

## 1. Introducción

---

En el capítulo anterior se han presentado los conceptos de saber y conocimiento tal y como se conciben en la teoría de la objetivación. Este capítulo está centrado alrededor del concepto de aprendizaje.

En las teorías socioculturales que acuden a la participación para explicar el aprendizaje, la idea fundamental es que los individuos llegan a conocer cuando participan en prácticas sociales. Hay una intención explícita de ir más allá de las concepciones individualistas de la psicología y filosofía, en las que el individuo es la unidad de análisis y el foco de investigación.

La idea de participación fue desarrollada por Rogoff (1990), Lave (1988), y Lave & Wenger (1991), entre otros. Rogoff, por ejemplo, concibe el conocer como *aprendizaje*<sup>19</sup> en un contexto de participación guiada. Rogoff dice: “El concepto de participación guiada trata de mantener los roles del individuo y del contexto sociocultural en foco” (Rogoff, 1990, p. 18). Luego afirma que ella usa la analogía del aprendizaje “para enfocarme en cómo el desarrollo de habilidades implica aprendices activos que observan y participan en actividades culturales organizadas con la guía y el desafío de otras personas” (Rogoff, 1990, p. 19).

Para hablar del aprendizaje y el pensamiento como aprendizaje, Rogoff muestra cómo niños y padres realizan procesos sutiles de atención com-

---

19 N. del T. (Martín Eduardo Acosta Gempeler). Los términos *learning* y *apprenticeship* significan ambos aprendizaje. Pero *learning* se refiere al aprender en sentido general, mientras que *apprenticeship* se refiere a la relación entre un aprendiz y un maestro de un oficio determinado. En la edad media los oficios estaban organizados por gremios, y dentro de cada gremio (carpinteros, talladores de piedra, constructores...) existían los profesionales, los aprendices y los maestros. Quienes querían volverse profesionales conseguían un maestro que los contratara para hacer las tareas más duras, y se comprometía a cambio a mostrarles el oficio en la práctica: esa es la relación de aprendizaje (*apprenticeship*). En algunos países europeos aún perdura esta costumbre, de manera que los jóvenes que terminan la escolaridad obligatoria (noveno grado), pueden elegir entre seguir estudiando en un colegio para luego entrar a la universidad, o comenzar un aprendizaje (*apprenticeship*), durante el cual son empleados de un maestro en el oficio mientras aprenden de él. Para distinguir en español estos dos términos, utilizaremos la palabra aprendizaje en su acepción general, y cuando nos refiramos al *apprenticeship* utilizaremos una palabra subrayada: aprendizaje.

partida, y cómo con la ayuda de los adultos, los niños logran *insights* en las referencias sociales y las maneras de resolver problemas y responder a solicitudes sociales. El aprendizaje, sin embargo, sigue siendo finalmente un proceso cuya meta es adaptarse a las prácticas sociales.

A pesar de la gran variedad de nuevos conceptos que conlleva el enfoque de la participación, el aprendizaje parece como una clase de adaptación, al estilo de Piaget en el fondo. La diferencia está en que mientras para Piaget la adaptación se realiza por medio de mecanismos cognitivos generales (universales) y el entorno se concibe como algo “natural”, en el paradigma de participación el aprendizaje es la adaptación por medio de mecanismos sociales a un mundo de prácticas culturales. La intersubjetividad no es más que una relación basada en la comunicación, significados compartidos y atención conjunta. En la teoría de la objetivación, la intersubjetividad y el aprendizaje están íntimamente relacionados; la comunicación, los significados compartidos y la atención conjunta tienen un rol crucial. Pero, como lo veremos enseguida, el concepto crucial es la *conciencia* en un sentido Hegeliano-Marxista-Vygotskyano. Pero antes de hablar de esto, debemos hacer un comentario acerca de la idea de aprendizaje como interiorización.

## 2. Interiorización

---

La idea de interiorización o internalización fue elaborada por psicólogos como Pierre Janet (1929) y Vygotsky (1929) en la primera mitad del siglo 20. Es un constructo teórico para describir la relación entre el individuo y su entorno. Janet, por ejemplo, lo articuló en sus investigaciones sobre la personalidad y sostuvo que todas las leyes psicológicas tienen dos aspectos: uno exterior (que trata con otras personas) y uno interior (que trata con uno mismo). Casi siempre, dice, “este último es posterior al primero” (Janet, 1929, p. 288).

La interiorización constituye una de las ideas centrales de la teoría histórico-cultural de Vygotsky, formulada en los años 30 —aunque pueden encontrarse versiones implícitas en artículos anteriores, como el de 1929 “El desarrollo cultural del niño” (Vygotsky, 1929). La interiorización está íntimamente relacionada con el concepto de Vygotsky sobre el desarrollo humano y el rol que tienen los signos en este desarrollo. La interiorización hace operacional otro constructo teórico clave de la teoría histórico-cultural, la “ley genética de desarrollo cultural”. Vygotsky enunció esta ley de la siguiente manera: “Cada función [psíquica] aparece en el desarrollo cultural del niño dos

veces: primero, en el nivel social, y luego en el nivel individual” (Vygotsky, 1978, p. 57).

La idea de interiorización tiene sus propios problemas. Al caracterizar la relación entre el individuo y su contexto en términos de interiorización puede decirse que aún hay trazas de una forma de pensamiento dualista, que no puede resolver la famosa dicotomía entre lo interno y lo externo. Como pregunta Veresov, “¿Dónde está la diferencia o incluso el límite entre externo e interno?” (Veresov, 1999, p. 225).

Debemos recordar que la teoría de Vygotsky se desarrolló como un intento de superar las investigaciones reflexológicas e idealistas de su tiempo. Vygotsky se quejaba con frecuencia de que la psicología inspirada en la reflexología era una psicología del comportamiento sin mente, y que la psicología inspirada en el idealismo subjetivo (introspección, por ejemplo) era una teoría de la mente sin comportamiento. Siguiendo los pasos de Spinoza (1989), Vygotsky trataba de superar las teorías dualistas (teorías basadas en dos sistemas, el interno y el externo) y formular una teoría monista de la conciencia. Pero su esfuerzo no está exento de contradicciones. Veresov —considerado como uno de los especialistas contemporáneos más importantes de Vygotsky— dijo:

*¿Qué significa esencialmente abandonar el postulado de dos sistemas de existencia y a qué conclusiones y efectos lógicos conduce esto? Esto conduce lógicamente a un rechazo total de la idea de existencia de lo interno y lo externo y en consecuencia al rechazo radical del concepto de interiorización como mecanismo de origen de las estructuras internas de la conciencia. De hecho, el concepto de interiorización pierde todo sentido. (Veresov, 1999, p. 226)*

Los últimos trabajos de Vygotsky muestran su esfuerzo por superar esas dificultades (en particular su búsqueda de una definición amplia de significado). No voy a discutir esas ideas aquí, pues mi intención es únicamente mostrar que la teoría de Vygotsky, basada en la idea de interiorización, no está exenta de dificultades teóricas que tienen implicaciones en nuestras concepciones de aprendizaje.

### 3. Objetivación

---

Si concebimos el saber como *potencialidad* tal como lo sugerí anteriormente —como una secuencia de acciones codificadas histórica y culturalmente que se materializan continuamente en la práctica social—, el saber no

puede ser algo que se “posee” o se “alcanza”. El saber es más bien algo diferente de nosotros, algo que *encontramos*, que nos *objeta* (es decir, se nos opone). La *objetivación* es precisamente el proceso de reconocimiento de lo que nos objeta —sistemas de ideas, significados culturales, formas de pensamiento, etc.<sup>20</sup>

La objetivación, como podemos ver, enfatiza la idea de *alteridad* —la cualidad de no ser nosotros. En oposición a la definición estándar de ideas, según la cual estas nacen en nosotros y son parte de nuestra vida mental, para la teoría de la objetivación las ideas y formas de pensamiento existen independientemente de cada uno de nosotros. Desde un punto de vista filogenético, “El conocimiento, las destrezas y habilidades”, dice Mikhailov, “existen sin mí” (1980, p. 200). Los encontramos en el curso de nuestra vida como objetos externos.

En la *Lógica Sucinta*, Hegel dice:

*Es un error imaginar que los objetos que forman el contenido de nuestras ideas mentales vienen primero... Más bien el concepto es primero; y las cosas son lo que son por medio de la acción del concepto immanente en ellas. (Hegel, 2009, p. 329)*

El encuentro y reconocimiento de sistemas de pensamiento, significados culturales, etc.—su objetivación—, no es un proceso simple. En la Figura 9 vemos un chimpancé adulto llamado Yo rompiendo nueces de Coula. Con su mano derecha Yo coloca la nuez sobre el yunque y al mismo tiempo sostiene la piedra martillo con su mano izquierda, mientras los jóvenes chimpancés a derecha e izquierda lo miran atentamente. Los jóvenes chimpancés aún no dominan las habilidades motoras y conceptuales relativamente sofisticadas que se requieren para romper la nuez. Esas habilidades *ya existen en su cultura* y se convertirán en parte del repertorio de acción y reflexión de los jóvenes chimpancés después de un largo período de observación y práctica intensa.

De igual manera, mis estudiantes de segundo grado no necesariamente dominan las habilidades motoras y conceptuales, relativamente sofisticadas, necesarias para extender las secuencias aritméticas. Por ejemplo, un matemático identificaría sin dificultad los aspectos de los términos de la Figura 10 (ver capítulo anterior) que son relevantes para la tarea de generalización: probablemente vería los términos como divididos en dos filas y notaría rápidamente la relación *funcional* entre el número del término y el número de cuadrados en cada una de las filas. La percepción de esas relaciones

20 Más adelante daré una definición más operacional de la objetivación, después de introducir los conceptos necesarios.

variacionales normalmente es tan rápida que el matemático ni siquiera se da cuenta del trabajo complejo que hay tras ella. Nuestro matemático también extendería sin dificultad la propiedad identificada a otros términos que no están presentes en el campo perceptivo, como el término 100, y concluiría que ese término tiene  $100+101$  cuadrados, es decir 201 (ver Figura 14). O aún mejor, que el número de cuadrados de cualquier término, por ejemplo  $n$ , es  $2n+1$ .

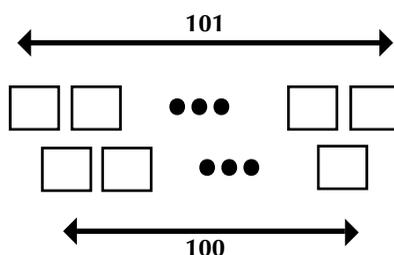


Figura 14. Imaginación rápida del término 100, para ojos entrenados, reportada con frecuencia.

El ojo novato no necesariamente ve la secuencia de esa manera. La Figura 15 muestra un ejemplo de cómo un estudiante de segundo grado extiende la secuencia más allá de los cuatro términos dados.



Figura 15. Términos 5 y 6 dibujados por un estudiante de grado 2.

El estudiante se enfoca en la *numerosidad* de los cuadrados, dejando en la periferia la *espacialidad* de los términos (Radford, 2011). No podemos decir que la respuesta del estudiante en la Figura 15 sea errónea. La respuesta tiene sentido para el estudiante, aunque probablemente es cierto que, al enfocarse en la numerosidad de los términos de la secuencia, puede resultar más difícil llegar a una fórmula general como  $2n+1$ . Esto es lo que hemos observado una y otra vez en nuestras investigaciones con estudiantes menores de escuela primaria y con estudiantes mayores (13-17 años). Los estudiantes tienden a utilizar métodos de ensayo y error que no son algebraicos, sino aritméticos (Radford, 2008, 2010).

El problema no radica en que los estudiantes no *ven* las dos filas de términos. En la Figura 16 a continuación, vemos un estudiante de segundo grado enfrentado por primera vez a una tarea de generalización del tipo dado en la Figura 10 (capítulo anterior); en la Figura 16 vemos al estudiante señalando con su bolígrafo la fila de arriba, luego la fila de abajo, después de mover el bolígrafo entre las filas para distinguirlas. Sin embargo, cuando el estudiante dibuja el término 5, la dimensión *espacial* de los términos es relegada a un segundo plano y no tiene un rol organizador en el dibujo del término. Dibuja una *hilera* de rectángulos. El problema radica más bien en la no identificación de que la espacialidad de los términos nos da claves interesantes desde el punto de vista algebraico.

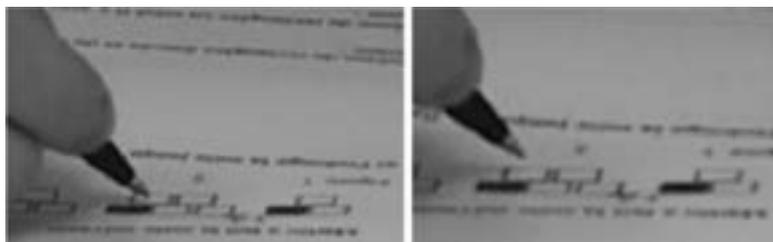


Figura 16. Un estudiante investigando la secuencia; pensando en voz alta, señala corporealmente la fila de arriba (izquierda) y la fila de abajo (derecha) del término 2.

Las formas de acción y reflexión codificadas culturalmente no son invocadas naturalmente por los estudiantes. Estas formas existen potencialmente, pero para los estudiantes estas permanecen irreconocibles y no identificadas. Son posibilidad sin actualización.

El aprendizaje consistirá precisamente en encontrar esas formas y “agarrarlas” como sugiere la etimología. En efecto, aprender viene de latín *apprehendere*, compuesto de dos prefijos: *ad*, que quiere decir *hacia*, y *prae-*, que quiere decir *antes*, y el verbo *hendere*, que quiere decir *atrapar*, *agarrar*. El aprendizaje es el encuentro con el saber y su transformación subjetiva en algo que aparece a la conciencia. Esta transformación es lo que llamo *objetivación*.

Hegel utiliza dos expresiones que pueden ayudar a aclarar el concepto de objetivación. El filósofo alemán usa la expresión “en sí” para referirse a algo puramente *potencial*. Se trata de las formas ideales que mencioné anteriormente. Son lo que son: pura posibilidad de acción y reflexión en un determinado punto histórico y cultural. Pueden ser las formas de acción y

reflexión codificadas del matemático o las formas codificadas del chimpancé para romper nueces. Cuando encontramos y tomamos conciencia del saber “en sí”, nuestra conciencia se transforma y “captura” el saber “en sí” como algo determinado desde el punto de vista de la conciencia del sujeto concreto, como algo significativo desde su punto de vista subjetivo. Lo “en sí” se vuelve actualidad, un “ser para la conciencia”, y esto es lo que Hegel llama “ser para sí” (Hegel, 2009).

En el proceso de aprendizaje, la forma ideal (lo “*en sí*”) se actualiza. El “para sí” se convierte en la materialización subjetiva del “en sí”. El “para sí” aparece como la forma desarrollada del “en sí”, y en donde el primero encuentra y se reconoce en el segundo y el segundo en el primero (Gardener, n. d.). Esta transformación del “en sí” en “para sí” en el acto de aprendizaje no significa, sin embargo, un acto de sumisión o de subordinación. Su autenticidad legítima exige, en efecto, un espacio de disidencia. *El aprendizaje es el reconocimiento del saber “en sí”, no su adopción incondicional.* Es por eso que, desde la perspectiva crítica que proponemos aquí, el aprendizaje y la enseñanza son vistos como procesos subversivos.

En la próxima sección trataré de dar una definición más operativa de objetivación.

#### 4. Aprendizaje como objetivación

---

En la teoría de la objetivación, el aprendizaje se teoriza como *procesos de objetivación*, es decir, aquellos procesos sociales de volverse, progresivamente y críticamente, consciente de una forma codificada de pensamiento y de acción —algo que notamos gradualmente y al mismo tiempo adquiere significado. Son procesos de objetivación aquellos actos de notar significativamente algo que se revela a la conciencia por medio de nuestra actividad corpórea, sensorial y artefactual. Es el *notar* o *percibir* algo (lo “en sí”) que se revela en la intención emergente proyectada en los signos o en el movimiento kinestésico, en el curso de la actividad práctica concreta —la revelación del “en sí” que se convierte en “para sí” en el curso de su aparición y por lo tanto se transforma en conocimiento *para nosotros*.

Pero en el curso de esta transformación del “en sí” en “para sí”, también se transforma la conciencia. Por eso, para la teoría de la objetivación, el aprendizaje no sólo se refiere al conocer, sino también al devenir. Aprender no es una simple imitación o participación consistente con una práctica pre-establecida. Aprender no es la *integración* del sujeto a un mundo que le es

exterior y extraño, como sugieren las corrientes socioculturales que adoptan el punto de vista de la enculturación. Aprender tampoco es un proceso de inserción del mundo en la interioridad del sujeto, como sugiere el concepto vygotskiano de interiorización. Para la teoría de la objetivación, aprender es más bien la fusión entre modos culturales de reflexionar y actuar y una conciencia que trata de percibirlos (Radford, 2007, pp. 1790-91). Aprender es un encuentro continuo y tenso de transformación dialéctica mutua entre un mundo objetivo (es decir que trasciende al individuo como individuo único) e individuos únicos que lo encuentran. En el curso de esa fusión, el mundo que encuentra la conciencia y la conciencia que surge de ese encuentro se transforman continuamente. Es por ello que los procesos de objetivación están imbricados en *procesos de subjetivación* –procesos de creación de un sí particular (y único).<sup>21</sup>

El lector habrá notado que, subyacente al concepto de aprendizaje que propone la teoría de la objetivación, hay un concepto particular de *conciencia*. La conciencia no es considerada en la teoría de la objetivación como un constructo metafísico oculto en alguna parte en una presunta interioridad con la que todos habríamos nacido. Esta metáfora de la interioridad fue inventada a finales de la Antigüedad. Fue desarrollada por Agustín en un contexto religioso y articulada posteriormente por Descartes y su famosa visión dicotómica del mundo: el interior (mente, ideas, conciencia, etc.) y el exterior (el mundo concreto) (Taylor, 1989).

Para la teoría de la objetivación, la conciencia es una reflexión subjetiva y posicionamiento propio sobre el mundo externo. La conciencia es el proceso subjetivo emocional, afectivo, por medio del cual cada uno de nosotros como individuo reflexiona sobre el mundo y se orienta en él. Esta reflexión no es contemplativa. La conciencia individual es una forma específicamente humana de reflexión subjetiva sobre la realidad concreta, durante la cual formamos sensibilidades culturales para ponderar, reflexionar, comprender, disentir, objetar y sentir a los otros, a nosotros mismos y a nuestro mundo. La conciencia sólo puede entenderse como el producto de relaciones y mediaciones histórico-culturales emergentes y contingentes, que no son dadas, sino que “surgen durante el establecimiento y el desarrollo de la sociedad” (Leont’ev, 1978, p. 79) Desde este punto de vista, la conciencia aparece en la vida concreta, no como su origen, sino como su resultado.

Resumiendo, en esta sección y la anterior introduce el concepto de objetivación. Comencé presentándolo como una forma de *encuentro* con sistemas de pensamiento y sus significados culturales, sistemas y significados que

---

21 Hablaremos con mucho más detenimiento de los procesos de subjetivación en el próximo capítulo.

antecedan nuestra aparición en el mundo. Luego, refiné el concepto como la transformación del saber “en sí” en un saber “para sí” (en la terminología propuesta, el saber “para sí” es otro término para designar el conocimiento) y observé que esta transformación equivale a la creación y el crecimiento continuo de la conciencia del individuo: la objetivación es un proceso social a través del cual el individuo progresivamente se hace críticamente consciente de las formas codificadas de pensar y hacer; durante dicho proceso se forma y se transforma la conciencia. En la siguiente sección me centraré en algunos aspectos de la investigación práctica y metodológica de la objetivación.

## 5. Investigar la objetivación

---

La investigación de la objetivación se enfoca en la manera en que las formas cultural e históricamente codificadas de pensamiento y acción se convierten en objetos de reconocimiento u objetos de conciencia. Dado el rol mediador que tiene la actividad entre el saber y el conocimiento, la actividad es un componente clave de la investigación del proceso de objetivación. La actividad no puede reducirse a la cultura material. Los materiales y artefactos concretos no pueden revelar la conceptualidad que el trabajo humano ha depositado en ellos. La cultura material (artefactos, símbolos, etc.) tiene que integrarse en una *actividad* para hacer aparente la conceptualidad de la cual la cultura material es portadora.

Por ejemplo, en grado 4, dimos a los estudiantes (9-10 años) fichas de bingo para abordar un problema en el que tenían que tratar una secuencia aritmética. El problema se planteó así:

*Para su cumpleaños, Marc recibió una alcancía con un dólar. Cada semana ahorra dos dólares. Al final de la primera semana tiene tres dólares; al final de la segunda semana tiene cinco dólares y así sucesivamente.*

Les dimos a los estudiantes fichas de bingo de dos colores (azul y rojo) y vasos de plástico numerados que representan la alcancía en la semana 1, 2, etc., para que los estudiantes pudieran modelar el proceso de ahorro hasta la semana 5. Luego se les pidió que generalizaran: tenían que responder preguntas sobre la cantidad de dinero ahorrado en las semanas 10, 15 y 25.

Los estudiantes comenzaron modelando el proceso de ahorro a la manera de la “situación real”: colocaron fichas en los vasos (tres fichas en el vaso de la semana 1, etc.). Aunque el modelo era plausible, resultó de poca utilidad

para responder las preguntas sobre la cantidad de dinero ahorrado en semanas lejanas (como la 25). De hecho, las fichas se revolvían en los vasos, dificultando la identificación de una estructura matemática posible. La atención de los estudiantes se dirigió a las acciones aditivas secuenciales (añadir dos fichas) que permanecieron no sintetizadas en una estructura multiplicativa más abstracta. Los artefactos eran insuficientes para ayudar a los estudiantes a revelar la conceptualidad general que estábamos buscando. Los artefactos eran portadores de un contenido conceptual cotidiano distante del contenido teórico-algebraico. En cierto momento, los estudiantes terminaron poniendo las fichas en los vasos sin notar ninguna estructura algebraica; el profesor estaba en el proceso de hablar a otro grupo en otro punto del salón. Yo me quité los audífonos, dejé la cámara con la que estaba grabando estos tres estudiantes y me acerqué a ellos. El grupo estaba formado por Albert (el alumno con el brazo estirado en la Figura 17 a la derecha), Krysta (en medio) y Manuel (izquierda). Les sugerí que pusieran las fichas frente a los vasos. Los estudiantes aceptaron mi sugerencia y comenzaron a apilarlas sin distinguir los colores. Luego, les propuse que usaran una ficha azul para representar el dólar inicial en la alcancía. Al seguir esta sugerencia los tres estudiantes crearon un modelo del proceso de ahorro (ver Figura 17).



Figura 17. Modelado de una secuencia aritmética con fichas.

La nueva disposición del material concreto ayudó a los estudiantes a comprender mejor el proceso de ahorro. Sin embargo, no identificaron una fórmula para calcular el ahorro en semanas remotas (como la 15 o la 25) (ver Radford & Roth, 2011). El saber algebraico no apareció revelado a la conciencia de los estudiantes.

El problema es que las formas codificadas de pensamiento (en este ejemplo las formas algebraicas de pensar codificadas culturalmente y relativas a secuencias numéricas) no pueden materializarse o actualizarse directamente. La actualización del saber algebraico está mediada por una actividad (es lo que

afirma el diagrama de la Figura 12 del capítulo anterior). El único camino para revelar el saber algebraico es a través de las características de la *actividad* en la que aparece el saber en una forma desarrollada actual. Claro, podríamos recurrir a la actividad que subyace a la enseñanza tradicional: el profesor podría simplemente decir a los alumnos cómo resolver el problema. Aunque posible, esta actividad es muy pobre. No incluye al alumno, más que como observador pasivo. El tipo de toma de conciencia que se desprende de una actividad de ese género es, en consecuencia, también muy pobre. No es ese el género de actividad al que nos queremos referir aquí.

El concepto de actividad que queremos privilegiar abarca mucho más que personas interactuando entre ellas. Es más que un *milieu* de interacción con personas y artefactos. Es una forma de vida, algo orgánico y sistémico, un evento creado por una *búsqueda común* —es decir una búsqueda con otros— de la solución a un problema planteado, búsqueda que es al mismo tiempo cognitiva, emocional y ética. Para que ocurra aprendizaje, el ámbito de lo posible o potencial tiene que aparecer en una manifestación concreta en la conciencia de los estudiantes. Esto requiere una actividad específica que hace que ese saber algebraico aparezca en el mundo concreto, para que el saber quede dotado de un contenido conceptual particular (ver Figura 12). Se trata de una actividad que requiere que el profesor y los estudiantes se impliquen en algún tipo de reflexión y acción que presente el contenido conceptual algebraico que se busca, de manera que la potencialidad se materialice de manera conceptualmente fuerte. Para investigar la objetivación, debemos pues investigar la actividad en la que ésta se encuentra subsumida.

En la próxima sección voy a presentar la estructura de la actividad.

## 6. La estructura de la actividad

---

### ***La componente $\Phi$ (o componente didáctica)***

La actividad que ocurre en el aula de matemáticas tiene un *objeto*. Dicho objeto es identificado, a priori, por el proyecto didáctico del profesor. Este objeto puede ser, por ejemplo, el encuentro de los estudiantes con formas culturalmente codificadas de pensar algebraicamente sobre secuencias. Puede ser también el encuentro con formas culturalmente codificadas de pensar matemáticamente sobre el movimiento, sobre las fracciones, etc. En todos los casos, mientras el saber es pura posibilidad, la actividad que lo media es un paso hacia la concreción de ese saber. La actividad (que es *sistema en movimiento*) se mueve hacia su *objeto*.

Para que la actividad se despliegue en la dirección de su objeto, conviene identificar una o más *metas*. Estas metas pueden ser, si continuamos con nuestro ejemplo de álgebra, resolver problemas sobre secuencias de manera algebraica. Para alcanzar las metas de la actividad, conviene que se conciban *tareas* específicas. Éstas pueden aparecer como una secuencia de problemas relacionados de dificultad conceptual creciente.

La estructura *objeto-meta-tarea* corresponde a la componente  $\Phi$  que podemos añadir a nuestra Figura 12a del capítulo anterior y que da como resultado la Figura 18. La relación  $\Phi$  está relacionada con la intención pedagógica de la actividad de clase. En el caso de la teoría de la objetivación, esta componente implica un análisis epistemológico del contenido matemático que complementamos con un *análisis a priori* (Artigue, 1995, 2009).

### La actividad propiamente dicha

La actividad propiamente dicha es el proceso que *actualiza* la potencialidad en una actualización que es siempre individual o singular. Expresémosla con la letra griega  $\Theta$  en la Figura 18.

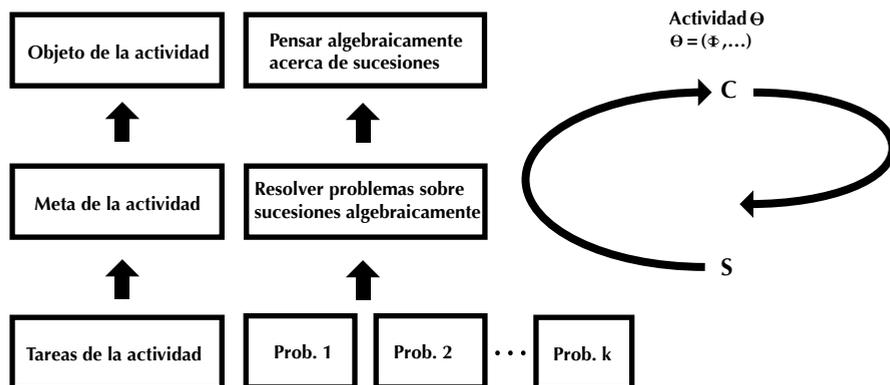


Figura 18. La estructura de la actividad: la actividad  $\Theta$  es función del proyecto didáctico  $\Phi$  y otras variables.

Miremos en mayor detalle la actividad  $\Theta$ . La actividad  $\Theta$  que actualiza el saber  $S$  en un conocimiento,  $C$ , es un proceso sujeto a cambio: es lo que la discontinuidad de las flechas sugiere. En otras palabras, si bien es cierto que la actividad media  $S$  y  $C$ ,  $S$  y  $C$  median también a la actividad. Esta mediación recíproca es precisamente el significado de la naturaleza de los elementos en un proceso dialéctico.

La actividad es un proceso situado en el espacio y el tiempo que, aunque afectado por el proyecto didáctico  $\Phi$ , no puede determinarse por anticipado. Los profesores e investigadores pueden tener una idea, pero el proceso no es mecánico ni determinístico. Depende de cómo los estudiantes y profesores se implican en la actividad, de cómo responden unos a otros, de sus relaciones dinámicas al saber en general y a las instituciones, etc.

En el caso de la teoría de la objetivación, normalmente identificamos ‘momentos’ en la actividad. En general, dividimos la clase en pequeños grupos de dos, tres o cuatro estudiantes. El primer ‘momento’ es una presentación de la actividad por parte del profesor (ver Figura 19). Luego, los estudiantes trabajan en grupos pequeños. Luego, el profesor visita los grupos y hace preguntas a los estudiantes, les da retroalimentación, etc. (ver “discusión profesor-estudiantes” en la Figura 19). En determinado momento, el profesor puede invitar a la clase a una discusión general en la que los grupos pueden presentar sus ideas y otros grupos pueden interpelarlos críticamente o hacer sugerencias para mejorar o generalizar (ver “discusión general” en la Figura 19). La clase puede terminar allí o continuar nuevamente en grupos pequeños, etc.<sup>22</sup>



Figura 19. La actividad  $\Theta$  y algunos de sus ‘momentos’.

La objetivación ocurre cuando los estudiantes y el profesor, a través de su actividad práctica conjunta, revelan el saber, es decir lo transforman de saber “en sí” en conocimiento, es decir, en saber “para sí”. En otras palabras, cuando hacen aparecer en el singular que lo materializa la conceptualidad buscada del saber. Aquí la objetivación ocurre cuando el singular —es decir,

22 Otro momento puede incluir discusiones entre grupos, como sugerimos al final del capítulo 6.

eso que se revela a la conciencia— actualiza una forma algebraica de mirar la secuencia de ahorro. En nuestro ejemplo, después de que los estudiantes terminaron de modelar las fichas de bingo como se muestra en la Figura 17, enfrentaron la pregunta del ahorro en la semana 10. Los estudiantes sugirieron doblar los ahorros de la semana 5 y retirar una de las fichas azules (ver Figura 20).

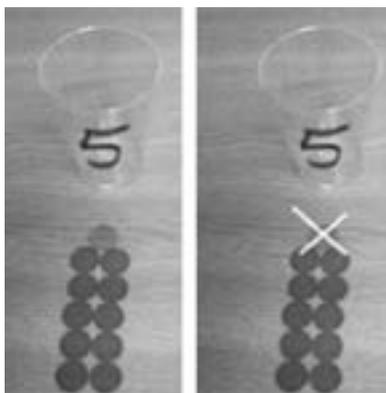


Figura 20. La estrategia de los estudiantes para calcular los ahorros en la semana 10.

Así que, en lugar de la expresión esperada  $10 \times 2 + 1$ , los estudiantes sugieren  $11 + 10$ . Cuando la profesora Giroux intervino en el grupo, Krysta estaba ayudando a Manuel quien estaba escribiendo en la guía de la actividad. La profesora Giroux tomó el quinto vaso (imagen 1 en la Figura 21; nótese que no aparece el primer vaso) y le dijo a Albert:

1. Profesora Giroux: ¿qué hicieron aquí? 5... (señalando las fichas rojas; ver imagen 2 en la Figura 21) ¿veces...?
2. Albert: ...2
3. Profesora Giroux: (Señalando la ficha azul; ver imagen 3) ¿más?
4. Albert: 1

Luego la Profesora Giroux tomó el vaso de la semana 5, lo movió a su izquierda a un lugar donde se esperaba que estuviera el de la semana 10 si se hubiera extendido materialmente la secuencia y preguntó:

Profesora Giroux: ¿Qué harían para la semana 10, si estuviera aquí? (ver imagen 4).

Albert no dijo la expresión esperada. Tanto el profesor como el estudiante estaban muy tensos en ese momento (ver imagen 5). La Profesora Giroux recomienza:

5. Profesora Giroux: *(tomando de nuevo el vaso de la semana 5) ¿Qué hicieron aquí?* (imagen 6).
6. Albert: *(toma una larga inspiración y golpea el escritorio con el bolígrafo, mientras la Profesora Giroux sostiene el vaso de la semana 5; ver imagen 7) Ok.*
7. Profesora Giroux: *(aún sostiene el vaso, pronuncia suavemente) 5...*
8. Albert: *(en sincronía con el gesto de la Profesora Giroux que señala al lado de las fichas rojas; ver imagen 8) veces 2...*
9. Krysta: *(que ha estado siguiendo la discusión) veces 2 igual...*
10. Profesora Giroux: *(Señala ahora la ficha azul; ver imagen 9) más 1.*
11. Albert: *(Casi al mismo tiempo) más 1.*
12. Profesora Giroux: *(Señalando ahora un espacio vacío donde iría la semana 10; ver imagen 10) ¿10?*
13. Albert: *(la Profesora Giroux señala en silencio el lugar donde deberían estar las fichas rojas; imagen 11) veces 2.*
14. Krysta: *(al mismo tiempo) veces 2.*
15. Profesora Giroux: *(señala en silencio el lugar donde debería estar la ficha azul; ver imagen 12)*
16. Krysta: *más 1.*
17. Albert: *(mira a la profesora) ¿menos 1?, ¿veces 2, menos 1?, ¿más 1?*

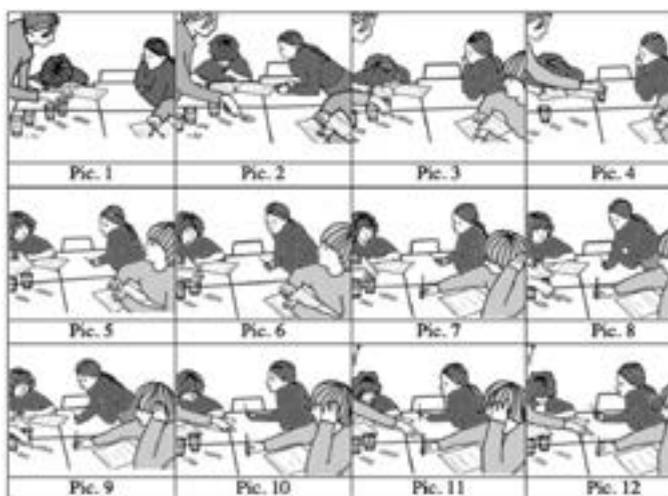


Figura 21. Imágenes 1-12 La profesora Giroux y Albert trabajando juntos.

En el número 5 la profesora invita a Albert a buscar de nuevo la fórmula o secuencia de cálculos para el ahorro. Pregunta: “¿qué hicieron aquí?” (frase 5, imagen 6). Albert demuestra aceptación de la invitación de la profesora con todo su cuerpo: Toma una profunda inspiración y golpea el escritorio con su bolígrafo (imagen 7). La manera como la profesora plantea sus preguntas anima: da a entender que Albert puede resolver el problema pero no se ha fijado lo suficiente en lo que marca la configuración de las fichas y no ha notado lo que se espera que vea —es decir, la estructura matemática desde un punto de vista algebraico.

Está implícito que la profesora conoce esa estructura algebraica. Pero no basta con saberla. No basta porque la profesora no puede inyectar esa estructura en la conciencia del estudiante. Para que el saber aparezca en lo que llamamos en el capítulo anterior una forma singular desarrollada, *tanto el estudiante como el profesor tienen que trabajar juntos*. El profesor y el estudiante deben implicarse en un proceso de objetivación. Sucederá cuando el saber buscado, encarnado en la forma singular desarrollada, abandone el ámbito de la atención latente, deje de ser saber “en sí”, y cruce la frontera de la atención explícita en la conciencia de Albert para convertirse en conocimiento (es decir, en un saber “para sí”). Pero Albert y la profesora no han llegado allí.

A pesar del resultado no concluyente de la interacción en las líneas 4-5 del diálogo, en 5 la profesora comienza de nuevo una acción conjunta con una palabra invitadora: “cinco”, que pronuncia mientras sostiene el quinto vaso. Sin hablar, mueve la mano para señalar las fichas rojas (ver imagen 8). La voz de Albert llena el espacio del silencio de la profesora. Dice “veces dos”. La profesora apunta entonces a la ficha azul (imagen 9) y dice, casi al mismo tiempo que Albert, “más 1”. Luego mueve su mano al punto donde debería estar el modelo de la semana 10 (imagen 10) y dice suavemente “¿10?” Sin hablar señala la posición imaginaria de las fichas rojas (imagen 11), mientras Albert mira la mano dice “veces 2” (ver imagen 13). La profesora mueve la mano en silencio para señalar la posición imaginaria de la ficha azul (ver imagen 12) y Albert dice “¿menos 1? ¿Veces 2 menos 1? ¿Más 1?”.

En este punto de la actividad, el encuentro de Albert con el saber algebraico casi se ha dado. Albert aún tiene que controlar mejor los diferentes elementos de la fórmula. No le tomará mucho tiempo. Unos minutos más tarde la profesora organizó una discusión general. Invitó a varios estudiantes a presentar sus ideas. En cierto momento le pidió a Albert que explicara los cálculos para determinar la cantidad de dinero al final de la semana 2. A este punto, la profesora no está segura que Albert haya ya tomado nota de

todos los elementos de la fórmula buscada. Albert tampoco. Pero acepta la invitación y responde con cierta vacilación:

18. Albert: (*refiriéndose a la segunda semana*) es 2, la segunda semana, es dos veces porque se añadieron 2 eh, dólares...
19. Profesora Giroux: Bien...
20. Albert: y uno, más uno, como uno.
21. Profesora Giroux: bien... haz lo mismo para la semana 4. La misma idea, 4.
22. Albert: 4 veces 2...
23. Profesora Giroux: 4 veces 2 porque es el doble...
24. Albert: más uno, 4 veces 2 más uno igual... 9.

La clase terminó en ese momento. Al día siguiente, los estudiantes de esta clase trabajaron sobre un problema isomorfo. Esta vez la alcancía tenía 6 dólares cuando Marianne la recibió y ahorró \$3 por semana, de manera que al final de la primera semana tenía \$9, al final de la segunda semana tenía \$12, y así sucesivamente. Mientras hablaba con sus compañeros sobre cómo calcular el ahorro al final de la semana 10, Albert dijo: "añade 3 dólares cada semana. Así que lo haremos así, 3 veces 10 es 30 [más 6] es 36. Sí, es 36".

En un largo proceso de objetivación, Albert reconoció progresivamente la estructura matemática general subyacente al proceso de ahorro. Albert fue capaz de extender la forma culturalmente codificada de conocimiento, que era la meta de esas clases de matemáticas, a nuevas situaciones durante una evaluación que se realizó a toda la clase más de una semana después de terminadas las clases de álgebra. En la evaluación se pedía encontrar una expresión para el término 25 de la secuencia de la Figura 22.

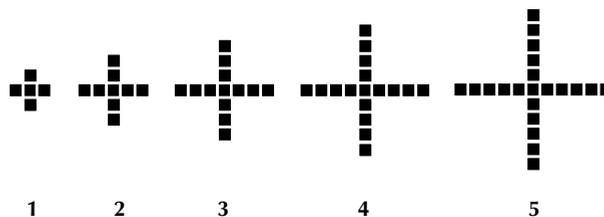


Figura 22. Una secuencia en una evaluación que se hizo a los estudiantes más de una semana después.

La respuesta de Albert fue:  $25 \cdot 4 + 1$ . Incluso hizo algo más, pues sugirió la siguiente fórmula para cualquier término de la secuencia:

$$\underline{\quad} \cdot 4 + 1 = \underline{\quad}$$

En sus palabras, la primera línea “es para poner el número del término”. El número 4 significa “el número de cuadrados que se añaden cada vez. El número 1 es el primero con el que se empezó”. La segunda línea “es la respuesta”.

Se produjo aprendizaje. El saber cultural “en sí” se transformó en saber “para sí”, transformándose al mismo tiempo en conocimiento *para Albert*. Esta transformación conlleva una nueva forma de percibir, hablar, y tratar conceptualmente con secuencias— una nueva forma de conciencia cuyo contenido emocional aparece claramente en la duda que expresa Albert en la línea 17 del diálogo anterior y que luego se reemplaza por una manera segura de calcular. La objetivación, o la transformación del saber “en sí” en un objeto de conciencia, no es el resultado de acciones individuales, ni el resultado de una contemplación. La transformación es el resultado de una actividad sensible, material y conjunta—una actividad a la que se arriesgaron Albert y la Profesora Giroux. Aprender siempre es un esfuerzo riesgoso, pues requiere que dejemos la comodidad de nuestro propio nicho solipsista para dirigirnos a algo que no es nosotros, una región desconocida donde sin embargo podemos hacer nuestro hogar.

Por supuesto, aún hay muchas cosas por aprender, pues aprender no es un estado sino un proceso. Por eso hablamos de la objetivación como un momento en la constitución de la conciencia, no como un “estado”.

## 7. Síntesis

---

En este capítulo he presentado un concepto clave de la teoría de la objetivación: el concepto de aprendizaje. Sostuve que el saber es una forma de reflexión cultural e históricamente codificada. Estas formas codificadas se nos presentan como simples potencialidades. A través de su actualización, esas formas codificadas, generales, adquieren un contenido conceptual. Este contenido conceptual actualizado o materializado es el conocimiento. Pero el contenido conceptual no es algo no mediado. Para ganar actualidad, para ser real, el contenido conceptual debe aparecer en una *actividad*. En otras palabras, la forma como llegamos a conocer está determinada (no de manera causal, sino dialéctica) por la actividad por medio de la cual se materializa el saber. Esta consustancialidad del conocimiento y la actividad se refleja en la manera en que las formas y modos de interacción social, culturales, materiales e ideales, que están a la base de la actividad, imprimen su marca en el contenido conceptual actualizado. Ésta es una de las ideas centrales

expuestas aquí y que son distintivas de la teoría de la actividad en general (Leont'ev, 1978) y de la teoría de la objetivación en particular.

Pero a causa de la naturaleza mediada inherente al conocimiento, conocer no es un proceso directo. Aquí es donde entra en escena el aprendizaje. Conocer necesita aprendizaje. En la teoría de la objetivación, el aprendizaje se concibe como el encuentro consciente y deliberado con formas histórica y culturalmente codificadas de pensamiento y acción. Más precisamente, el aprendizaje se describe como procesos de objetivación. Dichos procesos se definen como procesos de actividad por medio de los cuales el saber “en sí” adquiere una forma particular desarrollada —la única manera de convertirse en objeto de conciencia, y por lo tanto en conocimiento para nosotros (saber “para sí”).

El ejemplo discutido en la última sección ilustra estas ideas. Presentamos a estudiantes de grado 4 una serie de tareas (de ahorro) de dificultad creciente, cuya meta era la actualización de una forma codificada de pensar que reconocemos como algebraica. Esta forma de pensar es pura potencialidad. No puede aparecer de la nada. Sólo puede actualizarse, es decir, llenarse con contenido teórico, por medio de una actividad  $\Theta$  que la materializa. Nuestro diseño didáctico favoreció un contenido teórico en el que se buscaba una fórmula generalizada por medio de la mediación de vasos, fichas, papel, bolígrafo y formas elaboradas de interacción social—nuestra componente  $\Phi$  (ver Figura 18).

Los extractos presentados muestran que la forma codificada de pensamiento, al comienzo pasó desapercibida para los alumnos, que recurrieron a formas aritméticas de generalización. Para que pudieran notar las formas de pensamiento algebraico, la actividad de clase tiene que evolucionar de manera que las formas algebraicas de pensar se conviertan en objetos de conciencia, es decir sean *reconocidas*. Primero, esto conlleva la superación de la diferencia, en el devenir conjunto del “Yo” y el “eso”. Según Heidegger, “Reconocer es *re-conocer*= *diferenciar*, es decir, algo como eso y eso, y por lo tanto entender eso como “eso mismo” (Heidegger, 2004, p. 16; cursiva en el original).

Ese “eso” que aún-no-es-nosotros aparece tímidamente en las frases 5 y 6, cuando Albert comienza a notar que puede haber una manera diferente de *ver* las fichas. Empieza una diferenciación, es decir un reconocimiento. El siguiente intercambio intensivo entre la Profesora Giroux y Albert, en el que realmente trabajan juntos, condujo a una materialización de la forma codificada de pensamiento. Por medio de un proceso conjunto de objetivación en el que las fichas de bingo y otros objetos materiales, los gestos de

la profesora y las palabras de Albert aparecen juntos y forman una *unidad*, la forma codificada de pensamiento algebraico aparece en la conciencia dotada de un contenido teórico específico. Este contenido teórico singular no se aplica solamente a este o aquel problema de alcancía, de la misma manera en que el saber romper nueces no se aplica a esta o aquella nuez. Albert es capaz de aplicarlo también a otros problemas, como el problema abordado durante la evaluación, que no tiene nada que ver con ahorro. La forma singular desarrollada que encarna al general es en realidad una *totalidad*. Y cuando es totalidad ocurre el aprendizaje.

## Referencias

---

- Artigue, M. (1995). The role of epistemology in the analysis of teaching/learning relationships in mathematics education. In Y. M. Pothier (Ed.), *Proceedings of the 1995 annual meeting of the Canadian mathematics education study group* (pp. 7-21). University of Western Ontario.
- Artigue, M. (2009). Didactical design in mathematics education. In C. Winslow (Ed.), *Nordic research in mathematics education. Proceedings of NORMA08*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Gardener, S. (n.d.). Hegel: Glossary. Retrieved from <http://philosophyfaculty.ucsd.edu/faculty/ewatkins/Hegel-Glossary.pdf>.
- Hegel, G. (2009). *Logic*. (W. Wallace, Trans.). Pacifica, CA: MIA. (Original work published 1830)
- Heidegger, M. (2004). *On the essence of language*. New York: SUNY. (Original work published 1999)
- Janet, P. (1929). *L'évolution psychologique de la personnalité* [The psychological evolution of personality]. Paris: Masson.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

- Mikhailov, F. T. (1980). *The riddle of the self*. Moscow: Progress Publishers.
- Radford, L. (2007). Towards a cultural theory of learning. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the fifth congress of the european society for research in mathematics education (CERME-5)* (pp. 1782-1797). Lamaca, Cyprus.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - the International Journal on Mathematics Education*, 40(1), 83-96. Doi:10.1007/s11858-007-0061-0
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19. Doi: 10.1080/14794800903569741
- Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In *Proceedings of the 35th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara: PME.
- Radford, L., & Roth, W.-M. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: An activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2-3), 227-245. Doi: 10.1007/s10649-010-9282-1
- Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking*. Oxford: Oxford University Press.
- Spinoza, B. (1989). *Ethics including the improvement of the understanding*. (R. Elwes, Trans.). Buffalo: Prometheus. (Original work published 1667)
- Taylor, C. (1989). *Sources of the self*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Veresov, N. (1999). *Undiscovered Vygotsky. Etudes on the pre-history of cultural-historical psychology*. Frankfurt: Peter Lang.
- Vygotsky, L. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, 36, 415-434.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society*. Cambridge, Ma: Harvard University Press.

## ***Agradecimientos***

Este capítulo retoma ideas presentadas previamente en mi artículo *Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning*, publicado en la revista abierta (open journal) *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44, 2013. Este capítulo está basado en las traducciones al español realizadas por Rodolfo Vergel Causado y Martín Eduardo Acosta Gempeler, a quienes agradezco profundamente su ayuda. También agradezco a Alfonso Ulises Salinas Hernández por su relectura y comentarios.