en Colombia los estudiantes hacen parte de una Licenciatura con énfasis en matemáticas orientada para primaria y secundaria, aunque es una licenciatura con énfasis en matemáticas, su formación también privilegia otras áreas diferentes de la matemática; en Nicaragua la Licenciatura es en Ciencias de la Educación con Mención en Matemáticas. Por los resultados obtenidos por la función de interpretación-aprendizaje las mejores evidencias didácticas se dieron en el escenario Nicaragua; donde se privilegia la formación matemática, en contraste con el escenario México que tiene en la Licenciatura poca presencia de la matemática.

Los estudiantes de Nicaragua son además profesores en ejercicio, este puede ser otro factor asociado, del que puede derivarse como hipótesis que una experiencia continua de enseñanza de las matemáticas en instituciones escolares, proporciona mejores condiciones para el aprendizaje de enseñanza de las matemáticas acogiendo la diversidad de poblaciones que la de estudiantes que no se relacionan con prácticas de docencia en escenarios naturales, para un profesor en ejercicio.

### ***Resultados comparativos funciones de identificación, interpretación-enseñanza e interpretación-aprendizaje***

Este grupo de resultados presenta el comportamiento específico de los datos en relación con MVA-N en la validación del uso del OVA elaborado por CAM. Desde el modelo se esperaba que  $f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$ . Sin embargo, la Gráfica 24 indica que se encontraron las siguientes tipologías:

- Tipo 1. Las categorías: CD, ED y O; en las que los valores de las tres funciones se corresponden con lo anunciado con el modelo.
- Tipo 2. La categoría CA, en la que los valores de las funciones de identificación y de interpretación-enseñanza se corresponden con lo anunciado con el modelo.
- Tipo 3. Las categorías: TIC, E, y D, en las que los valores de las funciones de interpretación –enseñanza e interpretación– aprendizaje se corresponde con el modelo de interpretación.
- Tipo 4. La Categoría las que los valores de las funciones no cumplen ninguna condición del modelo.

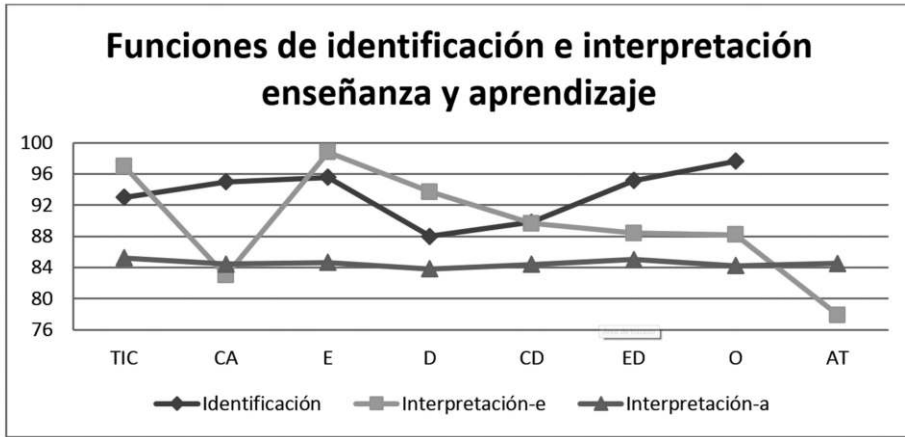


Gráfico 24. Comportamiento del MVA-N en CAM

Según la siguiente Tabla, los tipos 1 y 3 acumularon el mayor número de categorías (6 de 8), otorgando a la función de interpretación-enseñanza, el papel de ser la función enlace entre los dos tipos considerados.

Resultados de comparación por Tipos y categorías		Resultados de asociación de referentes		
Tipo	Categorías	Número de subcategoría	Referentes asociados	Grupo al que pertenecen los referentes
1. $f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	Conocimiento disciplinar	7	R13, R14 y R15	Didáctica
	Enfoque didáctico	23	R9, R15, R17 y R18	Pedagógica y Didáctica
	Orientación a la diversidad	5	R2, R8, R10 y R16	Educativa, Pedagógica y Didáctica
2. $f_i(x) > f_{ie}(x)$	Cognición y aprendizaje	25	R12 y R19	Pedagógica y Didáctica
3 $f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	Tecnología de información y Comunicación y enseñanza	11	R3, R19, R20 y R21	Profesional y Didáctica
	Enseñanza	7	R5, R6, R7, R11 y R13	Profesional, Pedagógica y Didáctica
	Diversidad	10	R1, R7, R17 y R18	Profesional, Pedagógica y Didáctica
4	Uso del profesor de la plataforma de ATutor	7	R20 y R21	Didáctica

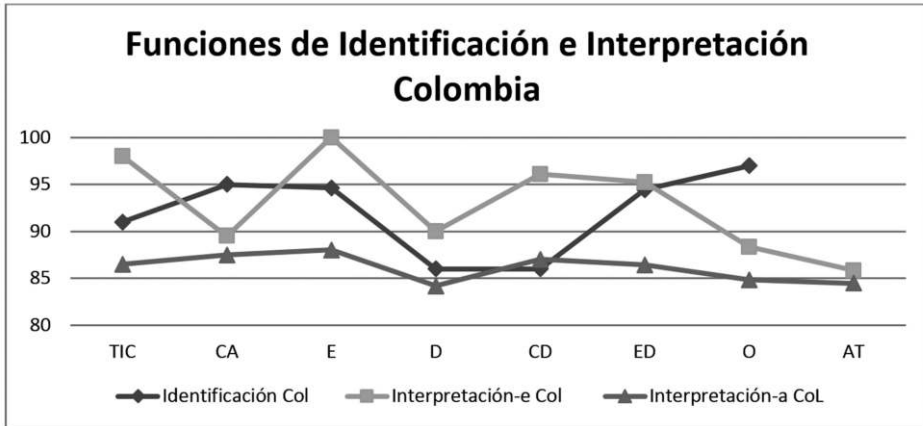
Tabla 22. Resultados de comparación de funciones por categorías y subcategorías

El análisis de los datos sobre rasgos pedagógico-didácticos de acuerdo con MVA-N, en este estudio de tipo relacional de las tres funciones, lleva a consolidar los siguientes resultados:

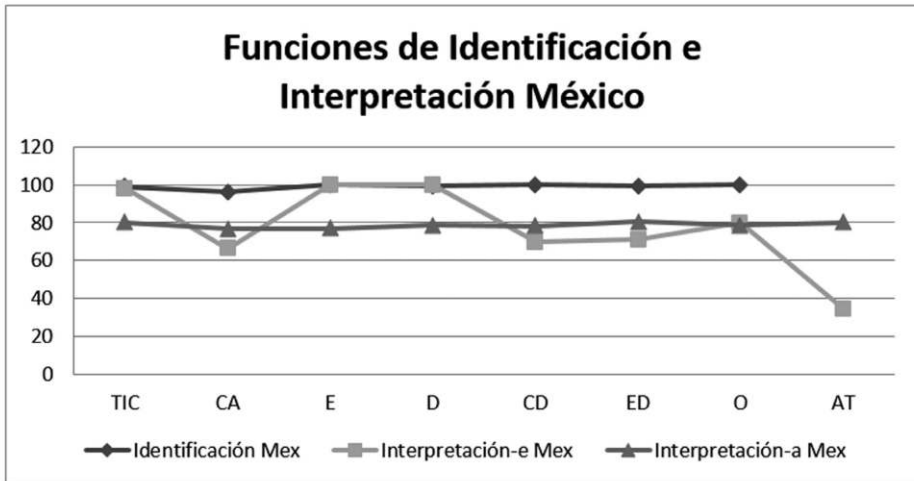
- El tipo de comportamiento esperado por el modelo, para cada uno de los agentes (profesor, observador y estudiante), se presentó en las categorías que indagan por el saber matemático (CD), su didáctica (ED) y la forma como se incorporan las poblaciones (O). Es decir, en todo el sistema se reconoció para estas categorías: un mayor valor para la función de identificación ( $f_i$ ) que da cuenta de la Presencia (P) de los rasgos pedagógico-didácticos deseables; en las cuales hay evidencias en 11 de los 21 referentes curriculares formulados; un valor intermedio entre los valores de la función identificación y la de interpretación-enseñanza, que evidencia como lo anticipó el modelo que el observador asignaría menores valores que el profesor, pero si mayores valores que el estudiante; con los valores de la función interpretación-aprendizaje que dan cuenta del Efecto (E) de los rasgos en los estudiantes desde el aprendizaje, se evidencia que el diseño del OVA puede ser valorado con valores más altos por profesores (bien sea el que lo usa o el que valora su uso), que por estudiantes que aprenden a ser profesores usándolo.
- Surgen como resultado dos hipótesis para la validación de objetos virtuales de aprendizaje con formadores de profesores en escenarios naturales: i) El formador de profesores identifica prioritariamente los rasgos que comprometen aspectos de la didáctica de las matemáticas y esa identificación le permite un mejor uso de OVA, y esto es percibido tanto por observadores del proceso de enseñanza como por estudiantes; ii) Un diseño de OVA va a tener más garantía de uso o valoración por parte de profesores y estudiantes si los rasgos didácticos que lo estructuraron son perceptibles en el estudio y uso que hace el profesor del OVA.
- El tipo de comportamiento anunciado por el modelo, para cada uno de los agentes (profesor, observador, estudiante), se cumplió parcialmente en las categorías que indagan por la relación cognición y aprendizaje (CA), debido a que la valoración de los observadores fue más baja que la de los estudiantes, y aunque el profesor identificó ampliamente los rasgos de la categoría, los observadores no los valoraron en la enseñanza con mayor valor que el de los estudiantes.
- El tipo de comportamiento anunciado por el modelo, para cada uno de los agentes (profesor, observador, estudiante), se cumplió parcialmente en las categorías que indagan por la forma de integración de las tecnologías en el OVA (TIC), por la forma como la enseñanza despliega el OVA (E) y por la incorporación de los rasgos de las poblaciones en la práctica de enseñanza (D). Una parte del sistema (los profesores) no actúa según lo anticipa el modelo, el profesor no es el que asigna el mayor valor.

- El caso de AT en el que el modelo no se verifica, se presenta porque se esperaba la mayor valoración de los observadores, este caso también se retoma en profundidad en el siguiente análisis.

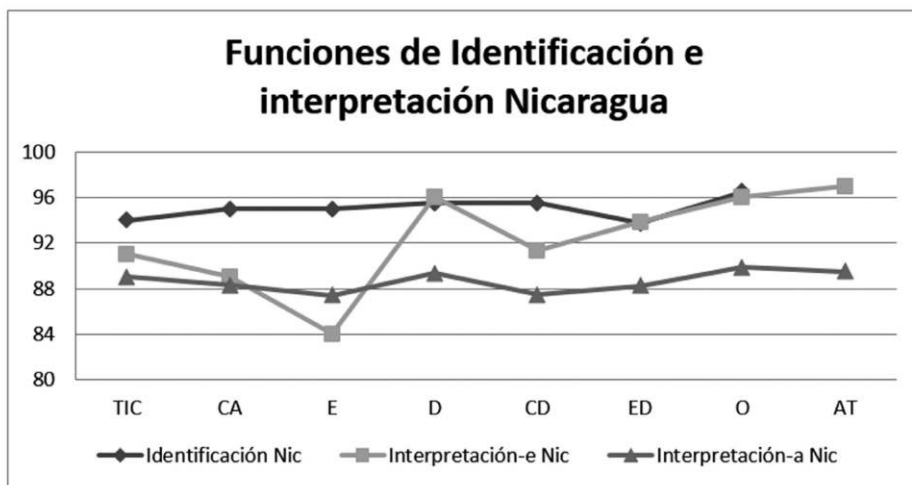
Los resultados por escenarios evidencian un comportamiento diferente en lo que concierne a correspondencia con lo anunciado por el modelo (Gráficas 25, 26 y 27). La explicación proviene de los factores identificados en el análisis previo por funciones.



Gráfica 25. MVA-N en Colombia



Gráfica 26. MVA-N en México



Gráfica 27. MVA-N en Nicaragua

Es evidente que el escenario que más se acerca a lo anunciado por el modelo para las tres funciones es el de Nicaragua y, aunque no lo verifica en todas las categorías, sí lo hace para la mayoría de ellas. En el escenario de México lo esperado por el modelo se presenta en la mitad de las categorías y en el de Colombia en muy pocas categorías. En la siguiente tabla se presentan las categorías que presentaron resultados esperados por el modelo y los escenarios donde se presentaron esos comportamientos.

Tipo	Categorías	Escenarios
$f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	TIC	México y Nicaragua
$f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	CA	Colombia y Nicaragua
$f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	E	México
$f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	CD	Nicaragua
$f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	O	Nicaragua, México y Colombia
$f_i(x) > f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	AT	Colombia y Nicaragua
$f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	D	Colombia, México y Nicaragua
$f_{ie}(x) > f_{ia}(x)$	ED	Colombia y Nicaragua

Tabla 23. Categorías en las que los valores de las funciones se comportan según lo esperado por el modelo

Los resultados por escenarios indican que para 6 de las 8 categorías, el comportamiento de los datos según el modelo, se verifica por lo menos en un escenario. Es decir que la Presencia de los rasgos es identificada con mayor valor que el Uso de los rasgos y este a su vez con mayor valor que el Efecto de los

rasgos. Las categorías D y CD que no verifican el modelo en las tres funciones, sí lo verifican parcialmente para las funciones de interpretación de enseñanza y de aprendizaje; es decir que las funciones de interpretación de enseñanza y de aprendizaje verifican el comportamiento de los datos de acuerdo con el modelo en todas las categorías en por lo menos un escenario.

La función identificación en la categoría Diversidad, no presenta los resultados esperados por el modelo, ni total ni parcialmente en ninguno de los tres escenarios; lo cual puede indicar que a los formadores de profesores les queda muy difícil identificar los rasgos de los referentes por esta categoría.

Al uso del ATutor los estudiantes asignan una mayor valoración que los observadores, este factor no se presentó a los profesores para evaluación, aunque fue valorado por ellos en preguntas abiertas.

En los espacios adicionales para añadir reflexiones sobre el proceso, observadores y estudiantes coinciden en que:

- 1) Hubo problemas de conectividad en la plataforma, no imputables al desempeño del profesor. (Evento que se dio en los tres países).
- 2) Hubo problemas de estabilidad de la plataforma y en los tiempos que tomaban las acciones que se ejecutaban (Esto se presentó en Nicaragua y México).
- 3) Faltó claridad en algunos enunciados de los instrumentos de evaluación, de ahí que no se evalúa como favorable el trabajo del profesor. Es por tanto pertinente subrayar que esto se debió más a un asunto de pertinencia del enunciado que de falta de conocimientos del profesor (Esto se presentó en México y Colombia).
- 4) El tiempo de exposición de los materiales en los escenarios naturales fue reducido, por lo que pudieran no haber identificado aspectos más profundos en el uso de la plataforma ATutor, OVA y Guía (Evento que señalan los tres países).

Los estudiantes en sus apreciaciones a estos puntos indican que sus valoraciones se deben a:

- 1) El tiempo fue 'corto' para poder realizar las actividades que se encuentran dentro del OVA y definir las características del profesor frente al OVA (Alumno de México).
- 2) Los horarios que han sido dispuestos para la interacción con la plataforma inciden en identificar si el profesor realmente tiene un manejo considerable de la plataforma (Alumno de Colombia).
- 3) Falta más capacitación y más tiempo para comprender y poner en práctica el programa (Alumno de Nicaragua).

## Conclusiones y proyecciones sobre el comportamiento del sistema de acuerdo con el modelo en la comunidad de Matemáticas

Los resultados de la aplicación del modelo con el OVA Unidad didáctica y proporcionalidad, en los escenarios de México Nicaragua y Colombia, indican que:

- Para 6 de las 8 categorías (solo se excluyen E, y CD) el modelo se verifica en por lo menos un escenario.
- Las categorías E, CD que no fueron incluidas en las categorías de cumplimiento pleno del modelo, las funciones de interpretación (enseñanza y aprendizaje), indican que en los tres escenarios los rasgos se percibieron en la relación que observadores y estudiantes establecieron con el OVA de CAM: permitiendo concluir que el diseño del OVA puede tener características que hacen que los rasgos incorporados como deseables se perciban claramente en la enseñanza, aunque el profesor no los perciba tan claramente.
- Los valores de la función de interpretación-enseñanza, destacan que el tipo de asignatura o de área en la que se realice el proceso de validación del OVA, va a incidir probablemente en mejores condiciones para que en la enseñanza se hagan presentes los rasgos con característica más didácticas o más pedagógicas (Nicaragua y Colombia).
- La alta presencia de formación matemática en las asignaturas y programas de formación de profesores, es muy probable que incida en mejores condiciones para el reconocimiento de rasgos de referentes CAM en el OVA que toma la proporcionalidad como objeto de formación de profesores (Nicaragua).
- La alta presencia de formación en didáctica de las matemáticas en las asignaturas, es otro factor que incide en un mejor desempeño del profesor con el OVA (Colombia y Nicaragua).

El MVA-N aplicado a la validación en escenarios naturales del OVA permitió:

- Evaluar la Presencia, el Uso y el Efecto de unos rasgos pedagógico-didácticos provenientes de un grupos de referentes curriculares, a partir de la acción intencional de los agentes profesor, observador y estudiante con un OVA diseñado desde los rasgos provenientes del sistema didáctico elaborado por CAM.
- Evaluar si el profesor identificó en el OVA rasgos pedagógico-didácticos elaborados por CAM: La presencia (P) de los rasgos es dada con mayor valor en todas las categorías en por lo menos un escenario.
- Evaluar relaciones entre lo que el profesor identifica en un OVA y su proceso

de enseñanza con el OVA, para inferir condiciones de diseño y aplicación de un OVA en un escenario natural. El Uso (U) de los rasgos de los referentes CAM fue reconocido ampliamente en por lo menos algunas categorías.

- Evaluar desde los resultados de una experiencia de aprendizaje un efecto de los rasgos provenientes de referentes curriculares. El Efecto (E) de los rasgos pedagógico-didácticos fue reconocido de manera amplia y con valores muy cercanos en todas las categorías del modelo.
- Evaluar un sistema didáctico –utilizando MVA-N– en tres escenarios muy diferente y ofrecer información que comparten los tres escenarios desde los tres agentes considerados (profesor, observador, estudiante), como también distinguir la validación en cada escenario.
- Articular funciones de naturaleza cognitiva con funciones de naturaleza aritmética para ofrecer una comprensión profunda del proceso de validación de OVA.
- Establecer relaciones entre la Presencia, el Uso y el Efecto de elementos (rasgos) que provienen de un diseño de OVA que vinculó rasgos de validación con referentes curriculares para la formación de profesores incorporo.

Se ofrece entonces un modelo que parece muy efectivo para valorar OVA desde una perspectiva del diseño didáctico, con la participación articulada de profesores, observadores y estudiantes para profesor de matemáticas.

El MVA-N se constituye en una primera piedra para consolidar un campo de estudio en la formación de profesores de matemáticas, y en la validación de Objetos Virtuales de Aprendizaje para formar profesores de matemáticas, quedan nuevas hipótesis que requieren más investigaciones con el modelo, para ratificarlas o eliminarlas.



## Referencias

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. In M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-60). Colombia: Una empresa docente. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>

Calderón, D., & Olga, L. (2012). La ingeniería didáctica como metodología de investigación del discurso en el aula. En S. Soler (Ed.), *Lenguaje y Educación: Perspectivas metodológicas y teóricas para su estudio* (pp. 71-104). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Clements, D. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (Ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.

Díaz, Á. (2006). Las pruebas masivas. Análisis de sus diferencias técnicas. *Revista mexicana de investigación educativa*, 11 (29), pp. 83-615.

Design-Based Research Collective. (2003). Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8. Recuperado de <http://www.designbasedresearch.org/reppubs/DBRC2003.pdf>

Elliot, J. (1994). *La Investigación - acción en educación*. Madrid: Morata.

García, G. (2015). Aproximación a los procesos de exclusión e (in) exclusión en el aula de matemáticas. En Planas, N. (Coord.) *Avances y realidades de la educación matemática*. pp. 55-72. Barcelona: GRAO.

García, G., y Montejo, J. (2009). Las relaciones entre evaluación y el orden social en la clase de matemáticas. Un estudio en una clase de álgebra. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, Vol. 2, No. 2, pp128-138.

Gómez, P., y Lupiáñez, L. (2006). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. PNA, 1(2), 79-98. Recuperado abril 8 de 2013 de <http://funes.uniandes.edu.co/390/1/GomezP07-2786.PDF>

León, O., Bonilla, M., Romero, J., Gil, D., Correal, M., Ávila, C., Bacca, J., Cavanzo, A., Guevara, C., Saiz, M., García, R., Saiz, E., Rojas, N., Peralta, M., Flores, W., & Márquez, A. (2013). *Referentes curriculares con incorporación de tecnologías para la formación de profesorado de matemáticas*. México: Universidad Pedagógica Nacional.

López, M. (2001). Cortando las amarras de la escuela homogeneizante y segregadora. *En Clave Pedagógica: Revista Internacional de investigación e Innovación Educativa*, Vol. 3, pp 15-53.

Padilla, R. A. (2009). Exámenes masivos internacionales. ¿Encuentros o desencuentros? *Perfiles educativos*, XXXI (123), pp. 45-59.

Simon, M. & Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical thinking and learning*, 6(2), pp. 91-104.

Sullivan, P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. En P. S. Woods y P. S. Woods (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 1-9). Rotterdam: Sense Publishers.