

Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos: conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética

Bruno D'Amore

Concepto, conceptualización

¿Qué es un concepto?

En D'Amore (1999b, pp. 193-208; 2006c) busqué dar las ideas básicas a través de las cuales se podría dar respuesta a esta pregunta aparentemente ingenua; pero, lo que invariablemente se llega a constatar con una certidumbre absoluta es que la definición se revela, por muchos motivos, de una complejidad inmensa ...

Una de las dificultades que presenta definirlo es que en la idea de concepto participan muchos factores y causas; para decirlo brevemente. Por tanto, en modo incompleto, no parece correcto afirmar por ejemplo, que el “concepto de recta” (suponiendo que exista) es aquel que se halla en la mente de los científicos que a este tema han dedicado su vida de estudio y reflexión. En cambio, parece más correcto afirmar que existe un fuerte componente, por así decirlo, antropológico que pone en evidencia la importancia de las relaciones entre $R_i(X,O)$ [relación institucional con tal objeto del saber] y $R(X,O)$ [relación personal con tal objeto del saber] (estoy usando símbolos y términos tomados de Chevallard, 1992). Aquí, obviamente, objeto del saber se entiende como objeto *matemático* del saber, el que Chevallard (1991, p. 8) define como:

Un emergente de un sistema de praxis donde se manipulan objetos materiales que se descomponen en diferentes registros semióticos: registro oral, de las palabras o de las expresiones pronunciadas; registro gestual; dominio de las inscripciones, es decir lo que se escribe o se dibuja (gráficas, fórmulas, cálculos...), es decir el registro de la escritura.

Por lo que, a la “construcción” de un “concepto” participarían tanto la parte institucional, el saber, como la parte personal de cualquiera que tenga acceso a tal saber, por tanto no sólo el científico. Sobre esta posición se han manifestado diferentes autores; aquí me limito a sugerir el trabajo inicial

de Godino y Batanero (1994), dado que este artículo es de extraordinaria importancia en el debate en el que trato de insertarme, pues trata precisamente de las relaciones entre significados institucionales y personales de los objetos matemáticos.

Pero entonces, distinguir el concepto de su construcción no es fácil y, quizás, no es ni posible ni deseable: un concepto se encuentra, por así decirlo, continuamente en fase de construcción. En esta misma construcción se encuentra la parte más problemática y por lo tanto más rica de su significado:

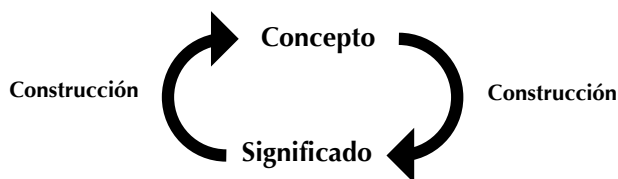


Figura 2. Construcción del concepto y significado.

Como hacen otros autores, podríamos llamar a tal construcción: *conceptualización*, y cuestionarnos qué es y cómo se da. En el intento de dar luz sobre este argumento, muchos estudiosos autorizados han propuesto hipótesis y teorías sobre las cuales no entro en detalles. Para una rápida recapitulación, recomiendo D'Amore (1999b, 2006c). Baste, entonces, recordar las contribuciones -muchas veces en firme oposición entre ellas-, de Vygotsky, de Piaget, de Gal'perin, de Bruner, de Gagné ..., sólo para mencionar los más conocidos.

Adentrarse en esta aventura, conduce al menos a notar una cosa: que la segunda pregunta: *¿qué es?* o *¿cómo se da la conceptualización?*, es fundamentalmente un misterio ...

Un paso clarificador, muy profundo, fue intentado por Vergnaud (1990) quien unifica en el concepto su misma componente constructiva. Según Vergnaud, el punto decisivo en la conceptualización (y en la Didáctica, pero éste es un tema más específico, que deberé retomar y desarrollar en breve) es el pasaje de los *conceptos-como-instrumento* a los *conceptos-como-objeto* y una operación lingüística esencial en esta transformación es la *nominalización*. Él entiende como "conceptualización", precisamente, esta apropiación consciente, cuando propone la siguiente definición: un concepto C es la terna (S, I, S), donde S es el referente, I el significado y S el significante.

La idea de Vergnaud podría ser considerada como una posible conclusión de una línea “clásica”, la que pasa a través de los tres famosos “triángulos” (bibliografía específica en: D'Amore, 1999b, 2206c):

- El triángulo de Charles Sanders Peirce (1839-1914), publicado en 1883: Interpretante – Representante – Objeto.
- El triángulo de Gottlob Frege (1848-1925), publicado en 1892: Sinn (sentido) – Zeichen (expresión) – Bedeutung (denotación).
- El triángulo de C. K. Ogden e I. A. Richards, que quería ser un compendio de los otros dos, publicado en 1923: Referencia – Símbolo – Referente.

Queda el hecho que de cualquier manera el *apropiarse* de un concepto (independientemente de lo que eso signifique) siempre requiere algo más que *nombrarlo* (la cuestión se origina al menos en la Edad Media)... (D'Amore, 1999b, 2006 c).

Por otro lado, no se trata de intentar una teoría general de estos términos; pero, ciertamente, el caso de la matemática es en este sector, peculiar. Cuando menos por tres motivos:

- Todo concepto matemático remite a “no-objetos”; por lo que la conceptualización no es y no puede basarse sobre significados que se apoyen en la realidad concreta; en otras palabras en matemática no son posibles reenvíos ostensivos.
- Todo concepto matemático se ve obligado a servirse de representaciones, dado que no se dispone de “objetos” para exhibir en su lugar;³ por lo que la conceptualización debe necesariamente pasar a través de registros representativos que, por varios motivos, sobre todo si son de carácter lingüístico, no pueden ser unívocos.
- En matemática se habla más frecuentemente de “objetos matemáticos” que de conceptos matemáticos, en cuanto a que en matemática se estudian preferentemente objetos más que conceptos. “La noción de objeto es una noción que no puede no utilizarse desde el momento en el que nos interrogamos sobre la naturaleza, sobre las condiciones de validez o sobre el valor del conocimiento” (Duval, 1998).

3 Aquí “objeto” debe entenderse en el sentido de “objeto real” o de “cosa”. Lo que eso significa se halla bien expresado en la *Metafísica* de Aristóteles, cuando afirma que la cosa, en cuanto parte de lo real, es lo que presenta las tres características siguientes: tridimensionalidad, accesibilidad sensorial múltiple (es decir, más de un sentido por vez) independiente de las representaciones semióticas y posibilidades de separación material y de otras partes de la realidad, de otras “cosas”.

Es absolutamente necesario subrayar que el término “concepto” que usaremos en adelante, no se reconduce a las mismas presencias y al mismo uso que hacen de él Piaget, Kant, Vergnaud, Vygotsky, Chevallard, citados anteriormente. En el sendero trazado por Duval, la noción de concepto, preliminar o de cualquier manera prioritaria en casi todos los autores, se vuelve secundaria, mientras que lo que adquiere carácter prioritario es la pareja (*signo, objeto*), como podré evidenciar mejor en el próximo párrafo, cuando haga referencia a la *paradoja cognitiva del pensamiento matemático*, evidenciada precisamente por Duval (1993, p. 38).⁴

En Duval (1996) se cita un pasaje de Vygotsky en el que sustancialmente declara que no existe concepto sin signo:

Todas las funciones psíquicas superiores se hallan unidas por una característica común superior, la de ser procesos mediados, es decir el incluir en su estructura, como parte central y esencial del proceso en su conjunto, el empleo del signo como medio fundamental de orientación y de dominio de los procesos psíquicos... La lista central [del proceso de formación de los conceptos] es el uso funcional del signo, o de la palabra, como medio que permite al adolescente de someter a su poder las propias operaciones psíquicas, de dominar el curso de sus propios procesos psíquicos. (...) (Vygotsky, 1962; en la ed. francesa, 1985, págs. 150, 151, 157)

A propósito de esta cita de Vygotsky o, mejor dicho, aprovechando de ella, es conveniente hacer una rápida consideración respecto de la palabra “signo”, consideración que me ha sido sugerida en conversaciones e intercambios de ideas con Raymond Duval, en la medida en la que él afirma que en algunos estudiosos de didáctica se percibe una reducción del *signo* a los *símbolos convencionales* que connotan directa y aisladamente los objetos.

En referencia a De Saussure (1916), a quien Vygotsky conocía bien a causa de su formación de lingüista, no existe ningún signo fuera de un “sistema de signos”. Por ejemplo, las palabras tienen significado solo en el interior de un sistema lingüístico (de aquí los problemas de traducción ya bien conocidos). Cuando en Duval, y por lo tanto aquí, se habla de registro de representación semiótica se hace referencia a un sistema de signos que permite llevar a cabo las funciones de comunicación, tratamiento y objetivación. En cambio, no se hace referencia a notaciones convencionales que no forman un sistema. Por ejemplo, la numeración binaria, o decimal forman un sistema, pero no las letras o los símbolos que se utilizan para indicar operaciones algebraicas. Quizás convendría entonces traducir a Vygotsky poniendo en vez de la palabra “signo” la locución “sistema de signos”.

4 Sobre esta temática, se vea: D’Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Matteuzzi (2015).

Es de notarse que, desde este punto de vista y contrariamente a la difundida opinión, un sistema semiótico no es un instrumento: constituye el funcionamiento mismo del pensamiento y del conocimiento. Sólo un código que se use para recodificar un mensaje ya expresado, puede considerarse un instrumento.

El caso de la matemática

Me parece que el siguiente esquema es mucho más eficaz que las palabras:

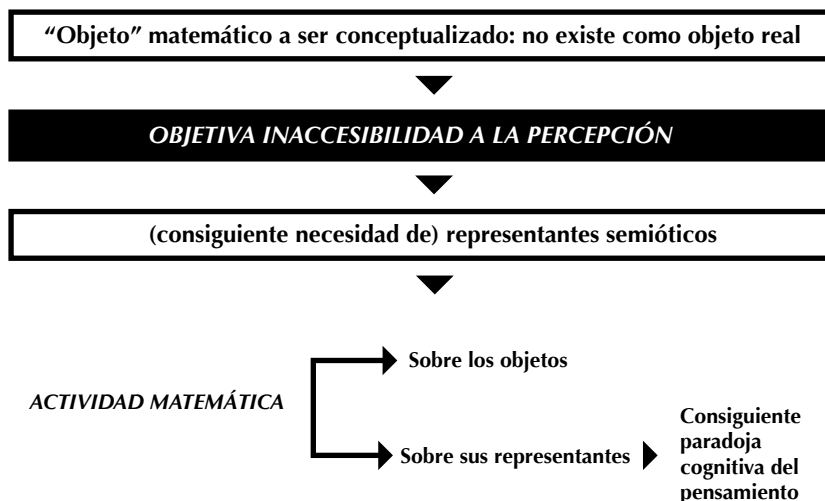


Figura 3. Esquema semiótico en el caso de la matemática.

Veamos en qué consiste esta paradoja cognitiva (Duval, 1993, p. 38; la traducción es mía, concordada con el autor):

[...] por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos. Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje podrían no confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación sólo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable. Y, al contrario, ¿cómo podrían ellos adqui-

rir el dominio de los tratamientos matemáticos, necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya un aprendizaje conceptual de los objetos representados? Esta paradoja es aún más fuerte si se identifica actividad matemática con actividad conceptual y si se consideran las representaciones semióticas como secundarias o extrínsecas.

En esta paradoja, tan bien evidenciada por Raymond Duval, ¿se puede esconder una potencial causa de falta de devolución?

Según el docente, según la noosfera y según el mismo estudiante, él (estudiante) está entrando en contacto con un “objeto” matemático, pero de hecho, el estudiante está entrando en contacto en realidad sólo con una representación semiótica particular de ese “objeto”. El estudiante no tiene, no puede tener, acceso directo al “objeto” y el docente y la noosfera confunden las dos cosas. El estudiante se queda bloqueado, como inhibido: no puede hacer más que confundir el “objeto” con su representación semiótica porque no se da cuenta, porque no lo sabe. Por tanto, frente a una sucesiva necesidad conceptual que se manifiesta, por ejemplo, con la necesidad de modificar la representación semiótica del mismo “objeto”, el estudiante no tiene medios críticos, ni culturales, ni cognitivos. El docente y la noosfera no entienden el por qué y acusan al estudiante, culpándolo de algo que él ni entiende.

En realidad: en esta fase paradójica, ya nadie entiende lo que está sucediendo, puesto que cada uno de los actores de esta aventura tiene una percepción diferente del problema.

Por otra parte, el análisis de las representaciones es un hecho nuevo, en el estudio de los procesos cognitivos. Aunque sí lo es menos desde el punto de vista estrictamente filosófico. Escribe Duval (1998):

El análisis de las representaciones comenzó en el momento en el que nos interrogamos sobre las condiciones de validez del conocimiento y que se descubrió que todo conocimiento es inseparable de una actividad de representación. La tercera de las Meditaciones Metaphysicae de Descartes es el primer texto en el que la problemática de un tal análisis se halla desarrollada explícitamente. Ella se halla enteramente centrada en el contenido de las representaciones.

Conocer, saber, sentido, comprensión...

En diversos trabajos de finales de los años '80 y '90 se declaraba que, mientras el matemático puede no interrogarse sobre el sentido de los objetos matemáticos que usa, o sobre el sentido que tiene el conocimiento matemático, la didáctica de la matemática no puede obviar dichas cuestiones (ver D'Amore, 1999b, pp. 23-28; 2006c). En un trabajo reciente, Radford resume la situación de la manera siguiente:

Se puede sobrevivir muy bien haciendo matemática sin adoptar una ontología explícita, esto es, una teoría sobre la naturaleza de los objetos matemáticos. Es por eso que es casi imposible inferir de un artículo técnico en matemática la posición ontológica de su autor. (...) La situación es profundamente diferente cuando hablamos del saber matemático. (...). Cuestiones teóricas acerca del contenido de ese saber y de la manera como dicho contenido es transmitido, adquirido o construido nos ha llevado a un punto en el que no podemos seguir evitando hablar seriamente de ontología. (Radford, 2004, p. 6)

El debate es antiguo y se puede señalar como punto de partida la Ellade clásica. Como he señalado en trabajos anteriores, dicho debate está enmarcado por una creencia ontológica que parte del *modo* que tienen los seres humanos de *conocer* los conceptos (D'Amore, 2001a,b,c; 2003a,b; 2004). Radford retoma el debate y se detiene, en particular, en el trabajo de Kant quien dice que los individuos tienen un conocimiento conceptual *a priori* gracias a una actividad autónoma de la mente, independiente del mundo concreto (Radford, 2004, pp. 5-7).

Como Radford pone en evidencia, el apriorismo kantiano tiene raíces en la interpretación de la filosofía griega hecha por Agustín de Hipona y su influencia en los pensadores del Renacimiento. Refiriéndose al matemático Pietro Catena (1501-1576), por mucho tiempo profesor en la Universidad de Padua (Italia) y autor de la obra *Universa Loca*, Radford afirma que, para Catena, "los objetos matemáticos eran entidades ideales e innatas" (Radford, 2004, p. 10). El debate se vuelve moderno, en todo el sentido de la palabra, cuando, con Kant, se logra hacer la distinción entre los "conceptos del intelecto" (humano) y los "conceptos de objetos". Como Radford observa:

[Estos] conceptos del intelecto puro no son conceptos de objetos; son más bien esquemas lógicos sin contenido; su función es hacer posible un reagrupamiento o síntesis de las intuiciones. La síntesis es llevada a cabo por aquello que Kant identificó como una de nuestras facultades cognitivas: el entendimiento. (Radford, 2004, p. 15)

El siguiente gráfico presenta las ideas de *sentido* y de *comprensión* en el lugar adecuado:

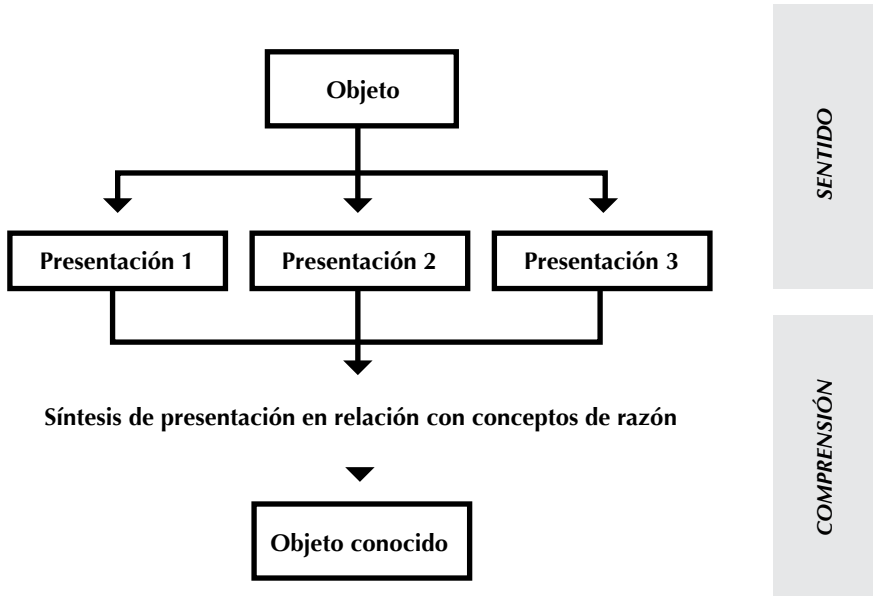


Figura 4. Relación entre los sentidos y la razón en la epistemología Kantiana (tomado de Radford, 2004, p. 15).

Pero deberé afrontar esta cuestión con mucho más detalle y con mucha más especificidad. Para hacer esto, debo afrontar una larga explicación sobre un adjetivo presente en el título.

Aprendizaje, constructivismo, simbolización

¿Por qué en el título me serví del adjetivo “constructivistas”?

Para responder a esta pregunta, debo partir de lejos, inspirándome en Moreno Armella (1999).

En la *Crítica de la razón pura*, Kant postula que el conocimiento es el resultado de un contacto entre un sujeto que aprende y un objeto de conocimiento. Él recurre a una comparación: así como el líquido adopta la forma del recipiente que lo contiene, las impresiones sensoriales adoptan las formas

que se le imponen por parte de las estructuras cognitivas. Pero para que eso suceda, y es la bien conocida “hipótesis fuerte” de Kant, se necesitan formas innatas de sensibilidad, como espacio, tiempo, causalidad, permanencia del objeto, permanencia y uso de experiencias precedentes, entre otras.

Por lo que el conocimiento no es más una simple representación de la realidad externa, es, en cambio, el resultado de la interacción entre el sujeto que aprende (sus estructuras cognitivas) y sus “experiencias sensoriales”. Además, el sujeto que aprende abandona la típica pasividad (cartesiana o lockiana) y construye, estructura sus experiencias, participando activamente en el proceso de aprendizaje en una verdadera y propia *construcción*. Se trata de una transformación: un objeto de conocimiento, entrando en contacto con un sujeto que aprende, se transforma, reconstruye, gracias a los instrumentos cognitivos que tiene.

Para entender bien la posición kantiana, me serviré de Duval (1998). Es esencial entender que de Descartes a Kant es común la problemática de las relaciones entre representación y objeto: se pasa del contenido de las representaciones del sujeto a los objetos del conocimiento (científico). Si se quieren analizar las representaciones en su relación con los objetos representados, se tienen relaciones en términos de *causalidad*: en Descartes se hace la hipótesis de una correspondencia entre el contenido de una representación y el objeto representado; en Kant se pasa, como quería evidenciar, al análisis de investigaciones sobre la organización interna del sujeto, para pasar del contenido al objeto.

En fin, ¿cuál es la naturaleza de las representaciones?⁵ Los procesos de pensamiento son procesos puramente mentales, tanto en Descartes como en Kant, lo que implica una estrecha relación entre las representaciones del sujeto y los objetos.

Todo esto constituye, según Duval (1998), la “primera etapa”; tal posición será superada en una “segunda etapa” de Bolzano al Hilbert del 1904 y después por una “tercera etapa” que va del Hilbert del 1922 a Turing y Von Neumann.

Regresemos a Kant.

5 Puede ser interesante lo que Kant escribe a propósito de la misma palabra representación: «La palabra representación se comprende bien y se emplea con confianza, no obstante su significado no pueda ser jamás explicitado por una definición» (Kant, cit. por Duval, 1998, al inicio del párrafo 1).

¿De dónde provienen precisamente esos instrumentos cognitivos que sirven para transformar las experiencias del sujeto? La epistemología del aprendizaje de Kant, para usar una terminología moderna, se refiere a un aprendiz adulto, por lo que ya se halla dotado de un lenguaje desarrollado, con capacidad de abstracción y de generalización. ¿Es lícito proponerse la siguiente pregunta?: ¿cómo cambia todo esto si hablamos de aprendizaje en ambiente escolar, de aprendices no adultos (niños o adolescentes o jóvenes) a las primeras armas, con lenguajes aún en elaboración?

No es del todo absurdo pensar que la epistemología constructivista se haya originado de la necesidad de dar respuesta precisamente a este problema. Piaget, en 1937, se expresaba así:

[...] el conocimiento del mundo exterior comienza por una utilización inmediata de las cosas [...] la inteligencia no comienza así ni del conocimiento del yo ni de las cosas en cuanto tales sino de su interacción y, orientándose simultáneamente hacia los dos polos de esta interacción, la inteligencia organiza el mundo, organizándose a sí misma. (Piaget, 1937, p. 39)

Por lo tanto, el saber adquirido puede verse como el producto de la elaboración de la experiencia con la cual entra en contacto el sujeto que aprende; y esta elaboración consiste en la interacción entre el individuo y su ambiente, y en el modo en el cual el individuo interioriza el mundo externo. Independientemente de las peculiaridades de estas “actividades”, el sujeto que aprende debe comprometerse en algo que necesariamente lo lleva a simbolizar. Se trata de una necesidad típicamente humana, ¡la única necesidad sobre la cual todos los autores concuerdan! Se trata de una elaboración (con características internas o sociales o incluso ambas) que se organiza alrededor o en los sistemas semióticos de representación.

Se puede decir más: que el conocimiento “es” la intervención y el uso de los signos.

Por lo tanto, el mecanismo de producción y de uso subjetivo e intersubjetivo, de estos signos y de la representación de los “objetos” de la adquisición conceptual, es crucial para el conocimiento.

En este sentido, acepto y hago mío lo que Moreno Armella (1999) enuncia como “un principio que nos parece esencial respetar: *toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos*”. El conocimiento depende también y precisamente de aquellos instrumentos de

mediación que ponemos en acción para su construcción, y del conjunto y del tipo de significaciones que tales instrumentos reciben del entorno social.

Ahora, todo eso había ya sido previsto en el programa de la epistemología constructivista, y expresado de la siguiente manera:

[...] la acción no tiene lugar solo como resultado de los impulsos internos [...] En su experiencia, las situaciones que el niño encuentra son generadas por su entorno social y los objetos aparecen situados en contextos que les dan el significado específico. El niño no asimila objetos puros [...] asimila las situaciones en las cuales los objetos tienen roles específicos. En la medida en la que su sistema de comunicación se hace más complejo [...] eso que podemos llamar experiencia directa de los objetos queda subordinada [...] al sistema de interpretaciones suministrado por el entorno social. (Piaget & García, 1983, cap. IX)

No hay duda de que el conocimiento en la escuela, y su aprendizaje como construcción se hallan condicionados por situaciones específicas de la institución. Por lo tanto el aprender en la escuela ¡no es el aprender *total!* Los problemas del aprendizaje matemático en la escuela, aún antes de ser de orden epistemológico, pertenecen a ese ambiente sociocultural tan específico.⁶

Pero de estas consideraciones que compartimos, nacen algunas reflexiones que se revelan rápidamente necesarias. Si simplemente se transportan, por así decirlo, a la escuela las tesis de la epistemología constructivista, nos hallamos frente a afirmaciones del tipo: “El estudiante construye su propio conocimiento”; o, más radicalmente: “Todo estudiante construye su *propia versión* del conocimiento”. Pero, vista la especificidad del ambiente escuela, nacen preguntas cuyas respuestas parecen lejanas; por ejemplo, ¿cómo podemos verificar que las construcciones del saber del estudiante son compatibles con las de sus compañeros?, ¿o con las exigencias de la institución?, ¿o con las expectativas del docente?

Si es verdad, como es verdad, que todo conocimiento (matemático, en particular) refleja al mismo tiempo una dimensión social y una personal, la escuela no es una excepción, sino incluso el lugar donde se institucionaliza esta doble naturaleza.

Durante el aprendizaje de la matemática se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, tanto conceptual como simbólico (sobre todo representativo). Este mundo no es el fruto de una construcción solitaria, sino el fruto de

6 Esta perspectiva sociocultural tan peculiar ha influenciado notablemente los estudios educativos (Wertsch, 1993).

una verdadera y compleja interacción con los miembros de la microsociedad de la cual el sujeto que aprende forma parte: los propios compañeros y los docentes (y la noosfera, a veces borrosa, a veces evidente) (Chevallard, 1992). Es gracias a un continuo debate social que el sujeto que aprende toma consciencia del conflicto entre “conceptos espontáneos” y “conceptos científicos”. Enseñar no consiste sólo en el intento de generalizar, amplificar, volver más crítico el “sentido común” de los estudiantes; se trata de una acción más bien compleja, como nos ha enseñado Vygotskiy en *Pensamiento y Lenguaje* (1962):

Como sabemos gracias a las investigaciones sobre el proceso de formación de los conceptos, un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria [...] es un auténtico y complejo acto de pensamiento que no se puede enseñar mediante la ejercitación y al cual se puede llegar solo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido [...] El desarrollo de los conceptos, o significados de las palabras, presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación). También la experiencia demuestra que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril. Un maestro que intenta hacer esto, normalmente no logrará nada, sino un vacío verbalismo. (Vygotsky, 1962, pp. 119-120)

Por lo que aprender parece ser una construcción sujeta a la necesidad de “socializar”, lo que se da obviamente gracias a un medio de comunicación (que puede ser el lenguaje) y que, en la matemática, cada vez más será condicionado por la elección del mediador simbólico, es decir, por el registro de representación preseleccionado o impuesto, de diversas formas, (incluso solo por las circunstancias).

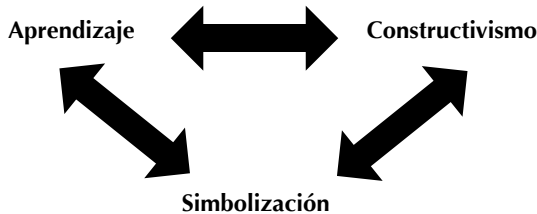


Figura 5. Aprendizaje, constructivismo, simbolización.

Semiótica y noética en el aprendizaje de la matemática

En matemática, la adquisición conceptual de un objeto pasa necesariamente a través de la adquisición de una o más representaciones semióticas. Lo dice por primera vez Duval, proponiendo la problemática de los registros, en los célebres artículos de 1988 aparecidos sobre los *Annales* (1988a, 1988b, 1988c). El trabajo del 1993 constituye un primer ensayo de síntesis (Duval, 1993); pero sobre este argumento Duval publica también trabajos en el 1989 y 1990; lo confirman Chevallard (1991), Godino y Batanero (1994).

Por lo que, tomando prestado de Duval: no existe noética sin semiótica.

Sólo por claridad terminológica, pero sin ninguna pretensión de ser completo, dado que no siempre estos términos se usan en el mismo sentido, prefiero explicitar los significados de los que me sirvo:

Semiótica =_{df} adquisición de una representación realizada por signos.

Noética =_{df} adquisición conceptual de un objeto.⁷

Entenderé, de ahora en adelante:

r^m =_{df} registro semiótico m-ésimo ($m = 1, 2, 3\dots$).

$R_i^m(A)$ =_{df} representación semiótica i-ésima ($i = 1, 2, 3\dots$) de un objeto A en el registro semiótico r^m .

Se puede notar que, con base en estas elecciones, no sólo cambia el registro semiótico también cambia necesariamente la representación semiótica, mientras que no se garantiza lo inverso; es decir, puede cambiar la representación semiótica manteniéndose el mismo registro semiótico.

Una vez más, uso una gráfica para ilustrar la cuestión, porque me parece más incisiva y eficaz:⁸

7 Para Platón, la noética es el acto de concebir a través del pensamiento; para Aristóteles, es el acto mismo de comprensión conceptual.

8 Me refiero una vez más a Duval (1993).

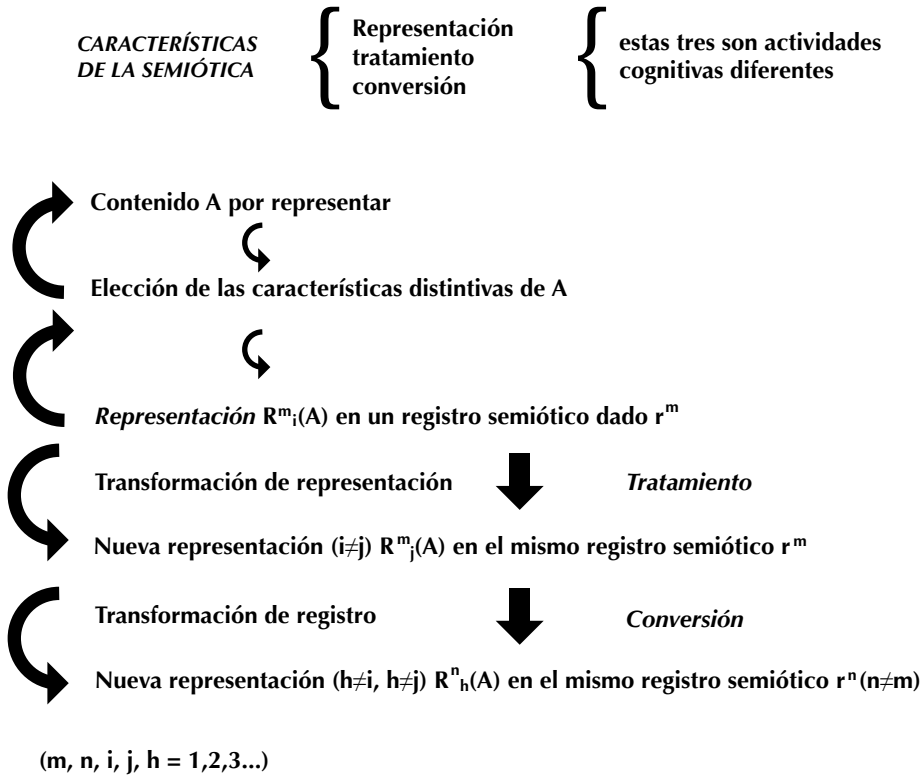


Figura 6. Explicación de un nuevo registro y representación semiótica.

Son de notar las flechas que van, en la primera parte de la gráfica, de abajo hacia arriba. Ellas tienen razón de existir con base en lo siguiente. Los tratos distintivos fijados del objeto A dependen de las capacidades semióticas de representación del registro elegido. Escogiendo un registro diferente se fijarían otros tratos de A. Eso depende del hecho de que dos representaciones del mismo objeto, pero en registros diferentes, tienen contenidos diferentes.

Características de la noética

La adquisición conceptual de un objeto matemático se basa en dos de sus características “fuertes” (Duval, 1993):

- El uso de más registros de representación semiótica es típico del pensamiento humano.
- La creación y el desarrollo de sistemas semióticos nuevos es símbolo (histórico) de progreso del conocimiento.

Estas consideraciones muestran la interdependencia estrecha entre noética y semiótica, cómo se pasa de una a otra: por lo que no sólo no existe noética sin semiótica, sino que la semiótica se adopta como característica necesaria para garantizar el primer paso hacia la noética.

En este momento es un deber hacer una precisión acerca de la teoría que desde hace dos décadas está desarrollando Raymond Duval. En ella, da a la conversión un lugar central con respecto a las demás funciones, y en particular con respecto a la del tratamiento, considerada por la mayoría como decisiva desde el punto de vista matemático.

¿Por qué? Desde mi punto de vista, por al menos tres razones diferentes.

1. La conversión choca contra los fenómenos de no congruencia que no son para nada conceptuales (en la medida en la que ellos se hallan ligados al sentido mismo de la conversión). Estos fenómenos de no congruencia constituyen el obstáculo más estable que se puede observar en el aprendizaje de la matemática, en todos los niveles y en todos los dominios.
2. La conversión permite definir variables cognitivas independientes, lo que hace posible construir observaciones y experimentaciones relativamente precisas y finas. Ciertamente, una vez validadas por medio de una investigación bastante metódica, después pueden utilizarse como variables didácticas. Por lo que Duval no trabaja en el nivel de la observación de un grupo durante semanas, sino que se comporta como lo hace un biólogo o un médico, cuando desean entender el funcionamiento del cerebro.
3. La conversión, en casos de no congruencia, presupone una coordinación de los dos registros de representación puestos en marcha, coordinación que no se da automáticamente y que no se construye espontáneamente basándose sólo en el hecho de que se promuevan actividades matemáticas didácticamente interesantes. Lo que se llama la "conceptualización" comienza realmente sólo cuando se pone en acción, incluso sólo bosquejándola, la coordinación de dos diferentes registros de representación.

La teoría de los registros debe ser valorada basándose en los aportes relativos a la riqueza, a las novedades de las observaciones, así como a las novedades de las actividades de aprendizaje que las variables cognitivas permiten definir. No en relación a las decisiones a priori acerca de qué es la matemática, o con base en consideraciones globalizadoras no controlables por medio de metodologías precisas.

Cada estudiante aprende por su cuenta, y nadie puede aprender (o comprender) ¡en el lugar de otro! Además, el éxito de una acción didáctica no se juzga inmediatamente, sino sólo algunos años más tarde: existen muchos casos de éxito inmediato que se revelan un fracaso después de un cierto tiempo...

Ésta es la razón por la cual Duval insiste en el carácter central de la conversión; éste es el punto decisivo, el que verdaderamente diferencia su teoría de los registros, con respecto a todo lo que se puede decir y se usa decir acerca de los signos y la semiótica, o acerca de lo cognitivo.

En años recientes los estudios sobre las características de la transformación de tratamiento han tomado mucha fuerza investigativa, pues se mostró que muchos estudiantes y profesores le cambian de sentido a dos representaciones semióticas que se obtuvieron con tratamientos (D'Amore, 2006a, b, 2007a, b, 2011; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2007a, b; 2008a, b, c; Santi, 2010, 2011; Rojas, 2014).

Un resumen extremo se puede leer como sigue:

- existe un objeto matemático O_1 por representar;
- se le da un *sentido* derivado de la experiencia que se piensa aceptada, en una práctica social construida en cuanto compartida en el aula;
- se elige un registro semiótico r^m y en éste se representa $O_1: R^m_i(O_1)$;
- se realiza un tratamiento: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^m_j(O_1)$ ($i \neq j$);
- se realiza una conversión: $R^m_i(O_1) \rightarrow R^n_h(O_1)$ ($n \neq m$).
- se interpreta $R^m_j(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático O_2 ;
- se interpreta $R^n_h(O_1)$ reconociendo en esto el objeto (significado) matemático O_3 .

¿Qué relación existe entre O_2 , O_3 y O_1 ?

Se puede reconocer identidad; y esto significa, entonces, que existe un conocimiento previo, en la base sobre la cual la identidad puede ser establecida.

De hecho, se puede no reconocer la identidad, en el sentido de que la "interpretación" es o parece ser diferente, y entonces se pierde el *sentido* del objeto de partida O_1 .

Un esquema como el siguiente puede resumir lo que ha sucedido en el aula desde un punto de vista complejo, que pone en juego los elementos que se desea poner en conexión entre ellos: objetos, significados, representaciones semióticas y sentido:

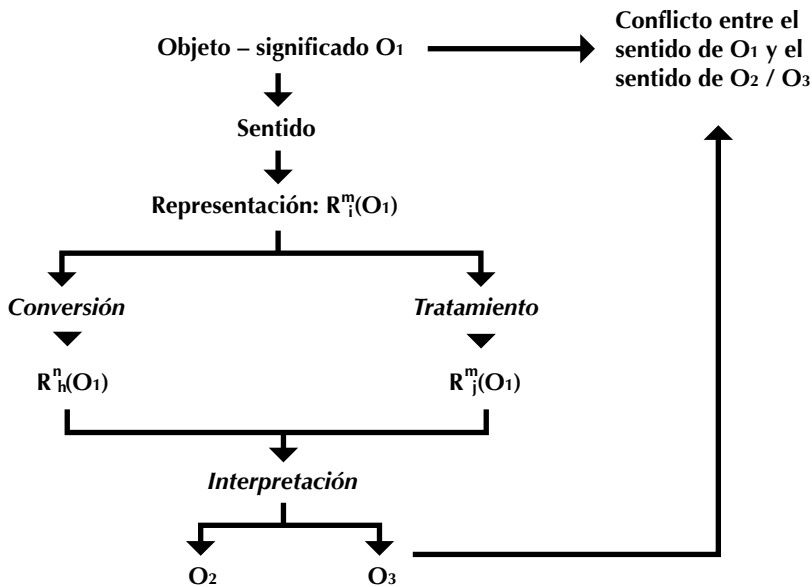


Figura 7. Esquema de transformación del tratamiento en el aula (juego de las ternas).

Esto hecho nuevo representa un interesante camino en la investigación.

Un intento de definición de construcción

Aceptamos que la construcción de los conceptos matemáticos depende estrechamente de la capacidad de usar más registros de representaciones semióticas de esos conceptos:

- De *representarlos* en un registro dado.
- De *tratar* tales representaciones al interior de un mismo registro.
- De *convertir* tales representaciones de un dado registro a otro.

El conjunto de estos tres elementos y las consideraciones de los precedentes párrafos evidencian la profunda relación que existe entre noética y esta visión del constructivismo que se podría llamar analítico: ¿qué quiere decir “construcción del conocimiento en matemática” si no precisamente la unión de esas tres “acciones” sobre los conceptos, es decir la expresión misma de la capacidad de *representar* los conceptos, de *tratar* las representaciones obtenidas al interior de un registro establecido y de *convertir* las representaciones de un registro a otro?

Es como si se estuvieran especificando las operaciones base que, en su conjunto, definen esa “construcción” que, de otra manera, queda como un término misterioso y ambiguo, disponible a cualquier tipo de interpretación, incluso metafísica.⁹

Es de notarse que, desde un punto de vista cognitivo, se debe dar la misma importancia al punto 3 (la conversión) que al punto 2 (el tratamiento), porque eso permite la definición de las variables independientes tanto para la observación como para la enseñanza. Pero desde un punto de vista matemático se usa asignar más importancia al tratamiento, más que a la conversión. Es por eso que en la historia los matemáticos han desarrollado registros específicos que han permitido diferentes formas de cálculo (aritmético, algebraico, analítico, lógico...).

El fenómeno de la escolarización y la falta de noética

Pongo ahora la reflexión y la terminología dentro de la clásica teoría de las situaciones; la renuncia del estudiante a la devolución (obviamente inconsciente), la incapacidad del estudiante para implicarse (como consecuencia de resultados negativos en los diferentes intentos), asumiéndose la carga directa y personal de la responsabilidad de la construcción del conocimiento, en el ambiente escolar, se hallan ligadas a la incapacidad (a veces solo supuesta) o de representar, o de tratar o de convertir, por falta de una didáctica específica.

El docente podría, en efecto, no preocuparse de los componentes individuales de la construcción a causa de una supuesta identidad entre semiótica y noética (Duval, 1993). Esta identidad se halla bastante difundida en el pensamiento de los docentes, particularmente en aquellos que no tienen jamás la oportunidad de reflexionar sobre esta cuestión, o que la consideran superflua.¹⁰ (Sugiero, al lector interesado, la tesis doctoral de Maura Iori, 2015). Eso podría llevar a la elección de la renuncia por parte del estudiante y por lo tanto, a la escolarización de los saberes (D'Amore, 1999a).¹¹

9 Naturalmente esta observación, todo el párrafo, pero incluso todo este texto, son específicos para la matemática; no se valora cuánto se puedan extender a una teoría de los conceptos o, incluso, a una gnoseología.

10 Lo que nos reconduce a una discusión mucho más general, aquella sobre las creencias implícitas del maestro, afrontado de manera profunda, sistemática y recurrente, en (Speranza, 1997).

11 «Con el término “escolarización del saber” pienso referirme aquí al acto en larga medida inconsciente, a través del cual el alumno, en un cierto punto de su vida social y escolar (pero casi siempre durante la escuela elemental), delega a la escuela (como institución) y al maestro de la escuela (como representante de la institución) la tarea de *seleccionar*

En cambio, es necesario reflexionar sobre el hecho de que en el aprendizaje conceptual no puede existir noética si no existe semiótica, en cuanto la adquisición de un objeto matemático C es de hecho la adquisición de una representación semiótica $R_i^m(C)$ en un registro semiótico dado r^m ; en efecto, sólo a través de C se “manifiesta” y se vuelve disponible para la construcción del aprendizaje en el sentido señalado.¹²

Pero hay más: cualquiera que sea $R_i^m(C)$ en r^m , eso no da todas las referencias (semióticas) de C en r^m (la representación semiótica de un objeto no es unívoca jamás); existirán otras representaciones semióticas $R_h^m(C)$ ($h \neq i$) de C en r^m (se pasa de una a otra con una transformación de tratamiento).

Se puede entonces hablar de C^m : objeto C representado en r^m , “limitado” es decir a su aspecto “relativo” al registro semiótico r^m .

C^m se puede “aprender” en r^m pero lo que se obtiene es por lo tanto sólo una aproximación parcial a C , digamos: una “construcción” parcial.

Para alcanzar la comprensión de C se necesita apoderarse de la conversión que lleva de $R_i^m(C^m)$ en r^m a $R_j^n(C^n)$ en r^n , para toda m y n : eso vuelve posible la elección de un registro en lugar de otro frente a cualquier situación relativa a C .

Lo tratado aquí es el punto central de toda la argumentación, lo que nos lleva a confirmar y reforzar la frase muchas veces recurrente y que constituye el perno fundamental de todo el aparato que estoy describiendo: *no existe noética sin semiótica*.

Para reforzar el “juego de las ternas” (representación, tratamiento, conversión), se puede ver el resultado de la investigación descrita en D'Amore (1998). En ella el mismo mensaje, relativo a una situación que tiene que ver con un ejemplo de relación binaria (se daban nombres de ciudades y nombres de países y la relación binaria era: “está en”), se proponía a estudiantes de varios niveles escolares en diferentes registros semióticos y con diferentes

para él los saberes significativos (aquellos que lo son socialmente, por status reconocido y legitimado por la noósfera), renunciando a hacerse cargo directamente de su elección en base a cualquier forma de criterio personal (gusto, interés, motivación,...). Dado que esta escolarización comporta el reconocimiento del maestro como depositario de los saberes que cuentan socialmente, es también obvio que existe, más o menos contemporáneamente, una escolarización de las relaciones interpersonales (entre estudiante y maestro y entre estudiante y compañeros) y de la relación entre el estudiante y el saber: es lo que (...) se llama “escolarización de las relaciones”» (D'Amore, 1999a).

12 Desde mi punto de vista, este es un punto esencial por tratar en los cursos para la formación de los docentes, enriqueciéndolo con ejemplos significativos.

representaciones semióticas, con la solicitud de reconocer que se trataba, precisamente, del *mismo mensaje*, de la *misma información*.

El resultado de la investigación muestra precisamente las enormes dificultades que tienen los estudiantes

- Para llegar a partir de una representación, hasta al contenido representado.
- Para verificar que entre dos representaciones en un registro semiótico dado se ha llevado a cabo simplemente una transformación de representación de tipo tratamiento.
- Para verificar que entre dos representaciones semióticas en dos diferentes registros semióticos se ha dado una transformación de representación de tipo conversión.

Ante la ausencia de claves de lectura y ante la dificultad de “leer” las situaciones, los estudiantes dan “sentido” al mensaje creando informaciones de diferentes tipo (a las que en algunos casos he llamado “informaciones parásitas”) incluso lejanas de cualquier intención comunicativa del autor. También, buscan asideros de tratamiento o conversión en aspectos del todo marginales, como la forma de los gráficos, el tipo de figuras casualmente presentes etc., que para el adulto son insignificantes.

Algunas notas críticas

Antes de entrar en detalle en algunos ejemplos, se hacen necesarias algunas notas precautorias.

Una primera nota se refiere a la lengua natural como registro.

Incluso aceptando que la lengua natural sea un registro, debemos precisar de manera explícita que se trata de un registro más complejo de los otros que serán recordados. En primer lugar, este registro permite funcionamientos discursivos (y por lo tanto tratamientos) muy heterogéneos. Existe así un funcionamiento espontáneo que es el de las conversaciones, narrativo, de las discusiones; y existe un funcionamiento especializado que se halla, por ejemplo, en el razonamiento deductivo de las matemáticas, y que es del todo diferente.

Es por esto que Duval (1995, p. 91 y siguientes) distingue cuatro funciones discursivas que caracterizan todo registro que se llame “lengua”:

- Función referencial de designación de objetos.
- Función apofántica de expresión de enunciados completos.
- Función de expansión discursiva de un enunciado completo.
- Función de reflexividad discursiva.

Una lengua, en sustancia, a diferencia de los otros registros, es plurifuncional (Duval, 1996, parte III).

Una segunda nota se refiere al hecho de si es o no menos lícito considerar los signos y las representaciones aisladamente.

Si bien en los ejemplos sucesivos, sólo con intenciones ilustrativas, se propone esto, en realidad se debería siempre tender a presentar el sistema o los sistemas que las representaciones forman y en las cuales funcionan como representaciones. Eso es fácil para el sistema de escritura de los números, para las figuras geométricas; pero lo es menos para las escrituras algebraica y lógica. La razón de esta diferencia es la siguiente: el interés de un sistema semiótico en matemática es, más que nada, el poder permitir un tratamiento (matemático) de las representaciones. Por lo que se requiere presentarlo, cuando sea posible, con respecto al juego de transformaciones internas que ellas permiten. Desde este punto de vista, la lengua y las figuras geométricas no son del todo registros "técnicos". Esto corresponde a la distinción entre dos estructuras de significado: ternario (lenguas y formas) y binarias (para las cuales los "triángulos" evocados en el recuadro del párrafo 1 son esquemas falsos).

Otros ejemplos claves pueden tomarse de la teoría ingenua o elemental de los conjuntos, en la cual el mismo conjunto puede ser representado en varios registros semióticos y, al interior de cada uno de ellos, usando varias representaciones semióticas. Así, existen otros mil en el recorrido escolar.

Falta de devolución, interrupción de la implicación

En caso de fracaso en la administración de esta enorme masa de representaciones y transformaciones es demasiado trivial y simplista el limitarse a la sola constatación, como parece ser que muchas veces hace el docente desilusionado de la falta de aprendizaje de sus estudiantes.

¿Dónde se anida el motivo de tal fracaso? Ya este aspecto es mucho más interesante y un análisis de los diferentes fracasos podría revelar mucho.

Pero aquí me interesa la problemática de la falta de devolución, de la interrupción de una implicación personal.

Tengo en mente la figura de un estudiante, incluso bueno, consciente, sensible, que se limita, quizás precisamente por esa sensibilidad no satisfecha o por incapacidad introspectiva de la cual no tiene la culpa, a observar y constatar su propio fracaso en el intento de hacer frente a la complejidad de la llamada en causa de la terna “representación, tratamiento, conversión”. El estudiante podría decidir (aunque de manera del todo inconsciente), limitar los daños aceptando el formalismo vacío, la superficie de cuanto se le pide, adecuándose a escolarizar su propio saber y su propio comportamiento, es decir aceptando la total mediación del docente hacia el objeto del saber, aceptando sus elecciones y también sus gustos (D’Amore, 1999a). Un análisis muy apretado de las varias componentes, es decir la capacidad de puntualizar los varios aspectos en los que se configura la construcción del conocimiento podría ayudar al docente a entender cuál fue el momento exacto de la rendición, de la falta de devolución, de la interrupción de la implicación personal del estudiante en tal construcción.

Existe una enorme diferencia entre la institucionalización del conocimiento por parte del docente como representante de la institución que ha decidido cuál es el saber que cuenta; y la escolarización, la aceptación servil y sin búsqueda de sentido de las elecciones del docente.

En el primer caso el docente funge de mediador entre estudiante y saber y hace que el primero sea activo: consagra las elecciones y los “descubrimientos” del estudiante reconociéndole un estatuto institucional de consumo y un permiso oficial de uso; el fundamento de todo esto se halla en el hecho que fue el estudiante el que construyó.

En el segundo caso el docente funge de mediador totalitario y hace que el estudiante sea un sujeto pasivo: le pide fe ciega, fe ciega en la institución a cambio de promesas acerca de capacidades y habilidades futuras, que nadie garantiza que lleguen algún día o que no podrían jamás ser consumidas. El estudiante cesa de construir, es decir cesa de aprender.

Creo que el estudio preciso de la terna (representación, tratamiento, conversión) puede aplicarse al análisis de las situaciones de renuncia a la implicación personal, para evidenciar el motivo que desencadena la renuncia, el motivo de la escolarización.

Nota: Un muy significativo estudio relativo a los temas de este capítulo se encuentra en Iori (2017).

Referencias

- Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* (année 1990-1991, n. 122) (pp. 103–117). Grenoble: LSD-I-MAG, Université Joseph Fourier.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(1), 73–111.
- D'Amore, B. (1998). Objetos relacionales y registros representativos distintos: Dificultades cognitivas y obstáculos. *Uno*, 15, 63-78.
- D'Amore, B. (1999a). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*, 22A(3), 247–276.
- D'Amore, B. (1999b). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazione di Colette Laborde. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001a). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150–173.
- D'Amore, B. (2001b). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4–30.
- D'Amore, B. (2001c). Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos. *Uno*, 27, 51–78.
- D'Amore, B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Uno*, 35, 90–106. (Trabajo original publicado 2001).
- D'Amore, B. (2006a). Oggetti matematici e senso: Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 20(4), 557–583.
- D'Amore, B. (2006b). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical*

Thinking [Número especial]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(1), 177-195.

D'Amore, B. (2006c). *Didáctica de la matemática*. Con una carta de Guy Brousseau. Prefacio a la edición en idioma español de Luis Rico. Bogotá: Editorial Magisterio. (Trabajo original publicado en 1999).

D'Amore, B. (2007a). How the treatment or conversion changes the sense of mathematical objects. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education) (pp. 77–82). Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense: How semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23–45.

D'Amore, B. (2011). La ricerca in didattica della matematica: un esempio di ricerca. Oggetti matematici, trasformazioni semiótiche e senso. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 34AB(3), 255–266.

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 21(1), 87–92.

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2007b). Relationships between area and perimeter: Beliefs of teachers. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education) (pp. 383–396). Athens: New Technologies Publications.

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2008a). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis of this phenomenon. Roma, *Symposium on the occasion of the 100th anniversary of ICMI*, Marzo 2008. WG5: *The evolution of theoretical framework in mathematics education*. Recuperado de: www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008

D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2008b). The phenomenon of change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations: How other disciplines can be useful to the analysis. En A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education*. Proceedings of Conference of five

cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno (pp. 13–22). Nicosia, Cyprus: University of Cyprus.

- D'Amore, B., & Fandiño, M. I. (2008c). Change of the meaning of mathematical objects due to the passage between their different representations. En M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi & F. Arzarello (Eds.), *The First Century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008)*. Reflecting and shaping the world of mathematics education. Actas del homónimo Congreso (pp. 304-305). Roma: Instituto de la Enciclopedia Italiana. Colección *Scienza e Filosofia*.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(2), 177–212. doi: 10.12802/relime.13.1822
- De Saussure, F. (1915). *Cours de linguistique générale* (5ª ed., 1960). Paris: Payot.
- Duval, R. (1988a). Ecart sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 7–25.
- Duval, R. (1988b). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 57–74.
- Duval, R. (1988c). Graphiques et équations. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 1(1), 235–253.
- Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5(1), 37–65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(3), 349–382.
- Duval, R. (1998). Signe et objet (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6(1), 139–163.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355.

lori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica*. (Tesis de Doctorado, Universidad de Palermo, Italia). Recuperado de: <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/lori/lori.htm>

lori, M. (2017). Objects, signs and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics. A Duvalian perspective. *Educational studies in mathematics*, 94(3), 275-291. doi: 10.1007/s10649-016-9726-3.

Moreno Armella, L. (1999). Epistemologia ed Educazione Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 13(1), 43–59.

Perrin Glorian, M. J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, & P. Tavnignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France: Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 97–148). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant*. Neuchâtel-Paris: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J., & García, R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the learning of mathematics*, 22(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4–23.

Rojas, P. (2014). *Articulación de saberes matemáticos: representaciones semióticas y sentidos*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas: Bogotá (Colombia).

- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives* (Tesis Doctoral), Universidad de Palermo (Italia).
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational studies in mathematics*, 77 (2-3), 285-311.
- Speranza, F. (1997). *Scritti di epistemologia della matematica*. Bologna: Pitagora.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.
- Vygotsky, L. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Wertsch, J. (1993). *Voces de la mente*. Madrid: Visor.

Agradecimientos:

Expreso mi gratitud más sincera a Raymond Duval, paciente lector de precedentes versiones de este artículo, quien me sugirió diferentes modificaciones e integraciones, me aconsejó algunos textos que ahora aparecen en la bibliografía y quien, más en general, me dirigió y guió en este tipo de estudios.

Nota

Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación de relevante interés nacional de la Universidad de Bologna, Departamento de Matemática (financiación: 60% Universidad de Bologna, 40% Ministero dell'Università e della Ricerca): "Investigaciones acerca del funcionamiento del sistema alumno-maestro-saber: motivaciones de la falta de devolución".

La presente versión del texto reúne varios párrafos, cada uno ya publicados en diferentes artículos o informes de investigación, publicados en varios idiomas.