Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación

Luis Radford

Introducción

La teoría de la objetivación (Radford, 2006a, 2014) se basa en la idea fundamental de que el aprendizaje es tanto *conocer* como *devenir*. En otras palabras, el aprendizaje no puede ser limitado al eje del *conocimiento* sino que debe abordar también el eje del *ser*: el eje de los sujetos. La teoría de la objetivación considera la meta de la educación matemática como un esfuerzo dinámico, político, social, histórico y cultural que busca la creación dialéctica de sujetos reflexivos y éticos que se posicionan críticamente en discursos y prácticas matemáticas que se constituyen histórica y culturalmente, discursos y prácticas que están en permanente evolución. Los fundamentos filosóficos de la teoría giran alrededor del trabajo del filósofo alemán Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1977, 2009) y su posterior desarrollo en los trabajos filosóficos de Karl Marx (1973, 1998) y la tradición dialéctica—Ilyenkov (1977), Mikhailov (1980), y Vygotsky (1987-1999), entre otros.

Este capítulo está dedicado a los conceptos de saber y conocimiento.[13] El capítulo prepara el terreno para abordar, en el próximo capítulo, el concepto de aprendizaje. Aunque una discusión sobre el saber y el conocimiento pudiera parecer esotérica y fútil, sostengo que si las teorías de educación matemática pretenden ofrecer explicaciones adecuadas del aprendizaje, tienen que aclarar primero lo que entienden por saber y conocimiento. En efecto, el aprendizaje es siempre relativo a algo (p.e. aprendizaje de la probabilidad, de las propiedades geométricas de las figuras, etc.). Como resultado, no podemos entender el aprendizaje si no logramos dar una explicación satisfactoria del *objeto* del aprendizaje y de la naturaleza de ese objeto. La siguiente sección comienza con una discusión sobre el saber, tal y como ha sido comprendida en general en la educación matemática recientemente,

13 El término 'conocimiento' no es el más afortunado. Conocimiento hace referencia, en efecto, a un resultado o efecto: el efecto de conocer. Quizás mejor sería un gerundio, para acentuar su calidad de proceso, guardando así su dimensión dinámica. No usaremos "conociendo", pues éste término lo reservamos para otra idea. Para no hacer violencia a la lengua de Miguel de Cervantes, de Pablo Neruda y de Miguel Angel Asturias, hemos decidido utilizar 'conocimiento', esperando que el lector tendrá siempre en mente que los conceptos claves discutidos en este capítulo y los siguientes tienen, como todos los conceptos de la teoría de la objetivación, un sentido dinámico: estos son procesos, no productos.

esto es, como *construcción,* seguida de una discusión sobre el saber como se entiende en la teoría de la objetivación.

Saber

Saber como construcción

Influída por la tradicón anglosajona, la educación matemática no hace prácticamente hoy en día distinción entre saber y conocimiento. Es, en este contexto, muy común hablar sobre el saber/conocimiento como algo que uno *hace* o que uno *construye*. Saber o conocer es construir.

La metáfora fundamental detrás de esta idea es que el saber/conocimiento es algo similar a los objetos concretos del mundo. Uno construye, ensambla el conocimiento, tal como construye o ensambla las partes de una silla. Esta idea de saber/conocimiento como construcción es relativamente reciente. Surgió paulatinamente durante los siglos XVI y XVII, cuando la fabricación y la producción comercial de objetos se convirtió en la principal forma de producción humana en Europa. Hanna Arendt resume esta concepción del saber/conocimiento de la siguiente manera: "conozco algo cuando comprendo cómo llegó a ser" (Arendt, 1958, p. 585). La visión general de los siglos XVI y XVII, de un mundo de manufacturas, es donde se concibió por primera vez el conocimiento también como una forma de manufactura. Una exposición clarísima de este punto de vista apareció a finales del siglo XVIII en la *Crítica de la Razón Pura* de Kant. En este libro monumental, cuya influencia no ha terminado de afectarnos, Kant presenta las matemáticas como la forma de conocimiento más evolucionada y nos dice que "Sólo las matemáticas […] derivan su conocimiento no de conceptos sino de la construcción de los mismos" (Kant, 2003, p. 590 [A 734/ B 762]).

Esta concepción de conocimiento como construcción (y sobre la cual regresaremos con más detenimiento en el capítulo 6) fue asumida por Piaget en su epistemología genética y fue adoptada ampliamente en educación matemática al hacer énfasis en la dimensión *personal* de la construcción del saber: usted y sólo usted construye su propio saber. Pero, en esta visión, el saber no es alguna cosa que alguien pueda construir y pasar a otro; lo que usted sabe es el resultado de su propia experiencia.

Como muchos académicos han señalado, este punto de vista del conocimiento es problemático por muchas razones. Por ejemplo, reduce la producción del conocimiento a la pura actividad subjetiva del individuo; deja poco

espacio para dar cuenta del rol importante de los otros y de la cultura en la manera como conocemos; conduce a una visión simplista de la cognición, la interacción, la intersubjetividad y la dimensión ética; elimina el rol crucial de las instituciones sociales y los valores y tensiones que estas transmiten. Y como si fuera poco, des-historiza el conocimiento (ver p.e. Campbell, 2002; Lerman, 1996; Otte, 1998; Roth, 2011; Valero, 2004; Zevenbergen, 1996).

Como veremos en la siguiente subsección, hay otras maneras de considerar el conocimiento y la relación de los estudiantes con él.

Enfoques socioculturales

¿Cómo conciben el conocimiento los enfoques socioculturales? Tenemos que tener en cuenta que, al igual que los enfoques constructivistas, los enfoques socioculturales se alejan de la transmisión de conocimiento como modelo de aprendizaje (los enfoques socioculturales y constructivistas divergen ampliamente pero con respecto a este punto convergen). En los enfoques socioculturales y constructivistas, concebir el aprendizaje como la transmisión y recepción de conocimiento es una clase de conductismo. Los perros aprenden a reaccionar con éxito a determinados estímulos; los ratones aprenden cómo salir de un laberinto por medio de *inputs* determinados. La mente humana, por el contrario, es mucho más compleja; el modelo conductista de estímulo-respuesta es definitivamente insuficiente. En una frase, ahora famosa, Vygotsky y Luria sostienen que la cultura material y espiritual median el comportamiento humano y sugieren remplazar el segmento estímulo respuesta (S-R) por un triángulo (Figura 8) que, a pesar de su aparente simplicidad, añade un nivel inimaginable de complejidad al estudio de la psique humana.

Los humanos realizan operaciones por medio de signos que alteran de manera fundamental la forma como pensamos y actuamos. Vygotsky y Luria dicen: "con la transición a operaciones con signos no sólo procedemos a procesos psicológicos de altísima complejidad, sino que dejamos el campo de la historia natural de la psique y entramos en el campo de la formación histórica del comportamiento" (Vygotsky y Luria, 1994, p. 144).

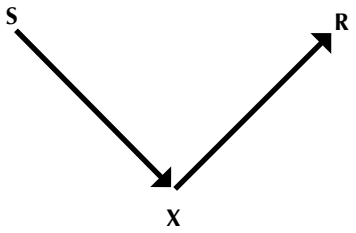


Figura 8. Famoso triángulo de Vygostki. Los signos externos y otros componentes de la cultura material y espiritual, X, alteran la historia natural de la mente humana. (Vygotsky y Luria, 1994, p. 144)

Ahora bien, si el conocimiento no es algo que uno construye subjetivamente ni algo que se transmite, ¿qué es? ¿Cuál es su diferencia con el saber? Me gustaría desarrollar aquí una concepción histórico-cultural del saber y del conocimiento. En una sola frase, la idea es considerar el saber no como objeto que se construye o se transmite, sino como *posibilidad*, es decir, algo potencial que emerge de la actividad humana y que se imbrica en un proceso de movimiento —de *devenir,* para ser más precisos— para *materializarse* o *expresarse* en conocimiento.

Saber como labor codificada

Quizás la mejor manera de abordar el problema del saber es regresar a Aristóteles y su distinción entre *potencialidad* y *actualidad*. Potencialidad (δύναμις*, dunamis*) para Aristóteles, designa la fuente del movimiento. Como su nombre lo sugiere, la potencialidad es un concepto dinámico. La potencialidad es una *capacidad* de poder hacer algo. Es sinónimo de poder o disposición. Los entes vivos y los artefactos poseen potencialidad. Un instrumento de música, por ejemplo, tiene la capacidad de producir sonidos. Un pez tiene la capacidad de moverse en el agua. La actualidad (ένέργεια, *energía*) es la ocurrencia o el despliegue concreto de eso que, hasta antes de ponerse en movimiento, hasta antes de actualizarse, no era sino simple potencialidad. Es por ello que Sachs (2015, p. 3) dice que la actualidad es el ser-en-presencia (*being-at-work*), algo que ocurre frente a nosotros, como el sonido concreto emitido por el instrumento de música o el trayecto específico seguido por el pez en el agua.

La potencialidad es, pues, pura posibilidad; algo indefinido, sin forma, como el sonido *antes de ser producido* o como la *disposición* del pez para

desplazarse en el agua: algo puramente potencial que, a través del movimiento, deviene materializado o actualizado como el sonido preciso emitido por el instrumento o la trayectoria precisa seguida por el pez.

Ahora bien, la potencialidad de la que gozan los seres vivos y artefactos puede ser natural o adquirida. El pez está biológicametne equipado para moverse en el agua. Otras potencialidades o disposiciones son, como indica Aristóteles (1998) en el Libro Theta 5 de la *Metafísica* (1048a), adquiridas (ver también Hegel, 2009). Ese es el caso del saber. El saber es eso: *potencialidad*. El saber algebraico, por ejemplo, es una potencialidad incrustada en la cultura: posibilidades que se ofrecen a los individuos para pensar, reflexionar, plantear y resolver problemas *de cierta manera*. Si hubiésemos nacido en la época de Diofanto, en la Alejandría de fines de la antigüedad, el saber algebraico se hubiese constituido en posibilidades de pensar en términos de aritmos y números naturales y en términos de soluciones de problemas diferentes a las que se presentaron a los escribas sumerianos o a las que se presentan a los estudiantes hoy en día.

No habría que pensar, sin embargo, que la idea que estamos esbozando del saber se coloca en una línea platonista. El hecho de que cuando cada uno de nosotros nació y se encontró frente a una serie de saberes científicos, éticos, estéticos, legales y otros ya constituídos histórica y culturalmente, no significa que esos saberes son formas plátonicas universales y atemporales independientes del trabajo humano. Al contrario, son los propios individuos los que constituyen el saber en potencialidad a través de su propia labor —a través de sus acciones, de sus reflexiones, sus sufrimientos y sus esperanzas.

Para precisar mejor estas ideas, definamos el saber como sigue. *El saber es un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión, constituidos histórica y culturalmente.*[14] En el caso de la aritmética estos procesos podrían ser de reflexión, de expresión, y de acción que emergieron en Mesopotamia de actividades humanas específicas, tales como contar ganado o granos, o medir los campos. En el caso de la música, el saber podía ser un proceso de expresión estética y sonora que emergió en las antiguas civilizaciones de actividades específicas, tales como las ceremonias matrimoniales, para transmitir significados e intenciones.

Los adjetivos *corpóreos, sensibles y materiales* mencionados en la definición anterior significan que los procesos de acción a los que hacemos referencia no son cogitaciones mentales ocurriendo dentro de la cabeza, sino acciones

14 Para caracterizar el saber, en trabajos anteriores he usado el término *conjunto*. Agradezco a Rodolfo Vergel la sugerencia de utilizar el término *sistema*, el cual enfatiza mejor la idea de movimiento.

de individuos concretos que actúan y viven en el mundo social y cultural. Dichas acciones se constituyen a través del cuerpo, de los sentidos humanos y del uso de objetos físicos y artefactos culturales.

Para desarrollar con algún detalle la idea del *saber como un sistema codificado de procesos corpóreos, sensibles y materiales de acción y de reflexión constituidos histórica y culturalmente*, me gustaría recurrir a un ejemplo simple: romper nueces en los chimpancés.

Romper nueces para un chimpancé no es un proceso obvio. Como señalan los primatólogos, romper nueces comprende las siguientes etapas:

(1) El chimpancé recoge una nuez,

(2) la pone en una superficie particular: un yunque de piedra,

(3) escoge y sostiene otra piedra (la piedra martillo),

(4) golpea la nuez en el yunque de piedra con el martillo de piedra, y

(5) se come el núcleo de la nuez partida (ver figura 9).

Figura 9. Yo rompe una nuez mientras dos jóvenes chimpancés siguen atentamente el proceso. (De Matsuzawa, Biro, Humle, Inoue-Nakamura, Tonooka, & Yamakoshi, 2001, p. 570).

Estudios realizados en la selva sugieren que son necesarios 3 a 7 años para que los jóvenes chimpancés aprendan el proceso de romper las nueces. Los

jóvenes no necesariamente comienzan a usar la piedra martillo y la piedra yunque. La atención adecuada a los objetos, su selección (tamaño, dureza, etc.), y luego la coordinación espacial y temporal de los tres objetos (nueces, yunque y martillo), es un proceso largo. A menudo los jóvenes chimpancés de medio año manipulan únicamente un objeto (una nuez o una piedra). Pueden coger una nuez y pararse sobre ella. A medida que crecen, pueden pasar a los tres objetos, pero no en la secuencia correcta, resultando en intentos fallidos. Un aspecto clave del proceso es la aparición de habilidades adecuadas, por ejemplo "aplicar suficiente presión a una nuez para romperla" (Hirata, Morimura, & Houki, 2009, p. 98).

Los chimpancés aprenden a romper nueces como un proceso social. Los jóvenes, que normalmente permanecen con su madre hasta la edad de 4 o 5 años, observan atentamente cómo su madre rompe nueces y luego tratan de hacerlo ellos mismos, aún sin que aparentemente hayan comprendido la meta de ese proceso.[15]

No todos los grupos de chimpancés rompen nueces, y entre los grupos que lo hacen, no todos rompen las mismas clases de nueces. Los primatólogos creen que la habilidad de romper nueces se desarrolló en alguna parte de Africa occidental y luego se transmitió socialmente de una generación a la siguiente. La práctica de romper nueces pudo difundirse dentro de grupos vecinos como resultado de las migraciones de chimpancés (Hirata et al., 2009, p. 88; Matsuzawa et al., 2001, pp. 569-70).

Propongo concebir el "saber"—en este caso saber cómo romper una nuez—, como un *sistema de acciones codificadas culturalmente.* Que el saber sea una codificación cultural de maneras de actuar y hacer significa que es algo *general*: no puede reducirse a esta o aquella secuencia particular de acciones coordinadas con *estas* o *aquellas* piedras. Otra manera de decir esto es que el saber es *labor cristalizada*.[16] Podemos pensar en el saber como una *forma ideal* de acciones, en oposición a las acciones mismas. El saber como labor cristalizada o forma ideal va más allá de cada una de sus instancias o realizaciones concretas. El romper nueces como forma ideal conlleva la generalidad de cada una de sus realizaciones específicas.

Como lo mencioné anteriormente, el saber (en este caso, *saber cómo romper nueces*) no tiene nada que ver con las formas platónicas. En lugar de considerar el romper nueces de la comunidad de chimpancés que vive en

15 Por ejemplo, juegan con las piedras; ver https://www.youtube.com/watch?v=5Cp7_In7f88

16 Decir que el saber es labor cristalizada no significa que no es suceptible de ser modificado. Al contrario, la cristalización siempre es relativa, siempre está abierta a transformaciones. Ya regresaremos sobre este punto más adelante.

las selvas montañosas del monte Nimba, en la República de Guinea, como formas platónicas o cosas-en-sí-mismas (*things-in-themselves*) kantianas, podemos considerarlo como proceso de reflexión y acción corporeal y material constituido cultural e históricamente. La "forma ideal" de romper nueces debe entenderse como una manera *prototípica general* de hacer las cosas. En lugar de estar ubicada en un reino de ideas eternas, esta forma ideal se codifica en la memoria cultural como un patrón o secuencia de acciones. Al contrario de las formas platónicas, que se supone existen independientemente de lo que las especies hacen en la tierra, el saber es una forma ideal que no puede existir si no se realiza en la práctica.

El ejemplo de saber que acabo de discutir tiene, me parece, una virtud pedagógica. Es un ejemplo simple, en cuanto que no hace intervenir el lenguaje u otros sistemas semióticos complejos, como es en general el caso de los saberes humanos. El saber romper nueces es, como los saberes de los chimpancés (por ejemplo, lavar papas con agua o sacar hormigas con ramas de arbustos), kinestésico. Valdría la pena detenernos ahora en un ejemplo de saber matemático y preparar así de mejor manera nuestra discusión sobre el conocimiento, tal y como es concebido en la teoría de la objetivación. Abordemos el caso de la generalización de secuencias (*pattern generalization* o generalización de patrones).

Como muchos de mis colegas, en mi investigación en el salón de clase he utilizado la generalización de patrones para introducir a los estudiantes al álgebra. La idea fundamental es presentar a los estudiantes secuencias geométricas o numéricas simples (normalmente secuencias aritméticas que pueden expresarse de forma lineal: y=ax+b). Le damos a los estudiantes unos cuantos términos (ver figura 10) y luego les pedimos que encuentren una o varias formas para calcular el número de objetos en términos "lejanos" (p.e., los términos 10, 25, 100).

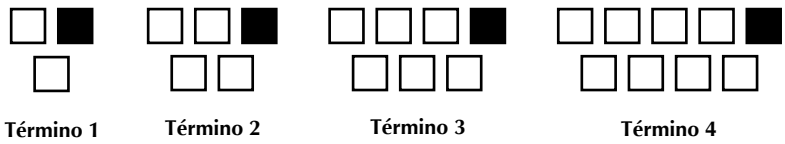


Figura 10. Los primeros términos de una secuencia que estudiantes de grado dos investigan en una lección de álgebra.

Cuando hacemos esto, esperamos que los estudiantes entren en relación con una forma de saber sobre secuencias aritméticas, históricamente constituido. Específicamente, esperamos que los estudiantes tomen conciencia

de una forma algebraica de percibir, reflexionar e investigar secuencias, que se remonta a tiempos antiguos. De hecho, la investigación de secuencias aritméticas apareció en las civilizaciones antiguas (por ejemplo Mesopotamia) y era un tema muy popular en la Antigüedad Tardía, en los círculos neo-pitagóricos (Lawlor & Lawlor, 1979; Nicomaco de Gerasa, 1938; Tarán, 1969). Los neo-pitagóricos se interesaban particularmente en los números poligonales —números representados con pequeñas piedras dispuestas con forma de polígono regular. Por ejemplo, los primeros números triangulares son 1, 3, 6, 10; los primeros números cuadrados son 1, 4, 9, 16; los primeros números pentagonales son 1, 5, 12, 22; (ver Figura 11).

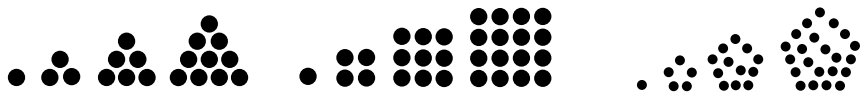


Figura 11. Los primeros números triangulares, cuadrados y pentagonales.

Hasta donde yo sé, la investigación de propiedades teóricas de secuencias aritméticas apareció primero en un texto de Hypsikles conocido como *Anaphorikos* (ver Radford, 2006b)[17]. La proposición 1 dice lo siguiente:

> *Si se considera un número cualquiera de términos de manera que <comenzando desde el más grande> cada dos números sucesivos tienen la misma diferencia, [si el número de los términos] es par, entonces la diferencia entre [la suma de] la mitad de los números [empezando por el más grande] y [la suma de] los que quedan, es igual al múltiplo de la diferencia común por el cuadrado de la mitad del número de términos (Manitius, 1888, p. 2)*

En simbolismo moderno, la proposición afirma que si un número de 2*n términos*, , son tales que $a_1 > a_2 > \ldots > a_{2n}$, $a_i - a_{i+1} = d$ para $i = 1, \ldots 2n - 1$, entonces:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}) = n^2 \times d$$

La proposición de Hypsikles afirma una *propiedad* de lo que ahora llamamos una secuencia aritmética. Diophantus (ca. 250 AD), en su corto texto *sobre los números poligonales* (Ver Eeck, 1959), presenta una fórmula para calcular cualquier número poligonal, S_n, cuando el lado, *n,* del número poligonal y el ángulo *a* son conocidos. La fórmula es:

17 Hypsikles vivió en Alejandría. Los historiadores no saben mucho de su vida, pero piensan que vivió entre los siglos 2 antes de Cristo y 2 después de Cristo.

$$S_n = \frac{[(2n-1)(a-2)+2]^2-(a-4)^2}{8\,(a-2)}$$

Supongamos que deseamos calcular el tercer término del número pentagonal. En este caso, y .

$$S_n = \frac{[(2\times 3-1)(5-2)+2]^2-(5-4)^2}{8\,(5-2)}$$

lo que da S_3=12

Naturalmente, Diofanto no expresó esa fórmula utilizando el simbolismo moderno. Lo que nos dice es:

> *Tome el doble del lado del número poligonal, quítele una unidad; multiplique el resultado por el número de ángulos menos 2; añada 2 unidades. Tome el cuadrado del resultado. A éste quítele el cuadrado del número de ángulos menos 4. Divida el resultado por 8 veces el número de ángulos menos 2 unidades. Esto da el número poligonal que estamos buscando. (Basado en la traducción de Ver Eecke, 1959, pp. 290-291)*

Tal como el romper nueces para los chimpancés, las formas algebraicas de reflexionar, percibir y tratar las secuencias son formas codificadas de pensar y hacer. Y, como en el caso de los chimpancés y su historia cultural, estas formas de pensar y hacer se han codificado y refinado en la historia cultural humana. Basados en registros históricos, los historiadores piensan que la investigación de secuencias se realizaba al comienzo con pequeñas piedras (Lefevre, 1981).

Desde una perspectiva Hegeliana, el saber resultante fue luego transformado en algo más específico (p.e. una investigación *analítica* de propiedades teóricas de las secuencias aritméticas, como la de Hypsikles), pasando así de algo abstracto a algo más determinado o más concreto. Esto es lo que la dialéctica hegeliana llama la *ascensión de lo abstracto a lo concreto*. Este ascenso a lo concreto ocurre por un proceso de *determinaciones*. Las nuevas *determinaciones* del saber no reemplazan simplemente las antiguas, sino que vehiculan, de manera condensada, los significados de las formaciones teóricas previas. La aparición del simbolismo alfanumérico con Vieta y Descartes permite efectuar nuevas determinaciones; los significados previos quedan inmersos en los nuevos significados. Los significados previos se asientan

o sedimentan. Como lo dice Marx, "lo concreto es concreto porque es la concentración de muchas determinaciones, y por lo tanto es unidad de lo diverso. Aparece en el proceso de pensamiento, por consiguiente, como un proceso de concentración, como resultado, no como punto de partida" (1973, p. 101). No es lo concreto el punto de partida, sino lo potencial.

Dentro de la concepción del saber que estoy presentando, la evolución cultural del saber, su ascenso de lo abstracto a lo concreto, no debe considerarse como algo que ocurre como si fuera realizado por una mano invisible o por la propia lógica del saber racional. La evolución del saber debe concebirse no como un fenómeno natural sino como un fenómeno cultural. Así como el capital sólo puede comprenderse como una concreción histórica de conceptos abstractos tales como la división del trabajo, la moneda, el valor, entre otros, el saber matemático sólo puede entenderse como concreción de formas abstractas previas de pensamiento y acción matemáticos, que son lingüísticas, perceptivas, artefactuales y corporales.

Mi ejemplo de saber sobre las secuencias aritméticas no contiene nada especial. Ejemplos similares pueden encontrarse sobre cualquier tópico de las matemáticas. Lo importante es, entonces, que el saber matemático se ha expresado de diferentes maneras, por un largo proceso de refinamientos y concreciones (lenguaje natural, simbolismo alfanumérico, gráficas, etc.) y ha sido codificado en la memoria y las prácticas culturales, y ahora está presente en muchos currículos en todo el mundo. Es este saber el que los alumnos encuentran en la escuela y que podría conducirlos a ver que el término 100 de la secuencia de la figura 3, por ejemplo, tiene 1 + 2x100 cuadrados.

Ahora estamos listos para definir el concepto de *conocimiento*.

Conocimiento

Saber, como he argumentado, es labor cristalizada —formas de hacer, pensar y reflexionar codificadas culturalmente. Conocimiento es *la actualización* o *materialización* del saber.

Ahora bien, cuando digo que el conocimiento es la actualización o materialización de algo que ya existe, corro un gran riesgo de ser malinterpretado. El conocimiento puede parecer una simple repetición. Por supuesto, eso no es cierto. Si el conocimiento fuera simplemente una repetición, sería algo estático. No habría la más mínima oportunidad de que el conocimiento evolucionara. Pero como lo muestra el ejemplo de Hypsikles y Diofanto,

el último no repitió simplemente al primero. Así que, cuando sugiero que el conocimiento es una actualización o materialización del saber, hay que distinguir:

1. El saber como una entidad *general*.
2. El *proceso* gracias al cual el saber se actualiza o materializa.
3. El conocimiento como *actualización* o *materializaición* del saber.

El saber como una entidad general

Para comprender esos tres aspectos interrelacionados del saber y el conocimiento, debemos tener en cuenta que afirmar que el saber es algo *general* quiere decir que el saber no puede identificarse con ninguna de sus materializaciones o actualizaciones. Es afirmar lo que hemos dicho anteriormente: que el saber es pura *posibilidad*. La posibilidad de romper esta o aquella nuez; la posibilidad de encontrar una propiedad de las secuencias aritméticas o el término 100 en una secuencia dada. Esta posibilidad *en cuanto* posibilidad es simplemente algo *inexistente,* pura *potencialidad* que "aún no ha surgido a la existencia" (Hegel, 2001, p. 36), como la potencialidad del instrumento de música. Para que surja a la existencia, el saber tiene que *materializarse* a través de un *proceso de actualización*.

El proceso de la actualización del saber

El término actualización evoca la temporalidad que le es propia. Hay ya algo allí, pero que es simplemente potencialidad (δύναμις*, dunamis*), que todavía no ha surgido a la existencia y que, para surgir, debe ponerse en movimiento y *aparecer*: tiene que convertirse en un *actual*; tiene que *actualizarse*.

El nombre de ese *proceso* a través del cual se actualiza el saber es actividad: para que pueda materializarse, el saber tiene que mostrarse en sí mismo en la actividad a través de la cual éste adquiere su contenido. "Es solamente por esta actividad que las características abstractas de lo general son realizadas, actualizadas. Por sí mismo [lo general] no tienen poder" (Hegel, 2001, p. 36). En otras palabras, lo general (el saber) no tiene el poder de aparecer por sí mismo.

Quisiera notar que la *actividad* no es un simple canal a través del cual el saber hace su aparición. Como sugiere Ilyenkov (1977), la actividad *imprime su marca* en la actualización del saber. Regresaremos más adelante a este concepto de actividad, que es central en el materialismo dialéctico. Por el momento, detengámosnos en la idea de actualización.

La actualización

La actualización del saber es, como hemos dicho anteriormente, el *conocimiento*. En otras palabras, el conocimiento es el contenido conceptual concreto en el que se manifiesta o actualiza o materializa o encarna el saber. Su contenido conceptual concreto aparece y puede aparecer únicamente en una actividad —la actividad que media el saber y el conocimiento. *El conocimiento es resultado de una mediación*. No existe el conocimiento inmediato: todo conocimiento es mediado. El significado de esa mediación es el siguiente: *el conocimiento lleva la huella o impresión de la actividad que lo media* (Ilyenkov, 1977). En otras palabras, la actividad demarca la manera en la que el saber se manifiesta en el conocimiento. En términos aún más simples, la manera en que se llega a conocer algo (por ejemplo cómo resolver ecuaciones) es consustancial de las especificidades del proceso de conocimiento. La actividad mediadora ejerce su mediación por medio de artefactos, formas de uso de artefactos y también por medio de formas y modos de interacción humana, que son históricos y culturales (Mikhailov, 1980).

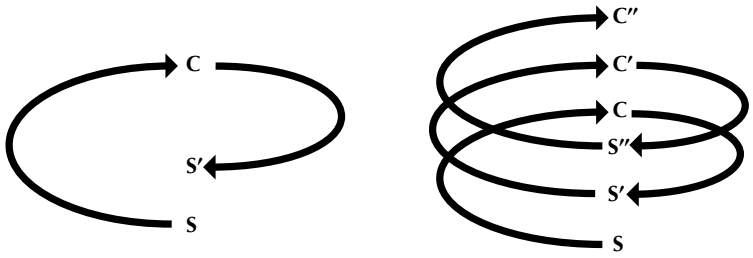
La actividad es, pues, el proceso a través del cual el saber se materializa en el conocimiento. Esta actividad actualiza el saber, lo trae a la vida —como la actividad de tocar el violín trae a la vida la nota musical.

Podemos resumir la relación entre saber, actividad y conocimiento de la siguiente manera: el conocimiento es un modo del saber: una de sus formas *singulares* desarrolladas. Esta forma desarrollada que la actividad mediadora hace posible, pone al saber en movimiento y lo actualiza o materializa. El saber (algebraico, geométrico, etc.) no es un ente sensible en sí. ¿Podemos acaso sentir, percibir o pensar el álgebra *en sí*? No. No podemos. Pensar algebraicamente es ya algo que occurre en ese proceso que hemos llamado hace un momento *actividad*. Y lo que se está revelando a la conciencia en el curso de esa actividad no es el saber algebraico entero, sino una forma singular desarrollada: su materialización o actualización, esto es, el conocimiento. Solamente como tal, como conocimiento, el saber puede ser un objeto sensible de pensamiento y como tal ser modificado y ampliado.

La dialéctica entre saber y el conocimiento

Permítanme dar un ejemplo histórico para ilustrar esta última idea. Algunas tablillas de arcilla de Babilonia muestran problemas sobre objetos de medición. Son vestigios de actividades al interior de las cuales algunas formas codificadas de medición se materializaron o actualizaron. Una de las unidades metrológicas de longitud es el *pie*. Aunque el pie pudo ser una unidad útil para medir algunos objetos en el mundo, seguramente los escribas babilonios se dieron cuenta rápidamente de que, en ocasiones, sumar pies no era suficiente. No se podía atribuir una medida a objetos que medían entre, digamos, dos y tres pies. Las formas codificadas de medida aparecieron en el mundo concreto y tuvieron que expandirse para medir esos objetos "difíciles". Las subdivisiones del pie en "fracciones" del mismo pueden concebirse en el mundo concreto únicamente por medio de la actualización del saber. La inclusión de fracciones condujo a nuevas formas de medir, que, a través de la actividad, fueron codificadas, constituyendo así una *modificación* del saber previo. La nueva práctica de medición se convirtió en nuevo saber. Sin la posibilidad de actualización, el saber permanecería general y por lo tanto sería imposible modificarlo.

Las Figuras 12a y 12b tratan de capturar la relación entre el saber (S), la actividad (A) y el conocimiento (C). Desde un punto de vista filogenético, en cierto momento del desarrollo de una cultura, el saber S (ver Figura 12a) es puesto en movimiento por la actividad humana (simbolizada por las flechas) y, al actualizarse o materializarse, se revela a la conciencia de los sujetos concretos en el conocimiento C. A través de la actividad, que es siempre movimiento y que es afectada por S y por el emergente C, los individuos concretos pueden ahora refinar, ajustar, expandir, transformar el saber S, dando como resultado un nuevo saber S′. El nuevo saber S′, convertido en nueva potencialidad, puede, a través de la mediación de otras actividades (las flechas en la Figura 12b), revelarse o actualizarse en otro conocimiento C′, etc. (ver Figura 12b).



Figuras 12a (a la izquierda) y 12b (a la derecha). La actividad efectúa la mediación del saber que permite su actualización o materialización como conocimiento.

El conocimiento es el contenido conceptual concreto del saber—como el sonido preciso del violín es el contenido aureo del potencial de éste. El conocimiento matemático es el contenido del saber matemático que se muestra en una reflexión teórica o práctica sensible; la manera en que lo general tiene actualidad (Maybee, 2009). La manera en que el contenido cobra vigencia o actualidad —la manera en que suena el violín o se da la reflexión teórica matemática sensible—, depende de la actividad que lo media. Esta mediación es fundamental: ella subraya la naturaleza mediada del conocer.[18]

Cuando mis estudiantes de grado 6 resuelven la ecuación que muestra la primera línea de la Figura 13, actualizan una forma cultural de acción y reflexión (un saber, una *posibilidad* pura) que se materializa a través de una actividad de clase irrepetible que incluye el recurso a símbolos y a artefactos, al lenguaje, al cuerpo, etc. Se trata de una actividad práctico-sensible de actuar y reflexionar sobre lo que se necesita para resolver la mencionada ecuación. Esta *reflexión* y *acción* sensual y material sobre una ecuación específica es *el conocimiento***.**

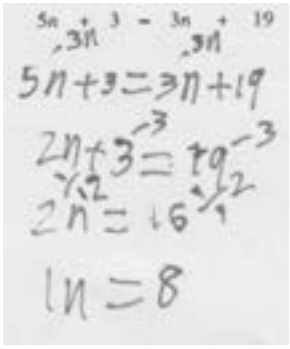


Figura 13. Estudiantes de grado 6 actualizan una forma codificada algebraica de pensar (un saber) a través de una reflexión y acción singular de una ecuación mediada por una actividad de aula.

Nótese, sin embargo, que como la actualización del general es siempre un singular desarrollado, la actualización no puede capturar el saber en su globalidad. En el ejemplo de la Figura 13, en la actualización del saber aparecen

18 Me gustaría aprovechar esta discusión para señalar las diferencias teóricas entre, por un lado, teorías de la actividad que se derivan de la filosofía de Hegel y el materialismo dialéctico (la teoría de la objetivación, por ejemplo) y, por otro lado, algunas teorías contemporáneas de la acción. Como se muestra en la Figura 12a, la actividad es considerada una actividad conjunta que toma su forma de las formas materiales, espirituales, históricas y culturales de producción y modos de interacción social. No es solamente una secuencia de acciones individuales que ocurren durante la interacción.

sustracciones de incógnitas y números positivos; no se incluyen reflexiones sobre fracciones o coeficientes negativos. En ese sentido, el conocimiento es siempre *déficit*. Pero, al mismo tiempo, el conocimiento es *exceso*: dada su materialidad sensible, el conocimiento supera la potencialidad y abre la brecha para plantear nuevos problemas y para crear nuevas líneas de reflexión e investigación. Por lo tanto, al encarnar al saber, el conocimiento lo afirma; y al mismo tiempo, como exceso, lo niega. El principio dialéctico del saber y del conocimiento no es de identidad, sino de diferencia.

Referencias

Arendt, H. (1958). The modem concept of history. *The Review of Politics,* 20(4), 570-590. doi:10.1017/S0034670500034227.

Aristotle. (1998). *Metaphysics*. (H. Lawson-Tancred, Trans.). London: Penguin Books.

Campbell, S. (2002). Constructivism and the limits of reason: Revisiting the Kantian problematic. *Studies in Philosophy and Education, 21,*421-445.

Hegel, G. W. F. (1977). *Phenomenology of spirit*. Oxford: Oxford University Press (First edition, 1807).

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Kitchener, ON: Batoche Books. (Original work published 1837)

Hegel, G. (2009). *Logic*. (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA. (Original work published 1830)

Hirata, S., Morimura, N., & Houki, C. (2009). How to crack nuts: Acquisition process in captive chimpanzees (pan troglodytes) observing a model. *Animal Cognition, 12,* 87-101. doi: 10.1007/s10071-009-0275-3

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic*. Moscow: Progress Publishers.

Kant, I. (2003). *Critique of pure reason*. (N. K. Smith, Trans.) New York: St. Marin's Press. (Original work published 1787)

Lawlor, R., & Lawlor, D. (1979). *Theon of Smirna: Mathematics useful for understanding Plato*. San Diego: Wizards Bookshelf.

Lefevre, W. (1981). Rechenstein und sprache [computing stones and language]. In P. Damerow & W. Lefevre (Eds.), *Rechenstein, experiment, sprache. Historische fallstudien zur entstehung der exakten wissenschaften* [Computing stones, experiment, language. Historical case studies on the emergence of the exact sciences] (pp. 115-169). Stuttgart: Klett-Cotta.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: A challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education,* 27(2), 133-150.

Manitius, K. (1888). *Des hypsikles schrift anaphorikos nach iiberlieferung und inhalt kritisch behandelt* [Hypsikles' text "anaphorikos" according to transmission and content dealt with in a critical way]. Dresden: Lehmannsche Buchdruckerei.

Marx, K. (1973). Grundrisse: Introduction to the critique of political economy. *Baltimore: Penguin Books*.

Marx, K. (1998). The German ideology. New York: Prometheus Books.

Matsuzawa, T., Biro, D., Humle, T., Inoue-Nakamura, N., Tonooka, R., & Yamakoshi, G. (2001). Emergence of culture in wild chimpanzees: Education by master-apprenticeship. In T. Matsuzawa (Ed.), *Primate origins of human cognition and behavior* (pp. 557-574). Tokyo: Springer.

Maybee, J. (2009). *Picturing Hegel*. Lanham, MD: Lexington Books.

Mikhailov, F. T. (1980). *The riddle of the self*. Moscow: Progress Publishers.

Nicomachus of Gerasa. (1938). *Introduction to arithmetic*. (M. L. D'Ooge, Trans.). Ann Arbor: University of Michigan Press.

Otte, M. (1998). Limits of constructivism : Kant, Piaget and Peirce. *Science & Education, 7, 425-450*.

Radford, L. (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129 (available at: http://luisradford.ca)

Radford, L. (2006b). Variables, unknowns, and parameters of mathematical generality. In *Mini-Workshop on studying original sources in mathematics education*. Oberwolfach, April 30th-May 6th, 2006. Report No. 22/2006, 16-17.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132-150.

Roth, W.-M. (2011). Possibility: At the limits of the constructivist metaphor. *New York: Springer.*

Sachs, J. (2015). Aristotle: Motion and its place in nature. In The internet encyclopedia of philosophy. http://www .iep.utm.edu/ (Accessed on April 9 2015).

Tarán, L. (1 969). *Asclepius of Tralles: Commentary to Nichomacus' Introduction to arithmetic* (Vol. 59, part 4). Transactions of the American Philosophical Society.

Valero, M. (2004). Postmodernism as an attitude of critique to dominant mathematics education research. In P. Walshaw (Ed.), *Mathematics education within the postmodern* (pp. 35-54). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Ver Eecke, P. (1959). *Diopante d'Alexandrie. Les six livres arithmetiques et le livre des nombres polygones* [Diophantus of Alexandria: The six books on arithmetic and the book on polygonal numbers]. Liege: Desclee de Brower. (Original work published 1926).

Vygotsky, L. S. (1987-1999). *Collected works.* New York: Plenum Press.

Vygotsky, L. S., & Luria, A. (1994). Tool and symbol in child development. In R. van der Veer & J. Valsiner (Eds.), *The Vygotsky reader* (pp. 99-174). Oxford: Blackwell Publishers.

Zevenbergen, R. (1996). Constructivism as a liberal bourgeois discourse. *Educational Studies in Mathematics, 31,* 95-113.

Reconocimientos:

Este capítulo retoma ideas presentadas previamente en mi artículo *Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning*, publicado en la revista abierta (open journal) *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7-44, 2013. Este capítulo está basado en las traducciones al español realizadas por Rodolfo Vergel Causado y Martín Eduardo Acosta Gempeler, a quienes agradezco profundamente su ayuda. También agradezco a Alfonso Ulises Salinas Hernández por su relectura y comentarios.