< 21

Énfasis

Álgebra escolar y pensamiento algebraico:

aportes para el trabajo en el aula

Autores

Rodolfo Vergel Causado
Pedro Javier Rojas Garzón

Doctorado Interinstitucional en Educación DIE

Universidad del Valle
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Universidad Pedagógica Nacional

Énfasis

Libros de los énfasis del

Doctorado Interinstitucional en Educación

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

Énfasis

Libros de los énfasis del Doctorado

Interinstitucional en Educación

Álgebra escolar y pensamiento algebraico:

aportes para el trabajo en el aula

Autores

Rodolfo Vergel Causado

Pedro Javier Rojas Garzón

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Bogotá, Colombia - 2018

Primera Edición 2018
ISBN Impreso: 978-958-787-043-5
ISBN Digital: 978-958-787-044-2

Preparación Editorial
Doctorado Interinstitucional en Educación
http://die.udistrital.edu.co/publicaciones
Sede Universidad Distrital Francisco José de Caldas
www.udistrital.edu.co
Aduanilla de Paiba, Edificio de Investigadores, calle 13 No. 31-75
Asistente editorial
Elban Gerardo Roa Díaz
eventosdie@udistrital.edu.co
PBX: (57+1) 323 9300, ext. 6330-6334

Sección de publicaciones
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
www.udistrital.edu.co
Carrera 24 No. 34-37
PBX: (57+1) 323 9300, ext. 6201
publicaciones@udistrital.edu.co

Diseño, corrección de estilo, diagramación e impresión
Editorial Magisterio

Impreso en Bogotá, Colombia, 2018

UD Editorial

Esta publicación se produce en el marco del convenio interadministrativo No. 1931 del 02 junio de 2017 entre la Secretaría de Educación del Distrito y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vergel Causado, Rodolfo
Álgebra escolar y pensamiento algebraico : aportes para el trabajo en el aula / Rodolfo Vergel Causado, Pedro Javier Rojas Garzón. -- Bogotá : Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2018.
120 páginas ; 24 cm. -- (Doctorado Interinstitucional en Educación. Énfasis).
ISBN 978-958-787-043-5
1. Álgebra - Enseñanza 2. Matemáticas - Enseñanza 3. Desarrollo del pensamiento lógico I. Rojas Garzón, Pedro Javier, autor II. Tít. III. Serie
512 cd 22 ed.
A1621193

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

A Myriam por su permanente apoyo y por
su infinita comprensión

A mis hijos Paula Alejandra,
Santiago Andrés y Juan Sebastián
quienes constituyen el motor de mi
existencia y el sentido de mi vida

Rodolfo

A todos los estudiantes, niños, jóvenes y adultos,
que me han permitido seguir aprendiendo y, en
especial, entendiendo la importancia de reconocer
la diversidad de mundos posibles, de interpretaciones,
de tiempos y de interacciones requeridas en nuestros
particulares procesos de comprensión sobre multiplicidad
de fenómenos y de relaciones, así como reconocer
la diversidad de realidades posibles en nuestras
aulas y de las potencialidades presentes en ellas

Pedro Javier

Agradecimientos

Los autores del presente libro expresamos nuestros agradecimientos al programa de Doctorado Interinstitucional en Educación de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, por el constante apoyo a la actividad académica y a la producción de obras que, como ésta, pretende aportar algunas reflexiones en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar, así como también a los procesos de evaluación del aprendizaje de las matemáticas escolares.

Queremos también agradecer a los colegas, profesores y estudiantes comprometidos con el campo de la Educación Matemática quienes, a través de las discusiones sostenidas en eventos académicos, seminarios y conversaciones informales, nos han animado a elaborar orientaciones didácticas de trabajo en el aula asociadas al álgebra escolar.

Contenido

Prólogo

El libro que tienen entre sus manos es muy interesante y está escrito por autores de reconocida solvencia, a los cuales conozco por mi relación con las personas interesadas en la mejora de la educación matemática en Colombia. Sabía de su seriedad teórica y metodológica, la cual se ha vuelto a confirmar con la lectura de este libro.

El libro *"Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula"* de Rodolfo Vergel y Pedro Javier Rojas presenta una contribución relevante para la educación matemática y en particular en el área de la enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Incluye cinco capítulos cuyos contenidos muestran cómo el trabajo de investigación realizado por los autores en sus tesis doctorales en el marco del Doctorado Interinstitucional en Educación-DIE de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, puede ser de gran ayuda para los profesores que enseñan álgebra.

De acuerdo con la investigación realizada en dichas tesis doctorales, los autores proponen una reflexión sobre el álgebra escolar en la que la mirada semiótica juega un papel fundamental ya que consideran que el aprendizaje de las matemáticas esencialmente es una actividad semiótica, por cuanto en toda actividad matemática se recurre a la transformación de signos dentro de sistemas semióticos culturalmente dados. Como referentes teóricos para esta mirada semiótica usan la Teoría de la objetivación y también algunos constructos del Enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

El contenido del libro es diverso y aborda los aspectos fundamentales relacionados con lo que significa el proceso de instrucción del álgebra escolar. El material está dirigido a profesores de matemáticas en formación o en servicio ya que presenta herramientas para comprender y reflexionar sobre lo que significa el álgebra escolar en primaria y secundaria. Para ello, se parte primero de una reflexión sobre las relaciones entre la aritmética y el álgebra y se profundiza en la discusión acerca del carácter algebraico de la aritmética. Se continúa con la presentación, de manera concisa, de aspectos generales sobre el álgebra escolar y el currículo, para, a continuación, detallar la propuesta de cambio curricular conocida como Álgebra temprana.

Se sigue, en el capítulo cuatro, con unas tareas que los profesores pueden utilizar en su aula para enseñar el álgebra escolar y se reflexiona sobre ellas básicamente utilizando herramientas de la teoría de la objetivación. Se trata sobre todo de tareas relacionadas con secuencias de patrones y procesos de generalización y simbolización. Los autores consideran la tarea como situación enmarcada en un contexto — intramatemático o extramatemático— que, a partir de su abordaje por parte de un sujeto, pretende desarrollar en él pensamiento matemático. En mi opinión, este capítulo es un buen ejemplo de cómo la investigación en didáctica de las matemáticas puede ser útil para orientar la práctica del profesor en el aula ya que, cuanto mayor sea nuestra capacidad de descripción, comprensión y explicación de los procesos de enseñanza y aprendizaje del álgebra, estaremos en mejores condiciones para conseguir una mejora de su enseñanza.

El libro termina, en el capítulo cinco, con unas consideraciones y reflexiones finales de las cuales quiero destacar primero la de que la generalización de patrones puede verse como una actividad clave para introducir el álgebra en la escuela y, segundo, que el aprendizaje del álgebra debe estar vinculado con el desarrollo del pensamiento aritmético. La idea de pensamiento relacional que se expone en este libro como aquel tipo de pensamiento que implica considerar las expresiones aritméticas y ecuaciones en su totalidad, y utilizar las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas para relacionar o transformar sus expresiones, parece que puede constituir un eslabón entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Se trata de un capítulo que evidencia cómo los conocimientos y resultados generados como consecuencia de la investigación pueden ser de ayuda para guiar la mejora de la enseñanza del álgebra escolar.

Por otra parte, quiero destacar que en este libro también se reflexiona, desde una perspectiva semiótica, sobre un problema en mi opinión relevante para la educación matemática y para el álgebra escolar, como son las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento.

Se trata pues de un libro que puede ayudar a los profesores a ampliar su conocimiento de la didáctica del álgebra, permitiéndoles mejorar en el análisis de las estrategias utilizadas por los alumnos cuando resuelven tareas relacionadas con secuencias de patrones y procesos de generalización y simbolización; en particular, facilitando la identificación de elementos matemáticos significativos para el desarrollo del pensamiento algebraico al interpretar las producciones de sus estudiantes. Ahora bien, creo que la lectura de este libro, además de ser de interés y utilidad para los profesores de matemáticas, puede ser útil a matemáticos, psicólogos y, más en general, a todas las personas interesadas en la educación matemática.

Vicenç Font
Barcelona, 17 de agosto de 2018

En el contexto escolar, no son pocas las personas que continúan viendo las matemáticas como una colección de conocimientos, terminados y desvinculados unos de otros y la labor del profesor centrada en la «transmisión» de estos; vale decir, sin que se posibilite reconocerlos en una totalidad de interdependencias e interrelaciones, asociados con diversos procesos matemáticos. Al parecer, al menos de manera implícita, se espera que dicha integración sea responsabilidad del estudiante. Sin embargo, en tanto en el proceso de formación usualmente no se tematiza la necesidad de dichas interdependencias e interrelaciones, las posibilidades de lograr una integración de los conocimientos matemáticos escolares, en un todo coherente y articulado, pocas veces es lograda por los estudiantes.

Si bien la comunidad de educadores matemáticos se ha consolidado en las últimas décadas, con variedad de resultados de investigación que dan cuenta de las diversas dificultades que encuentran los estudiantes al abordar situaciones matemáticas, incluidas aquellas asociadas a procesos didácticos, dichos resultados no siempre son apropiados por los profesores como un elemento que oriente el diseño de propuestas para el trabajo en el aula. Nótese que hacemos referencia a las dificultades que *encuentran* los estudiantes y no a dificultades *de* los estudiantes, en tanto reconocemos que muchas de las dificultades son atribuibles más a procesos de tipo didáctico y curricular que de tipo cognitivo.

En el caso del álgebra escolar, por ejemplo, aún permanece en muchos profesores la tendencia a abordarla básicamente como manipulación de símbolos literales y numéricos, mediante operaciones numéricas, sin que se posibilite dotar de significado a las expresiones que involucran dichos símbolos; en tal sentido, ven el álgebra como una simple generalización de la aritmética; por supuesto, pocas veces son tematizadas las diversas interpretaciones que de dichos símbolos realizan los estudiantes, ni el sentido que les asignan a los mismos en un contexto matemático[1].

Las ideas expuestas en el presente libro se inspiran, por un lado, en las tesis doctorales realizadas por sus autores, así como en otras investigaciones centradas en el álgebra escolar —llevadas a cabo también por los autores de este libro— y, de otra parte, en las reflexiones teóricas y prácticas

1 En el contexto colombiano, Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora (1999) reportan diversas interpretaciones de los símbolos literales en contextos matemáticos realizadas por parte de jóvenes —13-16 años—, por ejemplo, como objeto, como incógnita o como número generalizado; las cuales no siempre son las requeridas para abordar adecuadamente algunas situaciones-problema.

logradas a través de nuestra participación en eventos regionales, nacionales e internacionales sobre educación matemática en los cuales se ha propuesto el estudio de problemáticas asociadas con la aritmética y el álgebra escolar.

El contenido del libro está estructurado en cinco capítulos. En el primero exponemos algunas relaciones entre la aritmética y el álgebra, así como reflexiones y problemáticas que suscitan dichas relaciones. Profundizamos en la discusión acerca del carácter algebraico de la aritmética, lo cual sugiere una especie de continuidad entre estos dos campos. El contenido de este capítulo abona el camino para abordar el capítulo segundo, que dedicamos para la presentación, de manera sucinta, de aspectos generales sobre el álgebra escolar y el currículo. Esta breve presentación prepara el terreno para posteriormente describir la propuesta de cambio curricular conocida como Álgebra temprana.

En efecto, en el tercer capítulo describimos características de esta propuesta de cambio curricular junto con algunas exposiciones sobre pensamiento relacional, la idea teórica sobre pensamiento y la de pensamiento algebraico desde estudios e investigaciones que se han venido adelantado en el campo de la Educación Matemática. Posteriormente abordamos algunas consideraciones teóricas sobre la actividad semiótica de estudiantes de educación básica primaria alrededor de una tarea sobre secuencia de patrones[2], en la que presentamos una reflexión a partir de una experiencia investigativa sobre la generalización de patrones como actividad semiótica. Esta reflexión la sustanciamos desde una aproximación teórica, situada en el marco de las teorías socioculturales en Educación Matemática, como lo es la teoría de la objetivación (Radford, 2014, 2017a, 2017b, 2017c) la cual, más específicamente, se presenta como una aproximación histórico-cultural en el sentido marcado por Roth y Radford (2011), Veresov (2010) y Valsiner (2009).

Algunas tareas y actividades para orientar el trabajo en el aula componen el capítulo 4. En éste pretendemos ofrecer algunos elementos de análisis sobre la actividad matemática de los estudiantes cuando abordan algunas tareas relacionadas con secuencia de patrones y procesos de generalización y simbolización.

En el Capítulo 5 presentamos algunas reflexiones finales que pretenden continuar problematizando el trabajo de aula y ofrecer elementos epistemológicos y semióticos (D'Amore y Radford, 2017) que posibiliten ver de manera compleja el trabajo de aula en matemáticas, en tanto que se sugiere de los capítulos anteriores que este trabajo se considera un ejercicio profesional del campo de la Educación Matemática.

2 En Colombia, el sistema educativo está organizado en cinco niveles de escolaridad: educación preescolar —menores de 6 años—, básica primaria —entre 6/7 y 10/11 años—, educación básica secundaria —entre 11/12 y 14/15 años—, educación media —entre 15/16 y 17/18 años— y educación superior.

Son variadas las investigaciones que ponen en evidencia las dificultades que encuentran los niños y jóvenes en el proceso de transición aritmética–álgebra (Wagner & Kieran, 1989; Bednarz, Kieran & Lee, 1996; Rojas *et al*. 1999; Kieran, 2007; Rojas, 2015; Radford, 2010a, 2010b, 2011, 2012; Vergel, 2013, 2015a, 2015b).[3] Estas investigaciones se han preocupado, entre otras cuestiones, por aportar aproximaciones a caracterizaciones del razonamiento algebraico y por poner en evidencia algunos datos experimentales y justificaciones teóricas para apoyar la inclusión del álgebra desde la escuela primaria (6/7-10/11 años).

Son serios y contundentes los argumentos que sugieren la introducción progresiva al álgebra en el contexto escolar de la educación primaria pues posibilita más adelante el acceso comprensivo de los estudiantes a conceptos algebraicos más avanzados (ver, por ejemplo, Cai & Knuth, 2011; Carraher, Schliemann & Brizuela, 2001; Rivera & Becker, 2011; Vergel, 2015a, 2015b; 2016a, 2016b; Warren, 2006). En particular, Cai & Knuth (2011, p. viii) reconocen que «existen muchas razones obvias y ampliamente aceptadas para desarrollar ideas algebraicas en los grados iniciales». Esto se entiende siempre y cuando aceptemos que «el álgebra se considera como un fundamento para la aritmética más que como una generalización de la misma» (Subramaniam & Banerjee, 2011, p. 87). Por ejemplo, no es difícil aceptar que ciertos procesos de generalización que se llevan a cabo en un contexto aritmético pagan tributo a una mirada de naturaleza algebraica de este proceso; hay ciertas situaciones de orden aritmético en las que se opera analíticamente con lo desconocido o indeterminado, esto es, se hacen deducciones iniciales en tanto que se parte de ciertas premisas y se llega a un resultado buscado. El trabajo con lo indeterminado es una de las características del pensamiento algebraico (Radford, 2011, 2018; Vergel, 2015a, 2015b, 2016c) y del álgebra entendida como un método para operar sobre formas generales (Viète, 1983).

En el contexto escolar, el álgebra –asumida en forma restrictiva como lenguaje simbólico–, aparece de manera abrupta en la educación básica secundaria (11/12-14/15 años), orientada básicamente al estudio de los polinomios y a la resolución de ecuaciones e inecuaciones. En la mayoría

3 Nótese que preferimos hablar de transición aritmética-álgebra y no de transición de la aritmética al álgebra, en tanto queremos resaltar la idea de continuidad entre estos dos campos. Por ejemplo, las relaciones aritméticas, de por sí, cuentan con un carácter algebraico.

de los casos, el álgebra así entendida, se presenta sin un contexto didáctico que posibilite conectar aspectos temáticos de aritmética, de medida y de geometría tematizados en la educación primaria. A esta aproximación podría atribuirse las dificultades que encuentran los jóvenes en el trabajo algebraico, así como también a «las limitaciones de cómo se introduce la aritmética y de manera más general la matemática elemental en primaria» (Carraher & Schliemann, 2007, p. 675).

En Rojas y Vergel (2013) destacamos algunas de las dificultades antes referidas y resaltamos, por ejemplo, lo usual que resulta escuchar a estudiantes —y profesores— hablar sobre dificultades para aprender —y enseñar— álgebra, particularmente en grados 8° o 9° —13/14, 14/15 años—. Estas dificultades están asociadas al uso de símbolos literales o «letras» y al significado que se le asigna a dichas «letras» en contextos matemáticos. De hecho, desde este estudio, hemos logrado constatar que no pocos estudiantes, que durante los siete u ocho años anteriores habían tenido un buen desempeño en matemáticas, manifiestan después su sorpresa, muchas veces negativa, por tener que trabajar con «letras» en matemáticas, y usualmente se escuchan expresiones como: «¿…y por qué tengo que trabajar con letras?», o, «¿sí ve?, ¿de qué sirvió todo lo anterior?… ¡para que ahora no entienda nada!», o, incluso, «aparecieron las malditas letras».

En relación con el uso de «letras» en contextos matemáticos, consideramos importante resaltar que la denominación usual de «letra», utilizada en nuestras aulas, podría ser fuente de dificultades, en tanto posibilitaría interpretaciones no deseables sobre el sentido que se le asigna a estos símbolos literales en dichos contextos.[4] Mientras en el contexto de la lengua natural las letras son «signos gráficos», objetos que constituyen el alfabeto, en contextos matemáticos son usadas como representantes de objetos —de otra naturaleza—, sin que exista una relación directa entre esta forma de representación y los objetos matemáticos representados —números, puntos en el plano, funciones, entre otros—.[5]

Ahora bien, dependiendo del área de la matemática, la manera de referirnos a las «letras» cambia; por ejemplo, en geometría decimos: «tomemos el punto A» [no la «letra» A], y con esta expresión se hace referencia a tomar un objeto de la geometría, el punto, representado por el símbolo literal A; en álgebra, sin embargo, decimos: «tomemos *a*» y sumémosle 2, esto es,

4 Asignar, por ejemplo, un valor numérico a la «letra», de acuerdo con el orden lexicográfico, como una manera de dar algún sentido numérico a la letra, que en principio reconoce como objeto de un alfabeto, no como representante de un número no fijo, de un número desconocido —objeto del álgebra—.

5 En el sentido que el signo utilizado es «arbitrario», podríamos haber usado otro, un cuadrado o una letra de otro alfabeto —por ejemplo, el griego—.

a+2, sin explicitar que lo que tomamos es un número desconocido, y que *a* es el símbolo mediante el cual representamos dicho objeto del álgebra. Queremos enfatizar que, en tanto representación arbitraria, dicho símbolo *no es* el objeto en sí mismo sino una representación de éste. Quizás, en el trabajo del álgebra escolar, y desde un punto de vista didáctico, en el ejemplo anterior sería más adecuado decir tomemos el *número* representado por *a*, o de manera abreviada, «tomemos el *número a*», y sumémosle 2, esto es, *a*+2, donde se explicita que el objeto de referencia no es la «letra», sino el «número» representado por el símbolo literal *a*.

En relación con la aritmética y el álgebra consideramos importante explicitar nuestro reconocimiento de la existencia de un «continuo» entre estos dos campos. Las relaciones aritméticas, de por sí, cuentan con un carácter algebraico (Rojas *et al.*, 1999). No obstante, en el contexto escolar y con mayor frecuencia de lo esperado, los programas de aritmética ponen su foco de atención en el cálculo y no favorecen el aspecto relacional de las operaciones.

En la introducción del libro *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano en la educación primaria* (Vergel, 2016), Radford precisa que:

> En un capítulo que se presentó en el Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Carraher y Schliemann (2007) sugieren que el álgebra es inherente a la aritmética. Según estos autores, la aritmética tiene ya un carácter algebraico y en el fondo la aritmética y el álgebra no son «completamente distintos» (p. 17).

En términos ilustrativos, desde la aritmética es posible trabajar con cantidades desconocidas y con procesos de variación, por ejemplo, desde la proporcionalidad —en tanto relación entre magnitudes, que además posibilita una conexión con la geometría—, desde el reconocimiento y uso de «unidades múltiples» variables, que pocas veces es tematizado en el trabajo de aula.

Otro ejemplo es el caso del desarrollo del sentido numérico, el cual se empieza a producir desde edades tempranas en los estudiantes. El desarrollo del sentido numérico tiene su anclaje en el conocimiento informal que tienen los niños sobre las cantidades del mundo físico y sus relaciones. Dicho conocimiento se empieza a desarrollar a través de materiales manipulativos. Resnick (1992) sostiene que este tipo de conocimiento en los niños les posibilita adquirir una forma de pensar que denomina razonamiento *protocuantitativo* —razonamiento sin números—. De hecho, este autor distingue formas básicas de razonamiento protocuantitativo a las que llama esquemas protocuantitativos.

Sobre la base de esta idea un buen número de estudios consideran la hipótesis según la cual en la base del sentido numérico se pueden encontrar tres tipos de esquemas protocuantitativos, a saber: el de aumento-disminución, el esquema parte-todo y el esquema de comparación (Resnick, 1992). El hecho relevante aquí es que, a partir de estos esquemas, el autor sugiere que se construyen los conocimientos aritméticos de los niños. Pero no sólo esto. Las investigaciones sugieren que, por ejemplo, el esquema parte-todo se encuentra presente en la comprensión del número y las operaciones, así como en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Según Resnick (1992), este esquema tiene una componente lógica sustentada en la relación parte-todo, que es una parte esencial del razonamiento aritmético y «prealgebraico».[6]

En consecuencia, las posibles «rupturas» entre estos dos campos —aritmética y álgebra— obedecen más a hechos sociales y culturales. A manera de ejemplo, los conteos de unidades múltiples —de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, etc.—, realizados hacia adelante y hacia atrás, así como las relaciones uno-varios o varios-varios, posibilitan el desarrollo de estrategias que pueden ser potentes no sólo para abordar situaciones aditivas sino también multiplicativas, además de aportar a la comprensión de situaciones asociadas con razones y proporciones.

Al respecto, es importante precisar que la unidad puede ser tanto múltiple —un todo-múltiple—, como parte de un todo-unidad. Por ejemplo, en el contexto de las fracciones, para sumar 2 con ½, usualmente tomamos como unidad de medida ½ —aunque también podríamos tomar ¼, 1/6, 1/8,…—, para sumar 2 con 1/3, tomamos como unidad de medida 1/3 —también podríamos tomar 1/6, 1/9, 1/12,…—; mientras que para sumar ½ con 1/3, tomamos como unidad de medida 1/6 —también podríamos tomar 1/12, 1/18, 1/24,…—, es decir, en cada caso tomamos no sólo unidades que son partes de un todo-unidad, sino que dichas unidades no son fijas,[7] son «variables» (Rojas *et al.*, 1999, p. 22).

Al respecto, existen propuestas desde las cuales se plantea considerar «la multiplicación como cambio de unidad» como un objeto de la transición aritmética-álgebra (Mora y Romero, 2004; Mescud, 2006; Rojas, Romero, Mora, Bonilla, Rodríguez y Castillo, 2011), reconociendo que tal reconceptualización de la multiplicación permite entender que:

> (…) cuando se multiplica, lo que esencialmente se hace es expresar una cantidad o magnitud –no necesariamente entera– de cierta canti-

6 Sobre esta denominación, realizaremos algunas acotaciones más adelante.

7 En el caso de los números enteros la unidad de medida es fija; 3+2=3[de 1]+2[de 1]=5[de 1]; $2a+3a=5a$, es decir, en ambos casos se debe decidir cuántas de cada «cosa» hay.

> dad o magnitud unidad, en términos de otra unidad, y que, para llevar a cabo tal cambio de unidad, se realizan procesos de unitización o de normación (Rojas *et al.*, 2011, p. 58).

En términos de Rojas *et al.* (2011), la *unitización* es un proceso matemático y a la vez un efecto. Estos autores señalan es el proceso y el efecto de construir, a partir de unidades dadas, nuevas unidades de referencia. Este proceso posibilita al sujeto ver simultáneamente ambos tipos de unidad. La *normación* también se conceptualiza como proceso y efecto, en este caso sería el de reconceptualizar un sistema en relación con alguna unidad establecida, o a través de un sistema de relaciones entre unidades de referencia.

Con el propósito de explicitar en qué sentido Rojas *et al.* (2011) plantean la importancia de recuperar la unidad y reconocer la multiplicación como cambio de unidad, presentamos el siguiente ejemplo planteado por estos autores (p. 64), a partir de la siguiente situación: Un fabricante de chaquiras vende el lote de 25.000 unidades. Un fabricante de manillas —pulseras— usa 50 de esas unidades en cada manilla que elabora; una peinadora unas 100 de esas unidades para un peinado de trenzas con chaquiras.

> El fabricante de manillas se pregunta, *¿qué veo en este lote?*, y se contesta: *veo 50 manillas*. La peinadora se hace la misma pregunta y se responde: *veo 25 peinados*. El lote está en cada caso representado por los números 2500, 50 y 25 (…). El lote, *el todo*, es el mismo, *no cambia*, pero sí sus representaciones. Recuperar el lote es tener el número y la unidad de la que es pluralidad.

Este ejemplo posibilita reconocer la importancia de pasar de una representación a otra y de explicitar la relación entre distintas unidades. En general, una vez se fija una unidad es posible expresar las otras a partir de operaciones —multiplicaciones o divisiones—, pero también podemos afirmar que se trata simplemente de reconocer cambios de unidad, lo cual permite no sólo unificar las operaciones multiplicación y división, sino también las distintas imágenes asociada a estas operaciones en enteros y en fracciones.

Desde las asunciones planteadas en párrafos anteriores, es posible proponer un camino de relaciones entre aritmética y álgebra, que posibilite el logro de aprendizajes con significado y sentido, utilizando ideas culturalmente sedimentadas (p. ej., multiplicación, división, número natural) involucradas en los procesos de unitización y normación.

Kieran (1989, 1992, 2007) destaca que las dificultades con que se encuentran los estudiantes en el «tránsito de la aritmética al álgebra» tienen que ver con el uso que se hace de las «“letras» y con un cambio notable en las convenciones usadas inicialmente en aritmética. Más específicamente, esta autora destaca tres cambios significativos cuando se trabaja el álgebra: la concatenación de símbolos, el uso de paréntesis y los usos del signo igual; reconociendo además otras dificultades, relacionadas con diversas interpretaciones de las «letras», así como el reconocimiento y uso de las estructuras superficial y sistémica. Planteamos algunos ejemplos que hemos explicitado en Rojas y Vergel (2013):

Concatenación de símbolos. En el contexto aritmético, concatenar dos símbolos, esto es, poner uno a continuación de otro, es asociado con una suma: 25=20+5 o 25 = 2 decenas+5 unidades; $3\frac{1}{4} = 3+\frac{1}{4}$, mientras en el contexto del álgebra escolar, concatenar dos símbolos usualmente es asociado con una multiplicación: $2a = 2 \times a$. Por lo anterior, no resultaría extraño que, en principio, y desde un marco aritmético de referencia, la expresión $2a$ sea considerada por los estudiantes igual a $2+a$, o, incluso, igual a $20+a$. Estas interpretaciones también ponen en evidencia una dificultad que es importante resaltar aquí: la escasa comprensión del sistema de numeración decimal, de su funcionamiento, por parte de algunos niños y jóvenes.

Uso de paréntesis. ¿A qué es igual 2+3x4? Es usual que los estudiantes propongan, al menos, dos respuestas diferentes: 20 y 14, obtenidas mediante los siguientes procedimientos, respectivamente: (2+3)x4 = 5x4 = 20 y 2+(3x4) = 2+12=14. ¿Qué haría que una de ellas fuese considerada equivocada? ¿Por qué? De hecho, si no se hace uso de paréntesis o previamente no se explicita una jerarquía entre estas dos operaciones binarias —la cual se basa en la propiedad distributiva del producto sobre la suma—, tales procedimientos podrían considerarse igualmente válidos y, entonces, sería incluso pertinente preguntarse si la expresión 2+3x4 debería considerarse como una expresión aritmética válida o no, en tanto podría ser interpretada de dos maneras posibles y, en consecuencias, no sería una expresión aritmética «bien formada».[8]

Usos del signo igual. Frente a preguntas como ¿8=8? o ¿3+4=5+2?, algunos estudiantes responden que dichas igualdades son «falsas», y afirman que, en el primer caso, «sería verdadera si se escribiera 8+0=8 o 8x1=8» y, en el segundo, «3+4 es 7 y no 5, y falta completarlo: 3+4=7+2=9». ¿Qué explica tales respuestas? En el primer caso, para algunos estudiantes de 5º grado —10/11 años— el uso que hicieron de la palabra «falso» no fue como lo opuesto a verdad, sino más como «no usado», en tanto interpretan el

8 Varios estudiantes que responden que 2+3x4 es 20, argumentan que los números se operan de dos en dos, y que tales operaciones se realizan de izquierda a derecha —porque así es como escribimos—. No obstante, reconocen la diferencia entre la estructura de las dos expresiones: (2+3)x4 y 2+(3x4). De hecho, saben que la primera equivale a 20 y la segunda a 12.

signo igual como «orden de operar» o como «separación» entre un proceso y otro, no como relación de equivalencia, lo cual puede evidenciarse en el segundo caso, en el que además se observa que agregan otro signo igual —después de la operación 7+2 que han construido— y realizan el proceso que consideran hace falta para dar la respuesta.

Casos de estudiantes que escriben $2x+y=3xy$, y el pronunciamiento por parte de algunos profesores que intentan corregir afirmando que «x no se puede sumar con y, hacen necesario reflexionar con respecto a respuestas de este tipo y sus implicaciones. Esta respuesta, además de ser «ligera» y no adecuada, suele generar confusiones en los estudiantes. En este caso, si se tiene en cuenta que tanto la expresión x como la expresión y representan números —por ejemplo, números reales—, entonces $2x$ se puede sumar con y, y dicha suma se puede representar mediante la expresión $2x+y$. Lo que posiblemente pretenden decir los profesores, pero no lo hacen explícitamente, es que la expresión $2x+y$ no se puede «compactar» o representar de una manera más «simple», lo cual posibilitaría a los estudiantes reflexionar sobre el sentido asociado con los procesos de simbolización que realizan. Sin embrago, decir que «x no se puede sumar con y» puede poner en duda, por ejemplo, el sentido requerido para los polinomios en el contexto algebraico, en tanto dicha respuesta puede generar confusión sobre la validez de dichas expresiones, en tanto corresponderían a «sumas que no se pueden hacer».

Reconocemos el aprendizaje de las matemáticas como una actividad semiótica, por cuanto en toda actividad matemática se recurre a la transformación de signos dentro de sistemas semióticos culturalmente dados (Rojas, 2015). El significado de un objeto, en el sentido de Radford (2014), es atribuido por la cultura y, por tanto, tiene una existencia que trasciende al sujeto que piensa. El significado es más estable, más descontextualizado y general, y está más asociado a la semántica cultural (Rojas, 2015). Por su parte, en términos de este autor, el sentido conferido a un objeto matemático depende no sólo del sujeto, sino también del contexto en el que lo aborde, se trata entonces de algo flexible, dinámico, en movimiento, y es relativo a varias modalidades sensoriales y semióticas, en consecuencia, el sentido está más asociado a la pragmática.

En el trabajo desarrollado por Rojas (2015), se presentan evidencias sobre elementos que permiten explicar posibles causas de la no articulación de *sentidos* asignados a expresiones asociadas con un objeto matemático. Este autor propone que «el sentido de un objeto matemático primario dado es el contenido de la función semiótica que asume dicho objeto primario como expresión» (p. 154) y que la articulación de sentidos se da «cuando se establece una función semiótica entre dos sentidos diferentes de un mismo objeto matemático primario» (p. 155), en otras palabras, «cuando uno de los sentidos —contenido— del objeto primario se convierte en expresión de una nueva función semiótica que tiene como contenido otro sentido de dicho objeto» (p. 155). En este contexto, la no articulación de sentidos, según Rojas (2015), está relacionada con tres hechos fundamentales:[9]

1. Los estudiantes pueden «manejar» las propiedades básicas de los sistemas numéricos, como insumo para realizar transformaciones de tratamiento. Estas transformaciones son necesarias en términos de establecer la equivalencia sintáctica de las expresiones, pero no por ello pueden articular los diversos sentidos asignados a las expresiones dadas;
2. Existe una tendencia a anclarse en situaciones específicas planteadas en el contexto por la tarea propuesta, y
3. Se evidencia una «mirada» básicamente icónica de las expresiones algebraicas.

En el trabajo anteriormente citado el autor reporta ejemplos a partir de la actividad de algunos estudiantes de grado 9º de educación básica —14/15 años— y de último grado de educación media —16/17 años— de diversas instituciones educativas, además de algunos estudiantes universitarios e, incluso, de algunos profesores y profesoras de matemáticas —Colombia e Italia—, asociados a cada uno de estos tres hechos:

1. Pueden reconocer que la expresión $(n\text{-}1)+ n +(n +1)$ es equivalente a la expresión $3n$, en tanto pueden realizar el tratamiento requerido para transformar la primera expresión en la segunda y garantizar su *equivalencia sintáctica*; sin embargo, plantean que la primera expresión no puede ser el triple de un número, sino la suma de tres números consecutivos, es decir, no «articulan los sentidos» asignados a cada una de las expresiones y, por tanto, no reconocen *equivalencia semántica* entre ellas.

   Queremos destacar que la expresión $(n\text{-}1)+n+(n+1)$, analizada en términos del tipo de acción que puede estar expresando, efectivamente sería la «suma de tres números —consecutivos—», y la expresión $3n$, analizada también en términos de la acción que estaría representando, efectivamente sería el «triple de un número». Desde el punto de vista de los sentidos o significados asociados a las acciones representadas por cada expresión, estos serían distintos y la equivalencia semántica no es clara ni inmediata, pero podría emerger si los estudiantes logran identificar que las acciones expresadas en un tipo de expresión o en otro, son

9 J. Wertsch, un estudioso de Vygotski, señala que sentido y significado expresan potenciales semióticos diferenciados. Mientras que el significado de las palabras puede habilitar modalidades de uso descontextualizado de instrumentos de mediación, el sentido porta la potencialidad de hacer uso contextualizado de los mismos.

equivalentes. Por una parte, se requiere evidenciar que las expresiones son equivalentes sintácticamente, por ejemplo, reconociendo que en la primera expresión se pueden realizar ciertas acciones de compensación —sumar una unidad y restar la misma unidad— para obtener la expresión $n+n+n$ y que ésta a su vez es equivalente a $3n$, lo cual logran hacer varios estudiantes —y la mayoría de profesores—; pero esto no siempre resulta suficiente para que dichos estudiantes —y algunos profesores— puedan evidenciar también una equivalencia semántica, articulando los sentidos asignados a tales expresiones. Si bien pueden realizar las transformaciones requeridas en las expresiones dadas —sintaxis—, no por ello articulan los sentidos que le asignan a las mismas —semántica—. No es inmediato reconocer la expresión $(n-1)+n+(n+1)$ como el «triple de un número»; y quizás sea menos probable reconocer la expresión $3n$ como la «suma de tres números consecutivos».

2. Encuentran que *la probabilidad de que al lanzar un dado* se *obtenga un número par* es 3/6, incluso que ésta puede representarse como 50% o como 1/2; pero al preguntarles si dicha probabilidad puede ser 4/8, responden que no, pues «el dado tiene 6 caras, no 8»; al parecer, aunque saben que las fracciones 3/6, 1/2, 4/8, etc., son equivalentes, en tanto el contexto hace referencia a un dado —usual, de 6 caras—, no aceptan otras expresiones equivalentes y se presenta una especie de «anclaje» al objeto físico referido en la situación planteada.

3. El sentido asignado a la ecuación $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$, por ejemplo el asignado por algunos estudiantes de último grado de educación media —16/17 años—, fue el de «una circunferencia» y el de la ecuación $x + y = 1/(x+y)$ de «una suma igual a su recíproco»; si bien algunos reconocen que mediante un tratamiento pueden transformar la primera expresión en la segunda, lo cual las hace equivalentes, no aceptan que la segunda expresión también representaría lo mismo que la primera, y afirman cosas como «una circunferencia debe tener las variables al cuadrado». Si bien la expresión $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ *no es*, o no representa, una circunferencia,10 lo realmente interesante en este ejemplo es que pone de manifiesto que en este caso se tiene una imagen icónica de la expresión asociada a una circunferencia, lo cual hace que no se acepta que una expresión que han reconocido como equivalente —sintácticamente hablando— represente una circunferencia, pues no tiene la *forma* requerida.

10 La expresión $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ es equivalente a $(x + y)^2 - 1 = 0$ o también a $(x + y)^2 = 1$ en otros términos, es equivalente a $x+y=\pm 1$ las cuales representan dos rectas paralelas. De hecho, la expresión $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ representa lo que usualmente se denomina una cónica degenerada.

Ahora bien, las dificultades que reportamos podrían estar más relacionadas con la escasa tematización que se hace desde el contexto escolar en relación con la generalización, y con lo no determinado o lo desconocido; en este sentido, podríamos pensar que se trata más de dificultades de tipo curricular o didáctico, que de dificultades de tipo cognitivo. De hecho, los niños, desde temprana edad, reconocen y trabajan lo general (Carraher & Schliemann, 2007) e, incluso, pueden tematizar lo desconocido.

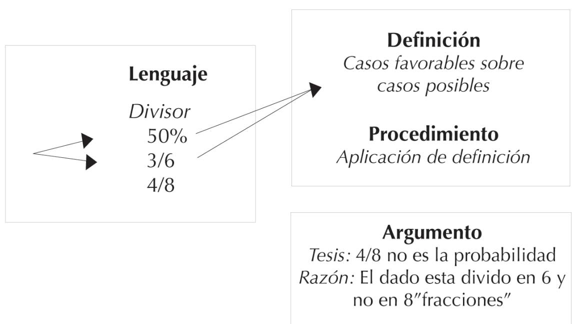
Para finalizar este capítulo, queremos presentar dos diagramas que, de manera sintética, dan cuenta del trabajo realizado por un estudiante sobre la situación —tarea— comentada anteriormente, en la que se preguntaba sobre la probabilidad de obtener un número par, al lanzar un dado. Los diagramas y parte de los análisis son tomados de Rojas (2015).

Diagrama 1. Configuración inicial de Daniel.

Problema (Tarea – Cuestionario 1)

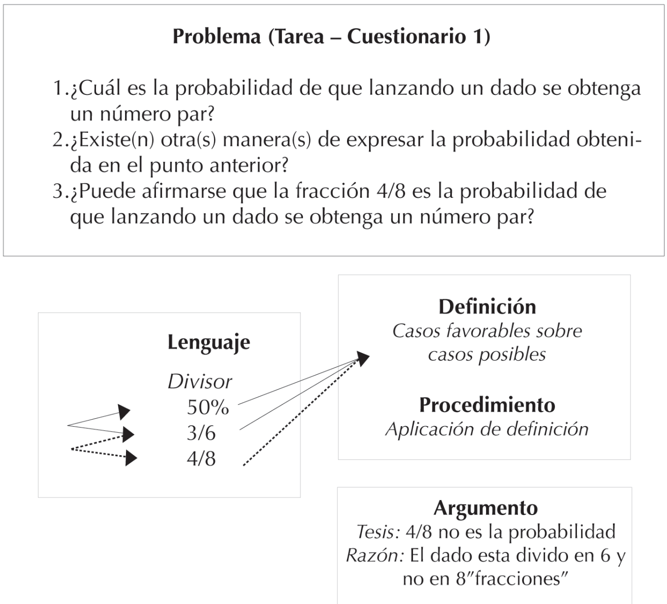
En lo que sigue, siempre se hará referencia a un dado tradicional de seis caras. Por favor, conteste en el orden en que aparecen los puntos y sólo continúe con el siguiente cuando haya respondido completamente el punto anterior.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?
   (a) La probabilidad es:
   (b) Explique brevemente cómo realizó el cálculo de la probabilidad:
2. ¿Existe(n) otra(s) manera(s) de expresar la probabilidad obtenida en el punto anterior?
   (a) Marque con una X su respuesta Sí ( ) No ( )
   (b) En caso afirmativo muestre cuál(es) sería(n) esa(s) manera(s). En caso negativo explique por qué no existiría otra manera de expresar dicha probabilidad.
3. ¿Puede afirmarse que la fracción 4/8 es la probabilidad de que lanzando un dado se obtenga un número par?
   (a) Marque con una X la respuesta que considera correcta
   Sí ( ) No ( )
   (b) Justifique a continuación, con el mayor detalle posible, su respuesta:



En el Diagrama 1 se da cuenta de la configuración cognitiva inicialmente lograda por el estudiante, en tanto red de objetos matemáticos que pone en juego al abordar la situación-problema o la tarea propuesta, específicamente el lenguaje usado por el estudiante, las definiciones o procedimientos utilizados y los argumentos planteados, así como los sentidos inicialmente asignados a las expresiones numéricas —los cuales se representan mediante una línea continua, relacionando la expresión con el contenido asignado—.

Diagrama 2. Configuración final de Daniel.



En el Diagrama 2 se presenta la configuración lograda después de un proceso de interacción con sus compañeros y con el profesor, resaltando los nuevos sentidos que logra asignar a las expresiones —ahora representados mediante una línea a trazos—, es decir, se evidencia un cambio en la configuración cognitiva inicial, en cuanto logra articular nuevos sentidos de las expresiones usadas en esta tarea o articular los sentidos inicialmente asignados a tales expresiones. Dicha interacción generó, en particular, cambios en las interpretaciones realizadas por este estudiante y sus compañeros; por una parte, reconociendo explícitamente la equivalencia entre las fracciones 3/6 y 4/8, e incluso que cualquier fracción equivalente a 3/6 podría representar la probabilidad pedida en la tarea, aunque algunos permanecen «anclados» al objeto de la situación, al *dado* y al número de caras de éste, lo cual no les permitía articular los sentidos asignados a tales expresiones y, por tanto, no aceptar que 4/8 sea dicha probabilidad. En el caso de Daniel, logra «separarse» de la situación concreta y reconocer que la fracción 4/8 representa dicha probabilidad, además de articular los sentidos asignados a las diferentes expresiones numéricas.

Como se puede evidenciar en los diagramas presentados, la tematización a propósito de las interpretaciones realizadas por los estudiantes posibilita un cambio con respecto a los sentidos inicialmente asignados a las expresiones involucradas. Diagramas como los presentados resultan útiles para realizar análisis a propósito de las producciones de nuestros estudiantes en relación con las tareas o situaciones-problemas propuestas en el aula.

Capítulo 2.
Álgebra escolar y currículo

Es frecuente encontrar situaciones de aula en las que los profesores, a pesar de sus ingentes esfuerzos por hacer comprender en sus estudiantes fórmulas y/o procedimientos algebraicos, acuden a ciertas explicaciones que provocan momentáneamente credibilidad pero que rápidamente se desestiman por parte de los mismos estudiantes. Así, resulta frecuente en las aulas de clase de álgebra la siguiente situación:

Es el caso de estudiantes que en el trabajo con expresiones algebraicas plantean que $(a+b)^2=a^2+b^2$; ante tal «error» los profesores manifiestan una y otra vez su desconcierto. Usualmente, de manera casi inmediata, proceden a evaluar las variables, para así encontrar los valores de cada una de las expresiones y comparar los valores obtenidos. Por ejemplo, si a=1 y b=2, se obtiene que $(a+b)^2=(1+2)^2=9$, mientras que $a^2+b^2 =1^2+2^2=1+4=5$, lo cual permite concluir que tal igualdad no es posible. Es claro que este argumento puede resultar contundente para el profesor. Sin embargo, dicha explicación no parece tener un efecto similar para la mayoría de estudiantes; ¿qué explica que tal argumento sea claro para el profesor y no para la gran mayoría de los estudiantes?

Siguiendo ideas de Drouhard y otros (1995; citados por Papini, 2003: 52), la anterior «estrategia didáctica» se basa en una creencia generalizada de los profesores, según la cual sus estudiantes reconocen que tal igualdad es válida si ella se cumple para todos los valores posibles de las variables. Hay aquí una condición de tipo matemático en el proceso, relacionada con el manejo de la idea de cuantificador, esto es, se requiere reconocer que para cualquier evaluación de las variables a y b, los valores de las expresiones $(a+b)^2$ y a^2+b^2 sean iguales. Pero, al parecer, muchos profesores desconocen que este criterio no es reconocido por la mayoría de sus estudiantes como condición necesaria para garantizar dicha igualdad. Esta situación podría obedecer a un hecho problemático según el cual el trabajo algebraico en el aula se enfoca muy rápidamente, y a veces de manera exclusiva, al reconocimiento y aplicación de reglas, muchas veces sin la toma de conciencia sobre estas reglas. Creemos que, si bien es importante abordar el uso de reglas que permiten realizar transformaciones en un registro algebraico —es decir, en la sintaxis—, no se puede descuidar el significado de los signos —es decir, la semántica—, o, para ser quizás más precisos, es necesario auscultar qué es lo que los estudiantes quieren comunicar a través de los signos que tienen a su disposición.

En el proceso de la transición aritmética-álgebra se va generando un cambio de sistema semiótico de representación. Consideramos que en los procesos de formación docente en matemáticas éste es un aspecto didáctico que debe atenderse. Algunos elementos, que desde los estudios en didáctica del álgebra merecen ser enfocados, están relacionados con el reconocimiento de que se empieza a trabajar con otros objetos —expresiones con letras e igualdades— y con reglas diferenciadas, además de un cambio sustancial en el significado del signo igual. En particular, la concatenación de signos, como ya mencionamos en el Capítulo 1, obedece a reglas diferentes; mientras en un contexto aritmético dicha concatenación se asocia con la representación de una suma, en el contexto algebraico se asocia con la representación de un producto.

La complejidad manifiesta se puede traducir en la problemática didáctica asociada con la noción de variable en matemáticas, lo cual, según Rojas *et al*. (1999), hace necesario poner en consideración una explicitación, propuesta por Usiskin (1988), «de las formas como puede ser entendida el álgebra, y las interpretaciones de la letra que a esas formas se asocian —en tanto interpretaciones "mínimas" requeridas para trabajar con éxito bajo dicha concepción—» (Rojas *et al*., 1999, p. 67):

Figura 1. Diversas concepciones de álgebra en correspondencia con uso de la letra y destrezas asociadas.

Concepción de álgebra	**Uso de la letra**	**Destrezas asociadas**
Aritmética generalizada	Patrones generalizadores (letra como objeto)	Traducir y generalizar (relaciones entre números)
Estudio de procedimientos para resolver problemas	Incógnitas	Simplificar y resolver
Estudio de relaciones entre cantidades	Argumentos, parámetros (letra como número generalizado, o como variable)	Relacionar, tabular, graficar
Estudio de estructuras	Objetos arbitrarios	Manipular, justificar

En relación con la figura anterior, Rojas *et al*. (1999) precisan que:

> (…) la imagen de álgebra como aritmética generalizada —implícitamente presentada en algunos textos escolares y trabajada por algunos maestros—, no garantiza interpretaciones de la letra como número generalizado, en tanto el uso de las letras como modelos o patrones generalizadores puede asociarse con interpretaciones de éstas como objetos —como una manera de nombrar—, sin que necesariamen-

te se les reconozca su carácter operativo, en tanto representantes de números en un cierto universo; en tal sentido, las posibilidades de interpretación de la letra como número generalizado depende, en gran medida, del tratamiento metodológico dado.

En un trabajo anterior (Rojas y Vergel, 2013) resaltamos algunos de los elementos planteados en los estándares curriculares propuestos por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Norteamérica (NCTM) y los planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia. Particularmente, destacamos la posición teórica que asumen en relación con la pregunta acerca de la posibilidad o la necesidad de abordar álgebra en niveles tempranos.

Si bien desde el NCTM (2000) no se plantea taxativamente un trabajo didáctico en los primeros grados de primaria sobre la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares, en Rojas y Vergel (2013) identificamos que sí reconocen la pertinencia de hacer trabajo a partir de tareas y actividades orientadas a la búsqueda y generalización de patrones, la realización de experiencias significativas con números y sus propiedades, los cuales se erigen como fundamento para un trabajo ulterior y comprensivo con símbolos literales y expresiones algebraicas.

A continuación reportamos las expectativas específicas que, desde el NCTM (2000), se plantean por grupos de grados, desde el preescolar hasta el grado 12º (Rojas y Vergel, 2013, p. 765):

- PreKinder-Grado 2º: usar representaciones concretas, pictóricas y verbales para desarrollar una comprensión de notaciones «simbólicas», inventadas y convencionales.
- Grados 3º-5º: describir, extender y hacer generalizaciones acerca de patrones geométricos y numéricos; representar y analizar patrones y funciones usando palabras, tablas y gráficas.
- Grados 6º-8º: representar, analizar y generalizar una variedad de patrones con tablas, gráficas, palabras y, cuando sea posible, reglas simbólicas.
- Grados 9º-12º: generalizar patrones usando explícitamente funciones definidas y definidas recursivamente.

Además, identificamos desde el trabajo aludido (Rojas y Vergel, 2013), que el NCTM (2000) sostiene que se requiere prestar menos atención a manipular símbolos sin sentido, memorizar reglas y procedimientos, así como desplegar prácticas de repetición sobre resolución de ecuaciones. Deducimos también que el NCTM sugiere no enfatizar la resolución de problemas rutinarios de un sólo paso y problemas prototipo, pues en estos casos el proceso de razonamiento no está afincado claramente en el estudiante. Desde nuestra interpretación, existe una cierta tendencia, aún vigente en algunas instituciones escolares y asumida por diversos profesores, de resaltar y enfatizar el uso de estrategias y métodos de resolución de problemas, los cuales han sido reconocidos a partir de problemas-tipo previamente «presentados» en textos o por parte del profesor, además de realizar algunos procedimientos repetitivos, donde el estudiante no requiere realizar un razonamiento sobre los problemas propuestos, más allá de reconocer su similitud con otros.

El NCTM establece unos ejes que marcan pautas generales para cada uno de los estándares establecidos —números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad—, y que deberían darse para todos los niveles educativos. En particular, en el *estándar de números y operaciones*, se propone que los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a los estudiantes para:

- Comprender los números, las diferentes formas de representarlos, las relaciones entre ellos y los conjuntos numéricos.
- Comprender los significados de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras.
- Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables (NCTM, 2000, p. 34).

En el contexto canadiense, para plantear otro caso, el currículo ha sido algebrizado, y el álgebra aparece desde el primer año de escuela primaria; sin embargo, tal *algebrización* no ha sido en el sentido propuesto por Kaput (2000) de integrar el pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. Siguiendo ideas de Radford (2012), en el programa de estudios de matemáticas de Ontario —Canadá—, la diferencia entre la aritmética y el álgebra no es clara, no se sabe si ciertos contenidos prescritos están todavía dentro de lo que debería considerarse aritmética o ya están dentro de lo que sería álgebra.

Algunos estudios adelantados en el contexto colombiano, sobre dificultades en el aprendizaje del álgebra y en relación con el significado asignado por estudiantes de grado 8° y 11° al uso de las "letras" en álgebra (Rojas *et al.*, 1999; Agudelo, 2000; Agudelo y Vergel, 2009), sugieren la idea urgente de profundizar en el estudio curricular de esta área de las matemáticas —álgebra escolar—. La urgencia y necesidad también se manifiesta a partir de análisis de los resultados de estudios internacionales, como el TIMMS[11] que dan cuenta del escaso desarrollo del pensamiento matemático construido a través del aprendizaje del álgebra.

---

11 En el estudio timss, conocido inicialmente como *Third International Study in Mathematics and Science* (1995), contó con la partición de 41 países, incluido Colombia —estudiantes de los grados 7°, 8° y 11°—. Este estudio se ha realizado en años posteriores (1999, 2003, 2007, 2011), pero ahora conocido como "Trends in International Mathematics and Sciencie Study", cuenta ahora con la participación de 70 países.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia, desde los documentos curriculares de matemáticas (MEN, 1998, 2006), sugiere nuevos elementos teóricos y metodológicos, afincados en la literatura nacional e internacional generada en el campo de la Educación Matemática, que pretenden actualizar y pensar la estructura curricular de la educación matemática en Colombia. En particular, en los Lineamientos curriculares (MEN, 1998) se identifican dos elementos importantes:

- La introducción de los diferentes tipos de Pensamiento Matemático: Numérico, Espacial, Métrico, Variacional y Aleatorio.
- Un llamado de atención con respecto a la importancia de implementar al interior del aula procesos como la modelación, comunicación, la resolución de problemas, el razonamiento y la ejercitación de procedimientos que permitan el aprendizaje de las matemáticas en contextos significativos para los alumnos.

Desde las recomendaciones y sugerencias expuestas en el documento de Lineamientos curriculares para el área de Matemáticas se propone una restructuración conceptual y metodológica del álgebra escolar. Dicha reestructuración pone a la base la idea de desarrollar pensamiento variacional, a través de procesos de generalización, de comunicación y argumentación, así como de la modelación de situaciones de cambio (Rojas y Vergel, 2013). Nos parece que lo expuesto en este documento curricular se sintoniza con los resultados de investigaciones nacionales e internacionales que sugieren la necesidad de motivar el estudio de la variación y el cambio, de las regularidades y la detección de los criterios que las rigen, lo cual implica procesos de explicación y comunicación. También, desde estas investigaciones, es didácticamente pertinente auscultar las reglas de formación para identificar el patrón que se repite periódicamente, identificar elementos característicos asociados al pensamiento algebraico. El documento de Lineamientos curriculares expone sugerencias explícitas en relación con tareas y actividades para desarrollar el pensamiento variacional desde los primeros niveles de la educación básica primaria:

> Analizar de qué manera cambia, aumenta o disminuye la forma o el valor en una secuencia o sucesión de figuras, números o letras; hacer conjeturas sobre la forma o el valor del siguiente término de la secuencia; procurar expresar ese término, o mejor los dos o tres términos siguientes, oralmente o por escrito, o por medio de dibujos y otras representaciones, e intentar formular un procedimiento, algoritmo o fórmula que permita reproducir el mismo patrón, calcular los siguientes términos, confirmar o refutar las conjeturas iniciales e intentar generalizarlas (MEN, 2006, p. 67).

La comunidad académica nacional de educadores matemáticos también, desde luego, sugiere prestar más atención a desarrollar procesos de identificación y uso de relaciones funcionales, representar semióticamente a través de tablas, gráficas y reglas para describir situaciones. En términos didácticos es clave motivar a los estudiantes a que realicen interpretaciones entre diferentes representaciones —verbales, gráficas, numéricas, tabulares, simbólicas—. En relación con la idea de resolución de problemas, los estudios e investigaciones sugieren proponer problemas abiertos y tareas ampliadas, en diferentes contextos, no desestimar el uso de métodos informales en la resolución de problemas, valorar los métodos de ensayo-error, así como la necesidad de investigar y plantear preguntas a partir del abordaje de situaciones problema que posibilite complejizar los mismos problemas y hacer generalizaciones de resultados.

En el contexto español, según Zapatera (2016), aunque el currículo de primaria no incluye referencias específicas al álgebra, sí introduce el pensamiento algebraico en tanto que plantea el siguiente criterio de evaluación en relación con el trabajo con patrones: «describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones» (Zapatera, 2016, p. 34).

Los currículos de otros países han puesto su atención en la incorporación de aspectos del álgebra a temprana edad, introduciendo algunas características del pensamiento algebraico. Hacemos referencia aquí al trabajo de Zapatera (2016, p. 34), el cual explora los currículos de algunos países en la idea de describir cómo han ido introduciendo elementos de álgebra en educación primaria:

- El currículo de Australia fomenta que los estudiantes de primaria reconozcan patrones para entender los conceptos de variable y función, formulen generalizaciones y apliquen sus habilidades numéricas para llevar a cabo investigaciones algebraicas, resolver problemas y comunicar su pensamiento.
- El currículo costarricense, por su parte, propone la generalización de la aritmética y de los patrones considerando las funciones como parte central de las matemáticas.
- El currículo ruso propone desarrollar el pensamiento algebraico desde los seis años explorando y comparando cantidades desde el estudio de la aritmética y analizando, expresando y manipulando simbólicamente relaciones cuantitativas.
- La estructura curricular de China incorpora el pensamiento algebraico desde el primer grado para ayudar a los estudiantes a representar y comprender relaciones cuantitativas de forma numérica y de forma simbólica.

- Los currículos de Corea y Singapur proponen desarrollar el pensamiento algebraico en la educación primaria por medio de le generalización, la resolución de problemas y el conocimiento de funciones.- El currículo chileno, por su parte, pretende que los estudiantes de educación primaria expliquen y describan relaciones entre números, formas, objetos y conceptos, y que identifiquen, extiendan y expresen patrones para facilitar el desarrollo del pensamiento algebraico.

Como podemos observar, estos currículos ponen el acento en el estudio de relaciones entre cantidades, la generalización de patrones y la expresión y manipulación simbólica, como aspectos para desarrollar el pensamiento algebraico. Se reconoce, entonces, que para los currículos de otros países es importante el desarrollo del pensamiento algebraico desde tempranas edades.

En relación con el trabajo en las aulas, y particularmente en la educación primaria, Godino y Wilhelmi (2014) plantean la necesidad de que los maestros en formación, y por supuesto quienes trabajamos en las aulas, reconozcamos algunas características del razonamiento algebraico que pueden ser adquiridas con relativa facilidad por nuestros niños, a saber (p. 202):

1. Los patrones o regularidades existen y aparecen de manera natural en las matemáticas. Pueden ser reconocidos, ampliados o generalizados. El mismo patrón se puede encontrar en muchas formas diferentes. Los patrones se encuentran en situaciones físicas, geométricas y numéricas.
2. El uso de símbolos permite expresar de manera más eficaz las generalizaciones de patrones y relaciones. Entre los símbolos destacan los que representan variables y los que permiten construir ecuaciones e inecuaciones.
3. Las variables son símbolos que se ponen en lugar de los números o de un cierto rango de números. Las variables tienen significados diferentes dependiendo de si se usan como representaciones de cantidades que varían, como representaciones de valores específicos desconocidos, o formando parte de una fórmula.
4. Las funciones son relaciones o reglas que asocian los elementos de un conjunto con los de otro, de manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo uno del segundo conjunto. Se pueden expresar en contextos reales mediante gráficas, fórmulas, tablas o enunciados.

Por otra parte, y en lo que denominan práctica o actividad algebraica, estos autores reconocen la importancia de los procesos de particularización y de generalización —procesos duales—, en tanto este último constituye uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico, y de manera especial abordar los objetos resultantes de tales procesos:

> (…) Como resultado de un proceso de generalización, obtenemos un tipo de objeto matemático que denominaremos objeto *intensivo*, que viene a ser la regla que genera la clase, el tipo o la generalidad implicada (…). Mediante el proceso inverso de particularización, se obtienen objetos que denominamos *extensivos*, esto es, objetos particulares. El objeto intensivo puede ser visto como la regla que genera los elementos que componen una colección o un conjunto, sea finito o infinito. Una colección finita simplemente enumerada no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en el que el sujeto muestra el criterio o la regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. Entonces el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización* (Godino y Wilhelmi, 2014, p. 205).

Al respecto, reconocen que la nueva entidad unitaria deber «materializarse», ser ostensiva, ya sea mediante un nombre, un ícono, un gesto o un símbolo, no sólo para poder referirla, sino también para usar en otras prácticas; es decir, debemos tener presente que los procesos de generalización requieren ser acompañados de procesos de representación, para posibilitar su reconocimiento como «cosa» sobre la cual podemos realizar acciones y, en particular, reconocerle su carácter operatorio.

Los procesos de representación como una manera de comunicar lo que se piensa aparecen como procesos fundamentales en el trabajo en matemáticas en general. Esta idea de representación difiere significativamente de la que hemos expresado en párrafos anteriores en este mismo texto. Si bien reconocemos que la representación sirve para comunicar lo que se piensa —para externalizar el pensamiento—, lo cual constituye una función muy importante, también la reconocemos como un instrumento de pensamiento, para producir nuevos objetos, en tal sentido, la representación es consustancial a los objetos.

De hecho «el lenguaje matemático, en su primera etapa, lo identifican los estudiantes con el lenguaje aritmético» (Fuentes, 2016, p. 39). Por su parte el lenguaje algebraico usa letras como variables, lo cual supone, como lo hemos explicitado en el Capítulo 1, nuevas reglas y convenios de notación que, en términos semióticos, reviste una complejidad en los procesos de cognición y, en consecuencia, en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Kieran (1989) destaca la idea de estructura aritmético-algebraica para poner de manifiesto las articulaciones entre lenguaje aritmético y lenguaje algebraico. Esta autora plantea que el uso de la frase estructura aritmético-algebraica refiere, en términos generales, a la estructura de un sistema que está formado por un conjunto de números/variables numéricas, algunas operaciones y las propiedades de estas operaciones.

Estos tipos de lenguaje están presentes en ciertas producciones de estudiantes cuando abordan tareas sobre generalización de patrones como una vía para desarrollar el pensamiento algebraico; no obstante, para la mayoría de estudiantes la expresión de dicha generalidad, su simbolización, es un problema complejo. De hecho, desde una perspectiva semiótica se pueden contemplar distintas formas de expresar la generalidad (Radford, 2003). En el trabajo de Callejo, García y Fernández (2016), centrado en documentar características del pensamiento algebraico a partir de tareas sobre generalización de patrones, se encuentra que algunos aspectos del pensamiento algebraico tienen que ver con la coordinación entre la estructura espacial y la numérica al representar gráficamente un término particular. Reconocer las estructuras espacial y numérica posibilita acercamientos importantes a procesos de generalización y al desarrollo de pensamiento algebraico (Vergel, 2015a).

Sin embargo, en secuencias de patrones crecientes los estudiantes encuentran dificultades con las secuencias que no se comportan como una progresión aritmética, sino que tienen asociado, por ejemplo, un patrón cuadrático (Solar, 2016). En este tipo de tareas, las cuales presentan un obstáculo importante, es fundamental reconocer la estructura espacial para guiarse por la configuración geométrica de la secuencia. Solar (2016) sugiere la familiarización con los patrones crecientes mediante el uso de material concreto, hecho que coincide con los hallazgos de Villanueva (2012) quien con estudiantes de primer grado escolar encuentra que el uso de material concreto posibilita el establecimiento del patrón de formación en secuencias figurales.

Estas ideas tienen sus implicaciones tanto en el diseño como en el desarrollo curricular en las matemáticas escolares, lo cual supone un trabajo serio, profesional y dedicado de diseño de tareas y orientación de actividades a través de las cuales el maestro asume un papel protagónico en tanto su sensibilidad analítica para identificar rasgos o indicios sobre el desarrollo del pensamiento —por ejemplo, algebraico— está estrechamente vinculada a su sensibilidad teórica (Vergel, 2016a).

Varios estudios realizados en Colombia (ver, por ejemplo, Villanueva, 2012; Gómez, 2013; Lasprilla, 2014; Mojica, 2014; Pantano, 2014; González, 2015; Moreno, 2015; Bautista y Cardozo, 2016) conducidos desde la teoría de la objetivación (Radford, 2006, 2013a, 2014), llaman la atención sobre la necesidad de sensibilización de los docentes frente al diseño de tareas y a la identificación, en la actividad matemática, de los recursos semióticos a los cuales acuden los estudiantes cuando abordan ideas matemáticas. Estos trabajos muestran, en términos generales, que los procesos de objetivación —de aspectos aditivos, multiplicativos, algebraicos, variacionales y probabilísticos— no son procesos homogéneos ni lineales y que los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto conceptual en estratos de generalidad.[12] También sugieren pensar en prácticas de evaluación distintas a las tradicionales en las que se posiciona una perspectiva positivista de la evaluación.

En términos del diseño y desarrollo curricular en matemáticas, específicamente en aritmética y álgebra, las investigaciones mencionadas aportan nuevos elementos teóricos y didácticos que, por un lado, posibilitan realizar una aproximación a la caracterización del desarrollo y manifestación del pensamiento matemático temprano —por ejemplo aditivo, multiplicativo, algebraico y probabilístico— y, por otra parte, sugieren elementos de reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos, así como también sobre aspectos curriculares, por cuanto es necesario tomar conciencia, entre otros, de los aspectos corpóreos que guían las formas de acción, reflexión y expresión culturales de los estudiantes cuando resuelven tareas matemáticas.

Varias de las ideas expuestas en los párrafos anteriores de este capítulo han estado iluminadas desde la propuesta de cambio curricular de Álgebra temprana. En el siguiente capítulo describimos aspectos característicos más específicos de esta propuesta curricular y su conexión con las ideas de pensamiento y pensamiento algebraico. Esta conexión no la estamos considerando de menor importancia. Todo lo contrario. Cuando hablamos de Álgebra temprana nos interesa discutir, entre otras cuestiones, las formas de pensamiento algebraico y relacional que se pueden desarrollar a temprana edad y empezar a reconocer que estas formas de pensamiento, en efecto, pueden aparecer y son deseables que aparezcan para objetar las formas tradicionales de abordar el álgebra en la escuela.

12 La idea teórica de medio semiótico de objetivación será abordada en las secciones 3.3 Pensamiento y pensamiento algebraico y 3.4 Algunas consideraciones teóricas sobre la actividad semiótica de estudiantes de educación primaria en una tarea sobre secuencia de patrones, correspondientes al Capítulo 3.

Capítulo 3.
Álgebra temprana, pensamiento y pensamiento algebraico

En este capítulo presentamos, inicialmente, algunas consideraciones del Álgebra temprana como una propuesta de cambio curricular que se posiciona en el contexto internacional y que brinda elementos teóricos y prácticos para introducir el álgebra desde la educación primaria. Las formas de pensar algebraicamente en el contexto del Álgebra temprana sugieren asumir una posición teórica que se aleja de perspectivas cognitivistas tradicionales. En este sentido, presentamos en la segunda parte del capítulo una categoría denominada pensamiento relacional y posteriormente precisamos teóricamente las ideas de pensamiento y pensamiento algebraico.

En la tercera parte abordamos algunas consideraciones teóricas sobre la actividad semiótica de estudiantes de educación primaria alrededor de una tarea sobre secuencia de patrones, en la que presentamos una reflexión a partir de una experiencia investigativa sobre la generalización de patrones como actividad semiótica, acompañada de algunas consideraciones desde la perspectiva de la teoría de la objetivación.

Algunas consideraciones del Álgebra temprana como propuesta de cambio curricular

El Álgebra temprana —o *early algebra*— se posiciona cada vez más como una propuesta de cambio curricular que enfatiza la idea de Kaput (2000) sobre la *algebrización* del currículo de matemáticas. Esto es, como ya lo hemos señalado, la integración del pensamiento algebraico en las matemáticas escolares. La idea de empezar a enseñar álgebra a estudiantes jóvenes cobra cada vez más relevancia por las investigaciones que se han adelantado desde que Kaput presentó su texto en un encuentro organizado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y otros organismos estadounidenses. Este autor sostiene que una exposición temprana al álgebra «elimina el elemento curricular más pernicioso de las matemáticas de la escuela de hoy —cursos de álgebra de secundaria tardíos, repentinos, aislados y superficiales—» (Kaput, 1998, p. 24). Plantea además que «(…) la clave para la reforma del álgebra es integrar el razonamiento algebraico en todos los grados y en todos los temas "algebrizar" las matemáticas escolares» (p. 24).

Esto significa que los estudios e investigaciones han abordado el problema de la incorporación del álgebra desde los primeros años escolares (Vergel, 2010), «no como una asignatura sino como una manera de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, como guía hacia una enseñanza con comprensión y significado de las matemáticas» (p. 72).

En términos generales, la propuesta curricular de Álgebra temprana considera el álgebra desde una concepción amplia. Esta concepción abarca el estudio y generalización de patrones, la identificación de relaciones numéricas, la caracterización de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación, con sentido, del simbolismo, el estudio y comprensión de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización (Kaput, 1998, 2000; citados en Socas, 2011). Esta perspectiva invita a los docentes de matemáticas de todos los niveles a posibilitar en la sala de matemáticas la identificación y descripción de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y favorecer un ambiente de aula en el que se valore que los estudiantes se equivoquen, exploren, modelicen, elaboren predicciones, discutan, propongan explicaciones argumentadas, corroboren ideas matemáticas y practiquen habilidades de cálculo (Blanton & Kaput, 2005).

En el contexto internacional se reconoce otra perspectiva, la Pre-álgebra, desde la cual se plantea la necesidad de abordar un trabajo previo al estudio del álgebra formal; una transición desde la aritmética al álgebra, que toma como referencia las dificultades y los errores de los alumnos en álgebra, las cuales dan cuenta de un tratamiento insuficiente de lo aritmético y lo numérico en la educación primaria. En este sentido, esta perspectiva curricular se diferencia de la propuesta del Álgebra temprana o *early algebra*. Por supuesto, estos enfoques están asociados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas antes de la enseñanza-aprendizaje formal del álgebra, pero queremos destacar aquí sus diferencias en términos de las finalidades de cada uno. En otras palabras, la propuesta curricular de Pre-álgebra busca suavizar la transición, muchas veces arbitraria y abrupta, de la aritmética al álgebra y, de este modo, intentar eliminar las dificultades que usualmente encuentran los estudiantes durante el proceso de aprendizaje del álgebra.

Por su parte, el Álgebra temprana comporta unos objetivos más amplios, como ya hemos mencionado, y considera que las dificultades que evidencian los estudiantes en el proceso de aprendizaje del álgebra residen, fundamentalmente, a la manera en que las matemáticas elementales son introducidas y desarrolladas. El enfoque de Pre-álgebra, según Carraher y Schliemann (2007), no problematiza la idea según la cual la enseñanza del álgebra comienza en la educación secundaria. Para el Álgebra temprana este último aspecto se constituye en una preocupación fundamental.

En el contexto internacional de la comunidad de educadores matemáticos viene cobrando importancia la categoría de pensamiento relacional. Molina (2009) estudia esta categoría, la cual, según Fernández e Ivars (2016, p. 22), basados en estudios llevados a cabo en educación matemática, «elimina las barreras entre aritmética y álgebra». Desarrollar, entonces, el pensamiento relacional parece prometedor en términos del aprendizaje de las matemáticas en tanto que articula lo aritmético y lo algebraico. Según Molina (2009):

> Este tipo de pensamiento, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas —algebraicas—, consiste en la actividad intelectual de examinar expresiones aritméticas —algebraicas—, considerándolas como totalidades, detectar de manera espontánea o buscar deliberadamente relaciones entre ellas o entre sus términos, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, como puede ser resolver un problema, tomar una decisión o aprender más sobre la situación o los conceptos involucrados (p. 141).

En otras palabras, el pensamiento relacional refiere a modos flexibles de abordar una situación o problema matemático y centra su atención en las relaciones y elementos claves que la definen para construir una estrategia de resolución (Molina, 2009). Fernández e Ivars (2016, pp. 21-22) plantean que algunas dificultades y errores en el aprendizaje del álgebra que pueden tener sus raíces en la falta de desarrollo del pensamiento relacional pueden ser las siguientes:

- Considerar las expresiones como enunciados incompletos y, en consecuencia, no aceptar que una expresión no pueda cerrarse, es decir, no aceptar como solución expresiones tales como $39x - 4$ y simplificarlas como $39x - 4 = 35x$.
- No saber determinar cuándo las expresiones se pueden simplificar y cuándo no. Por ejemplo, no son conscientes de que la expresión $a+a+a_x2$ no se puede simplificar como $3a_x2$.
- No aplicar correctamente las propiedades, por ejemplo, en la expresión $4(x + y)$ concluir que $4(x + y) = 4x + y$ —dificultades con la aplicación de la propiedad distributiva—, o en la expresión $8x - (8 - 4x) = 4x-8$ en lugar de $12x-8$ —aplicación incorrecta de las propiedades asociativa y conmutativa de la resta—.

El desarrollo de este tipo de pensamiento a través de tareas y actividades cuidadosamente planeadas es todavía un tema de investigación en la comunidad académica. En este orden de ideas, «las actividades aritméticas centradas en el uso de pensamiento relacional representan un cambio fundamental de un foco aritmético —procedimental, centrado en el cálculo de respuestas— a un foco algebraico —estructural, centrado en examinar relaciones—» (Molina, 2009, p. 143). Coincidimos con esta autora en que el uso de pensamiento relacional aporta elementos que posibilitan minimizar el cálculo de operaciones y que los estudiantes reflexionen sobre propiedades de las operaciones, la manipulación fundamentada de expresiones numéricas y sobre cómo esta manipulación llega a afectar a las expresiones.

Consideramos, además, que usar el pensamiento relacional posibilita, por ejemplo, un análisis de las cantidades involucradas en las situaciones propuestas, las relaciones lógicas entre ellas —entre las partes y el todo—, la naturaleza de las mismas —conocidas/determinadas, desconocidas/indeterminadas—, las acciones y operaciones sobre ellas, así como el reconocimiento de expresiones equivalentes o la formulación de ecuaciones.

Un aspecto interesante sobre este tipo de pensamiento reside en su carácter algebraico (Molina, 2009). Este aspecto es importante en términos didácticos en el marco del Álgebra temprana, pues brinda herramientas para conectar aritmética y álgebra. Nos parece pertinente señalar que el uso —o desarrollo— de pensamiento relacional, en el contexto del trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas, puede comprender varios aspectos didácticos que ponen de manifiesto su carácter algebraico. Estos aspectos son:

- La consideración de expresiones aritméticas desde un punto de vista estructural, promoviendo un enfoque no computacional de la aritmética al alejar la atención del valor numérico de las expresiones, es decir, de la obtención del resultado de las operaciones expresadas.
- La concepción de las expresiones como totalidades, susceptibles de ser comparadas, ordenadas, igualadas y transformadas, y, por tanto, la aceptación de la falta de clausura.
- El favorecer el desarrollo y uso de sentido numérico y de sentido operacional, facilitando el avance hacia la concepción de las operaciones y expresiones aritméticas como objetos, y no sólo como procesos.
- La potenciación de la exploración, identificación y descripción de patrones y relaciones sobre los números y operaciones, primeros pasos en el proceso de su generalización.
- El uso del lenguaje horizontal, tradicionalmente más propio del álgebra que de la aritmética.
- El favorecer la exploración de la igualdad como la representación de una relación estática entre dos expresiones, así como la interpretación bidireccional de las igualdades y sentencias.
- La potenciación de un enfoque aplicable a la resolución de ecuaciones, en el contexto de la resolución de igualdades numéricas abiertas. En el álgebra, los alumnos deben manejar expresiones en las que aparecen

> operaciones que no es posible realizar, por ejemplo: 3x + 7y - 4z. Tienen, por tanto, que pensar en relaciones entre expresiones para averiguar el modo en que las ecuaciones pueden ser transformadas para resolverlas o en que las expresiones algebraicas pueden ser comparadas (Molina, 2009, p. 142).

Pensamiento y pensamiento algebraico

El aprendizaje temprano del álgebra desarrolla no sólo nuevas herramientas para entender relaciones matemáticas, sino también nuevos hábitos mentales, nuevas formas de pensar matemáticamente. En este contexto nos parece importante precisar cuál es la idea de pensamiento que queremos delinear, alejada de aquellas «aproximaciones idealistas y racionalistas que han alimentado al cognitivismo tradicional que plantea y estudia el problema del pensamiento y su emergencia como fenómeno mental» (Vergel, 2016b, p. 17).

De manera más precisa, en palabras de Radford (2006, p. 123), el pensamiento «es sobre todo una forma de re-flexión activa sobre el mundo, mediatizada por artefactos, el cuerpo —a través de la percepción, gestos, movimientos, etc.—, el lenguaje, los signos, etc.»; entendida la re-flexión como «un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta —y la modifica— según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios» (p. 108).

El pensamiento es, pues, un proceso de actividad humana, una praxis reflexionada —en tanto actividad no contemplativa, sino sensual y concreta—, lo cual sugiere un proceso en constante movimiento y cambio. Inspirado en planteamientos aristotélicos, Ortega y Gasset (1984) señala que «pensar es un cambio en el hombre. De ser el que no piensa en A pasa a ser el que piensa en A. Este pasar es, precisamente, pensar» (pp. 162-163). Como todo movimiento, «pensar es liberación de la potencia en cuanto tal» (Ortega y Gasset, 1984, p. 163). Este autor precisa que, en este caso:

> El cambio no es distinto de su término, como lo es ennegrecerse de ser negro. En el cambio que es pensar, el término, aquello a que se va, está ya en el cambio, el término es inmanente al cambio o, dicho en otra forma, el cambio no se produce en beneficio de un ser otro que él, sino del propio cambio (… todo movimiento es un hacer o hacerse algo, a saber, su término. En el construir se construye la obra. Construir es el hacer, obra es lo hecho y cuando aquel llega a la obra, concluye, quedando ésta. Pero imagínese que la obra a que aspiramos consiste precisamente en un hacer, como cuando lo que nos proponemos no es ir a un sitio, sino pasear. En el pensar hay, como en todo

> cambio, tránsito y paso, pero en éste se da la condición paradójica de que el pensar no es pasar a otra cosa, sino que, al contrario, es un incremento, marcha, avance o progreso hacia sí mismo (Ortega y Gasset, 1984, p. 163).

El pensar es, según Ortega y Gasset (1984), un proceso que «termina» pero que no acaba, sino que renace siempre de sí mismo. Es interesante este planteamiento por cuanto sugiere que el movimiento es la potencia en tanto actualidad. En este sentido, «pensar sería el acto convirtiéndose en potencia de sí mismo, la actualidad en cuanto potencia» (Ortega y Gasset, 1984, p. 165).

En otras palabras, pensar es moverse no hacia otra cosa sino hacia lo mismo. Para precisar aún más esta idea, nos permitimos plantear, de acuerdo con Ortega y Gasset (1984), inspirado en Aristóteles, lo siguiente:

> Pensar en A se descompone en una serie continua de actos en que se piensa A. En esta serie el segundo acto reactualiza el primero, que, por lo mismo, se había convertido en potencia del segundo y así sucesivamente. Nótese que lo que en este fenómeno sorprende a Aristóteles es que el paso de la potencia inicial al acto de pensar no implica destrucción de la potencia, sino que es, más bien, una conservación de lo que es en potencia por lo que es en perfección —entelequia—, de modo que potencia y acto se asimilan (p. 166).

En tal sentido, aceptamos la idea de Luis Radford, en su Teoría de la objetivación, según la cual el movimiento es una categoría ontológica fundamental. Según Davydov (1981, p. 279), el pensamiento de un hombre «es el movimiento de formas de actividad de la sociedad históricamente constituidas y apropiadas por aquél». En estos términos, tal y como señala este autor, «el proceso constitutivo de las diversas formas del pensamiento (…) se contempla como proceso objetivo de la actividad humana, movimiento de la civilización humana y de la sociedad como auténtico sujeto del pensamiento» (p. 279). Esto sugiere, según Vergel (2014), que «las maneras como nuestros estudiantes llegan a conocer, y lo que conocen, llevan en su constitución sedimentos de formas históricas y culturales de pensamiento» (p. 75) y de actividad.

Desde la Teoría de la objetivación, el pensamiento matemático se distingue de otras formas de pensamiento en tanto en la reflexión matemática «la relación del individuo con el mundo enfatiza ideas en torno a la forma, el número, la medida, el tiempo, el espacio, etc.» (Radford, 2006, p. 115).

Entramos ahora a estudiar un tipo específico de pensamiento matemático: el pensamiento algebraico. Específicamente, esta categoría ha sido objeto de estudio e investigación en la comunidad de educadores matemáticos dedicados al estudio del álgebra escolar. Desde hace varias décadas, Kieran (1989) había sugerido profundizar en la investigación sobre la naturaleza del pensamiento algebraico y, a partir de este urgente llamado, surgió una doble preocupación en la comunidad nacional e internacional. Por un lado, la preocupación se evidencia en la necesidad de analizar el proceso mediante el cual los estudiantes de educación primaria elaboran generalizaciones. Interesa aquí, para decirlo metafóricamente, la anatomía de la generalización. Por otro lado, está el llamado a posibilitar desde los primeros grados de la primaria el desarrollo del pensamiento algebraico.

No desconocemos que un componente del pensamiento algebraico es el uso del simbolismo algebraico ya que, de acuerdo con Kieran (1989), «para caracterizar de forma significativa el pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, sino que se debe ser capaz también de expresarlo algebraicamente» (p. 165). En este sentido, coincidimos con las ideas de English y Warren (1998) cuando señalan y problematizan el desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica. Ya hay suficiente evidencia científica de que el uso de esta notación suele plantear dificultades en los estudiantes. Nos parece que tales dificultades pueden estar asociadas con el hecho de desarrollar un sentido de lo indeterminado, el cual no se logra súbitamente.

En un trabajo posterior Kieran precisa algunos aspectos o características que debería incluir el pensamiento algebraico (Kieran, 2004). Más específicamente, esta autora señala que el pensamiento algebraico en las primeras etapas escolares «debería incluir el desarrollo de formas de pensar la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción» (Kieran, 2004, p. 49).

Resultados de investigación sugieren que la aparición de formas de pensamiento algebraico se constituye en un problema didáctico (ver, por ejemplo, Carraher & Schliemann, 2007; Radford, 2010a, 2010b, 2011, 2012; Vergel, 2015a, 2015b, 2016b). Coincidimos con Vergel (2016b) en reconocer «un espacio para una zona conceptual donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aun cuando no estén recurriendo —o al menos no en gran medida— a los signos alfanuméricos del álgebra» (p. 30).

La zona conceptual aludida la ha denominado Radford (2010b) como la *zona de emergencia del pensamiento algebraico*, la cual se ha mantenido en gran medida ignorada. Tal desestimación reside en nuestra obsesión por ver sólo en el álgebra símbolos alfanuméricos. Pero hay que empezar a reconocer que en estos símbolos o expresiones algebraicas, los cuales cristalizan formas específicas de actividad humana, quedan implícitos deícticos espaciales, como *arriba* o *abajo* (Vergel, 2015a, 2015b), y quizás no dejan ver las maneras en que han evolucionado las fórmulas que se han expresado a través de acciones —por ejemplo, gestos, ritmos, miradas, palabras—, esto es, fórmulas corpóreas, y que se despliegan en el espacio y el tiempo. Este aspecto, eminentemente didáctico, es un indicador que suministra información relevante en relación con la emergencia del pensamiento algebraico temprano.

En otras palabras, estamos sugiriendo que no sólo a nivel de la investigación es necesario identificar la evolución de estas fórmulas corpóreas, sino que es también deseable en el trabajo de aula de matemáticas reconocer y potenciar ciertas producciones de los estudiantes y diferenciar, por ejemplo, entre generalizaciones aritméticas y generalizaciones de tipo algebraico. En particular, la evolución de fórmulas corpóreas de los estudiantes hacia formas más sofisticadas (Radford, 2010c) requiere investigar las maneras como se efectúa el refinamiento de la actividad perceptual de los alumnos, es decir, analizar el proceso de domesticación del ojo. Pero no sólo esto. El trabajo con secuencias de patrones requiere estar muy vigilante de lo que semióticamente significa el movimiento de la mano cuando los estudiantes efectúan procesos de generalización.

De esta manera, tanto la actividad perceptual como el refinamiento del movimiento de la mano están en relación dialéctica con las estructuras numérica y espacial de las secuencias figurales. Los resultados de investigaciones sobre cómo los estudiantes de educación primaria identifican el patrón de una secuencia figural apoyada por representación tabular donde se dan los primeros términos, han puesto de manifiesto algunos aspectos claves del desarrollo del pensamiento algebraico (Radford, 2011, 2014; Vergel, 2015a; Warren, 2006). En particular, la coordinación entre la estructura espacial —distribución espacial de los elementos de las figuras— y la numérica —número de elementos que componen cada figura— es clave para continuar una secuencia, identificar el patrón de formación de esta secuencia y contar con posibilidades de generalizar, incluso en ausencia de signos alfanuméricos.

La investigación de Radford (2011) con alumnos de 2° a 4º grado —de 7 a 10 años— pone de relieve que algunos estudiantes no logran coordinar las estructuras espacial y numérica de una secuencia figural apoyada por representación tabular. Quienes sí lograban coordinar las dos estructuras podían identificar una regla que permitiera calcular el número de elementos de un término específico. Este autor informa que en grados posteriores algunos estudiantes llegaban a escribir pseudo-fórmulas para expresar la generalidad, poniendo el acento en la manera en la que los estudiantes se refieren a *lo indeterminado*, es decir, en cómo expresan la incógnita o variable.

En estas condiciones, uno de los contextos privilegiados para empezar a desarrollar formas de pensamiento algebraico y, consecuentemente, introducir el álgebra en la escuela, es la generalización de patrones. La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad se constituye en un problema didáctico que no es ignorado por parte de la investigación en educación matemática. Sin embargo esto, como lo sugiere Vergel (2015a), «necesariamente, demanda el desarrollo de una perspectiva amplia sobre la naturaleza del álgebra escolar» (p. 194), que requiere «un cambio del foco de atención desde los aspectos simbólicos y procedimentales hacia aspectos estructurales del razonamiento algebraico» (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012, p. 487), y que considere, por ejemplo, «una relación dialéctica entre las formas de pensamiento algebraico y las maneras de resolver los problemas sobre generalización de patrones» (Vergel, 2015a, p. 194).

De acuerdo con Radford (2011, p. 23), «El pensamiento algebraico temprano se considera que está basado en las posibilidades del estudiante para comprender patrones en formas co-variacionales desarrolladas culturalmente y usarlos para tratar con cuestiones de términos lejanos o no especificados».

A partir de los trabajos de Viète (1591/1983) y Descartes (1637/1954), podemos afirmar que en el pensamiento algebraico no hay distinción entre números conocidos y desconocidos. Esta es la razón por la cual, según Radford (2010b), Viète y otros matemáticos en el siglo XVI hacían referencia al álgebra como un *arte analítico*. Se infiere, entonces, que la diferencia entre la aritmética y el álgebra no puede interpretarse a partir de notaciones.

Según Radford lo que distingue el pensamiento numérico del algebraico es que este último trata con cantidades *indeterminadas* o no especificadas como si fueran conocidas. Pero no sólo eso. Estas cantidades desconocidas se tratan de manera *analítica*, lo cual significa que se hacen *deducciones* por cuanto se parte de ciertas premisas para conseguir un resultado.

El término analítico era considerado por Pappus en términos de movimiento. De esta manera, Pappus escribe «el análisis es el movimiento desde lo que es dado hacia lo que es buscado» (Rideout, 2008, p. 62) (Traducción propia). Por eso para Viète «lo que era distintivamente algebraico (…) era la manera *analítica* en la cual pensamos cuando pensamos algebraicamente»

(Radford, 2018, p. 6). Un ejemplo sobre solución de ecuaciones podría aclarar lo que intentamos decir. Consideremos la ecuación $5x + 3 = 9 + x$. Una solución a través del método de ensayo-error no la consideramos como algebraica. Incluso los estudiantes pueden movilizar signos alfanuméricos, pero esto no es lo que hace distintivo el pensamiento algebraico; esto, más bien, descansa en conceptos aritméticos. Ahora bien, si el estudiante deduce de $5x + 3 = 9 + x$ que $5x = 6 + x$ —por la suma de -3 a ambos lados de la ecuación—, podemos afirmar que el estudiante está pensando algebraicamente. Como sugiere Radford (2018), los estudiantes están trabajando a través de consecuencias de asumir que *5x + 3 es igual a 9 + x;* he aquí la idea de movimiento que precisa Pappus.

Coincidimos con Radford en afirmar que el simbolismo algebraico alfanumérico que conocemos hoy en día es de hecho una invención reciente, en tal sentido, «el nacimiento del álgebra no es el nacimiento de su simbolismo moderno» (Radford, 2012, p. 677). Este autor argumenta, por ejemplo, que los matemáticos chinos antiguos movilizaron ideas algebraicas para resolver sistemas de ecuaciones sin utilizar notaciones algebraicas. Así mismo, señala que los escribas babilonios utilizaron diagramas geométricos como representaciones claves para pensar de manera algebraica.

En otras palabras, para pensar algebraicamente no es una condición necesaria, ni suficiente, el uso de «letras». Como lo sostiene Radford (2012, p. 677), «nuestro moderno simbolismo algebraico nos permite llevar a cabo transformaciones de expresiones que pueden ser difíciles o imposibles con otras formas de simbolismo». La emergencia del simbolismo algebraico, según este autor, puede considerarse como una manera de reflexionar sobre el mundo, más específicamente, una manera que fue pensable en el contexto de un mundo en el que máquinas y nuevas formas sociales de distribución del trabajo transformaron de manera substancial la experiencia humana.

Según Serfati (1999), la gran ventaja del simbolismo de Bombelli y Viète reside en que éste hace posible «un fuerte automatismo en los cálculos», por lo que es posible afirmar que el concepto de eficiencia en los cálculos algebraicos tiene características como concepto cultural. En otras palabras, se manipulan los símbolos como manipular productos manufacturados y, en este sentido, no es necesario saber la naturaleza de los objetos ni qué representan, más bien lo que interesa es operar con ellos, es decir, manipularlos.

Consideramos que la objeción según la cual las notaciones con signos alfanuméricos son una manifestación del pensamiento algebraico posibilita nuevas avenidas de trabajo e investigación sobre las formas de pensamiento algebraico temprano, entendido este como una forma particular de reflexionar matemáticamente. Más aún, reconocemos el pensamiento algebraico como un tipo de reflexión y acción cultural muy sofisticado, un modo de pensamiento que ha sido refinado progresivamente a lo largo del tiempo. En este sentido, y siguiendo ideas de Radford (2010a, 2013a, 2017a), entendemos el pensamiento algebraico como un *sistema* de procesos corporizados de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente.

La idea de Radford de *Saber* como *movimiento,* es decir, pura posibilidad, está constituida de formas de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas. Para este autor el *Saber algebraico* es una síntesis evolutiva —sintetiza acción humana, es dinámica, transformativa— y culturalmente codificada —como patrones de acción— de hacer y reflexionar en términos analíticos — es decir, la analiticidad en términos del carácter operatorio de lo desconocido— sobre números indeterminados y conocidos.

Para Radford (2010b), una caracterización del pensamiento algebraico se constituye de tres componentes, estrechamente relacionadas: (a) *el sentido de indeterminancia* —objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetro— «como aquello opuesto a la determinancia numérica» (p. 39); (b) la *analiticidad*, como forma de trabajar los objetos indeterminados, es decir, el reconocimiento del carácter operatorio de los objetos básicos que comporta procesos de deducción; y (c) la *designación simbólica* o *expresión semiótica* de sus objetos, esto es, la manera específica de nombrar o referir los objetos.

Para este autor (2010b, 2011) la indeterminación y el carácter analítico están ligados en un esquema o regla que posibilita a los estudiantes tratar con cualquier figura de la secuencia, cualquiera que sea su tamaño, en otros términos, el sentido de la indeterminancia hace referencia a una sensación de indeterminación que es característica de los objetos algebraicos básicos —p. ej., incógnitas, variables, parámetros—.

El esquema o regla aludido sugiere una especie de esquema funcional (Cañadas y Molina, 2016) que pretende promover lo que en términos de estas autoras denominan pensamiento funcional, que es parte de la gran categoría de pensamiento algebraico. «El pensamiento funcional es el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones» (Cañadas, 2016, p. 9). En este caso se entiende la función como una relación de dependencia entre cantidades covariantes. Según Cañadas (2016):

> No se trata de introducir las funciones en niveles educativos previos tal y como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general

y el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos (p. 8).

Desde lo propuesto por Radford (2010a), reconocemos «tres formas de pensamiento algebraico o *estratos* caracterizados por los *medios semióticos de objetivación* movilizados por los sujetos en su actividad reflexiva, incluyendo percepción, movimientos, gestos o lenguaje natural» (Vergel, 2015a, p. 196). Estos recursos semióticos no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo. Los medios semióticos constituyen mediadores de nuestros actos intencionales y son portadores de una inteligencia histórica que se ha construido con base en la actividad cognitiva de generaciones precedentes (Vergel, 2015a).

La tipología de formas de pensamiento algebraico propuesta por Radford está en estrecha conexión con los tres componentes analíticos que lo caracterizan. Además, queremos destacar el papel preponderante de las *tareas*, en tanto vendrían a funcionar como elementos claves de la *actividad* en la aparición de formas más complejas de pensamiento algebraico. Desde el trabajo de Vergel (2015a, pp. 196-197), inspirado en las investigaciones de Radford (2010a), describimos a continuación la tipología de formas de pensamiento algebraico:

Pensamiento algebraico factual. Los medios semióticos de objetivación movilizados son los gestos, los movimientos, el ritmo, la actividad perceptual y las palabras. En este estrato de pensamiento, la indeterminancia no alcanza el nivel de la enunciación, pues se expresa en acciones concretas, por ejemplo, a través del trabajo sobre números. Por esto, podemos afirmar que en este estrato la indeterminancia queda implícita, en tanto que el alumno señala con la mirada, con su índice, realiza movimientos con un lápiz, dice «aquí», señala dos figuras en una secuencia y dice «más dos». Vergel (2015b) encuentra que «las denotaciones de los estudiantes a través de actividades multimodales y la emergencia de una proto-analiticidad son aspectos que pagan tributo al contexto numérico en el que instanciaron el pensamiento algebraico factual» (p. 17).

Pensamiento algebraico contextual. Los gestos y las palabras son sustituidos por otros medios semióticos de objetivación tales como frases «clave». En este estrato de pensamiento la indeterminancia es explícita, se vuelve objeto del discurso. La formulación algebraica es una descripción del término general. Por ejemplo, el estudiante dice «arriba quito uno» o «dos por la figura más uno», o «# de la figura más para la fila de arriba y # de la figura más dos para la de abajo. Sumar los dos para el total». Esto significa que los estudiantes en este estrato de pensamiento tienen que trabajar con formas reducidas de expresión, lo cual sugiere pensar en la idea de contracción semiótica, en tanto hay evolución de nodos semióticos.

En la caracterización que hemos propuesto sobre saber algebraico, hemos resaltado la idea fundamental de ser pura posibilidad. El saber como «*un sistema de acciones codificadas culturalmente*» (Radford, 2017a, p. 101), es decir, como maneras prototípicas de actuar y hacer significa que es algo *general*. Radford (2017a) precisa que el saber como algo general «no puede reducirse a esta o aquella secuencia particular de acciones…» (p. 101). Otra forma de decir esto es expresar que el saber es «*labor cristalizada*». Este autor sostiene que el saber, como labor cristalizada o forma ideal, va más allá de cada una de sus instancias o realizaciones concretas. Por estas razones es posible afirmar que la idea de Radford de *Saber como movimiento*, es decir, pura posibilidad, está constituida de formas de reflexión y acción histórica y culturalmente codificadas.

En Vergel (2015a) se muestra «cómo las formas de pensamiento algebraico temprano factual y contextual emergen o aparecen como posibilidades que los estudiantes instancian en la actividad» (p. 211). Es en y a través de la actividad que los estudiantes pueden instanciar o actualizar el saber algebraico. «Es en la materialidad de la actividad donde el estudiante puede tomar conciencia de estas formas de pensamiento algebraico» (Vergel, 2015a, p. 211).

Pensamiento algebraico simbólico. Las frases clave son representadas por símbolos alfanuméricos del álgebra, por ejemplo, mediante expresiones como: $n + (n - 1)$ ó $2n - 1$. En este estrato de pensamiento «hay un cambio drástico en la manera de designar los objetos del discurso», a través de signos alfanuméricos del álgebra (Radford, 2010a, p. 8).

En términos didácticos, en el marco de la propuesta curricular de Álgebra temprana, y siguiendo ideas de Radford (2010a), las formas de pensamiento algebraico permiten comprender actuaciones —estrategias y procedimientos— de los alumnos a través de los medios semióticos de objetivación que movilizan —por ejemplo, gestos, palabras, ritmo— cuando abordan tareas en el contexto de la generalización de patrones. Entendemos con Radford (2003) los *medios semióticos de objetivación* como objetos, artefactos, términos lingüísticos y en general signos que se utilizan para comunicar. Los medios semióticos de objetivación son:

> Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones (Radford, 2003, p. 41).

Las ideas de comunicación y producción de significados llevan presentes otra idea: la de *mediación semiótica*. Este es un concepto que se aleja de la idea como punto intermedio o como enlace; es, más bien, una idea que pone de relieve «ser constitutivo de», «hacer parte de». En este sentido, aceptamos que estos recursos semióticos son elementos constitutivos de las formas de pensar de los individuos. Pero debemos anotar que estos medios semióticos pertenecen a una diversidad de sistemas simbólicos culturales que trascienden al individuo. Por ejemplo, las formas de resolver cierto tipo de problemas, las maneras de argumentar, de validar, de demostrar, la toma de decisiones sobre si una hipótesis puede servir de evidencia a un enunciado, etc., todas ellas tienen una historia, es decir, ya hay una especie de normatividad histórico-cultural que orienta las formas de acción matemática.

Esta normatividad trasciende al individuo que practica y aprende matemáticas y, en este sentido, es el resultado de una práctica cultural. La idea de cultura insinuada aquí corresponde a la característica de los hombres, del nivel de su humanización. En consecuencia, como sostienen Kelle y Kovalzon (1974, p. 148), la cultura «se expresa en los modos específicamente humanos de pensar, de proceder y actuar en la sociedad».

En términos de Radford (2008), el signo y la forma como se usa son considerados como constitutivos del objeto conceptual: *estos objetivan al objeto*. La categoría de Sistemas semióticos de significación cultural propuesta por Radford (2008) comprende las opiniones y las creencias de una cultura, así como las formas de producción de significados. En consecuencia, es posible plantear que en esta superestructura semiótica se afinca la imaginación intelectual.

Los anteriores argumentos nos permiten sugerir que cada sujeto es hijo de su época, de su ambiente cultural. En estas condiciones es difícil que el individuo logre romper los lazos que lo vinculan con una manera de pensar de su tiempo, de actuar. Sin embargo, reconocemos que, si logra romper estos lazos, necesariamente paga tributo a formas anteriores de pensar, actuar y reflexionar. Los sistemas semióticos de significación cultural, en tanto dimensión semiótica, anteceden y afectan nuestras estructuras psíquicas —por ejemplo, percepción, simbolización—, y, en consecuencia, las teorizaciones que hacemos acerca del mundo.

Nos parece importante resaltar aquí la conceptualización de individuo o sujeto que se sugiere en el marco de la teoría de la objetivación (Radford, 2017c; Radford, 2006, 2013a, 2014; Vergel, 2015a, 2016b), como un sujeto que sufre —es un sujeto frágil, de necesidad—, vive, piensa y actúa en el marco de su cultura. La idea de sujeto, según Radford (2017c), toma distancia de aquella que lo considera como sólo un sujeto cognitivo. Este autor plantea que:

> Al aprender, también *sentimos*. En vez de ser puramente fisiológico, ese sentir está cargado culturalmente de concepciones a través de las cuales nos concebimos de una manera u otra —por ejemplo, como buen resolutor de problemas, como incapaz de comprender las matemáticas (…). Sin embargo, nuestra larga tradición racionalista occidental presenta a menudo las matemáticas como un puro esfuerzo intelectual o cognitivo. La realidad es que no sólo pensamos matemáticamente, también sentimos matemáticamente. Hay toda una dimensión afectiva en el aprendizaje que incluye las emociones de manera crucial. Esas emociones no son simples entidades biológicas, ellas se desarrollan socialmente (p. 144).

Cuando hablamos de sujeto no podemos desestimar la dimensión emocional, pues ésta es parte constitutiva del ser. El sujeto actúa emocionalmente y los sentimientos adquieren su desarrollo a través de la vida social y cultural. En particular, en el trabajo con ideas matemáticas no se puede desconocer esta dimensión emocional por cuanto, desde ideas vygotskyanas, podemos considerar a la mente como una unidad de aspectos materiales e ideacionales. Vygotsky (1999, p. 244), citado por Radford (2017c), precisa que:

> Al igual que las otras funciones mentales, las emociones no permanecen en la conexión dada en virtud de la organización biológica de la mente. En los procesos de la vida social, los sentimientos se desarrollan y las formas y conexiones precedentes se desintegran; las emociones aparecen con nuevas relaciones con otros elementos de la vida mental, nuevos sistemas se desarrollan, aparecen nuevas aleaciones de funciones y unidades de un orden superior en las que los patrones especiales, interdependencias, formas especiales de conexión y movimiento son dominantes (p. 144).

Estos argumentos son sugerentes para aceptar que la actividad matemática escolar no produce solamente saberes, pues siempre está presente el desarrollo de los sujetos. La actividad escolar «también produce subjetividades» (Radford, 2017c, p. 143). Es en este sentido que el aprendizaje no es sólo conocimiento o producción de saberes. El aprendizaje es también devenir (Radford, 2017c).

Algunas consideraciones teóricas sobre la actividad semiótica de estudiantes de educación primaria en una tarea sobre secuencia de patrones

La generalización es esencial, ya que es este proceso el que distingue la creatividad matemática del comportamiento mecanizable o algorítmico

(Michael Otte, 2003, p. 187)

En esta sección presentamos una reflexión a partir de una experiencia investigativa sobre la generalización de patrones como actividad semiótica en algunos estudiantes de educación primaria (Vergel, 2015a). En el proceso de generalización se muestra brevemente cómo el ritmo, los gestos y la percepción emergen como medios semióticos de objetivación y cómo en dicho proceso se ponen de manifiesto sus componentes fenomenológico, epistemológico-ontológico y semiótico. A partir de estos hallazgos se plantean algunas consideraciones y explicaciones teóricas, fundamentadas en la Teoría de la objetivación.

En términos amplios, y siguiendo ideas de Radford (2013b, 2015a), generalizar significa observar y analizar algo. Ese algo va más allá de lo que realmente se ve. Este acto de percepción se desarrolla a través de un proceso en el cual el objeto por ser visto surge progresivamente. En términos educativos, la generalización de patrones aparece como un contexto didáctico muy prometedor para introducir el álgebra en la escuela (Radford, 2010a; Rojas y Vergel, 2013; Vergel, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b), pues, entre otros aspectos, es un proceso que posibilita a los estudiantes acercarse a situaciones de cambio y variación como elementos importantes para desarrollar el pensamiento algebraico.

En este proceso de generalización de patrones es necesario aceptar que los actos de conocimiento por parte de los estudiantes incorporan distintas modalidades sensoriales —por ejemplo, táctil, perceptual, kinestésica—, que llegan a ser partes integrales de los procesos de cognición. Justamente es esto lo que se ha dado por llamar la naturaleza multimodal de la cognición humana (Arzarello, 2006). Estamos, pues, frente a la necesidad tanto educativa como investigativa de:

> Reconocer todas aquellas situaciones discursivas —orales y escritas—, gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar, así sus argumentaciones y explicaciones

se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas (Vergel, 2015a, p. 194).

Epistemológicamente hablando, podríamos señalar que «los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser adecuadamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es importante considerar los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los estudiantes movilizan cuando trabajan con ideas matemáticas» (Vergel, 2015b, p. 9), así como las relaciones entre estos recursos.

Esta sección consta de dos partes. En la primera, abordamos un ejemplo de clase que proviene de una investigación doctoral (Vergel, 2015a), en la que se describe brevemente la actividad semiótica de un grupo de estudiantes de educación primaria. Esta descripción, acompañada de algunos aspectos analíticos sobre la actividad semiótica, es objeto luego, en la segunda parte, de algunas consideraciones teóricas desde la perspectiva de la teoría de la objetivación.

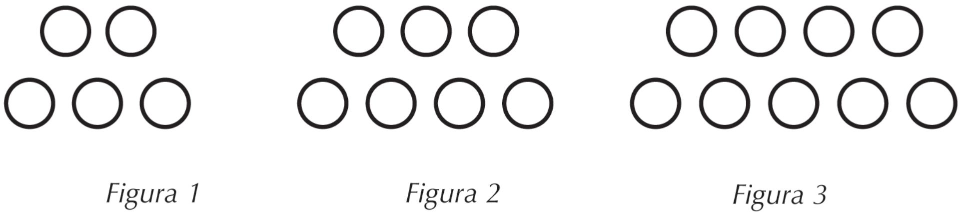
Una experiencia investigativa sobre generalización de patrones

En esta subsección presentamos una síntesis de aspectos relevantes de una investigación (Vergel, 2015a), en la que describimos un ejemplo de clase y documentamos la actividad semiótica de un grupo de estudiantes de educación primaria en una tarea de secuencia de patrones. La tarea, que llamamos *Secuencia figural apoyada por representación tabular* (Vergel, 2015a), fue implementada en un grupo de estudiantes de 9-10 años de un colegio oficial de la ciudad de Bogotá —Colombia—. En este estudio se documenta y caracteriza formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de educación primaria.

En este trabajo presentamos parte de las conversaciones de algunos estudiantes con la profesora Johanna (PJ) y el profesor Rodolfo (PR) —investigador— documentadas en Vergel (2015a) durante el abordaje de la tarea, así como parte del análisis realizado. Dicho análisis lo hemos substanciado a partir de algunas consideraciones de orden filosófico.

La tarea que se implementó pretendió acercar a los estudiantes no sólo a la idea general de secuencia sino también al tipo de secuencias figurales apoyadas por representación tabular y avanzar en la comprensión de la anatomía del proceso o de los procesos de generalización que desarrollaban los estudiantes. Los resultados que aquí se presentan corresponden al análisis de las producciones de algunos estudiantes —principalmente las producciones de Laura Sofía (LS), Luis Felipe (LF), Yaneth (YA), y Kevin (Ke) en relación con el ítem: «Calcula el número de círculos de la Figura 9, sin construirla. Explica cómo lo haces» (Vergel, 2015a, p. 200).

Figura 2. Secuencia figural apoyada por representación tabular presentada en la tarea (Vergel, 2015a, p. 200).



El saber —en este caso, pensar algebraicamente acerca de las secuencias—, conceptualizado desde la teoría de la objetivación como pura posibilidad (Radford, 2013a), se pone en marcha a través de la labor conjunta de alumnos y profesores. Por medio de esta labor, el saber puede convertirse en objeto de pensamiento y de conciencia para los estudiantes. Reportamos el siguiente diálogo (Vergel, 2015a, pp. 200-201) en donde interactúan LS, PR y PJ.

L1. PJ: ¿Alguien lo construyó diferente?

L2. LS: Sumando 9 más 9 da 18 y 3 [pausa] 21.

L3. PR: Y eso de 9 más 9, 18, ¿cómo lo haces en la figura?

L4. PJ: Sí, enséñame acá en la figura [señala con su mano la secuencia] ¿cómo es?

L5. ls: Porque 1 más 1 da 2 [hace una pausa y tapa con sus dedos el primer círculo de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo] sumándole 3 [hace circular su dedo alrededor de los tres círculos que sobran en la figura 1 después de contar el primero de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo; a estos tres círculos los denomina «la torre»].

L6. pj: ¿Y en la figura número 2?

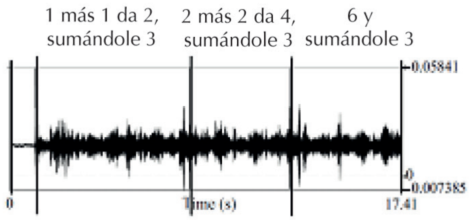
L7. ls: 2 más 2, 4 [realiza una pausa y a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba], sumándole 3 [con su dedo índice derecho señala la torre].

L8. PJ: ¿Y en la figura 3?

L9. LS: 6 [hace una pausa y ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha] y sumándole 3 [con su dedo índice derecho señala la torre].

Figura 3. Arriba: Secuencia de gestos —señalamientos— que despliega LS acompañada de palabras. Reconstrucción del video. Abajo: Un análisis prosódico en el programa Praat de las elocuciones de LS (L5, L7, L9) con intervenciones de la PJ (L6 y L8) (Vergel, 2015a, p. 201).

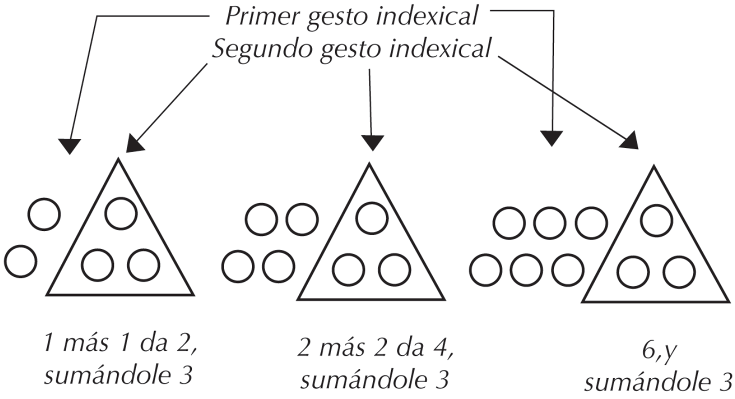
Cuadro 1



Presentamos la descripción reportada en Vergel (2015a) con el objeto de adelantar algunas reflexiones teóricas acerca de la actividad semiótica de los estudiantes. En efecto, en el trabajo mencionado indicamos que la solicitud que hace el PR (L3), «Y eso de 9 más 9, 18, ¿cómo lo haces en la figura?» (Vergel, 2015a, p. 201), suscita una respuesta en LS. Más específicamente,

> LS despliega en la secuencia una serie de señalamientos los cuales recorren las tres figuras dadas. En la parte de arriba de la Figura 2 se muestra la cadena de gestos como señalamientos que le permite comunicar a LS la objetivación del patrón acudiendo a la torre como recurso semiótico. En la parte de abajo de la Figura 2 mostramos un fragmento de 17.41 segundos a través del programa Praat, en el cual ella en una estructura casi rítmica, como lo muestra la forma de onda, hace sus elocuciones «1 más 1 da 2, sumándole 3», «2 más 2 da 4, sumándoles 3», «6, y sumándole 3» (Vergel, 2015a, p. 201).

Figura 4. Movilización de gestos indexicales por parte de LS (Vergel, 2015a, p. 202).



Siguiendo con la descripción en Vergel (2015a), la Figura 3 muestra la movilización de dos gestos indexicales.

> El primero corresponde a la acción de tapar los círculos subitizadamente y, al hacer una pausa, luego despliega el segundo gesto indexical señalando la torre. De esta manera procede con las figuras 2 y 3. Sin embargo, según las observaciones en el diálogo (L7) notamos que a medida que habla señala los cuatro círculos antes de la torre a través de dos deslizamientos con su índice derecho, el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y luego sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba. En L8, por su parte, ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha para luego señalar de nuevo la torre (Vergel, 2015a, pp. 201-202).

El análisis realizado en Vergel (2015a) sugiere que el ritmo se constituye como un medio semiótico de objetivación, en tanto se evidencia en el conteo, la pausa y luego el gesto de señalar la torre. Según You (1994), el ritmo crea la expectativa de un próximo evento. Más aún, de acuerdo con Radford (2010b, p. 50), el ritmo «constituye un medio semiótico de objetivación crucial para hacer aparente el sentimiento de un orden que va más allá de figuras particulares».

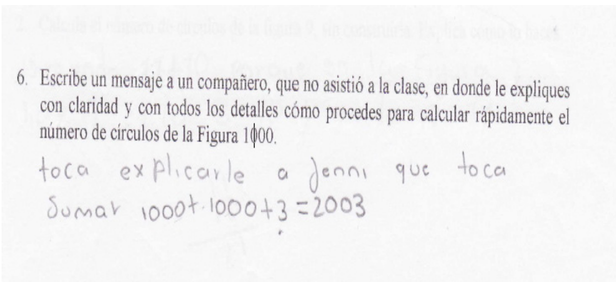
Tal y como se documenta en Vergel (2015a), la torre emerge como un medio semiótico de objetivación clave «que le sirve, entre otras cosas, a Laura Sofía para contar el número de círculos de la fila de arriba y el de la fila de abajo, los cuales son iguales» (Vergel, 2015a, p. 202). Vygotsky (1986) sostiene que «el marco del niño es puramente situacional, con la palabra vinculada a algo concreto, mientras que el marco del adulto es conceptual» (p. 133). «En este proceso de semiosis perceptual, la actividad de coordinación de deícticos espaciales —gestos como señalamientos—, ritmo, palabras y actividad perceptual, se convierte en un nodo semiótico» (Vergel, 2015a, p. 202). Un tipo de análisis microgenético (Vygotsky, 1978) posibilita profundizar en la naturaleza de su actividad perceptual. Como argumentamos en Vergel (2015a, p. 202), este tipo de análisis:

> (…) sugiere el papel central que desempeñan los deícticos espaciales, gestos y el ritmo en la semiosis perceptiva, sobre todo en los procesos progresivos de LS de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización. En su actividad perceptual, al separar la torre, esta estudiante percibe la igualdad en el número de círculos de arriba y de abajo.

Como lo sugiere Radford (2013b, p. 5), «la mirada con la que cada uno de nosotros percibe el mundo no es una mirada desinteresada». Miramos con cierta intención y reconocemos aspectos de la realidad circundante a partir de nuestra experiencia de vida. Las formas de ver son culturales y por ello, «los procesos perceptivos también dependen de las formas socio-históricas de vida» (Luria, 1987, p. 18). De hecho, percibir no es una acción ingenua, muy por el contrario, constituye una acción humana muy compleja, tal y como lo destaca Wartofsky:

> Perceiving is (…) not an incipient form of human action; it is human action in one of its modes, complexly and subtly involved in all the other modes of more direct productive praxis, or in the motor-activity by which human beings act in the world, and sustain their existence (Wartofsky, 1979, p. 210).

Figura 5. Producción de LS, ítem 6 de la tarea investigada (Vergel, 2015a, p. 203).



6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en donde le expliques con claridad y con todos los detalles cómo procedes para calcular rápidamente el número de círculos de la Figura 1000.

toca explicarle a Jenni que toca sumar 1000+1000+3 =2003

Según Vergel (2015a, p. 202), LS, subitizadamente, cuenta el número de círculos de arriba y el número de círculos de abajo al notar la separación de la torre en la Figura 3: «*6, y sumándole 3*». Esta forma subitizada de percibir, evidenciada en la Figura 4, no es gratuita, no es espontánea. Para llegar a estas formas de percepción, como dice Marx (1998), el ojo se ha transformado de un órgano de percepción ingenua a un sofisticado órgano intelectual, un órgano teórico. En palabras de Radford (2010b), el ojo se ha domesticado. «La domesticación del ojo es un largo proceso en el curso de la cual llegamos a ver y reconocer las cosas de acuerdo a 'eficientes' medios culturales» (Radford, 2010b, p. 4).

En Vergel (2015a) documentamos que LS lleva a cabo una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional. Este esquema:

> (…) permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos y gestos, como medios semióticos de objetivación. Esta generalización de acciones numéricas incrusta su huella en la sintaxis de la formulación que expresa en relación con el ítem 6. Su declaración en la Figura 4: *«toca explicarle a Jenni que toca sumar 1000 + 1000 + 3»*, sugiere la aplicación del esquema operacional pues la forma como ha procedido para calcular el número de círculos de las figuras 1, 2 y 3 la pone en marcha para el cálculo del número de círculos correspondiente a la Figura 1000 (Vergel, 2015a, pp. 202-203).

Aquí lo indeterminado o lo general no es explícito, más bien queda sin nombrar (Vergel, 2015a, 2015b, 2016b), por lo que LS ha desarrollado una generalización algebraica Factual.

La discusión entre LS, la PJ y el PR es aprovechada por los demás compañeros de la clase. El *hablar* es una categoría ontológica fundamental en la relación con los otros. Según Bucher (1996), para Heidegger:

> El *ser-ahí* en cuanto *ser-en-el-mundo* abarca una dimensión que hace resaltar la estructura propia del hablar. El hablar del *ser-en-el-mundo* está fundado sobre el *ser-con-el otro* y se manifiesta siempre como estando ya en un *ser-en-común*, que tiende a instituir un mundo en común (p. 91).[13]

El «yo» no puede comprenderse íntegramente sin la presencia del otro, el «otro» que es fundamento de mi existencia. Vergel (2014) sostiene que los signos o herramientas psicológicas encuentran soporte en una concepción antropológica aplicada al proceso educativo y, en tal sentido, no es posible concebir al individuo o sujeto fuera de las relaciones que lo ponen en *contacto bakhtiniano* con el otro.

Particularmente, LF se apropia de este recurso cultural —la torre— y también es apropiado por un buen número de estudiantes. En la Figura 5 mos-

13 Cursivas del original.

tramos parte del proceso de semiosis perceptual de LF al identificar la torre documentada en Vergel (2015a).

Figura 6. La torre como medio semiótico de objetivación presente en el proceso de semiosis perceptual de LF (Vergel, 2015a, p. 204).

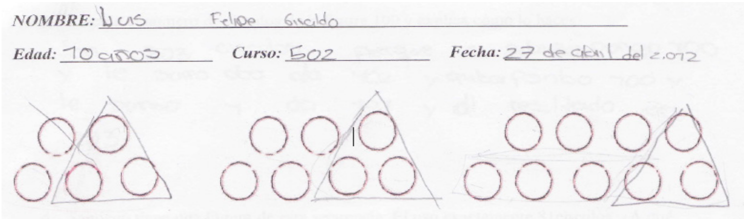


Figura 1 *Figura 2* *Figura 3*

Queremos subrayar, además, que los modos de pensamiento y de acción de los estudiantes, en relación con esta tarea, están regulados no sólo por el medio semiótico de objetivación «la torre» sino también por el tipo de situaciones que proponemos, en este caso, las secuencias figurales apoyadas por representaciones tabulares y por la misma interacción social (Vergel, 2015a). De hecho, los modos de producción «resultan de la combinación de los elementos del proceso de trabajo bajo relaciones de producción determinadas. Su resultado es una determinada productividad del trabajo» (Harnecker, 1969, p. 62). En otras palabras, los modos de producción, que incluyen saberes, habilidades y aspectos técnicos de colaboración y cooperación humanas, son procedimientos culturales de producción y, en tal sentido, se entienden como procedimientos de reproducción de la vida material y espiritual.

En el siguiente diálogo, que corresponde a una entrevista focalizada reportada en Vergel (2015a, p. 205), se pretendía indagar más de cerca sobre la manera como usaban la comunalidad que ya habían identificado para calcular el número de círculos de figuras remotas.[14]

L10. PR: Ahora entonces llegamos a 8000. Entonces Ke, ¿cómo haces?, ¿cómo haces para hallar el número de círculos de la figura 8000?

L11. Ke: [Después de un breve silencio] toca multiplicar por 2.

L12. PR: Sí.

L13. Ke: Y a lo que multiplico toca sumarle 3.

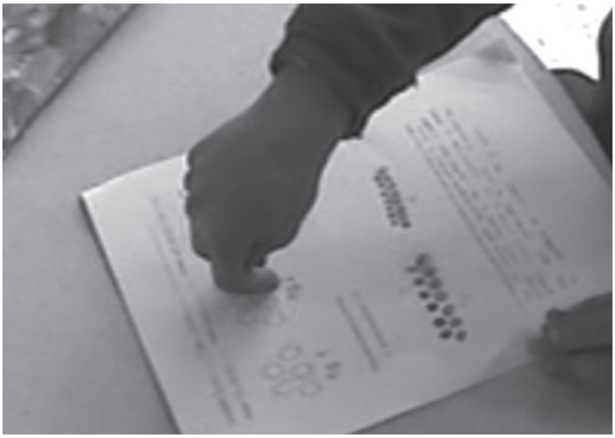
L14. PR: ¿Y por qué le sumamos 3?, yo estoy intrigado con ese 3, ¿por qué hay que sumarle 3?

14 Comunalidad es un término aristotélico que refiere a aquello en virtud de lo cual ciertos elementos se mantienen juntos.

L15. Ke: Porque [breve silencio; LF interrumpe a Ke y responde].

L16. LF: Porque siempre le vamos a sumar acá, la torre [LF acude a señalar la figura No. 2 con dos dedos de su mano derecha haciendo énfasis en el lugar de la torre].

Figura 7. LF moviliza el gesto de señalar la torre como apoyo para responder el número de círculos de la Figura 8000 (Vergel, 2015a, p. 205).



En Vergel (2015a) documentamos la interacción entre LF y Ke. En efecto, LF

> (…) interviene apoyando la respuesta de Ke y justificando la suma del tres —esto es, los tres círculos que conforman la torre—. Es más, este estudiante reconoce que el hecho de multiplicar por dos, tal y como lo declara Ke (L19), emerge luego de separar la torre (p. 205).

Profundicemos un poco más en su declaración en L24: «siempre le vamos a sumar acá, la torre». Observamos que hay dos clases de deícticos, uno temporal y el otro espacial.

> El deíctico temporal «siempre» sugiere el reconocimiento y uso del recurso semiótico, es decir, que esos tres círculos se deben sumar independientemente cuál sea la figura particular. El adverbio «siempre» evidencia una de las funciones generativas del lenguaje, esto es, funciones que hacen que sea posible describir procedimientos y acciones que potencialmente se pueden llevar a cabo en una forma reiterativa, imaginada. «Son expresiones lingüísticas *ad hoc* que transmiten la idea del esquema de abstracción que subyace a la generalización de las acciones» (Radford, 2003, p. 49). Por su parte, a través del deíctico espacial «acá», LF concentra la mirada en el lugar en el cual debe situarse la torre. Esto sugiere pensar en la manera como los estudiantes usan el lenguaje natural o, más específicamente, ciertos elementos de este lenguaje —deícticos espaciales y temporales, por

> ejemplo— que indudablemente quedan muy implícitos en el lenguaje simbólico, esto es, en una fórmula algebraica —con signos alfanuméricos— (Vergel, 2015a, pp. 205-206).

Estas acciones semióticas están comprometidas en el proceso de generalización. La generalización se constituye a través de tres componentes o problemas fundamentales, mutuamente relacionados (Radford, 2015a). Según este autor, existe un componente fenomenológico planteado alrededor de la escogencia de ciertas determinaciones sensibles, un componente en el que participan, entre otros, la intuición, la atención, la intención y la sensibilidad. Según Radford (2015a, p. 130), estos elementos interactúan con el fin de «hacer frente a los objetos particulares que constituyen la base de la generalización». Un componente epistemológico-ontológico permite la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto (Radford, 2015a). Finalmente, hay un componente semiótico que implica «medios semióticos a través de los cuales se denota el objeto generalizado» (Radford, 2015a, p. 131).

En el caso que venimos analizando, los alumnos deben proceder a una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias en la secuencia. Sostiene Radford (2013b, p. 5) que:

> A priori, las determinaciones posibles constituyen un conjunto extenso: los alumnos pueden fijar su atención en la forma de los términos, en la cantidad de cuadros que constituyen cada uno de los términos, el color, el espacio entre ellos, etc.

Observamos que el deíctico espacial «acá» está estrechamente relacionado con la estructura espacial de la secuencia, mientras que el deíctico temporal «siempre» lo está con su estructura numérica. Las acciones semióticas que despliegan los estudiantes se llevan a cabo sobre el terreno fenomenológico, de ahí la importancia de las estructuras numérica y espacial de la secuencia. Como lo sostiene Radford (2013b, p. 8):

> El trabajo algebraico sobre el terreno fenomenológico va a reposar sobre la articulación de dos estructuras diferentes: una de tipo numérico y otra de tipo espacial. La estructura numérica responde a la pregunta ¿cuántos cuadrados? La estructura espacial responde a la pregunta ¿en dónde colocarlos?

Podemos afirmar que «el lenguaje natural les sirve de apoyo a los estudiantes para poder expresar una fórmula en acción» (Vergel, 2015a, p 205). El papel del lenguaje natural es clave en el proceso de formulación de una expresión algebraica. Es necesario detenernos en el análisis de cómo los estudiantes usan el lenguaje natural y focalizar la atención en «ciertos elementos de este lenguaje —deícticos espaciales y temporales, por ejemplo— que indudablemente quedan implícitos o atrapados en el lenguaje simbólico, esto es, en una fórmula algebraica —con signos alfanuméricos—» (Vergel, 2015a, p. 206). Como lo plantea Halliday (1982, p. 41), «El lenguaje es un potencial: es lo que el hablante puede hacer; lo que una persona puede hacer en el sentido lingüístico, es decir, lo que puede hacer como hablante/oyente equivale a lo que puede «significar».

Observamos que «LF usa la torre y ésta de alguna manera influencia, modifica, incluso modela su mente» (Vergel, 2015a, p. 206). Podemos apreciar aquí la idea de plasticidad semiótica (D'Amore, Fandiño y Iori, 2013), en tanto al usar signos, los procesos cognitivos del individuo se modifican (Vygotsky, 1929). Observemos cómo a partir de la Figura 2 de la secuencia, «él observa que aislando este recurso semiótico le quedan dos círculos arriba y dos abajo. Esto le permite responder adecuadamente en relación con el número de figuras remotas» (Vergel, 2015a, p. 206). Desde una perspectiva vygotskyana del significado, podríamos afirmar que éste no se descubre, más bien se materializa, se gesta y transforma durante el proceso de intercambio lingüístico —situación comunicativa— que se establece por los sujetos —usuarios— entre sí.

Algunas reflexiones teóricas: consideraciones desde la perspectiva de la teoría de la objetivación

Hay un acuerdo entre los seguidores de las perspectivas socioculturales en educación matemática, según el cual la mente sociocultural se entiende bajo el supuesto de que la acción está mediada, y que no puede ser separada del medio en el que se lleva a cabo. En concordancia con este acuerdo, compartimos en la teoría de la objetivación (Radford, 2006, 2014) dos principios fundamentales: (1) los signos nos permiten reflexionar sobre el mundo y (2) el mundo es reflejado y refractado en los signos y en la forma en que éstos son usados.

Estos dos principios se hacen operativos en el plano de la investigación en tanto debemos reconocer que los signos son portadores de convenciones, en tanto formas culturales de acción y de significación, en otras palabras, los signos tienen una historia y necesariamente influyen en nuestras estructuras psicológicas (Vygotsky, 1929). De acuerdo con Radford (1997), «La configuración y el contenido del saber matemático están propia e íntimamente definidos por la cultura en la cual se desarrollan y en la cual se subsumen» (p. 32).

La idea de cultura planteada indica una procedencia desde la perspectiva antropológica y sugiere que el sujeto que aprende es, también, un sujeto socio-histórico, un sujeto que se encuentra inmerso en una cultura de la cual hereda maneras de actuar, formas de hablar y de razonar (Montagu, 1968). La cultura crea formas especiales de comportamiento y modifica la actividad de las funciones mentales (Vygotsky, 1997). En tal sentido, no concebimos al individuo como aquel que está movido por un poder de auto determinación cuyos significados emanan del individuo en cuestión. Aceptar esta posición significaría desconocer el papel de la cultura y de la historia en las formas de pensar y de actuar de los sujetos. De hecho, «la historia de algo, sea lo que fuere, guarda la más estrecha e indestructible relación con la idea que de ese algo se tenga» (Hegel, 1955, p. 5). Más aún, en la constitución de los sujetos es fundamental el uso de herramientas, en el sentido de Leontiev (1969), constituidas histórica y culturalmente.

Según Garaudy (1970), Marx plantea en *La ideología alemana* que «Sólo en la comunidad adquiere el individuo los medios de desarrollar sus facultades en todos los sentidos; sólo en la comunidad se hace posible la libertad de la persona» (Garaudy, 1970, p. 158). Este autor prosigue y señala que «El individuo se define, para Marx, por el conjunto de sus relaciones sociales, como el objeto se define por sus relaciones con el conjunto de los demás objetos» (Garaudy, 1970, p. 158). Como vemos, lo que se sugiere es una idea de alteridad bakhtiniana, en tanto que el sujeto debe salir del confinamiento en el que se encuentra para lograr transformarse.

En otras palabras, el yo no puede comprenderse íntegramente sin la presencia del otro, sin la actuación del otro, sin el discurso del otro. Por eso, la identidad pierde así su eje egocéntrico y monológico. En consecuencia, identidad y alteridad se entienden como categorías interdependientes, complementarias, de una naturaleza dialéctica. En esta dirección, Cárdenas y Ardila (2009) sostienen:

> La noción de sujeto que se desprende de Bajtín no equivale a individuo ni obedece al concepto de esencia o a algo que preexiste a lo social. El sujeto es un continuo hacerse, sin una esencia específica y sin identidad fija que va surgiendo en la medida en que se construye socialmente el discurso, en la medida en que va asumiendo posiciones en el universo ideológico de lo social. El sujeto es el conjunto de posiciones que puede ocupar el ser humano en el transcurso de su vida (p. 44).

Lo que cuenta para el individuo son las relaciones. Este nudo de relaciones está permeado por la actividad humana y esta acción típicamente humana emplea instrumentos mediadores, tales como las herramientas o el lenguaje. Estos instrumentos mediadores dan forma a la acción de manera esencial. Según Leontiev (1969), «la herramienta es el producto de la cultura material que posee, en la forma más evidente y material, los principales rasgos de las creaciones humanas» (p. 9). La herramienta es «un *objeto social* en el que se han concretado y fijado operaciones de trabajo históricamente elaboradas» (Leontiev, 1969, p. 9). Según este autor, a través de estos objetos el individuo puede desarrollar sus poderes y aptitudes. Estos objetos «contienen en sí la actividad de las generaciones anteriores, que son el resultado del desarrollo intelectual de la especie humana» (Leontiev, 1969, p. 15).

Dentro de la perspectiva teórica de la objetivación (Radford, 2006, 2014), el pensamiento es conceptualizado como una actividad reflexiva y sensible mediada por signos. Esta actividad se ve materializada en la corporeidad de las acciones, gestos, lenguaje natural y artefactos. Radford (2006, p. 108) sostiene que «El pensamiento es una reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta —y la modifica— según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios». Por ello, para el alumno, fenomenológicamente, al principio, el saber aparece como posibilidad solamente. La actividad de enseñanza-aprendizaje lo mira filogenéticamente —es decir, el saber tiene una historia, es cristalización de labores humanas— y lo posiciona como objeto de la actividad.

En de Moura y Moretti (2014), Radford precisa estas ideas:

> El saber es conceptualizado como pura potencialidad cultural: el saber está constituido por sistemas de acción y de reflexión que están incrustados en la cultura. Cuando el niño atraviesa por primera vez la puerta de la escuela, el saber es pura potencialidad (por ejemplo, saber acerca de la manera en que se resuelven ecuaciones lineales o saber acerca de la manera en que se hacen operaciones con números: divisiones, multiplicaciones, etc.). El niño no puede reconocer esos saberes, pues estos no son tangibles. Estos saberes son síntesis de labor humana institucionalizada culturalmente. Para reconocerlos, para familiarizarse con ellos, los saberes deben ser «puestos en marcha». Tengo que decir aquí que esta es una idea central de Hegel: el saber es movimiento. Aquello que pone el saber en marcha es precisamente la labor conjunta de alumnos y profesores. En otras palabras, es por medio de la labor conjunta que el saber puede convertirse en objeto de pensamiento y de conciencia. Antes de ponerse en marcha, el saber permanece sin forma, sin conexiones —«sin poder», dice Hegel—. Y como tal, no puede ser intuido y pensado; no puede ser encontrado. Es pues, gracias a la actividad conjunta, que el estudiante podrá toparse con él (p. 36).

La idea de saber conceptualizada en la teoría de la objetivación no se sitúa en una línea platonista. Para Platón, «el conocimiento de las ideas constituye un mundo aparte, separado del mundo sensible, porque su objeto son aquellas cosas inmutables como la belleza y la naturaleza de los dioses» (Platón, 1983, p. 15). Como bien lo precisa Radford (2017a):

> El hecho de que cuando cada uno de nosotros nació y se encontró frente a una serie de saberes científicos, éticos, estéticos, legales y otros ya constituidos histórica y culturalmente, no significa que esos saberes son formas platónicas universales y atemporales independientes del trabajo humano. Al contrario, son los propios individuos los que constituyen el saber en potencialidad a través de su propia labor —a través de sus acciones, de sus reflexiones, sus sufrimientos y sus esperanzas— (p. 99).

Nos parece importante señalar que esta idea cultural de saber, propuesta desde la teoría de la objetivación, se aleja de posiciones cognitivistas y da paso a teorizaciones que parecen ser más operativas en términos de la investigación de formas de pensamiento en los estudiantes. Es a través de la actividad material y concreta que el saber, como pura posibilidad, se instancia en el mundo concreto (Vergel, 2015a). Desde la Teoría de la objetivación se propone una elaboración teórica que, a nuestro juicio, permite avanzar en la comprensión de esta idea cultural de saber, en tanto se plantea en términos de una distinción entre potencialidad y actualidad. En Radford (2017a) se dice que:

> Quizás la mejor manera de abordar el problema del saber es regresar a Aristóteles y su distinción entre *potencialidad* y *actualidad*. Potencialidad (*δύναμις*, *dunamis*) para Aristóteles, designa la fuente del movimiento. Como su nombre lo sugiere, la potencialidad es un concepto dinámico. La potencialidad es una *capacidad* de poder hacer algo. Es sinónimo de poder o disposición. Los entes vivos y los artefactos poseen potencialidad. Un instrumento de música, por ejemplo, tiene la capacidad de producir sonidos. Un pez tiene la capacidad de moverse en el agua. La actualidad (*ἐνέργεια*, *energía*) es la ocurrencia o el despliegue concreto de eso que, hasta antes de ponerse en movimiento, hasta antes de actualizarse, no era sino simple potencialidad (p. 98).

En consecuencia, la teoría de la objetivación se consolida como una aproximación fenomenológica. Radford (2014, p. 141) plantea que «de súbito nos encontramos en un mundo que nos objeta, que no es el resultado de *nuestras*[15] acciones». Dado que, al inicio, no son claras para el niño las significaciones y formas de pensar matemáticamente, él debe entrar en un proceso de *reconocimiento* o de *transformación* del saber *in itself* en un

15 Cursivas en el original.

saber *for itself*, es decir, un saber para la conciencia. Desde la posición de Hegel, se utiliza el término *in itself* —«en sí mismo»— para referirse a algo meramente potencial. Radford (2014, p. 141) expresa que «esos reconocimientos pasan por lo que llamamos un *proceso de objetivación*». En *Lecciones sobre la historia de la filosofía*, Hegel plantea que:

> Para comprender qué es la evolución, es necesario distinguir dos estados: uno es el que se conoce como posibilidad, como capacidad, lo que yo llamo el ser en sí, la potentia; el otro es el ser para sí, la realidad (actus) (Hegel, 1955, p. 26).

Y más adelante señala que «El ser en sí y el ser para sí son los momentos de la actividad; en la acción se encierran, por consiguiente, estos dos momentos distintos» (Hegel, 1955, p. 28).

Según Radford (2009), los procesos de objetivación son procesos sociales que permiten, a los sujetos, capturar la lógica cultural con que los objetos de saber han sido dados. De esta manera, los individuos se familiarizan con las formas de acción y pensamiento históricamente constituidas. Esos procesos sociales involucran, necesariamente, la toma de conciencia. No referimos aquí la idea de conciencia como una entidad metafísica, inaccesible. Hegel (2004, p. XXIV) concibe a la Fenomenología como la «ciencia de la experiencia de la conciencia». Esta idea dialéctico-materialista de conciencia significa relación al mundo —relación concreta—. «La conciencia debe ser vista como un caso particular de la experiencia social» (Vygotsky, 1979). Este autor, incluso hacia finales de su vida, continúa aceptando que «la estructura de la conciencia es la relación con el mundo externo» (Vygotsky, 1997, p. 137). Rosental y Straks (1960) sostienen que «en toda sociedad, cambia primero la vida material social, y después, y en consonancia con ello, cambia también la conciencia de los hombres» (p. 158). Este tipo de conciencia se desarrolla por medio de la interacción social, de la actividad. El lenguaje y, más específicamente, el hablar aparece como una categoría ontológica fundamental.

En particular, el hablar aparece como si determinara un comportamiento práctico y remitiera directamente a un cierto modo de existencia intersubjetiva. Bucher (1996) señala que Heidegger tiende igualmente a situar el estudio fenomenológico del lenguaje bajo el signo de la comunicación y de la relación con el otro. Ve en la palabra un puente entre la conciencia propia y la del otro. Como lo expresa Merleau-Ponty en Bucher (1996, p. 92): «El lugar natural de la conciencia del otro es una especie de intermundo común que se constituye por la experiencia del diálogo».

Radford (2014) precisa aún más la idea de objetivación de la siguiente manera: «La objetivación es el proceso social, corpóreo y simbólicamente mediado de toma de conciencia y discernimiento crítico de formas de expresión, acción y reflexión constituidas históricamente y culturalmente» (p. 141). En términos «simples», la objetivación indica un proceso que tiene como objetivo mostrar alguna cosa —un objeto— a alguien. Estos medios que sirven para mostrar el objeto Radford (2003) los llama *medios semióticos de objetivación*. Al decir de Radford (2003), los medios semióticos de objetivación son:

> Todos los medios utilizados por los individuos que se encuentran en un proceso de producción de significados, para lograr una forma estable de conciencia, para hacer presente sus intenciones y organizar sus acciones y así adquirir las metas de sus acciones (p. 41).

La característica social y cultural de los medios semióticos de objetivación reside en el hecho de que contienen patrones históricos de actividad cognitiva. He aquí la complejidad de estos recursos semióticos, por cuanto es en la labor conjunta entre estudiantes y profesor que los primeros pueden entrar en un proceso de *reconocimiento* —en el sentido heideggeriano del término y descrito párrafos arriba como *transformación* del saber *in itself* en un saber *for itself*, es decir, un saber para la conciencia— de la inteligencia histórica depositada en estos medios semióticos. No es gratuita, pues, la interacción entre los sujetos que se presenta en la primera parte de este trabajo.

En especial, el gesto, como un medio semiótico de objetivación y visibilizado en la actividad semiótica de los estudiantes, juega un papel importante en la expresión de sus intencionalidades y en su proceso de conceptualización. Los gestos forman parte constitutiva de la solución de un problema matemático; no se pueden entender como «simples ilustraciones» de los objetos referidos en las explicaciones verbales. Por eso, el carácter mediador de los gestos en los procesos de resolución de problemas, es destacado por Radford (2005) cuando sostiene que:

> Los gestos son parte de esos medios que permiten, a los estudiantes, objetivar el saber, es decir, les permiten darse cuenta de los aspectos conceptuales que, debido a su propia generalidad, no pueden ser completamente mostrados en el mundo concreto (p. 143).

Si reconocemos el saber —algebraico—, presentado en la primera parte de este trabajo, como pura potencialidad cultural, es decir, constituido por sistemas de acción y de reflexión que están incrustados en la cultura (Radford, 2013a), entonces debemos reconocer también la importancia del papel de los gestos en los procesos de objetivación del saber. La potencialidad —dunamis en Aristóteles— es pura posibilidad. Debemos entender esto como algo indefinido, sin forma, por ejemplo, como el sonido antes de ser producido. Radford visibiliza en el papel de los gestos las intenciones de comunicación de algún aspecto de los objetos culturales, como secuencias de patrones. Para Radford (2005, p. 143):

> Ellos —los gestos— son elementos indispensables en el *proceso de objetivación* del saber de los estudiantes. Los gestos ayudan a los estudiantes a hacer visibles sus intenciones, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos.

Radford (2009, p. 113) plantea que «los gestos son una especie de ventana para acceder al pensamiento». Esta declaración pone de presente la importancia de los trabajos pioneros de Vygotsky (1978) sobre la relación entre gestos y signos. En particular, dice Vygotsky:

> A gesture is specifically the initial visual sign in which the future writing of the child is contained as the future oak is contained in the seed. (…) The gesture is a writing in the air and the written sign is very frequently simply a fixed gesture (p. 107).

En Vergel (2015a, 2016a) constatamos que recursos semióticos tales como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual son consubstanciales a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano. Estos medios semióticos de objetivación, como elementos constitutivos del pensamiento, juegan un papel preponderante en el desarrollo de un sentido de lo indeterminado, como uno de los componentes característicos del pensamiento algebraico. Vergel (2016c, p. 511) plantea que:

> El proceso de desarrollar un sentido de lo indeterminado no se logra súbitamente. Es más bien un lento y laborioso proceso que está íntimamente ligado al tipo de tareas propuestas en la sala de clase y a la actividad en tanto labor conjunta entre estudiantes y entre estudiantes y profesor.

Radford (2015b) sostiene que el ritmo es parte integral del pensamiento matemático. Pone en evidencia algunos componentes del ritmo fundamentales en el flujo del pensamiento matemático. Este autor señala que:

> Rather than ephemeral byproducts of communication and problem-solving heuristics, these elements of rhythm —meter, rhythmic grouping, theme, and prolongation— are essential components of the flow of thinking. They are central features of the mediation of thought and the manner in which it becomes actualized in the students reflections and actions. They are part of the materiality of thinking (p. 78).

Pero es necesario plantear que estos recursos semióticos no operan solamente de manera individual. De hecho, cuando se trabaja con ideas matemáticas, estos operan en profundas relaciones entre ellos. En el trabajo referenciado aquí (Vergel, 2015a) se han puesto de manifiesto, en el proceso de semiosis perceptiva de algunos estudiantes, análisis de evidencias que indican cómo la coordinación de deícticos espaciales, ritmo, palabras y actividad perceptual es clave en la toma de conciencia de una forma de pensamiento algebraico. Dicha complementación y coordinación de medios semióticos de objetivación constituye un nodo semiótico (Radford, 2013b), el cual caracteriza la actividad semiótica y reflexiva de algunos estudiantes, en particular en lo relacionado con los procesos progresivos de la aprehensión perceptual del patrón y su generalización.

En este proceso complejo de generalización, por ejemplo, el ritmo, el gesto y la percepción, como lo hemos señalado, emergen como medios semióticos de objetivación. En particular, el análisis prosódico —Figura 3, parte de abajo— llevado a cabo mostró cómo el ritmo se constituye en un importante medio semiótico de objetivación. Los gestos ayudan a los estudiantes a visualizar (Presmeg, 2006) y no se limitan a llevar a cabo las intenciones o la información que quieren expresar los estudiantes, puesto que son elementos claves en el proceso de objetivación del saber (Radford, 2005).

El análisis de las evidencias presentado en la primera parte pone de manifiesto los tres componentes del proceso de generalización —fenomenológico, epistemológico-ontológico y semiótico—. Los análisis sugieren la escogencia, por parte de los estudiantes, de ciertas determinaciones sensibles, las cuales posibilitaron avanzar en el proceso de generalización factual a través de la denotación con medios semióticos de objetivación.

El análisis de los procesos de pensamiento matemáticos de estudiantes a temprana edad cuando abordan tareas sobre secuencias de patrones muestra que ellos movilizan recursos cognitivos, físicos y perceptuales (Arzarello, 2006; Radford, Edwards & Arzarello, 2009; Vergel, 2013, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b). Estos hallazgos presentados sugieren considerar, en los análisis de producción de tareas sobre secuencias de patrones, la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad —lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.—. Dicho análisis corrobora las investigaciones y reflexiones adelantadas por Fairclough (1995), según las cuales, en síntesis, el discurso de los estudiantes en el desarrollo de las tareas es una práctica social. Por supuesto, esta práctica no puede ser ajena a la mediación de los artefactos culturales.

No estamos considerando los artefactos como meros auxiliares en el acto de conocer. Desde un punto de vista onto-epistemológico, el conocimiento llega a ser *conocimiento-con-artefactos*, como opuesto a *conocer vía estos artefactos* (Vergel, 2015a). Como lo plantea Radford (2012, p. 285), estos artefactos «se imbrican en la manera en que pensamos y llegamos a conocer». Por eso, como lo sugiere este mismo autor, el estatus epistémico de los artefactos significa que «como cambian los artefactos, así también lo hacen nuestros modos de conocer» (Radford, 2012, p. 285).

La naturaleza multimodal de la cognición humana significa que no somos sujetos cognitivos solamente. Nuestras acciones de conocimiento siempre están preñadas de lo kinestésico, lo perceptual, lo táctil, etc., y estas modalidades sensoriales son parte integral de los procesos de cognición, no son, por supuesto, elementos periféricos en las maneras de conocer y trabajar ideas matemáticas.

Finalmente, como lo señala D'Amore (2006), el empleo que hacemos de los diversos tipos de signos y artefactos cuando intentamos llegar a conocer algo está contenido en prototipos culturales de uso de signos y artefactos. Siguiendo ideas de Radford (2012), podemos señalar que estos artefactos se encarnan en la manera en que los estudiantes piensan, reflexionan y llegan a conocer.

En tal sentido, la semiótica no solamente cumple su papel natural de representación de los objetos matemáticos —natural en tanto que la semiótica nace en un contexto realista, pues se necesitaba representar los objetos matemáticos—, sino que debemos reconocer que la actividad matemática está afincada en diversos complejos simbólicos de la cultura en que se desarrolla.

El análisis de la práctica matemática no puede reducirse al análisis de la práctica misma, pues el pensamiento matemático siempre está enmarcado por la racionalidad de la cultura en donde surge y se desarrolla. Este tipo de racionalidad trasciende la esfera de la acción matemática y, por esta razón, es posible afirmar que pensar, sentir, intuir, simbolizar, generalizar, entre otras acciones, siempre estarán enmarcadas por lo que el gran filósofo alemán Georg Hegel llamaba el *espíritu de la cultura*.

Capítulo 4.
Tareas y actividades para orientar el trabajo en el aula

En este capítulo presentamos algunas tareas que pueden suscitar actividades en el aula de clase de Matemáticas en la dirección conceptual sugerida en el presente trabajo. Para recapitular algunas ideas expuestas en la subsección 3.4.2, en la que presentamos algunas reflexiones teóricas desde la Teoría de la objetivación, esta idea de actividad se ha conceptualizado como labor conjunta que, en su sentido ontológico, significa alteridad, es decir, la actividad debe promover el encuentro de eso que no soy yo y que, al encontrarlo, me transforma.

Es en la actividad o labor conjunta que los sujetos y la cultura se constituyen mutuamente. Para decirlo de otra manera, es a través de la actividad o labor conjunta que los estudiantes logran desarrollarse, encuentran formas culturales de ser y pueden expresarse a través de ella, a partir de formas de colaboración e interacción humanas, promovidas en la sala de clase, que no sean alienantes (Radford, 2013c), esto es, actividades en las cuales los estudiantes se posicionen críticamente frente a ideas matemáticas, discutan y argumenten; «crear espacios de reflexión crítica en el aula de manera que haya un crecimiento subjetivo socialmente responsable del alumno» (Radford, 2013c, p. 7).

En esta dirección conceptual tenemos que aceptar que el sujeto, aun cuando esté solo, siempre estará en relación de alteridad con otros, pues está interactuando con artefactos culturales que poseen una inteligencia histórica o tienen incrustada la actividad cognitiva de generaciones pasadas. El sujeto que lee un libro o que aborda una tarea matemática no está solo, está interactuando con las ideas de otros. Es por esto que, como sugiere Garaudy (1970), «La subjetividad nace de la comunicación. Desde un principio yo me aprehendo como individuo sobre un fondo de comunidad» (p. 100). Quizás para decirlo una vez más, el individuo es, para Marx, «el conjunto de sus relaciones sociales» (Garaudy, 1970, p. 100).

Estamos considerando la *tarea* como una categoría didáctica, y parte integral del proceso de instrucción, en tanto situación enmarcada en un contexto —intramatemático o extramatemático— que, a partir de su abordaje por parte de un sujeto, pretende desarrollar en él pensamiento matemático. La idea de instrucción —traducción del vocablo ruso *obuchenie*— comprometida en nuestra propuesta conceptual de tarea, por un lado, refiere a la actividad integrada de interacción en la cual enseñanza y aprendizaje se hallan implicadas y, de otra parte, «desempeña un papel de considerable importancia en el desarrollo» (Wertsch, 1988, p. 87). En consecuencia, la idea de tarea que estamos proponiendo se inspira en la máxima vygotskyana según la cual «la instrucción solamente es positiva cuando va más allá del desarrollo y, de esta manera, despierta y pone en funcionamiento toda una serie de funciones que, situadas en la zona de desarrollo próximo, se encuentran en proceso de maduración» (Wertsch, 1988, p. 87).

La tarea, a nuestro juicio, está revestida de una *densidad epistemológica*, por cuanto su abordaje, por parte de los estudiantes, implica la movilización, a través de signos y de operar con ellos, de ideas matemáticas y procesos matemáticos —p. ej., procesos de deducción y de generalización—, la conjeturación y formulación de hipótesis, el establecimiento de relaciones numéricas, el trabajo analítico con lo desconocido, entre otros aspectos. En el caso particular del cálculo, Vygotski (1995) plantea que:

> La cultura fundamental en el desarrollo del cálculo radica en el paso de la percepción directa de la cantidad a la mediada, al hecho de que el niño comience a equiparar las cantidades con determinados signos, a operar con tales signos (p. 208).

La tarea, pues, constituye un elemento artificial de la educación del alumno, pues intentamos crear condiciones para que ocurra un cierto fenómeno, en este caso diseñamos tareas o situaciones —intramatemáticas o extramatemáticas— para observar en su abordaje unas ciertas características del desarrollo del pensamiento matemático. Este planteamiento se inspira en ideas vygotskyanas desde las cuales se deduce que la educación puede ser entendida como el desarrollo artificial del niño (Vygotski, 1995). «La educación es el dominio ingenioso de los procesos naturales del desarrollo. La educación no sólo influye sobre unos u otros procesos del desarrollo, sino que reestructura, de la manera más esencial, todas las funciones de la conducta» (Baquero, 2009, p. 105).

En algunas de las tareas que estamos proponiendo, planteamos sugerencias para orientar la actividad en el aula y brindamos elementos de análisis de la actividad matemática de estudiantes a partir de las experiencias que hemos logrado capitalizar en talleres y charlas en eventos académicos regionales, nacionales e internacionales. En otros casos solamente enunciamos la tarea con el propósito de invitar a los docentes de matemáticas a analizar no sólo el diseño de la misma, sino también involucrarse en la «aventura didáctica» de formular hipótesis en relación con la actividad matemática que podrían desplegar los estudiantes considerando, además, las posibles dificultades que encontrarían en el abordaje de la situación planteada.

Consideramos que las tareas y las actividades que puedan suscitarse a partir de ellas imponen dos retos. Por una parte, contribuir al desarrollo del pensamiento aritmético y del algebraico, y, de otra parte, constituirse en unidades de análisis para interpretar la actividad matemática de los estudiantes. En relación con esto último, vale la pena señalar que, en particular, los procesos de generalización en secuencias de patrones son objeto de estudio en la didáctica del álgebra y sería deseable estar sensible a las producciones de los estudiantes con el fin no sólo de valorarlas y analizarlas, sino también de potenciarlas. Mason, Graham, Pimm y Gowar (2014) sostienen que:

> (…) antes de iniciar su etapa escolar, los niños han desplegado el poder necesario para pensar algebraicamente y darle sentido matemático al mundo en que viven; se espera, entonces, que la escuela promueva y facilite la continuación del desarrollo de estas potencialidades de los niños, pues la capacidad para identificar y expresar regularidades y relaciones matemáticas involucradas en éstas (es decir, patrones) reside en el corazón del pensamiento matemático (p. IX).

En este sentido, los elementos teóricos expuestos en este trabajo fungen como herramientas analíticas que nos permiten no sólo fundamentar científicamente las tareas propuestas, sino también interpretar las producciones matemáticas de los estudiantes en las actividades desarrolladas.

Dobleces de papel y proceso de generalización

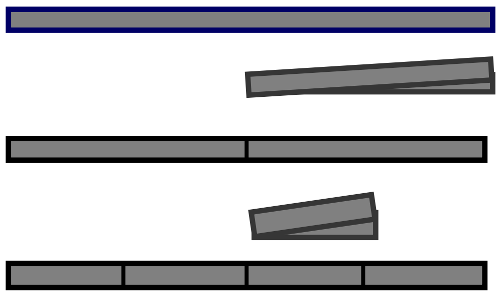
Tomemos una tira de papel, y realicemos la acción de unir los respectivos extremos —doblar por la mitad—, realizando el doblez correspondiente —una marca sobre la tira de papel—; reiterando esta acción, siempre en el mismo sentido; por ejemplo, al realizar dos veces la acción de doblar por la mitad se obtienen 3 dobleces y a la tercera 5 dobleces. ¿Cuántos dobleces se obtienen al realizar 5 veces la misma acción?; ¿7 veces?; ¿15 veces?; ¿100 veces? ¿Existe una forma de expresar el número de dobleces obtenidos al realizar un número cualquiera de acciones?

El trabajo a partir de material concreto motiva a los estudiantes a abordar el trabajo, pues manipular la tira de papel les posibilita responder adecuadamente a la primera pregunta e incluso cuando se realiza 6 veces la misma acción, pero poco a poco la dificultad para manipular lo concreto hace que se abandone la tira de papel y centren su mirada en lo abstracto, en las relaciones posibles, ya sea entre las respuestas a las acciones anteriores, o entre las veces que se realiza la acción y el número de dobleces que se obtendrían. Si bien muchos estudiantes identifican un patrón y logran generalizar, no siempre logran «capturarlo» mediante una expresión algebraica.

De hecho, según Godino *et al.* (2012, p. 490), «hay un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica con facilidad». English y Warren (1998), citados por Godino *et al.* (2012), consideran que la parte más difícil es expresar algebraicamente las generalizaciones.

Consideramos de interés presentar, de manera breve, pero con cierto detalle, resultados de una experiencia desarrollada con 46 estudiantes en un grupo de grado 9° —14-15 años— relacionada con esta tarea de dobleces de una tira de papel en una institución oficial en Bogotá. Se propuso la tarea, explicitando las acciones a realizar y los dobleces obtenidos después de realizar las dos primeras acciones, como se muestra en la siguiente figura:

Figura 8. Dobleces de una tira de papel.



Los estudiantes abordaron esta tarea manipulando la tira de papel; inicialmente realizando las acciones y efectuando el conteo de los dobleces obtenidos en cada caso, pero evidenciando mayores dificultades a medida que realizaban las siguientes acciones. Para las primeras 5 acciones, encontraron con relativa facilidad el número de dobleces correspondiente: 1, 3, 7, 15 y 31, respectivamente, aunque en ocasiones algunos no coincidían con sus compañeros en el número obtenido y requerían revisar el proceso efectuado. Algunos de ellos persistían en realizar la sexta y séptima acción sobre la tira de papel, a pesar de las dificultades evidenciadas para hacerlo; mientras que otros, reconocieron en diferentes momentos que continuar trabajando directamente con la tira de papel no era necesario o resultaba prácticamente imposible, por lo cual empezaron a organizar la información obtenida y analizar posibles relaciones numéricas —varios pasaron de trabajar con lo concreto a trabajar con lo «abstracto», aunque algunos permanecían más tiempo «anclados» al material concreto de la situación—.

Varios estudiantes organizaron la información en una tabla como la siguiente, la cual fue socializada con el grupo:

Figura 9. Producción de algunos estudiantes en relación con la tarea de dobleces de una tira de papel.

Acciones	**Dobleces**
1ª	1
2ª	3
3ª	7
4ª	15
5ª	31

Algunos estudiantes lograron conjeturar que para las dos acciones siguientes se obtendrían 63 y 127 dobleces, respectivamente, acudiendo a un proceso recursivo, pues reconocieron que en cada caso, el número de dobleces era uno más que el doble del anterior; en efecto, encontraron que $3=2(1)+1$, $7=2(3)+1$, $15=2(7)+1$, $31=2(15)+1$ y, por tanto, $2(31)+1=63$ y $2(63)+1=127$.

Si bien la mayoría de ellos creía haber resuelto el problema planteado, frente a la pregunta sobre los dobleces que se obtendrían al realizar 100 veces la misma acción de doblar, reconocieron que el proceso resultaba poco práctico en tanto se requeriría conocer el número de dobleces para la acción 99. Como una orientación para posibilitar avances con respecto a la situación propuesta, el profesor planteó una nueva pregunta: ¿en cuántas partes queda dividida la tira de papel a medida que se realizan las acciones requeridas? Rápidamente los estudiantes elaboraron tablas como la siguiente:

Figura 10. Nueva producción de algunos estudiantes sobre la tarea dobleces de una tira de papel.

Acción	**Dobleces**	**Partes**
1ª	1	2
2ª	3	4
3ª	7	8
4ª	15	16
5ª	31	32

Consideramos importante resaltar aquí que, al menos para el profesor, la última columna ponía en evidencia un patrón claro, permitiendo «ver» una regularidad: las potencias de 2. De hecho, esperando escuchar dicha respuesta por parte de sus estudiantes, pregunta: ¿qué ven en la última columna? En principio no hay respuesta alguna por parte de los estudiantes, pero luego se establece la siguiente interacción:

Estudiante 1: *(Breve silencio) números, profesor.*

Profesor: *¿Qué más ven?*

Estudiante 2: *(Breve silencio) números pares.*

Profesor: *¿Quién ve algo más?*

Estudiante 3: *(Breve silencio) cada número se obtiene multiplicando por dos.*

Profesor: *¿Y qué más se ve al relacionar todos los números de la última columna?*

Estudiante 4: *Profe, que cada número es el doble del anterior.*

A pesar de la insistencia, al menos en dicha sesión de clase, ninguno de los estudiantes pudo «ver» lo que el profesor reconocía o veía claramente; nadie más veía potencias de 2. En una sesión posterior, el profesor propuso secuencias numéricas como las siguientes:

2, 4, 6, 8, 10,…

1, 3, 5, 7, 9,…

2, 4, 8, 16, 32,…

Aunque no de manera inmediata, se escucharon las respuestas inicialmente esperadas por el profesor para las dos primeras secuencias: «números pares» y «números impares», pero no para la tercera, nuevamente unos pocos respondieron que se trataba de números pares, o que cada uno era el doble del anterior, pero aún no «veían potencias». Finalmente, frente a la secuencia 1, 10, 100, 1000, 10.000,…, varios reconocieron que se trataba de «potencias de 10»; y al plantearles nuevamente la secuencia numérica 2, 4, 8, 16, …, uno de los estudiantes responde «potencias de 2», y frente a la pregunta sobre cómo se representan las potencias de 2, algunos proponen la secuencia 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, …. No obstante, ninguno de ellos planteó una manera de simbolizar el término general en esta secuencia de números.

Ahora bien, en relación con la actividad de dobleces, la mayoría de estudiantes logró reconocer que el número de partes en que quedaba dividida la tira de papel podía expresarse mediante potencias de 2, donde el exponente correspondía al número de acciones realizadas y sólo algunos de ellos relacionaron las dos últimas columnas y reconocieron, en cada caso, que «el número de dobleces es uno menos que el de las partes»; aunque pocos plantearon que, en general, el número de dobleces se obtenía «con la potencia de dos menos uno» y sólo uno propuso la expresión «dobleces = 2acción - 1».

Consideramos importante resaltar nuevamente que si bien los estudiantes logran procesos de generalización, y muchos pueden expresar oralmente dicha generalidad, no siempre lo pueden hacer por escrito o las simbolizaciones propuestas usualmente difieren de lo institucionalmente esperado y requieren de tiempos y tematizaciones adicionales.

Búsqueda de Patrones

Con base en la siguiente secuencia de figuras (Rojas *et al.*, 1999, pp. 92-93) responda las preguntas formuladas.

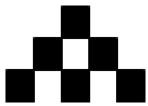
Figura 11. Secuencia figural con apoyo tabular.

1. Dibuje la figura correspondiente a la 4ª posición.
2. Calcule el número de cuadros de la figura correspondiente a la 9ª posición.
3. Calcule el número de cuadros de la figura de la posición 100.
4. Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.
5. Escriba una fórmula que sirva para encontrar la cantidad de cuadros que tiene la figura en cualquier posición.

En relación con actividades para reconocer procesos de generalización y de simbolización, tareas como ésta pueden ser propuestas a estudiantes de diversos niveles de escolaridad, con propósitos diferenciados. No obstante, en algunos casos, las posibilidades de los estudiantes para abordar tareas como la propuesta, en niveles distintos de escolaridad, pueden no diferir sustancialmente; quizás por el tipo de trabajo que se realiza en las instituciones escolares. Por ejemplo, en un trabajo a partir de esta tarea, con estudiantes de grados 7° y 9° —12-13 y 14-15 años—, en tres instituciones educativas, donde los primeros no habían abordado institucionalmente el trabajo algebraico, al menos en lo que respecta a uso de expresiones alfanuméricas, mientras los segundos sí lo habían realizado, las diferencias en cuanto a las respuestas ofrecidas por unos y otros no resultaron ser significativas.

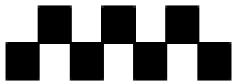
En relación con los dos primeros ítems, la mayoría de estudiantes no encontró dificultad para responderlos. No obstante, en el primero de ellos, que algunos podrían considerar innecesario, en tanto podríamos considerar que, dada la secuencia de figuras, el patrón se «ve» rápidamente, cerca de 4 estudiantes reconocieron un patrón distinto al esperado, y plantearon la siguiente figura para la 4ª posición:

Figura 12. Producción de algunos estudiantes sobre la secuencia figural con apoyo tabular.



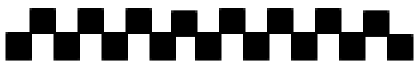
Por supuesto, se trata de una respuesta posible, que nos hace recordar no sólo que somos distintos, con formas distintas de ver e interpretar el mundo, sino también la importancia de este ítem en el diseño de la tarea, en tanto permite realizar un mejor análisis de las respuestas dadas por nuestros estudiantes, y reconocer coherencia en las respuestas dadas a los otros ítems. Volviendo a la figura propuesta por la mayoría de estudiantes para responder este ítem —figura en la 4ª posición—:

Figura 13. Nueva producción de algunos estudiantes sobre la secuencia figural con apoyo tabular.



Para dar respuesta al segundo ítem —número de cuadros de la figura en la 9ª posición—, muchos usaron nuevamente una representación gráfica:

Figura 14. Producción de algunos estudiantes sobre la secuencia figural con apoyo tabular en respuesta al ítem (b).



Luego efectuaron conteos mediante procedimientos diferenciados; por ejemplo, obtuvieron el 17 contando de 1 en 1, realizaron 9 conteos «de a 2» más 1, usaron 9 grupos de 2 menos 1, o, contaron 6 de 3 —como unidades múltiples— más 1. La mayoría coincidió en la respuesta, aunque algunos, al parecer por errores en el conteo, respondieron 16 o 18.

En relación con el tercer ítem, sobre los cuadros en la figura de la posición 100, el número de respuestas diferentes aumentó. Algunos insistían en realizar una representación gráfica, ubicando un cuadro tras otro, aunque en algún momento desistían de dicho intento, unos sin ofrecer información diferente a la dada en la gráfica, otros planteando algunas operaciones y una respuesta numérica, entre ellas 190, 199 o 198, y sólo unos pocos dando respuestas directas, como resultado de un proceso de inducción, aunque usando estrategias diferenciadas; por ejemplo, de tipo aditivo —reconocieron en la secuencia el patrón 2+1, 3+2, 4+3, …, 100+99—, o de tipo multiplicativo —1, 2x1+1, 2x2+1, …, 2x99+1; 2x1-1, 2x2-1, …, 2x100-1—.

No obstante, un número significativo de estudiantes hace uso de la «regla de tres», útil en casos en los cuales las cantidades están relacionadas proporcionalmente, lo cual no se da en este caso. Usando esta estrategia daban como respuesta 190, realizando un siguiente análisis a partir de los cuadros requeridos en la posición 9, en este caso 17: «para la posición 10 se necesitan 19 cuadros, y como 10x10=100, entonces el número de cuadros sería 19x10=190».

Al respecto, encontramos que la mayoría de estudiantes que hace uso de la «regla de tres» considera que ésta se puede usar en todos los casos en los cuales se conocen tres datos y se requiere hallar el cuarto. Encontramos evidencia sobre la necesidad de realizar trabajo significativo, desde contextos aritméticos, con respecto a relaciones de proporcionalidad.

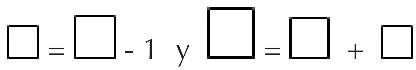
Finalmente, en relación con los procesos de generalización, encontramos que muchos de los estudiantes, si bien podían dar cuenta del número de cuadros para cualquier figura pedida, no encontraban una manera de expresar desde el lenguaje natural la generalidad reconocida y requerían acudir a casos específicos —pero arbitrarios—, lo que confirma una vez más los resultados de English y Warren (1998), en tanto que existe un desfase entre la habilidad de los estudiantes para reconocer y expresar verbalmente un cierto grado de generalidad y la habilidad para emplear la notación algebraica. Quienes pudieron representar dicha generalidad, lo hacían usando diferentes sistemas de representación. Veamos algunos ejemplos:

> *El doble del número menos uno; (Número)+(Número)-1; 2 veces el número -1; 2(número)-1;*
>
> *2# -1; n+(n-1); 2xn-1; 2n-1*

Consideramos importante resaltar que, por ejemplo, las expresiones *n+(n-1)* y *2n-1*, que la mayoría de profesores reconocemos como equivalentes —al menos sintácticamente hablando— no siempre son consideradas equivalentes por los estudiantes —al menos semánticamente—, en tanto corresponden a correlatos diferentes con respecto a las acciones que representan; en el caso del número de cuadros que estamos comentando, la expresión *n+(n-1)* corresponde a «los cuadros de abajo más los cuadros arriba, y esta fila tiene uno menos que la de abajo», mientras que la expresión *2n-1* corresponde a «n veces 2 menos 1» o «el doble de cuadros menos uno». Insistimos una vez más en el reconocimiento de que las formas de ver son culturales y pagan tributo a formas sociohistóricas de vida (Luria, 1987).

Incluso, algunas respuestas que pueden ser consideradas como erróneas o incoherentes, cuando escuchamos las explicaciones de nuestros estudiantes, podemos reconocer no sólo que son coherentes sino que dan cuenta de procesos que podrían ser efectivos y ponen en evidencia por parte de ellos maneras de ver, es decir, actividades perceptuales distintas.[16] Esto refuerza la idea de semiótica, según Eco (1988), como una teoría que intenta explicar cómo los signos significan. Veamos un caso, en el que en la hoja de respuesta sólo encontramos lo siguiente:

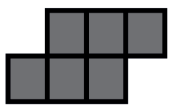
Figura 15. Producción de un estudiante sobre la secuencia figural con apoyo tabular que enfatiza un esquema asociado a un proceso recursivo.



Al preguntarle el significado de dicha representación, en la cual difícilmente se podía observar la diferencia de tamaño entre los diferentes cuadros, el estudiante precisa que la primera igualdad quiere decir que «los cuadros de abajo son uno menos que los de arriba» y la segunda que «los cuadros totales son iguales a los de abajo más los de arriba». En la representación se intenta diferenciar el número de cuadros a partir del tamaño de los cuadros; pero quizás lo que debemos destacar aquí es que se puede «ver» una representación de un esquema asociado a un proceso recursivo; así como también la complejidad propia de los procesos de simbolización.

De las configuraciones con baldosas a las relaciones área-perímetro

Tomando como referencia la figura dada, en la cual cada par de baldosas debe estar unida al menos por uno de sus lados, ¿es posible añadir baldosas de manera tal que el perímetro de la nueva configuración de baldosas sea 18 unidades?, ¿cuál sería el número mínimo de baldosas requeridas?, ¿cuál sería el máximo?

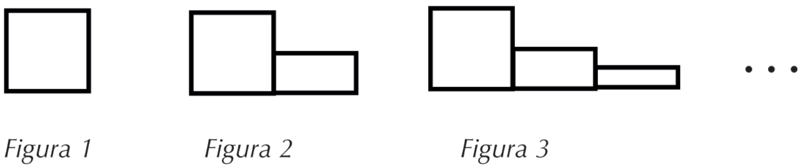


16 Queremos insistir aquí en que, como profesores, a veces juzgamos como equivocada una respuesta de nuestros estudiantes, en tanto pensamos desde una lógica de adultos expertos, desconociendo que los estudiantes, en función de sus condiciones culturales, imponen una lógica a su acción, que, si bien es diferente de la del adulto, puede contar con la validez requerida, y, por ende, también el procedimiento realizado.

Explorar esta situación, y encontrar las diversas configuraciones que cumplan la condición planteada, posibilita que los estudiantes reconozcan que añadir una baldosa no implica que el perímetro de la nueva configuración aumente, pues podría mantenerse e, incluso, disminuir; así como reconocer expresiones que le posibiliten resumir los diversos hallazgos, en particular, las relaciones entre área y perímetro.

Secuencia de figuras, áreas y búsqueda de patrones

Figura 16. Secuencia de rectángulos con apoyo tabular.

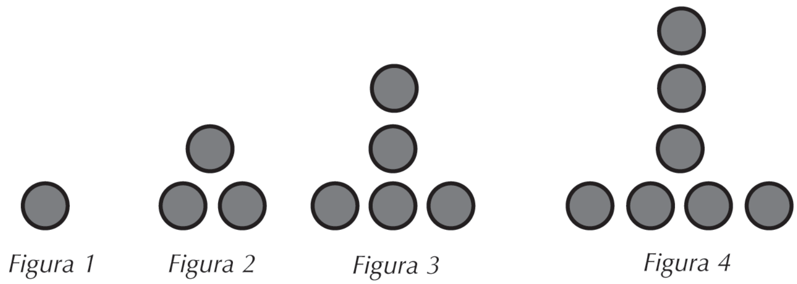


Si cada figura se obtiene de la anterior adicionando un rectángulo a la derecha ésta, el cual mantiene un lado con longitud igual al lado del cuadrado de la Figura 1 y el otro lado corresponde a la mitad del rectángulo a su izquierda, ¿cuál sería el área de la Figura 5?, ¿de la figura 100?, ¿de la Figura n?

Esta tarea, en particular, posibilita, además de relacionar diversos sistemas de representación, por ejemplo, el figural, el numérico y el algebraico, proceder a una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias (Radford, 2013b), las cuales, junto al reconocimiento de las estructuras espacial y numérica, se constituyen en elementos claves para el desarrollo del pensamiento algebraico. En particular, la estructura espacial es proveedora de índices perceptivos generalizables (Radford, 2013b), lo cual establece una diferencia con secuencias numéricas en las que el proceso de generalizar el patrón impone una demanda cognitiva mayor, justamente por no contar con esta estructura espacial.

Secuencia figural apoyada por representación tabular

Figura 17. Secuencia de círculos con apoyo tabular.



1. Construya las figuras 5 y 6.
2. ¿Cuántos círculos tiene la Figura 15?
3. ¿Cuántos círculos tiene la Figura 100?

Esta tarea y la actividad desplegada pretenden familiarizar a los estudiantes con este tipo de secuencias. El trabajo en pequeños grupos posibilita que los alumnos interactúen y comuniquen sus propuestas de solución. Este tipo de actividad no la podemos mirar ingenuamente. Comunicar a otro siempre es importante, dada la necesidad de explicar lo que un estudiante en particular piensa. Las relaciones de alteridad posibilitan encontrar formas culturales de ser y de sentir, desarrollar procesos de autorrealización, es decir, sentirse reconocidos en el trabajo de aula de matemáticas y vencer la alienación (Radford, 2017c). Con el abordaje de los requerimientos o ítems a), b) c), se espera indagar las maneras como los estudiantes pueden identificar el patrón en la secuencia —el término general corresponde a $2n - 1$ con $n = 1,2,3, \ldots$—.

En relación con las tareas 4.2, 4.4 y 4.5, es posible que los estudiantes fijen su atención en la forma de las figuras, en la cantidad de cuadrados, rectángulos y círculos, que constituyen cada una de estas figuras, etc. Desde algunos estudios (ver, por ejemplo, Radford, 2013b; Vergel, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b), esta escogencia de similitudes y diferencias la podrían hacer los estudiantes según la comprensión que hacen del objeto de la actividad de generalización. En este caso, el objeto de la actividad es reconocer una manera histórica y culturalmente constituida de razonar algebraicamente sobre secuencias, es decir, reconocer el saber como «una labor cristalizada (…) o como una forma ideal de acciones, en oposición a las acciones mismas» (Radford, 2017a, p. 101).

Esta tarea ha sido reportada por Rojas *et al.* (1999, p. 97):

Llamaremos *hexarecto* a todo hexágono cuyos lados consecutivos siempre forman ángulo recto. Construya dos hexarectos diferentes de perímetro 24cm. De todos los hexarectos con perímetro 24cm, ¿cuál es el de área máxima?

a. En principio, debe plantearse la siguiente pregunta: ¿Existen hexarectos? En caso afirmativo muestre uno —gráficamente—, de lo contrario, exponga las razones por las cuales considera que no pueden existir dichos objetos. Pues, en principio, existe la tendencia a suponer que el único hexágono es el regular, en tanto es la primera imagen que «aparece». Una vez se haya encontrado cuál es la forma de los hexarectos, se puede plantear actividades como:
b. Construya dos hexarectos cuyo perímetro sea 24 unidades.
c. Encuentre el mayor número de hexarectos con esta condición.
d. De todos los hexarectos encontrados, ¿cuál es el de mayor área?, ¿por qué?

En anteriores experiencias con esta tarea hemos logrado evidenciar la tendencia en los escolares a trabajar sólo en el universo de los números naturales. Esta tendencia podría ponerse en cuestión, a partir de esta actividad, al comparar las respuestas dadas por los estudiantes e invitándolos a encontrar una figura con área mayor a las dadas. Durante la actividad, y con las sugerencias que plantee el profesor, es usual que «aparezcan» los decimales o las fracciones.

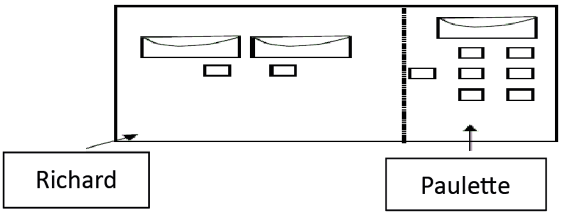
Los cambios de sistemas semióticos de representación aparecen por la necesidad de avanzar en la comprensión de la tarea y su solución. Se invita a los estudiantes a comprobar que siempre se puede encontrar una figura de mayor área, manteniendo la condición inicial de tener un perímetro de 24cm. Es interesante notar que el proceso de solución de la tarea posibilita el trabajo con procesos infinitos y procesos de variación que involucra la dependencia entre cantidades, así como la formulación de expresiones funcionales aritméticas y algebraicas. La gestión de la tarea puede brindar la oportunidad para entrar a discutir elementos asociados con la idea de límite.

Una vez más postulamos que la tarea aparece como una especie de dispositivo artificial para posibilitar, en su abordaje, el desarrollo de pensamiento matemático. En otras palabras, la tarea por sí sola no produce efecto alguno, pues debe ser gestionada *adecuadamente* para generar posibilidades de desarrollo de pensamiento matemático. El término *adecuadamente* debe entenderse en un sentido didáctico, es decir, quien la gestiona está conminado a poner en juego una serie de conocimientos didácticos derivados de la investigación que le permitan, por ejemplo, proponer preguntas emergentes que lleven a problematizar a los estudiantes y que pueda reconocer en las producciones rasgos característicos de tipologías de pensamiento matemático (algebraico, aritmético, funcional, relacional, etc.) no necesariamente en lenguaje estándar, pues es usual que los estudiantes expresen sus propuestas de solución a través de los signos que tienen a su disposición. Un ejemplo que ilustra esta última idea lo presentamos con el análisis de la actividad que despliegan los estudiantes en relación con la siguiente tarea.

Problema de los sobres

El siguiente problema verbal es planteado inicialmente por Radford (2002) con el propósito de poner en evidencia que es posible empezar a pensar algebraicamente en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra y de identificar formas de pensamiento algebraico —al menos factual y contextual—.

Figura 18. Representación icónica del problema de los sobres.



Determine el número de tarjetas que hay en cada sobre, sabiendo que ambos jóvenes tienen la misma cantidad de tarjetas, y que en cada sobre el número de tarjetas es el mismo.

Cuando se ha propuesto esta tarea a niños y jóvenes, dos de las soluciones que plantean son las siguientes:

Figura 19. Propuestas de solución más representativas por parte de niños y jóvenes sobre el problema de los sobres.

En las soluciones propuestas se puede reconocer claramente un sistema de equivalencias de las cantidades; donde proceden a «quitar» la misma cantidad a cada lado, marcando o «suprimiendo» los objetos equivalentes en los correspondientes «espacios ecuacionales». En la segunda, en particular, construyen una unidad común entre sobres y boletas, en este caso la máxima posible —un ejemplo de los procesos de unitización y normación, comentados en una sección anterior—, y la «cancelan» a ambos lados, en tanto reconocen que la equivalencia se mantiene.

En un trabajo con estudiantes para profesor de matemáticas se planteó esta tarea y todos realizaron una transformación al lenguaje alfanumérico, y resolvieron la ecuación respectiva. Posteriormente se les planteó volver a abordar la misma tarea, pero esta vez con la «advertencia» de trabajar la situación *sin usar álgebra*. Las soluciones dadas por la mayoría de ellos se corresponden con dos presentadas anteriormente.

Varios estudiantes reconocieron que, en tales soluciones, aunque no se usaron símbolos alfanuméricos, se usó álgebra, y plantearon explícitamente que «se está trabajando con igualdades y realizando cancelaciones como en álgebra»; un aspecto a resaltar es que reconocieron la importancia del uso de una representación icónica, del sobre, como una adecuada posibilidad para «representar y manipular lo desconocido». De hecho, permite operar con las representaciones de los sobres y las boletas, con representaciones que refieren cosas. Se trata de una posibilidad, al parecer «natural», de trabajar con lo desconocido, con lo no determinado.

En un sentido similar al anteriormente expuesto, Radford (2002, p. 35) plantea que:

> (…) entre la amplia variedad de signos, desde un punto de vista didáctico, los íconos pueden ser artefactos transicionales útiles para redesignar cantidades desconocidas antes de que un tratamiento formal pleno sea posible para los estudiantes. Verdad, los íconos tienen obvias limitaciones. Por una cosa, no es posible escribir un compendio de la sintaxis de los íconos. Pero, para nuestros propósitos, esto puede no ser necesario, como no fue necesario para los escribas babilonios que maravillosamente manejaron para resolver, mediante métodos icónicos, ecuaciones de segundo grado (Traducido del original).

Otras situaciones

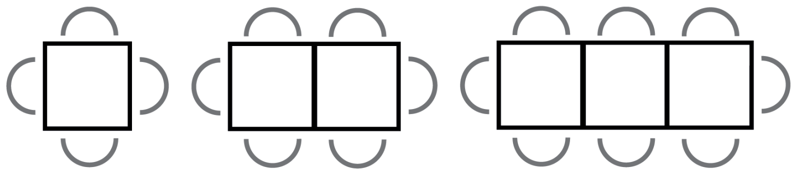
- *¿Quién cuenta 20?* Se inicia un juego por parejas, en cada turno el jugador debe escoger sólo uno de tres números: 1, 2 o 3, y en los otros turnos, a este número se le suma el dicho por el siguiente jugador —por ejemplo, el primero dice 3 y el otro dice 1, entonces van 4, ahora el primero dice 3 y van 7, etc.—. Gana quien diga primero 20.

En principio, los estudiantes abordan el juego por ensayo y error; así, después de unos cuantos intentos, se puede retar a los competidores a encontrar una estrategia ganadora. Una vez encontradas las posibles estrategias, se puede discutir la validez y generalidad de las mismas; para esto, se puede variar un poco el juego, ya sea cambiando el 20 por otro número un poco mayor, o dejando 20 pero cambiando los números posibles de decir —del 1 al 4, del 1 al 5, sólo 1 y 2, etc.—, o cambiando las dos condiciones iniciales.

- *Mesas y sillas*. Esta tarea fue propuesta por Callejo *et al.* (2016), quienes la trabajaron con niños de educación básica primaria.

En un restaurante, sólo podemos colocar las mesas en una fila alargada. Averigua el número máximo de personas que se pueden sentar en relación al número de mesas que pongamos:

Figura 20. Secuencia figural sobre la tarea de Mesas y sillas.



1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
3. En una fiesta se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
4. Si en un cumpleaños han invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntas en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Los autores documentan que las estrategias empleadas por los estudiantes muestran evidencias de la relación funcional al asociar el número de mesas con el de sillas, y el proceso inverso al relacionar el número de sillas con el de mesas.

- *¿Qué cambia y qué se mantiene?* Encuentre todas las parejas de números cuyo producto sea 12.

Con esta situación se posibilita ampliar el «universo numérico», en tanto se puede pasar de un trabajo con números naturales a uno en el que se incorporen los números racionales. Si bien, en un principio es posible que los estudiantes plantean básicamente las siguientes opciones: 1x12, 2x6, 3x4, 4x3, 6x2, 4x3, 6x2 y 12x1; con preguntas como ¿podría obtenerse una pareja que incluya el número 24?, es posible generar multiplicidad de soluciones; además de trabajar ideas asociadas a lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño; de multiplicidad de maneras de descomponer en factores un número fijo.

- *Figuras y áreas.* ¿Es posible encontrar una figura cuya área sea 1 cm^2 y su perímetro sea superior a 4cm?, ¿y con perímetro superior a 1000 cm?, ¿superior a un millón?, ¿y con perímetro igual a 1000 cm?

Tareas como estas posibilitan, en el desarrollo de la actividad matemática, el empleo de varios universos numéricos —naturales, racionales, por ejemplo— así como la necesidad del uso de diversos sistemas de representación y las transformaciones de representaciones semióticas —de tratamiento y conversión—. Abordar la última pregunta, por lo general, promueve, a través de las producciones de los estudiantes, el uso del lenguaje algebraico. Este tipo de representación, por supuesto, no aparece espontáneamente. Por lo general, las producciones de los estudiantes evidencian la evolución de fórmulas corpóreas hacia formas más sofisticadas (Radford, 2010c).

- *Números naturales consecutivos*. Halle una expresión que permita encontrar la suma de tres números consecutivos cualesquiera.

Dependiendo del grado de escolaridad en el que se aplique esta tarea se puede apreciar diversas formas de expresión o representación semiótica, además de explorar en los estudiantes las elaboraciones que han hecho acerca de la idea de números consecutivos. Más aún, la actividad matemática de los estudiantes podría sugerir, como acabamos de señalar en la tarea anterior, la mirada acerca de la evolución de fórmulas corpóreas (Radford, 2010c), lo cual compromete investigar las maneras como se efectúa el refinamiento de la actividad perceptual de los alumnos. La actividad matemática desplegada por los estudiantes podría dar pie a mirar detenidamente aspectos del desarrollo del sentido de la indeterminancia así como su carácter operatorio (Vergel, 2015c). También puede permitir analizar aspectos del *sentido* de los objetos matemáticos puesto en juego.

- *Induciendo una generalización.* Induzca una ley general para calcular el producto: $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\dots(1-\frac{1}{n^2})$

En esta última situación es pertinente discutir que son pocos los casos en los cuales se propone realizar procesos inductivos y quizás ofrecer una sugerencia como la siguiente puede ser didácticamente aconsejable:

$$(1-\frac{1}{4}) =$$

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})=$$

$$(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})=$$

$$\dots$$

- *¿Al infinito y más allá?* Investigue sobre el proceso de construcción de la *curva de Köch,* ¿cuál sería la longitud de la curva en cada paso —1°, 2°, 3°,…—? ¿cuál en el paso n?

- *Interpretaciones de los símbolos literales*. Si *a* y *b* representan números naturales, diga si la siguiente igualdad es verdadera *a*+2=*b*+2. Seleccione la opción correcta y justifique su respuesta:

  Siempre, porque…

  Nunca, porque…

  A veces, ¿en qué casos?

Este ejercicio posibilita, en particular, reconocer posibles interpretaciones que los estudiantes hacen de las «letras» o de los símbolos literales. Por ejemplo, encontramos respuestas como las siguientes:

La igualdad es verdadera siempre, pues 2 siempre es igual a 2, es decir, ignoran o no usan las letras, centran su mirada en lo que consideran posible de operar, en los números determinados.

Nunca, pues a es 1 y b es 2, es decir, asignan un valor específico a cada letra —en este caso, usando el orden lexicográfico—.

A veces, dependiendo de cuál es el valor de a y cuál el de b, es decir, interpretan las letras como valores desconocidos pero fijos, como incógnitas.

La igualdad nunca es verdadera pues la a no es igual a la b, es decir, reconocen las letras como objetos, como símbolos del alfabeto.

A veces, cuando a y b toman el mismo valor, en este caso, reconociendo que las letras pueden representar cualquier valor numérico y pueden ser operadas —letras como números generalizados—.

¿Cómo resolvemos ecuaciones? Sabemos *que* $(x+1)^3 + x = 349$ cuando $x=6$, ¿qué valor(es) de x hace(n) verdadera la expresión $(5x+1)^3 + 5x = 349$?

Al proponer esta tarea a estudiantes, e incluso a profesores de matemáticas, es usual que muchos empiecen a realizar diversas transformaciones en la segunda igualdad, obteniendo una expresión igualada a cero, tratando de simplificar y factorizar dicha expresión, a veces sin tener en cuenta la información dada inicialmente. Sólo unos pocos reconocen que la segunda igualdad, estructuralmente hablando, es la misma que la primera y que, por tanto, la segunda igualdad es verdadera cuando $5x=6$, es decir, cuando $x=6/5$.

Por supuesto, aparecen otras maneras de abordar este ejercicio, que dan cuenta de formas muy interesantes de razonar, haciendo uso de procesos de ensayo y error. Por ejemplo, reemplazan inicialmente la x por 1, obteniendo un número menor que 349; luego reemplazan x por 2 y encuentran un valor mucho mayor que 349, lo que les permite concluir que x debe tomar un valor entre 1 y 2, en este caso más cercano a 1.

Capítulo 5.
Consideraciones y reflexiones finales

La posibilidad de potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes es un aspecto que continúa generando interés en el campo de la investigación en Educación Matemática. En particular, la generalización de patrones puede verse como una actividad clave para introducir el álgebra en la escuela. El término *algebrización* del currículo, introducido por Kaput (2000), nos parece necesario y pertinente, pues potenciar maneras de pensar y actuar sobre objetos, relaciones, estructuras y situaciones matemáticas, puede ser una ruta para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas con comprensión y significado.

La propuesta de cambio curricular denominada Álgebra temprana nos parece potente, pero requiere mayor investigación. Consideramos que esta propuesta curricular, si bien no desestima el estudio de las dificultades que los alumnos *encuentran* en su aprendizaje del álgebra, pone a la base de su reflexión la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, a edades tempranas, fomentando las conexiones entre la aritmética y el álgebra a través de actividades aritméticas que incluyan ideas como la generalización, la representación y la variación, y, fundamentalmente, ver el álgebra en la aritmética.

Aceptamos que los alumnos son capaces de entender y asimilar estos conceptos mucho antes de la edad en la que, generalmente, se incorporan a los currículos escolares. Como bien lo muestra Esquinas (2009), niños de 7 años pueden entender la lógica básica que subyace a las ecuaciones y en 3º grado —8-9 años— pueden desarrollar representaciones de problemas algebraicos, además de resolverlos por ecuaciones lineales movilizando diferentes métodos y estrategias.

Esquinas también informa que niños de 4º grado —9-10 años—, a quienes se les ha instruido en técnicas algebraicas desde 1º grado —6-7 años—, logran resolver mejor los problemas y ecuaciones que niños de 6º y 7º grado —11-13 años— que sólo han recibido esta instrucción durante uno o dos años. Estos hallazgos demuestran, una vez más, que no sólo se trata del grado de dificultad de los conceptos algebraicos sino también de las prácticas de enseñanza que los alumnos reciben en el momento de iniciación en el aprendizaje del álgebra. El ejercicio profesional asociado con estas prácticas de enseñanza debe comprometer, creemos, el desarrollo de habilidades para identificar y adaptar tareas significativas para los estudiantes que los involucre en actividades ricas en términos de desarrollar su pensamiento matemático.

Consideramos importante estar muy sensibles a la actividad matemática de nuestros estudiantes y, en particular, al trabajo de expresar algebraicamente las generalizaciones. Reconocemos en ese tipo de actividad producciones de los alumnos que no contienen necesariamente signos alfanuméricos del álgebra. No podríamos, por ello, afirmar categóricamente que no hay características asociadas al pensamiento algebraico y a su desarrollo. Los tres componentes analíticos del pensamiento algebraico que hemos señalado en el Capítulo 3 —sentido de la indeterminancia, analiticidad y expresión semiótica— de hecho podrían estar presentes a través de una actividad multimodal, en la cual intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural (Radford, 2013b; Vergel, 2015a, 2015b, 2016a, 2016b).

Los medios utilizados en la actividad matemática para lograr comunicar son modelos externos, por ejemplo, signos aritméticos y algebraicos, gráficos, figuras geométricas, etc. Estos medios son denominados por Radford (2003) medios semióticos de objetivación —*semiotic means of objectification*—. De esta forma la generalización, tal como hemos mostrado en las producciones matemáticas de algunos estudiantes, toma la forma de un proceso semiótico basado en la percepción que los alumnos tienen de los objetos matemáticos concretos.

Nos parece importante insistir en la idea de semiótica como teoría que centra su atención en cómo los signos significan, es decir, una teoría de la significación (Eco, 1978, 1988), pues aceptar esta premisa nos brinda posibilidades didácticas y prácticas para reconocer, en las producciones matemáticas de los estudiantes, respuestas legítimamente correctas desde el punto de vista matemático. La premisa aludida coincide, a nuestro juicio, con una premisa epistemológica dialéctico materialista acerca de la cognición y los signos, según la cual «La manera, profundidad e intensidad en que un objeto aparece como objeto de conciencia son consustanciales con el material —contenido— semiótico que hace posible que tal objeto se convierta en un objeto de conciencia y pensamiento» (Radford, 2018, p. 22) (traducción propia).

Estamos de acuerdo con Radford *et al.* (2005) quienes señalan que el estudio de estos medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes para lograr la generalización puede ayudarnos a los maestros a entender la manera como los alumnos dotan de sentido los símbolos algebraicos. Estos autores llaman la atención en términos didácticos, pero también a nivel de la investigación, por cuanto nuestra comprensión del significado con el que los estudiantes dotan a sus expresiones algebraicas, desde nuestro punto de vista, puede ser analizada en profundidad por la investigación de la naturaleza de los medios semióticos de objetivación a los que recurren en su intento de generalizar.

Varios estudios realizados en Colombia que hemos reportado en este trabajo (Villanueva, 2012; Gómez, 2013; Lasprilla, 2014; Mojica, 2014; Pantano, 2014; González, 2015; Moreno, 2015; Bautista y Cardozo, 2016) ponen en evidencia este fenómeno. A partir de estas investigaciones hemos llamado la atención no sólo sobre la necesidad de sensibilizar a los docentes frente al diseño de tareas y a la identificación, en la actividad matemática, de los recursos semióticos a los cuales acuden los estudiantes cuando abordan ideas matemáticas, también hemos destacado que los procesos de objetivación —de aspectos aditivos, multiplicativos, algebraicos, variacionales y probabilísticos— no son procesos súbitos ni homogéneos, tampoco lineales. De hecho, la idea de aprendizaje en el marco de la Teoría de la objetivación se teoriza como procesos de objetivación (Radford, 2017b).

La categoría objetivación es central en la teoría que lleva su nombre, por cuanto reconocemos que justamente «las formas de acción y reflexión codificadas culturalmente no son invocadas naturalmente por los estudiantes» (Radford, 2017b, p. 118), por cuanto «estas formas existen potencialmente, pero para los estudiantes estas permanecen irreconocibles y no identificadas. Son posibilidad sin actualización» (Radford, 2017b, p. 118).

Pero esta *actualización* necesariamente tiene que darse en la actividad, la cual invoca la idea de alteridad. No puede existir actividad sin alteridad. Es en la actividad en donde aparece el conocimiento. Pero este conocimiento no es construido subjetivamente ni es algo que se transmite. Las formas algebraicas de concebir la generalización de patrones son distintas a las materializaciones de esas mismas formas algebraicas. Esto nos conduce a la diferenciación entre saber y conocimiento. Radford (2017a), desde la perspectiva de la teoría de la objetivación, precisa muy bien esta diferenciación. Según este autor:

> (…) si el conocimiento no es algo que uno construye subjetivamente ni algo que se transmite, ¿qué es? ¿Cuál es su diferencia con el saber? Me gustaría desarrollar aquí una concepción histórico-cultural del saber y del conocimiento. En una sola frase, la idea es considerar el saber no como objeto que se construye o se transmite, sino como posibilidad, es decir, algo potencial que emerge de la actividad humana y que se imbrica en un proceso de movimiento —de devenir, para ser más precisos— para materializarse o expresarse en conocimiento (Radford, 2017a, p. 98).

Las conceptualizaciones de saber y conocimiento están revestidas de concepciones dialéctico-materialistas y, a la vez, íntimamente ligadas a la idea de actividad como lo hemos sugerido a lo largo de esta producción. El concepto de actividad es central en la teoría de la objetivación. Si la categoría de actividad se elimina, la teoría de la objetivación desaparece. Es necesario precisar aquí el concepto de actividad. En el caso de la tarea sobre los números naturales consecutivos del Capítulo 4, habíamos señalado que dependiendo del grado de escolaridad en el que se aplique esta tarea se puede apreciar diversas formas de expresión o representación semiótica. Sugerimos que la actividad matemática de los estudiantes podría indicar la mirada acerca de la evolución de fórmulas corpóreas hacia formas más sofisticadas, así como dar pie a mirar detenidamente aspectos del desarrollo del sentido de la indeterminancia y su carácter operatorio.

Pero esta labor se hace con otros —estudiantes y profesor—, así como también la actividad derivada de la tarea sobre secuencia figural apoyada por representación tabular —tarea 4.5—, la cual pretende no sólo familiarizar a los estudiantes con este tipo de secuencias, sino también, tal y como lo planteamos, instaurar una forma de trabajo en pequeños grupos para que interactúen y comuniquen sus propuestas de solución. Este tipo de actividad también pretende promover formas de reflexión y de posicionamiento crítico en el aula a través de debates y discusiones que posibiliten valorizar la contribución de los estudiantes a la vez que se comparten y discuten los límites y posibilidades de las formas de pensar un problema y sus posibles soluciones. No resolver un problema o una tarea, o aproximar apenas una propuesta inicial de solución, no significa un fracaso educativo. Nos parece, más bien, un reconocimiento de lo que el estudiante puede hacer con lo que sabe y un punto de partida para potenciar su pensamiento matemático.

La labor entre estudiantes y profesor, sugerimos, se mueve tanto sobre el plano conceptual como sobre el plano ético, a través de la promoción de formas de conducta responsable y solidaria (Radford, 2013c). La idea conceptual de tarea propuesta en el capítulo anterior debería promover entre estudiantes, y entre estudiantes y el profesor, espacios de discusión sobre el significado del trabajo en grupo y de lo que representa en términos de acción hacia otros.

En este sentido, el concepto de actividad es sumamente importante y «abarca mucho más que personas interactuando entre ellas» (Radford, 2017b, p. 123). Como bien lo señala este autor, la actividad es más que un *milieu* de interacción con personas y artefactos. Queremos destacar que la actividad es una *labor conjunta,* en la que las personas trabajan, sienten y reflexionan juntas. En palabras de este autor, la actividad, en relación con el saber algebraico, en tanto proceso situado en el espacio y el tiempo:

> (…) Es una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una búsqueda común —es decir una búsqueda con otros— de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética. Para que ocurra aprendizaje, el ámbito de lo posible o potencial tiene que aparecer en una manifestación concreta en la conciencia de los estudiantes. Esto requiere una actividad específica que hace que ese saber algebraico aparezca en el mundo concreto, para que el saber quede dotado de un contenido conceptual particular. (…) Se trata de una actividad que requiere que el profesor y los estudiantes se impliquen en algún tipo de reflexión y acción que presente el contenido conceptual algebraico que se busca, de manera que la potencialidad se materialice de manera conceptualmente fuerte. Para investigar la objetivación, debemos pues investigar la actividad en la que ésta se encuentra subsumida (Radford, 2017b, p. 123).

Insistimos en la actividad como una forma de alteridad, en la cual se producen no solamente saberes, sino también subjetividades. La subjetividad es justamente «la actualización o *materialización siempre en curso del ser*» (Radford, 2017c, p. 141).[17] Por eso, como lo propone este autor, el ser, como el saber, es potencialidad.

> El nombre de ese proceso a través del cual el ser produce subjetividades es la actividad humana. Es, en efecto, a través de la actividad humana que nos ponemos en devenir y nos convertimos en individuos inacabados, en flujo constante, y que nos producimos a nosotros mismos con, y a través, de otros, dentro de las posibilidades y límites que ofrece la cultura (Radford, 2017c. p. 141).

Consideramos importante reconocer que la subjetividad nace de la comunicación. Como lo sugiere Garaudy (1970, p. 100), «desde un principio yo me aprehendo como individuo sobre un fondo de comunidad. En ningún momento mi proyecto es un proyecto individual. De lo contrario, yo estaría encerrado en el solipsismo». Y más adelante señala que «desde la primera reflexión, desde el primer proyecto, yo estoy habitado, pues, por toda la humanidad pasada y actual» (Garaudy, 1970, p. 100).

En este horizonte pensamos que el trabajo colectivo en la sala de clase que hemos promovido durante el desarrollo de este texto, en el que aprendemos a hacer cosas juntos y a pensar juntos, debilita el solipsismo y, en tal sentido, implica entender al otro como alguien que es reconocido y acogi-

17 Cursivas en el original.

do en la singularidad de su existencia (Ortega, 2006). De hecho, siempre necesitamos, como plantea Lévinas (2002), dedicarnos *responsablemente*, es decir, éticamente, al otro, pues la educación es un encuentro entre personas, quien(es) busca(n) y quien(es) responde(n) y ofrece(n), desde su propia experiencia, modelos éticos de conducta y no sólo la oferta de aprendizajes cognitivos (Bárcena y Mèlich, 2000).

Estos planteamientos están íntimamente relacionados con la idea de objetivación de Radford, para quien este concepto refiere «el proceso de reconocimiento de lo que nos objeta —sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etc.—» (Radford, 2017b, p. 116). Es necesario reconocer que eso que nos objeta existe sin mí, son potencialidades culturales, pero no son cosas-en-sí-mismas en el sentido planteado por Kant, esto es, cosas que existen en algún lugar independientes de la actividad humana.

La idea de saber como potencial cultural queremos precisarla aún más. Lo que pretendemos expresar es que, por ejemplo, en términos filogenéticos —es decir, históricamente— el saber fue producido por alguien y, en tal sentido, tiene una historia. El saber es una cristalización de labores humanas, es una codificación. En términos ontogenéticos, para el alumno, fenomenológicamente, al principio, el saber aparece como pura posibilidad, como potencialidad, solamente. La actividad enseñanza-aprendizaje lo percibe filogenéticamente y lo posiciona como objeto de la actividad. En estas condiciones, el saber «se revela» al estudiante a través de la actividad de objetivación.

Compartimos con Radford que la objetivación, en tanto proceso no simple ni homogéneo, además de considerar la idea de alteridad como componente obligado, refiere también a procesos no solamente cognitivos.

> La objetivación, como podemos ver, enfatiza la idea de alteridad —la cualidad de no ser nosotros. En oposición a la definición estándar de ideas, según la cual estas nacen en nosotros y son parte de nuestra vida mental, para la teoría de la objetivación las ideas y formas de pensamiento existen independientemente de cada uno de nosotros. Desde un punto de vista filogenético, «El conocimiento, las destrezas y habilidades», dice Mikhailov, «existen sin mi» (1980, p. 200). Los encontramos en el curso de nuestra vida como objetos externos (Radford, 2017, p. 116).

En el caso específico de la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar, los procesos de objetivación pasan necesariamente por *reconocer* —en el sentido heideggeriano— un saber algebraico, entendido este como labor codificada o síntesis evolutiva de hacer y reflexionar en términos analíticos sobre números indeterminados y conocidos. Dentro de este proceso no es menor la dificultad que encuentran los estudiantes en el trabajo con las formalizaciones algebraicas.

Hemos insistido, varias veces a lo largo de esta obra, en que la formalización algebraica es un gran escollo en el aprendizaje de las matemáticas. Para que esta formalización sea significativa es necesario que los alumnos comprendan el sentido de los símbolos algebraicos. Estos símbolos, una vez descontextualizados de sus orígenes cualitativos, constituyen una notación potente y eficaz (Rogers, 2001) para el desarrollo ulterior del conocimiento matemático.

Este proceso de descontextualización y dotación de sentido de los signos —para hacerlos símbolos— debe ser estudiado para procurar una mejora significativa en la didáctica del álgebra, pero sin desconocer que no son los signos en sí mismos lo que interesa, sino más bien el proceso de producción de significados, dependiendo del contexto cultural. Insistimos en que debemos, como maestros e investigadores, estar sensibles al reconocimiento de que la actividad matemática está anclada en los complejos simbólicos de la cultura en que se lleva a cabo.

Queremos llamar la atención en que la producción simbólica por parte de los estudiantes es un proceso complejo en términos no sólo de los desarrollos cognitivos de los mismos alumnos, sino también del lado de la sensibilidad de los profesores para identificar y potenciar estos procesos de cognición que se materializan en gestos, producciones orales y escritas, actividad perceptual, etc.

Nuestra reflexión invita a pensar en un hecho ya discutido a lo largo de este trabajo: la necesidad de reconocer todas aquellas situaciones discursivas —orales y escritas—, gestuales y procedimentales que evidencien en los estudiantes intentos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar, así sus argumentaciones y explicaciones se apoyen en situaciones particulares, o en acciones concretas (Godino *et al.*, 2012). Es más, desde una perspectiva vygotskyana, el pensamiento y el lenguaje son dos aspectos interdependientes de un mismo proceso, lo cual nos hace reflexionar en términos epistemológicos sobre la unidad pensamiento-lenguaje en términos monistas y no dualistas.

También queremos señalar, en términos epistemológicos, que los modos de conceptualizar, conocer y pensar no pueden ser analíticamente descritos solamente en términos de prácticas discursivas. Es necesario atender los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que los sujetos activan cuando abordan ideas matemáticas.

En razón de lo anterior, sugerimos ampliar la perspectiva sobre la naturaleza del álgebra escolar. Esta perspectiva debería considerar, entre otras cuestiones, una dialéctica entre formas de pensamiento algebraico y procesos de generalización —por ejemplo, desde la actividad con patrones—, tal y como lo hemos discutido en este trabajo.

En términos de Rojas *et al.* (1999) la idea de «lenguajes intermedios» se asocia con la necesidad, percibida en los estudiantes, de acudir a formas de representación semiótica que posiblemente no corresponden a las representaciones en el sistema semiótico del álgebra. Sin embargo, esto no descalifica las producciones matemáticas de los estudiantes en tanto que es necesario reconocer que el uso de este tipo de lenguajes —o representaciones semióticas— es un proceso necesario, que suele ser lento y que si bien muchos niños y jóvenes logran reconocer una generalidad, no siempre pueden expresarla algebraicamente, es decir, a través de signos alfanuméricos.

Nuestra argumentación, a lo largo de esta obra, sugiere que el aprendizaje del álgebra debe estar vinculado con el desarrollo del pensamiento aritmético. La idea de *pensamiento relacional* que hemos expuesto en este libro como aquel tipo de pensamiento que implica considerar las expresiones aritméticas y ecuaciones en su totalidad, y utilizar las propiedades fundamentales de las operaciones aritméticas para relacionar o transformar las expresiones aritméticas, nos parece que puede constituir un eslabón entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico. Sin embargo, esto merece mayor investigación empírica.

Las experiencias teóricas y prácticas que hemos expuesto en esta producción, esperamos, puedan ayudar a que los estudiantes-profesores en formación y en ejercicio, interesados en los aspectos de la didáctica del álgebra, avancen en la identificación y análisis de las estrategias utilizadas por los alumnos tanto de educación primaria como secundaria cuando abordan situaciones o tareas relacionadas con secuencias de patrones y procesos de generalización y simbolización. En particular, esperamos que estos profesores asuman actitudes de apertura intelectual que les permita, en su trabajo de aula, lograr una sensibilidad didáctica para identificar elementos matemáticos significativos para el desarrollo del pensamiento algebraico al interpretar las producciones de sus estudiantes.

Pero también pensamos que este tipo de experiencias pueden ser objeto de trabajo y reflexión en los programas de formación inicial de maestros, en tanto que aportan evidencias de que el pensamiento algebraico se puede desarrollar, en la educación primaria, y que las producciones de los alumnos pueden servir para orientar el trabajo de aula y a la vez diseñar materiales educativos. En otras palabras, estamos diciendo que los profesores, en tanto profesionales de la educación, están llamados a desarrollar su competencia docente para mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Fernández y Llinares, 2012).

La «mirada» a la que estamos aludiendo implica, por ejemplo, reconocer que las mismas acciones mediatizan la actividad matemática de los estudiantes en el plano material, esto es, los estudiantes utilizan diversos modos para acceder a las situaciones o tareas matemáticas planteadas y así concretar su pensamiento a través de los recursos movilizados, convirtiéndose en hechos visibles, corporeizados.

Es claro, entonces, que la idea de mediación semiótica no la estamos aceptando como punto intermedio entre un *input* y un *output*, tal y como aparecen en los primeros trabajos vygotskyanos. La idea de mediación es más bien aquello que «hace parte de», es decir, es parte constitutiva de las formas de pensar y de la actividad matemática. En otras palabras, «los instrumentos o recursos con los cuales se realiza la actividad matemática condicionan las formas como los estudiantes se apropian, construyen o resignifican dicha actividad y desde luego las maneras de pensar» (Vergel, 2014, p. 74).

En este contexto, los docentes están llamados a jugar un papel preponderante en el trabajo de aula. Por ejemplo, en términos del desarrollo del pensamiento relacional, Fernández e Ivars (2016) proponen favorecer este tipo de pensamiento, centrando las discusiones sobre: (i) la comprensión de la conducta de las operaciones, (ii) la generalización y la justificación de las relaciones estructurales identificadas y (iii) el uso de la notación con sentido. Por eso, según estos autores, «es necesario que [los profesores] cuestionen a los estudiantes para que establezcan la conexión entre su respuesta, las expresiones que representan su pensamiento y las relaciones entre las operaciones aritméticas y sus propiedades» (Fernández e Ivars, 2016, p. 17).

Pensamos que es necesario e inminente cambiar de paradigma en lo tocante a las relaciones entre aritmética y álgebra, así como en relación con los momentos de trabajo en el aula en estos dos campos. Como bien lo señala Radford en la introducción del libro *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (Vergel, 2016b, p. 15):

> Una tradición curricular muy bien establecida nos ha llevado a pensar que la enseñanza del álgebra es un asunto de la escuela secundaria. La idea detrás de esta tradición es que, para entender álgebra, es necesario tener una base aritmética relativamente sólida. De hecho,

muchos, y entre ellos incluimos no solamente a matemáticos y educadores matemáticos, sino también a filósofos, científicos y sicólogos del desarrollo, como Kant, Newton y Vygotsky, respectivamente— han considerado el álgebra como una extensión o generalización de la aritmética. ¿Cómo, dentro de esta línea de pensamiento, podría pensarse en enseñar álgebra si el estudiante no ha desarrollado suficientemente su base aritmética?

Nos parece que el llamado a la reflexión que hace el profesor Luis Radford coincide con el planteamiento de Carraher y Schliemann (2007), quienes sugieren que el álgebra es inherente a la aritmética. El álgebra estaría ya allí, pero hay que aprender a verla.

Son todos estos elementos de reflexión planteados, creemos, que pueden orientar nuevas formas de concebir la actividad matemática y, desde luego, su análisis didáctico como también las prácticas de evaluación. Estos elementos también sugieren una ruptura con las maneras tradicionales de trabajo en las aulas de matemáticas y un cambio sustancial en el diseño y desarrollo curricular de las matemáticas escolares.

La reflexión también se dirige a tomar conciencia de la importancia de constituir el aula de clase como un espacio de interacción en el que la discusión con los otros estudiantes y con el profesor, el uso de signos y artefactos, entre otros, pueden dar cuenta de procesos que evidencian algún grado de comprensión del objeto matemático puesto en juego.

También queda abierta la discusión con respecto a las precisiones acerca de la manera en que pueden ser evaluados dichos procesos en un ambiente como el que sugiere la teoría de la objetivación de Radford. Para ser más sugerentes, invitamos a auscultar si bajo las condiciones de trabajo en el aula y desde la orientación de una perspectiva como la teoría de la objetivación, es válido hablar de evaluación (Radford, 2013c; Bautista y Cardozo, 2016).

Si aceptamos la idea de evaluación, no podríamos asumirla en el sentido positivista, como una «medida de». Más bien tendríamos que posicionarla, desde los planteamientos de Radford (2013c) y desde los hallazgos de Bautista y Cardozo (2016), como *una reflexión crítica y retrospectiva de la labor conjunta*, lo cual implica tomar conciencia sobre varios hechos, por ejemplo, qué tan solidarios somos todos, profesor y estudiantes, en la labor, qué realmente aportan las tareas diseñadas, qué tan responsables somos unos con otros, qué tan profunda es la comprensión matemática de los estudiantes y qué responsabilidad tiene el profesor en posibilitar dicha comprensión.

De acuerdo con Radford (2013c), en el contexto de una evaluación, tendríamos que pronunciarnos en relación con ciertas expectativas que se pueden formular en términos de una *ética comunitaria* en la que los miembros del aula —estudiantes y profesor—: «participan activamente en el espacio público, muestran apertura de espíritu en las discusiones y debates, se muestran solidarios con los otros alumnos y laboran hacia la constitución de una conciencia crítica» (p. 8). Justamente aparece aquí la idea de subjetivación (Radford, 2014), en tanto que en términos educativos es deseable desarrollar sujetos críticos que puedan participar en espacios de discusión acerca de ideas matemáticas, espacios en los cuales encuentran otras voces y perspectivas y logran constituirse en sujetos culturales históricos únicos. Por ello, los procesos de subjetivación son procesos de alteridad, a través de los cuales los estudiantes *se encuentran* con formas culturales de ser.

Es posible, entonces, afirmar que los procesos de objetivación y subjetivación no se desarrollan separadamente. En tal sentido, una misma actividad puede contener procesos de objetivación y subjetivación. Estos procesos están entrelazados y uno no puede darse independiente del otro. En esta dirección Radford (2017c, p. 147) sostiene que «a una actividad de aula sentada en una ética diferente de colaboración humana y en formas diferentes de producción de saberes corresponderían maneras distintas de afirmarse y tipos diferentes de subjetividades». Desarrollarse como sujeto no es algo separado del proceso de conocer. He aquí nuevamente la visión ontológica monista entre saber y ser como una unidad, contraria a la idea dualista cartesiana.

El trabajo matemático desarrollado por los estudiantes a través de las tareas propuestas no predica solamente sobre el saber matemático que puede estar *apareciendo* en la sala de clase —en tanto encuentro con formas de acción y reflexión culturales históricamente constituidas, tal y como se propone en la Teoría de la objetivación—. Habla también del sujeto que piensa, siente y actúa en el marco de su cultura. Por eso, la educación matemática como asunto de actividad (Radford, 2016) implica entender que las matemáticas son una actividad que consideran una doble dimensión, *objetiva* y *subjetiva* (Radford, 2013c).

Concebir las matemáticas como una *actividad objetiva* implica reconocer que «hay una normatividad histórico-cultural que guía las formas de acción y reflexión matemáticas que trasciende al sujeto que practica y aprende las matemáticas» (Radford, 2013c, p. 8). Las formas de demostrar en matemáticas, por ejemplo, siguen unas reglas, unas maneras de proceder, así como la manera de resolver cierta clase de problemas aditivos, multiplicativos o algebraicos obedece a ciertas normas históricamente constituidas. Por ello decimos, una vez más, que el saber algebraico es una síntesis histórica y culturalmente codificada de hacer y de reflexionar en términos analíticos sobre números indeterminados y conocidos.

De otro lado, entender las matemáticas como una *actividad subjetiva* significa que «las matemáticas incluyen al sujeto que las practica» (Radford, 2013c, p. 8), es decir, las formas de pensar matemáticamente hablan, *dicen* del sujeto que practica las matemáticas.

Esta idea de actividad, por supuesto, sería muy diferente a la actividad de aula tradicional, en la cual el profesor «transmite» un saber a un grupo de estudiantes quienes asumen un rol pasivo frente a la «enseñanza» y su actitud es acrítica frente al saber. Sería una actividad en la que estudiantes y profesor no laboran juntos y en la que los estudiantes no asumen la responsabilidad y el cuidado del otro. Es una actividad en la cual la idea de alteridad es débil por cuanto no hay un reconocimiento de la existencia del otro y de sus perspectivas. Los estudiantes viven en un solipsismo. Al respecto, Radford (2017c) plantea que:

> Muy distinta es, por ejemplo, la actividad de aula de la enseñanza tradicional, en la cual el producto de la actividad aparece a los estudiantes como algo extraño, como algo alejado de ellos. Los estudiantes no reconocen en el resultado de la actividad sus labores intelectuales y afectivas. Esto es lo que sucede también muy a menudo cuando la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se plantean como algo puramente técnico. Muchos estudiantes no se posicionan dentro de los discursos y prácticas de las matemáticas, y como resultado, terminan con sentimientos negativos respecto a las matemáticas. Actividades alienantes producen sujetos alienados (p. 147).

Desde luego el problema de la alienación está presente, por cuanto el sujeto —estudiante— no logra reconocerse en el producto de su trabajo. Schmitt (2004, p. 51), sobre la base de las ideas de Kierkegaard, Marx y Nietzsche, sugiere que «en el centro de la alienación está la habilidad reducida de vivir la vida propia». En consecuencia, «la alienación nos distancia de vidas que son propias, transformándonos en cuasi espectadores de nuestras propias experiencias y acciones» (Schmitt, 2004, p. 51). Aun cuando este es un problema que es necesario seguir explorando, consideramos que la idea de tarea que hemos propuesto en el capítulo anterior, como situación enmarcada en un contexto —intramatemático o extramatemático— que, a partir de su abordaje por parte de un sujeto, pretende desarrollar en él pensamiento matemático, y que se encuentra revestida de una densidad epistemológica, puede aportar elementos que favorecen la interacción social y, por tanto, debilitar el fenómeno de «ser cuasi espectadores de nuestras propias experiencia y acciones».

Reconocemos que la educación no trata solamente de la producción de saberes. La educación también debe atender a la dimensión del ser. En otras palabras, y desde un punto de vista ontológico, ser y saber son dos procesos constitutivos entrelazados y en relación dialéctica. Y no puede ser de otra manera. Si un sujeto aprende y sigue siendo el mismo, simplemente no ha aprendido nada. Esto tiene razón de ser si aceptamos, de acuerdo con Kelle y Kovalzon (1974, p. 301), que «el individuo se hace personalidad en la medida en que domina las realizaciones de la cultura, en que se hace sujeto consciente de una actividad, responsable de sus actos, en la medida en que desarrolla su propia individualidad». En consecuencia, «la formación de la personalidad se produce en el proceso individual del hombre» (Kelle y Kovalzon, 1974, p. 301). Pero este desarrollo individual es un proceso de adquisición de la esencia genérica del hombre, esencia que tiene que ver con aquella idea brillante de hombre según Marx, para quien *el hombre es el conjunto de todas las relaciones sociales*[18] (Kelle y Kovalzon, 1974, p. 301). Los planteamientos filosóficos aludidos, sugerimos, posibilitan interpretar la actividad como una labor conjunta que pone en evidencia que el mundo no existe sin el otro y que los estudiantes pueden desarrollarse, encontrar formas culturales de ser y expresarse, a través de ella.

Cuando planteamos la máxima de Marx: «el hombre es el conjunto de todas sus relaciones sociales», concordante con la postura de Kelle y Kovalzon: «el individuo se hace personalidad en la medida en que domina las realizaciones de la cultura…», queremos reconocer que la actividad matemática de los sujetos, al abordar una tarea —como las planteadas en el Capítulo 4—, se nutre, adquiere vitalidad, a partir no sólo de las diversas producciones matemáticas, sino también de los diversos tipos de interacción social que se entretejen, formas de colaboración e interacción humanas que pretendemos favorecer en la sala de clase, en las cuales los estudiantes se sientan reconocidos por los otros y, en consecuencia, sientan que hacen parte de la actividad misma.

De hecho, estamos también reconociendo que *comunicar* es abrirse, pero esta abertura exige, educativamente hablando, *responsabilidad*, o, como lo sugiere Lévinas (2002), dedicarse al otro, hasta «ser-para-el-otro», lo cual objeta la dimensión solipsista del sujeto. Es este el sentido que sugerimos debe tener la educación y, especialmente, la educación matemática. En efecto, la educación es también respuesta ética a la demanda del otro.

18 Cursivas en el original.

Nuestro interés didáctico al plantear las tareas del Capítulo 4 reside en la idea de que los estudiantes logren posicionarse críticamente frente a ideas matemáticas, que puedan discutir y argumentar; en otras palabras, posibilitar un crecimiento subjetivo socialmente responsable a través de la generación de espacios de reflexión crítica.

Nos atrevemos a señalar, finalmente, que, por un lado, saber y ser están permeados por la cultura. Sin embargo, aún no es claro cómo podemos dar cuenta de la relación saber y cultura. Todavía queda mucho trabajo por hacer para poder explicar sus complejas relaciones. De otro lado, estamos de acuerdo con la perspectiva educativa de Radford para quien el proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debería ser un esfuerzo orientado tanto hacia la dimensión del *saber* como a la del *ser*, vinculados ontológicamente como una unidad, tal y como hemos intentado argumentar a lo largo de este escrito.

Agudelo, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: UPTC.

Agudelo, C. y Vergel, R. (2009). Proyecto PROMICE —*Promoción de un enfoque interdisciplinario y de resolución de problemas en el inicio del trabajo algebraico escolar: integrando contextos de ciencias y el uso de tecnología digital*. Informe final. Código 86 de 2007. Centro de documentación, IDEP, Bogotá.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking* (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267-299.

Bárcena, F. y Mèlich, J. C. (2000). *La educación como acontecimiento ético: natalidad, narración y hospitalidad*. Barcelona: Paidós.

Baquero, R. (2009). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Madrid: Aique.

Bautista, S. Y. y Cardozo, J. C. (2016). *Caracterización del concepto de evaluación, a la luz de la teoría cultural de la objetivación, a partir de una serie de tareas conjuntas relacionadas con la transformación del lenguaje natural al lenguaje algebraico: una experiencia con estudiantes de grado octavo*. Trabajo de grado (no publicado), Maestría en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perpectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Bucher, J. (1996). *La experiencia de la palabra en Heidegger.* Bogotá: Ariel.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization.* New York: Springer.

Callejo, M., García, A. y Fernández C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 10,* 5-25.

Cañadas, M. C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 7-13.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico*, (pp. 209-218). Granada. Comares.

Cárdenas, J. A. y Ardila, L. F. (2009). Lenguaje, dialogismo y educación. *Folios, 29*, 37-50.

Carraher, D. & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N. C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Carraher, D., Schliemann, A. & Brizuela, B. (2001). Can young students operate on unknowns? In M. v.d. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 130-140). The Netherlands: Utretch University.

D'Amore B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Relime, Número especial,* 177-196.

D'Amore, B., Fandiño, M. I. y Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. (M. Fandiño, Trad.). Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B. y Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD.

Davydov, V. (1981). *Tipos de generalización en la enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.

De Moura, M. O. y Moretti, V. (2014). Entrevista con Luis Radford sobre la teoría de la objetivación. Santillana. *Revista Ruta Maestra, 9*, 33-37.

Descartes, R. (1954). *The geometry*. New York: Dover [Original published 1637].

Eco, U. (1978). *Tratado de semiótica general*. México: Nueva Imagen.

Eco, U. (1988). *Signo*. Barcelona: Labor.

English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*, *91*(2), 66–171.

Esquinas, A. M. (2009). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico. Del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. Tesis doctoral (no publicada). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Fairclough, N. (1995). *Critical discourse analysis; the critical study of languages*. New York, USA: Longman.

Fernández, C. e Ivars, P. (2016). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. UNO *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 14-22.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la Educación Primaria y Secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 129-142.

Fuentes, I. (2016). Del lenguaje aritmético al lenguaje algebraico: errores y dificultades. UNO *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 38-44.

Garaudy, R. (1970). *Marxismo del siglo XX*. Barcelona: Fontanella.

Godino, D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Bolema, 26* (42B), 483-511.

Godino, J. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias 32*(1), 199-219.

Gómez, J. (2013). *La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo*. Trabajo de grado de Maestría en Docencia de la Matemática (no publicado). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

González, L. (2016). *Procesos de objetivación en el desarrollo del pensamiento probabilístico por parte de estudiantes de décimo grado*. Trabajo de grado de Maestría en Educación no publicado. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Grupo Mescud (2006). *Razonamiento multiplicativo: un camino posible*. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Halliday, M. A. K. (1982). *El lenguaje como semiótica social: La interpretación social del lenguaje y del significado*. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Harnecker, M. (1969). *Los conceptos elementales del materialismo histórico*. México: Siglo XXI.

Hegel, G. (1955). *Lecciones sobre la historia de la filosofía I*. México, D.F.: Fondo de Cultura Económica.

Hegel, G. (2004). *Enciclopedia de las ciencias filosóficas*. México. Porrúa. (Original publicado en 1817).

Kaput, J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kaput, J. & Blanton, M. (2001). Algebrafying the Elementary Mathematics Experience. Part I: Transforming Tasks Structures. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study, Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne: University of Melbourne.

Kelle, V. y Kovalzon, M. (1974). *Sociología marxista. Ensayo sobre la teoría marxista de la sociedad*. Buenos Aires: Cartago.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research agenda for mathematics education: *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp.33-56). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Lasprilla, A. (2014). *Generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de 9 y 10 años*. Trabajo de grado de Maestría en Educación (no publicado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Leontiev, A. (1969). *El hombre nuevo*. Barcelona: Martínez Roca, S.A.

Lévinas, E. (2002). *Totalidad e infinito. Ensayo sobre la exterioridad.* Salamanca: Ediciones Sígueme.

Luria, A.R. (1987). *Desarrollo histórico de los procesos cognitivos*. Madrid: Akal.

Marx, K. (1998). *The German ideology,* New York, NY: Prometheus Books.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (2014). *Rutas hacia el/Raíces del Álgebra.* 2ª Edición (C. Valderrama, Trad.). Ibagué: Universidad del Tolima (original publicado en 1985).

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) (1998). *Lineamientos Curriculares. Matemáticas*. Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: MEN.

Mojica, A. J. (2014). *Medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de sexto grado de educación básica cuando resuelven tareas de tipo multiplicativo*. Trabajo de grado de Maestría en Educación (no publicado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156.

Montagu, A. (Ed.). (1968). *Man's adaptive dimension*. New York, E.U: Oxford University Press.

Mora, L. y Romero, J. (2004). ¿Multiplicación y división «o» cambio de unidad? Rojas, P. (Comp.). *Memorias del Sexto Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 13-20. Bogotá: Asociación Colombiana de Matemática Educativa.

Moreno, J. (2015). *Proceso de objetivación de la derivada en estudiantes para profesor de matemáticas*. Trabajo de grado de Maestría en Educación (no publicado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ortega, P. (2006) Sentimientos y moral en Horkheimer, Adorno y Lévinas. *Revista Española de Pedagogía*, 235, 503-524.

Ortega y Gasset, J. (1984). *Historia como sistema y otros ensayos filosóficos*. Madrid: Sarpe.

Otte, M. (2003). ¿Does mathematics have objects? ¿In what sense? *Synthese, 134*(1-2), 181-216.

Pantano, O. (2014). *Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales*. Trabajo de grado (no publicado), Maestría en Docencia de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Relime 6*(1), 41-71.

Platón (1983). *Diálogos* (M. J. Ribas, Trad.). Madrid: Sarpe.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez and P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, pp. 205-235. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 26-33.

Radford, L. (2001). Factual, Contextual and Symbolic Generalizations in Algebra. In: *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Maria van den Hueuvel-Panhuizen (Ed.), Freudenthal Institute, Utrecht University, The Netherlands, Vol. 4, pp. 81-88.

Radford, L. (2002). Algebra as tekhne: artefacts, symbols and equations in the classroom. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(1), 31-56.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students´ Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Radford, L. (2005). ¿Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of objectification. In H. Chick & J. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 143-145). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 267-299.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: towards a cultural theory of learning. In: Radford L.; Schubring G. & Seeger F. (Eds.), *Semiotics in Mathematics Education*, pp. 215-234. Rotterdam: Sense Publishers.

Radford, L. (2009). «No! He starts walking backwards!»: interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, DOI: 10.1007/s11858-009-0173-9.

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62.

Radford, L. (2010c). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics*, *30*(2), 2-7.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*, pp. 303-322. Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Radford, L. (2012). Early algebraic thinking: Epistemological, semiotic, and developmental issues. *ICME-12 Regular Lecture*. Seoul, South Korea.

Radford, L. (2013a). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7-44.

Radford, L. (2013b). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro*, pp. 3-12. Granada, España: Comares.

Radford, L. (2013c). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. In A. Ramírez y Y. Morales (Eds). *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, p. XX. Santo Domingo, República Dominicana: Plenary Lecture.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 132-150.

Radford, L. (2015a). Introduction: The phenomenological, epistemological, and semiotic components of generalization. *PNA, 9*(3), 129-141.

Radford, L. (2015b). Rhythm as an Integral Part of Mathematical Thinking. In M. Bockarova, M. Danesi, D. Martinovic & R. Núñez (Eds.), *Mind in Mathematics: Essays on Mathematical Cognition and Mathematical Method*, pp. 68-85. Munchen, Germany: LINCOM GmbH.

Radford, L. (2016). Mathematics Education as a Matter of Labor. In M.A. Peters (ed.). *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory*. Section: Mathematics education philosophy and theory. P. Valero and G. Knijnik, Editors. Singapore: Springer.

Radford, L. (2017a). Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2017b). Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2017c). Ser, Subjetividad y Alienación. En B. D'Amore y L. Radford (Eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Editorial UD.

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12- year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice*. New York: Springer.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2006). Perceptual semiosis and the microgenesis of algebraic generalizations. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME, pp. 684-695), 17-21 February 2005, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Radford, L., Demers, S., Guzmán, J. & Cerulli, M. (2003). Calculators, Graphs and the Production of Meaning, In N. Pateman, B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 55-62. University of Hawaii.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91 – 95.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam & R. A. Hattrup (Eds), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, pp. 373-429. Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Rideout, B. (2008). *Pappus reborn. Pappus of Alexandria and the changing face of analysis and synthesis in late antiquity*. Master of Arts in History and Philosophy of Science (Thesis). University of Canterbury.

Rivera, F. D. & Becker, J. S. (2011). Formation of pattern generalization involving linear figural patterns among middle school students: Results of a three-year study. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives,* pp. 323-366. Berlín: Springer-Verlag.

Rogers, L. (2001). From icons to symbols: reflections on the historical development of the languaje of algebra. *Proceedings of the Second Conference of European Society for Research in Mathematics Educacional.* In Mariánské Lázne, Czech Republic.

Rojas, P. (2015). Objetos matemáticos, representaciones semióticas y sentidos. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 151-165. DOI: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1479

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J. Castillo, E. y Mora, L. Grupo Pretexto (1999). *La transición aritmética-álgebra*. Bogotá: Universidad Distrital–Gaia.

Rojas, P., Romero, J., Mora, L., Bonilla, M., Rodríguez, J. y Castillo, E. (2011). *La multiplicación como cambio de unidad: Estrategias para promover su aprendizaje*. Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista Científica*, *Edición especial*, 760-766.

Rosental, M. M. y Straks, G. M. (1960). *Categorías del Materialismo Dialéctico*. México, D. F.: Grijalbo.

Roth, W. M., & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Rotterdam: Sense Publishers.

Schmitt, R. (2004). *Alienación y libertad.* Quito: Ediciones ABYA-YALA.

Serfati, M. (1999). La dialectique de l'indéterminé, de viète à frege et russell. In M. Serfati (Ed.), *La recherche de la vérité,* pp. 145- 174. Paris: ACL–Les éditions du kangourou.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números*, *77*, 5-34.

Solar, H. (2016). Orientaciones para el desarrollo de patrones. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 45-51.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2011). The Arithmetic-Algebra Connection: A Historical-Pedagogical Perspective. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives,* pp. 87-107. Berlín: Springer-Verlag.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. A. Coxford. (Ed.). *The ideas of algebra, K-12,* pp. 8-19. Reston (Virginia): National Council of Teachers of Mathematics.

Valsiner, J. (2009). Cultural Psychology Today: Innovations and Oversights. *Culture & Psychology, 15*(1), 5–39. DOI: https://doi.org/10.1177/1354067X08101427

Veresov, N. (2010). Introducing cultural historical theory: main concepts and principles of genetic research methodology. *Cultural-Historical Psychology, 4*, 83-90. Retrieved from http://psyjournals.ru/files/32913/kip_2010_4_Veresov.pdf

Vergel, R. (2010). La perspectiva de cambio curricular Early-Algebra como posibilidad para desarrollar el pensamiento algebraico en escolares de Educación Primaria: Una mirada al proceso matemático de generalización. *Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Bogotá: Asocolme. Recuperado de: http://funes.uniandes.edu.co/1163/1/69_La_Perspectiva_de_Cambio_Curricular_Early-Algebra_Asocolme2010.pdf.

Vergel, R. (2013). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). En: Gallego P. (Ed.) (2013). *Revista Científica*, *Edición especial,* 234-240.

Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios, 39*(1), 65-76.

Vergel, R. (2015a). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9*(3), 193-215.

Vergel, R. (2015b). ¿Cómo emerge el pensamiento algebraico? El caso del pensamiento algebraico factual. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *68*, 9-17.

Vergel, R. (2016a). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 23-31.

Vergel, R. (2016b). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria: aspectos a considerar.* Bogotá: Editorial UD.

Vergel, R. (2016c). Algunas notas acerca del desarrollo del pensamiento algebraico temprano. In M. Iori (Ed.), *La Matematica e la sua Didattica/Mathematics and Mathematics Education. In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore,* pp. 509-512. Bologna: Pitagora Editrice.

Viète, F. (1983). *The analytic art*. New York: Dover [work published 1591].

Villanueva, J. (2012). *Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales*. Trabajo de grado (no publicado), Maestría en Docencia de la Matemática. Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.

Vygotsky, L. S. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, *36,* 415-434.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA, E.U.: Harvard University Press.

Vygotsky, L. S. (1979). Consciousness as a problem in the psychology of behavior. *Soviet Psychology*, *17*(4), 3-35.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and language* (edición revisada y editada nuevamente por A. Kozulin). Cambridge, Massachusetts: The MIT Press. (Obra original publicada póstumamente en ruso en 1934 y en inglés en 1962).

Vygotsky, L. (1995). Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores (L. Kuper, Trad.). En Vygotski, L. *Obras escogidas*, Tomo III. Madrid: Machado Libros (original publicado en 1931).

Vygotsky, L. S. (1997). *Collected works. Vol. 3. Problems of the theory and history of psychology*. New York: Plenum.

Vygotsky, L. S. (1999). *Collected works (vol. 6)*. R. W. Rieber (Ed.). New York: Plenum.

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). An agenda for research on the learning and teaching of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, pp. 220-237. Reston, VA: NCTM-LEA.

Warren, E. (2006). Teacher actions that assist young write students generalizations in words and in symbols. In Novotná, J.; Moraová, H.; Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*, 377-384.

Wartofsky, M. (1979). *Models, representation and the scientific understanding*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.

You, H. (1994). Defining rhythm: aspects of an anthropology of rhythm. *Culture, Medicine and Psychiatry, 18*, 361-384.

Zapatera, A. (2016). Cómo desarrollar el pensamiento algebraico. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 32-37.

El libro que tienen entre sus manos es muy interesante y está escrito por autores de reconocida solvencia, a los cuales conozco por mi relación con las personas interesadas en la mejora de la Educación Matemática en Colombia… El libro "Álgebra escolar y pensamiento algebraico: Aportes para el trabajo en el aula" de Rodolfo Vergel y Pedro Javier Rojas presenta una contribución relevante para la educación matemática y en particular en el área de la enseñanza y aprendizaje del álgebra… En esta producción también se reflexiona, desde una perspectiva semiótica, sobre un problema en mi opinión relevante para la Educación Matemática y para el álgebra escolar, como es las dificultades que encuentran algunos estudiantes para articular los sentidos asignados a representaciones semióticas de un mismo objeto matemático, obtenidas mediante tratamiento…Se trata pues de un libro que puede ayudar a los profesores a ampliar su conocimiento de la didáctica del álgebra, permitiéndoles mejorar en el análisis de las estrategias utilizadas por los alumnos cuando resuelven tareas relacionadas con secuencias de patrones y procesos de generalización y simbolización; en particular, facilitando la identificación de elementos matemáticos significativos para el desarrollo del pensamiento algebraico al interpretar las producciones de sus estudiantes… La lectura de esta obra, además de ser de interés y utilidad para los profesores de matemáticas, puede ser útil a matemáticos, psicólogos y, más en general, a todas las personas interesadas en la educación matemática.

Vicenç Font

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ D.C.
BOGOTÁ MEJOR PARA TODOS
UD Editorial
UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS