

Línea de Investigación en Tecnología y Didáctica de la Geometría

Martín Acosta, Grupo Edumat, Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Leonor Camargo, Grupo Didáctica de la Matemática, Universidad Pedagógica Nacional

Documento de trabajo

Febrero 19 de 2014

1. Presentación

El presente documento presenta la línea de Investigación Tecnología y Didáctica de la Geometría con la cual se pretende apoyar la cohorte 2014 del Doctorado Interinstitucional en Educación. Partimos de unas preguntas generales sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Luego presentamos cuatro marcos de referencia con los cuales abordar estudios investigativos en la línea y sugerimos opciones de interrogantes para las tesis de estudiantes de doctorado.

2. Preguntas generales

La línea de Investigación Tecnología y Didáctica de la Geometría se enmarca dentro de una problemática general acerca del uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. A partir de constructos teóricos, marcos de referencia (originales o adaptados) y herramientas metodológicas, intenta responder, entre otras, las siguientes preguntas generales:

- ¿Qué efecto tienen las tecnologías informáticas en la naturaleza del conocimiento matemático que se construye con el apoyo de éstas?
- ¿Cómo diseñar un currículo de matemáticas que aproveche el potencial de las tecnologías informáticas?
- ¿Cómo transformar las prácticas de enseñanza de las matemáticas por medio de la introducción de tecnologías informáticas?
- ¿Cuáles características de las tecnologías informáticas favorecen el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Qué condiciones institucionales (infraestructura, administración, disponibilidad de recursos matemáticos y didácticos, formación, etc.) deben tenerse en cuenta para favorecer el uso de la tecnología informática en la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuáles son las dificultades que enfrentan los profesores de matemáticas que quieren utilizar las tecnologías informáticas para enseñar?

- ¿Qué elementos deben tenerse en cuenta al formar profesores de matemáticas para la utilización de las tecnologías informáticas?

La expresión “tecnologías informáticas” agrupa un amplio rango de recursos tales como: ejercitadores, tutoriales, páginas web, applets, animaciones, blogs, foros, redes sociales, plataformas educativas, espacios virtuales, videos, software especializado para la enseñanza de las matemáticas, software que se puede adaptar a la enseñanza de las matemáticas y software especializado para matemáticas. En la línea de investigación Tecnología y Didáctica de la Geometría actualmente privilegiamos los estudios centrados en el uso de software especializado para la enseñanza de la geometría. Por tal razón, en las descripciones de los marcos de referencia incluimos alusiones específicas a los programas de geometría dinámica y las preguntas que proponemos para la realización de trabajos de doctorado, cohorte 2014, concretan las preguntas generales en este ámbito.

3. Marcos de referencia

A continuación presentamos cuatro marcos conceptuales que hemos usado en la investigación sobre el uso de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en relación con las preguntas listadas. De cada uno hacemos inicialmente referencia a los planteamientos que se hacen sobre la naturaleza de la actividad matemática, cómo se concibe el aprendizaje y cómo se propone la enseñanza. Después nos centramos en cómo se ve el uso de la tecnología en cada marco y formulamos algunas preguntas de investigación que pueden plantearse en tesis doctorales.

3.1. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

Concepción epistemológica de las matemáticas

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) es una continuación y una ampliación de la Teoría de la Transposición Didáctica que se caracteriza por una voluntad de no asumir el saber matemático como transparente, objetivo y universal, sino por el contrario asumir como una tarea de la didáctica de las matemáticas el cuestionamiento de dicho saber y el estudio de sus expresiones y transformaciones en las distintas comunidades en las que vive. Para la TAD entonces, las matemáticas son una práctica humana, realizada en el seno de instituciones¹ determinadas, que organizan dicha práctica. El saber se caracteriza como la relación entre los individuos -como sujetos de las instituciones- y ciertos objetos reconocidos en la institución. Esa relación puede ser personal o institucional. En otras palabras, según la TAD no existe una respuesta única a la pregunta ¿qué son las matemáticas?, sino que cada comunidad que practica las matemáticas responde a esta pregunta de manera diferente. Además, para la TAD, los discursos que exhiben las instituciones sobre el saber no son tan importantes como lo que deja entender la propia práctica de la comunidad.

De acuerdo a la postura expuesta en el párrafo anterior, las matemáticas sólo pueden describirse y

¹ Por institución la TAD comprende un grupo de individuos que desarrollan actividades en común. Considera como instituciones no solamente aquellas que tienen un reconocimiento social formal, sino también cualquier grupo que trabaja en conjunto de manera regular, independientemente del número de sus miembros.

comprenderse como una práctica humana, una “praxeología”. Los componentes de una praxeología son los tipos de tareas, las técnicas, las tecnologías² y las teorías.

En una institución dada, los sujetos tienen tareas que realizar, trabajo que efectúan con ciertos procedimientos llamados “técnicas”. El conjunto ‘tipo de tareas-técnicas’ constituye el bloque saber-hacer de la praxeología. Hay que señalar que toda institución tiene tendencia a utilizar una determinada técnica para realizar sus tareas, técnica que se vuelve rutinaria y naturalizada hasta el punto de no diferenciarse de la tarea.

Para que una técnica pueda integrarse y sobrevivir en una institución dada, debe ser explicada y justificada. El discurso que acompaña la técnica para responder a esas necesidades, recibe el nombre de “tecnología” de la técnica. Pero las tecnologías a su vez deben ser explicadas y justificadas, por medio de las “teorías”, que constituyen “tecnologías de las tecnologías”. El conjunto 'tecnologías-teorías' constituye el bloque del saber teórico de la praxeología. Aunque en las instituciones educativas hay una tendencia a privilegiar el saber teórico y presentarlo como el origen del saber-hacer, el enfoque antropológico sitúa el bloque 'tareas-técnicas' como el lugar de origen del saber.

Podemos concebir de esta manera la construcción del saber como un proceso que parte de la aceptación de una o varias tareas problemáticas, es decir tareas para las cuales no se dispone de una técnica apropiada. Los sujetos deben producir y perfeccionar técnicas para resolver esas tareas. Así se desarrolla el saber-hacer. Luego, al perfeccionar las técnicas, los sujetos desarrollan un discurso explicativo y justificativo que constituye la tecnología de esas técnicas. Finalmente, la teoría es el resultado del trabajo de sistematización de diferentes tecnologías, articulándolas y explicando sus relaciones.

Para la TAD no existe una única manera o una manera correcta de articular las tareas, técnicas, tecnologías y teorías; es decir, no existe una praxeología correcta y otras incorrectas. Cada institución construye sus praxeologías y define su valor de verdad. Los investigadores, sin embargo, pueden comparar las praxeologías de diferentes instituciones para emitir juicios sobre su coherencia. Además, la TAD considera que una forma de aprendizaje consiste en someterse a instituciones diferentes y participar en praxeologías diferentes, y de esta manera relativizar los juicios de valor que se establecen en cada una de ellas.

En síntesis, la TAD rechaza toda determinación a priori de las matemáticas, concibe las matemáticas como una práctica humana, rechaza el predominio del saber sobre el hacer, afirma una génesis de la teoría a partir de la resolución de problemas.

Concepción del aprendizaje y consideraciones sobre la enseñanza

La TAD se presenta como una ciencia del 'estudio', es decir como una ciencia que analiza los procesos

2

El término tecnología tiene un sentido particular en la TAD, que será explicado más adelante. Es importante no confundirlo con el sentido corriente de la palabra.

de producción y reproducción de praxeologías en el seno de instituciones determinadas. Desde este punto de vista, el aprendizaje es el proceso por el cual un individuo que hace parte de una institución, desarrolla actividades propias de las praxeologías existentes en esa institución. En ese proceso, el sujeto desarrolla una relación personal con los objetos, las técnicas, las tecnologías y las teorías, que es influenciada por la relación que prescribe la institución con esos mismos elementos praxeológicos. Por su parte, el proceso de enseñanza consiste en la gestión que realizan los sujetos en posición de 'directores de estudio', con el fin de producir o reproducir las praxeologías que se asumen como referencia en dicha institución. Esta gestión recibe el nombre de praxeología didáctica y hace referencia a las tareas, técnicas, tecnologías y teorías relativas al trabajo del profesor, es decir a la puesta en escena y el desarrollo de la praxeología matemática que quiere proponer a sus alumnos. La TAD postula una relación indisoluble entre las praxeologías matemáticas que se asumen como referencia en una institución determinada y las praxeologías didácticas que se desarrollan en la misma.

Las instituciones no existen de manera independiente unas de otras. Por el contrario, existen relaciones de jerarquía y dependencia entre diferentes instituciones, razón por la cual la ciencia del estudio se ocupa también de las implicaciones de esas relaciones jerárquicas y de dependencia, que determinan las praxeologías matemáticas y didácticas que se asumen como referencia en determinada institución. Por esta misma razón, la TAD estudia la ecología de los saberes, y la distancia entre el saber prescrito y la práctica real. En síntesis, de acuerdo a la TAD:

- La enseñanza/aprendizaje se entiende como el proceso de estudio de obras matemáticas bajo la dirección del profesor.
- El proceso de enseñanza consiste en reproducir una práctica matemática en el contexto particular de una clase. Por lo tanto, lo didáctico está subordinado a lo matemático.
- El profesor se concibe como director del estudio, y como tal organiza diferentes dispositivos didácticos – actividades, materiales, organizaciones, tareas – (Chevallard, Bosch y Gascon, 1997) para poner en escena los diferentes momentos del estudio.
- El aprendizaje es la apropiación de las prácticas matemáticas en el contexto particular de una clase.
- Existe una relación indisoluble entre las praxeologías matemáticas y didácticas.

Objeto y métodos de estudio

El objeto de estudio de la TAD lo constituyen las praxeologías (matemáticas y didácticas) y sus relaciones mutuas. Es decir, la TAD busca describir las praxeologías matemáticas existentes y de referencia en una determinada institución, y estudiar las relaciones entre: (i) la praxeología matemática y la praxeología didáctica (para explicitar implicaciones mutuas); (ii) la praxeología matemática de referencia y la praxeología matemática efectivamente realizada (para explicitar distancias); (iii) la praxeología matemática de referencia y otras praxeologías de referencia (para explicitar conflictos o sinergias); (iv) la praxeología matemática existente y otras praxeologías matemáticas de la misma

institución (para explicitar conflictos o sinergias).

Para realizar sus estudios, la TAD utiliza dos metodologías: el estudio de documentos para describir las praxeologías de referencia y la observación directa de las actividades institucionales, para describir las praxeologías efectivamente realizadas.

En síntesis, en la TAD los objetos de estudio son las praxeologías matemáticas y didácticas. En esta perspectiva hay un interés por estudiar las relaciones mutuas entre ellas, para lo cual se utilizan comúnmente dos métodos de estudio: examen de documentos oficiales de una institución y observación etnográfica de las prácticas.

Consecuencias para la investigación sobre el uso de tecnologías

Para caracterizar la actividad en el seno de las instituciones, hay que definir los objetos matemáticos que están en el corazón de esta actividad. La TAD define dos tipos de objetos:

- Los objetos ostensivos: son objetos que tienen una materialidad que puede percibirse a través de los sentidos: escrituras, sonidos, gestos, etc., y que por este hecho pueden ser manipulados. No son objetos naturales, sino una construcción institucional. Por eso no basta con mostrarlos para que un sujeto pueda aprehenderlos.
- Los objetos no-ostensivos: son objetos que no tienen materialidad; se constituyen como controles que rigen la manipulación de los objetos ostensivos. No pueden percibirse directamente, sino deducirse del comportamiento de los sujetos que manipulan los ostensivos.

Esos dos tipos de objetos son a la vez independientes y solidarios. Solidarios, porque sólo puede accederse a los objetos no ostensivos por la manipulación de los objetos ostensivos, y sólo se pueden manipular los objetos ostensivos por la activación de los no-ostensivos. Independientes, ya que no existe una regla intrínseca para determinar la relación entre determinados ostensivos y determinados no ostensivos. Esta asociación es arbitraria y se produce durante la acción dentro de la institución que los usa.

Una técnica sólo puede describirse como manipulación de objetos ostensivos, controlada por objetos no ostensivos. Por eso los objetos ostensivos y no ostensivos son indisociables de las tecnologías y las teorías. Toda modificación, por pequeña que sea, de los objetos ostensivos, implica una reacomodación de la praxeología completa. Como lo señala Chevallard:

“Los objetos ostensivos son instrumentos de la actividad matemática, herramientas materiales sin las que no es posible realizar la acción. La función semiótica de los ostensivos, su capacidad de producir sentido, no puede separarse de su función instrumental, de su capacidad de integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas, teóricas” (Chevallard, 1999).

De acuerdo con la TAD podemos considerar los software de geometría dinámica (SGD) como dispositivos que utilizan ostensivos informatizados; es decir, ostensivos cuyo comportamiento no

depende exclusivamente de la manipulación hecha por el sujeto, sino también de la programación del software. Por eso, el control de esos objetos ostensivos es en parte interno al sistema, y los objetos no ostensivos que deberán asociarse a éstos tendrán que tomar en cuenta ese control interno.

La integración de una herramienta informática como los SGD en la clase de matemáticas supone la introducción de nuevos objetos ostensivos. Pueden comprenderse entonces las dificultades para integrarlos en una praxeología ya existente: requieren nuevas tareas, nuevas técnicas y nuevas tecnologías. Mientras no se realice un trabajo de reconstrucción praxeológica –es decir una verdadera reconstrucción del saber- utilizando los nuevos ostensivos, no podrán incluirse en la actividad matemática con un rol que no sea marginal. Como la TAD valora el bloque del ‘saber-hacer’, constituido por los tipos de tareas y las técnicas, identificándolo como el lugar histórico de la génesis del saber, podemos mirar la introducción de los SGD en la enseñanza desde el punto de vista de su rol en la apropiación de tareas problemáticas y en el desarrollo de técnicas adecuadas para resolver esas tareas. Así, las tareas se constituirán en el motor de investigación de nuevas técnicas y nuevas tecnologías. Sin embargo, no hay que perder de vista que la utilización de SGD en una praxeología didáctica debe justificarse ante todo por su rol en la praxeología matemática de referencia; es decir, la legitimidad de los SGD debe ser consecuencia de su legitimidad matemática en la institución.

La inclusión de los SGD en la enseñanza requiere procesos de transposición didáctica al menos en tres niveles:

- En la noosfera, con la producción de documentos de orientación que expliciten las nuevas tareas, técnicas y tecnologías asociadas a los nuevos ostensivos.
- Entre los profesores, que deben apropiarse las nuevas tareas, técnicas y tecnologías. Deben construir una nueva relación con el saber, mediada por los nuevos ostensivos informatizados.
- En la clase, con tareas que comprometan a los alumnos con esta nueva praxeología matemática.

En síntesis, las tecnologías informáticas aportan nuevos objetos matemáticos ostensivos que no son inertes, sino que incorporan un cierto control no ostensivo en su programación. Se plantea la necesidad de construir nuevas praxeologías alrededor de esos nuevos objetos ostensivos y de preguntarse por la posibilidad de integrar esas nuevas praxeologías en el sistema de praxeologías ya existentes en una institución determinada.

Preguntas de investigación

- ¿Qué praxeologías matemáticas se pueden construir alrededor de los objetos ostensivos informatizados?
- ¿Qué praxeologías didácticas se pueden construir alrededor de los objetos ostensivos informatizados?

- ¿Cuál es la valencia instrumental y la valencia semiótica de los objetos ostensivos informatizados?
- ¿Cuál es la ecología de nuevas praxeologías construidas alrededor de los objetos ostensivos informatizados en una institución determinada?
- ¿Qué conflictos o sinergias pueden darse con otras praxeologías existentes en la misma institución?
- ¿Qué praxeologías matemáticas y didácticas pueden desarrollarse en la institución de formación de profesores, que integren de manera óptima los objetos ostensivos informatizados?

Avances alcanzados

Los trabajos de investigación realizados por los grupos proponentes de la línea han mostrado evidencias de que:

- Los ostensivos de los SGD pueden integrarse en una práctica de solución de problemas de construcción y de demostración.
- Una praxeología matemática construida alrededor de los ostensivos informatizados debe trabajar la dialéctica entre construcción exacta y construcción aproximada.
- Una praxeología matemática construida alrededor de los ostensivos informatizados debe construir la práctica de la demostración como una forma de independizarse del control interno de los ostensivos informatizados.
- Una praxeología didáctica construida alrededor de los ostensivos informatizados debe utilizar como hilo conductor la validación.
- Una praxeología didáctica construida alrededor de los ostensivos informatizados puede construir sus discursos tecnológicos utilizando conceptos de la TSD (Validación, devolución, contrato didáctico, interacción con el medio, etc.).

Preguntas pendientes

Algunos interrogantes que pueden ser considerados en tesis doctorales son:

- ¿Qué articulaciones pueden darse entre las nuevas praxeologías construidas alrededor de los ostensivos informatizados y otras praxeologías matemáticas y didácticas ya existentes en una institución dada?
- ¿Cómo producir una transformación de las praxeologías matemáticas y

didácticas de los profesores, para integrar los ostensivos informatizados?

- ¿Qué características tienen praxeologías geométricas y didácticas basadas en la manipulación de SGD?

3.2. El enfoque Instrumental (EI)

Concepción epistemológica de las matemáticas

El Enfoque Instrumental (EI) tiene su origen en los estudios sobre ergonomía cognitiva, que se ocupan de las relaciones entre los seres humanos y los objetos técnicos, desde un punto de vista cognitivo. Estos estudios no se enfocan específicamente en el conocimiento matemático, por lo que no se hacen planteamientos sobre la naturaleza de las matemáticas. Han ganado relevancia en la investigación en educación matemática gracias al auge de la tecnología informática dirigida a la enseñanza y el aprendizaje de esta área de conocimiento.

Concepción del aprendizaje y consideraciones sobre la enseñanza

A partir de sus investigaciones en ergonomía, Rabardel (1995) se interesa por el uso de objetos técnicos en el aprendizaje de oficios. Su punto de vista cognitivo lo lleva a estudiar las potencialidades y restricciones que imponen determinados objetos técnicos en la realización de tareas, y sus efectos en la relación cognitiva del individuo con su entorno. La originalidad de su enfoque se debe al hecho de no considerar por separado el objeto técnico y el sujeto que lo utiliza, sino en tomar como unidad de análisis las influencias recíprocas entre el objeto y el usuario.

Rabardel define un instrumento como la entidad compuesta por un artefacto (objeto técnico) y esquemas de utilización (usuario) “que son el resultado de una construcción propia o de la apropiación de esquemas sociales pre-existentes”. Un instrumento no está dado, sino que se construye en la acción, cuando se realizan tareas. En la interacción de un sujeto con un artefacto ocurren dos procesos: por una parte, el sujeto asimila el artefacto – identificando sus características pertinentes con respecto a la tarea y asignándole funciones –; y por otra parte, el sujeto se adapta a él – modificando sus esquemas de pensamiento, para tener en cuenta restricciones y potenciales del artefacto. En ese sentido, todo instrumento es una construcción personal, por lo que un mismo artefacto puede asociarse a instrumentos diferentes, producto de la actividad instrumentada.

Desde el punto de vista del Enfoque Instrumental, el aprendizaje puede concebirse como la modificación de los esquemas de utilización, con el fin de integrar el uso de artefactos para resolver determinadas tareas. Siguiendo las teorías de Piaget, Rabardel considera los procesos de asimilación y acomodación de los esquemas mentales del sujeto como procesos de aprendizaje, pero a diferencia del mismo Piaget, estudia el rol de los artefactos y su uso en dichos procesos.

El proceso de aprendizaje mediado por el uso de artefactos, es denominado por Rabardel “génesis instrumental”, o génesis del instrumento, que supone una dialéctica entre dos polos: el artefacto y el sujeto. Esta dialéctica determina, a su vez, dos procesos:

“Los procesos de instrumentalización son dirigidos hacia el artefacto: selección, agrupación, producción e institución de funciones, desvíos, atribución de propiedades, transformación del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento, etc., hasta la producción integral del artefacto por parte del sujeto.

Los procesos de instrumentación son relativos al sujeto: a la emergencia y a la evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentadas: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a esquemas ya constituidos, (Rabardel, 1995 p.11.”

Esos dos tipos de procesos corresponden al sujeto. Se distinguen por la orientación de la actividad: “en el proceso de instrumentación, está dirigida al sujeto mismo, en el proceso de instrumentalización está orientada a la componente artefactual del instrumento” (Rabardel, 1995, p.12)

La unidad de análisis del EI está constituida por los esquemas de utilización, definidos como invariantes observables en la actividad instrumentada. Pueden considerarse como el producto de la experiencia y los conocimientos del sujeto, por una parte, y de las restricciones y potenciales de los artefactos en la acción instrumentada, por otra. Esos esquemas pueden ser construidos por el sujeto de manera individual o por la colectividad, y en ese caso se llaman esquemas sociales de utilización.

“Los esquemas son objeto de transmisión, de transferencia, más o menos formales: desde las informaciones transmitidas de un usuario a otro, hasta las formaciones estructuradas alrededor de sistemas técnicos complejos, pasando por los diversos tipos de ayudas (manuales, asistencias incorporadas o no en el artefacto mismo). Por eso [los](#) hemos calificado como esquemas sociales de utilización (Rabardel, 1995 p. 115)”.

Desde el punto de vista del aprendizaje, el Enfoque Instrumental pone en evidencia los siguientes tres fenómenos en las situaciones de enseñanza:

- Un artefacto no es neutro. Por las restricciones que impone a la acción y los potenciales que ofrece, estructura la acción y por eso la conceptualización. Diferentes artefactos producen conceptualizaciones diferentes.
- El artefacto sólo es una parte del instrumento y por lo tanto no basta incluirlo en la actividad para garantizar un aprendizaje determinado. Es la organización de la acción instrumentada, - los tipos de tareas propuestos y las interacciones sociales en el interior de la clase- los que contribuyen a la génesis de un instrumento determinado.
- Los esquemas de utilización pueden transmitirse, por eso interesa identificar aquellos que son pertinentes con respecto al aprendizaje buscado, y su socialización.

En síntesis, el EI concibe el aprendizaje como la transformación de esquemas de acción y de pensamiento, dentro de una práctica de resolución de problemas utilizando artefactos. Por lo tanto, la enseñanza debe proponer tareas y artefactos que por sus características (potencial y restricciones) hagan probable el surgimiento de determinados instrumentos considerados adecuados.

Objetos y métodos de estudio

Los objetos de estudio del EI son los esquemas de utilización, tanto individuales como sociales. El EI se propone observar y describir la génesis instrumental, con su doble proceso de instrumentalización y de instrumentación. Para realizar ese estudio, analiza las potencialidades y restricciones del artefacto, los esquemas de acción instrumentada de los sujetos, el conjunto de tareas a los que se enfrentan, así como la difusión de esquemas sociales de utilización. La metodología supone un análisis ergonómico del artefacto y la observación y análisis de las actividades de resolución de problemas utilizando el artefacto.

Consecuencias para la investigación sobre el uso de tecnologías

Al introducir el uso de artefactos como SGD en la enseñanza de las matemáticas, es necesario reconocer que el proceso de génesis instrumental es determinante en el desarrollo conceptual de los estudiantes y que ese proceso es en parte independiente del proceso de enseñanza. Es decir, los estudiantes desarrollan esquemas de acción (y de pensamiento) que no han sido previstos ni propuestos por el profesor. Por esta razón, la investigación busca identificar los esquemas de acción instrumentada que se desarrollan efectivamente durante la práctica de solución de problemas utilizando SGD. Esto con el fin de identificar aquellos que potencian una conceptualización matemática adecuada, reconocer aquellos que por el contrario implican una conceptualización lejana de la teoría matemática y proponer estrategias de enseñanza que favorezcan la aparición de los primeros y eviten la aparición de los segundos.

Por otra parte, al considerar la utilización de SGD en la enseñanza, los profesores deben realizar dos génesis instrumentales diferentes: la génesis del SGD como instrumento para hacer matemáticas, y la génesis del SGD como instrumento para enseñar matemáticas.

Preguntas de investigación

- ¿Qué tipos de instrumentos pueden desarrollarse en la clase de matemáticas, a partir del uso de SGD? ¿Cuáles de esos instrumentos son idóneos desde el punto de vista matemático y cuáles no?
- ¿Qué procesos de instrumentalización e instrumentación de los SGD son adecuados y cuáles no, y cómo puede el profesor influir en los mismos?
- ¿Cómo promover en los profesores de matemáticas una génesis instrumental matemática y didáctica idónea para trabajar con SGD?

Avances alcanzados

Las investigaciones realizadas por los grupos proponentes han arrojado evidencias de que la opción “arrastre” de los SGD es un artefacto idóneo para impulsar esquemas de utilización y pensamiento relacionados con proposiciones condicionales. En tal sentido, se han caracterizado distintos tipos de arrastre como instrumentos construidos a partir del mismo artefacto y se ha identificado la función que cumplen en los procesos de resolución de problemas de construcción y demostración.

Preguntas pendientes

Algunos interrogantes que pueden ser considerados en tesis doctorales son:

- ¿Cómo se desarrolla una génesis del SGD como instrumento para hacer matemáticas en estudiantes o profesores de diferentes niveles?
- ¿Cómo se desarrolla una génesis del SGD como instrumento para hacer matemáticas en profesores de diferentes niveles?
- ¿Qué esquemas de acción instrumentada con SGD son idóneos para una conceptualización matemática adecuada y cuáles no?
- ¿En el trabajo en matemáticas es analíticamente potente extender la noción de artefacto a objetos no materiales como la notación?
- ¿Qué caracteriza el proceso de génesis instrumental relacionado con diversas opciones de los SGD (la medida, el arrastre, los lugares geométricos, las cajas negras, etc.) en la resolución de problemas de construir y probar?

3.3. La Teoría de la Mediación Semiótica (TMS)

Concepción epistemológica acerca de las matemáticas

Desde el punto de vista de la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS) el conocimiento se alcanza gracias a la interacción social que se da en actividades colectivas y comunicativas que se llevan a cabo con herramientas materiales y signos. Tanto herramientas como signos median en las prácticas que las personas realizan con el objeto de modificar su entorno y en la actividad reflexiva sobre las prácticas, que da lugar al pensamiento. Cuando una persona se enfrenta a una tarea usa herramientas y signos que no son simplemente apoyos para posibilitar o facilitar su realización. Ellas y ellos no son neutros a la cognición del usuario sino que son fuente de significados relativos a los objetos de la acción o a las relaciones en juego, portan convenciones y saberes que hacen parte del bagaje histórico y cultural de la sociedad e influyen en el conocimiento que se logre con ellos.

Bajo la influencia de la corriente sociocultural del desarrollo cognitivo iniciada por Vygotsky, en la TMS se considera que los signos son objetos cognitivos (herramientas psicológicas) que, en forma similar a como lo hacen las herramientas materiales, desempeñan una función mediadora entre el individuo y su contexto, al ser portadores tanto del pensamiento de las personas como del saber cultural. En particular el lenguaje, oral y escrito, es una de las herramientas de comunicación que diferencian a la especie humana de otras especies y que ha sido motor de la evolución del pensamiento. Mediante el lenguaje oral, los seres humanos compartimos experiencias comunes ligadas a situaciones concretas. La escritura favorece la elaboración de conceptos abstractos al permitir llevar un registro de las ideas y poder pensar sobre ellas repetidamente e impulsa la producción de pensamiento racional, basado en ideas abstractas y enunciados generales.

Desde ese punto de vista, puede suponerse que el conocimiento matemático es fruto del desarrollo del lenguaje escrito, como una herramienta que permite el razonamiento matemático, vinculado a ideas que en sus orígenes están ligadas a una experiencia práctica, mediada por herramientas materiales. Estas ideas, como lo sugiere Steen (1998) están vinculadas al estudio de patrones de cantidad, dimensión, forma, incertidumbre y cambio. Las herramientas materiales dan forma a los signos con los que se representan las ideas derivadas de la experiencia práctica, aunque el proceso de construcción de conocimiento matemático no está directa y simplemente relacionado con la práctica ni con el uso de herramientas, sino con un proceso reflexivo sobre dicha práctica, muchas veces largo y complejo.

En síntesis, el conocimiento matemático es de naturaleza social, está determinado por herramientas materiales y psicológicas que median las actividades colectivas y comunicativas y portan el pensamiento de las personas y el saber cultural relacionado con patrones de cantidad, dimensión, forma, incertidumbre y cambio.

Concepción del aprendizaje y consideraciones sobre la enseñanza

Desde el punto de vista mencionado en el párrafo anterior, el aprendizaje sucede mediante un proceso de internalización en el cual las actividades sociales, mediadas por herramientas y signos, permiten la emergencia de otros signos que posibilitan la comunicación con los demás o con uno mismo (en el plano mental). Los signos explicitan los significados personales relativos a los objetos y relaciones involucrados. Estos significados personales pueden evolucionar hacia significados socialmente compartidos por una comunidad de referencia gracias a la mediación de un experto, representante de ésta, quien reconoce en los signos asociados a los significados algo del saber institucional o cultural que portan y realiza una gestión comunicativa tendiente a tal evolución.

La interacción comunicativa entre el aprendiz y el experto es central pues activa funciones mentales que no han madurado en el aprendiz pero que yacen en una región intermedia entre los niveles potencial y real de su desarrollo. Mediante la relación con el experto el aprendiz inicia un proceso que le permite acercarse o llegar a la condición de experto a través de su participación en actividades comunicativas compartidas. En el ámbito educativo el papel del experto es central pues es quien introduce a los estudiantes en los estándares del conocimiento oficial, a través de la coordinación entre los significados personales de los estudiantes y aquellos aceptados por la comunidad académica de referencia, a los que potencialmente el estudiante puede acceder.

Desde el punto de vista de TMS, la enseñanza de las matemáticas se centra en proponer a los estudiantes experiencias, apoyadas en herramientas, que posibiliten la emergencia de signos y en generar espacios sociales para su tratamiento, de tal suerte que los significados asociados a los signos evolucionen hacia los significados matemáticos del contenido de la clase. Los signos matemáticos están asociados al universo teórico que le da forma a las herramientas y constituyen la meta de la mediación semiótica del profesor, quien busca una construcción colectiva de su significado. Los signos interpretados, producidos o usados en las actividades comunicativas son de diversa naturaleza. Bien sean gestos, íconos, índices, palabras, textos u objetos, todos ellos encapsulan la experiencia personal y permiten acceder a los significados personales de los objetos involucrados.

En particular, los signos producidos por los estudiantes al hacer uso de una herramienta material, tienen un fuerte vínculo con las acciones que se realizan con ella y se pueden aprovechar en la enseñanza si se procura su explicitación y socialización. Sin embargo, no todos los signos son aprovechables de la misma manera. El uso que el profesor hace de estos, depende del nexo que él entrevea entre los signos y las acciones llevadas a cabo con el uso de la herramienta, o entre los signos y el conocimiento matemático en juego, en el contexto de una actividad específica. Incluso, es posible que el profesor entrevea en un signo un carácter bidireccional que relaciona la experiencia de los estudiantes con la herramienta y el conocimiento matemático al que se espera que lleguen y, por ende, que éste pueda servir de “pivote” entre los significados asociados a la herramienta y los significados matemáticos. Estos signos son los que tienen mayor opción de ser aprovechados para mediar en la evolución de los significados. Pueden ser usados por el profesor de dos formas:

- Como andamio para hacer evolucionar los significados personales y subjetivos involucrados en los signos que están estrechamente relacionados con su experiencia directa con la herramienta hacia significados matemáticos.
- Como referente de significado para los signos matemáticos, que tienen estrecha relación con el conocimiento matemático pero que pueden no haber sido fruto de un proceso de construcción significativa y requieren un contexto situacional que favorezca la negociación de significados.

Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) emplean la expresión “potencial semiótico de un artefacto” usado en la enseñanza, para referirse al doble vínculo semiótico de la herramienta con, por una parte, los significados personales evidenciados en los signos que surgen al usarla para realizar una tarea, y por otra, los significados matemáticos evocados por su uso, que un experto puede reconocer en los signos producidos. En ese sentido, la TMS reconoce el papel de las herramientas en el aprendizaje y destaca la mediación del profesor al gestionar el doble vínculo mencionado.

Las autoras señalan que cualquier herramienta puede ofrecer un potencial semiótico valioso, con respecto a metas educativas particulares. Cuando este potencial se aprovecha para hacer un acercamiento a un objeto o proceso matemático, gracias a un estudio cuidadoso de las cualidades y restricciones del artefacto, éste se convierte en instrumento para el aprendizaje de las matemáticas.

Para diseñar propuestas de enseñanza que permitan sacar provecho del potencial semiótico de las herramientas las autoras (Bartolini-Bussi y Mariotti, 2008; Mariotti, 2009) sugieren un ciclo didáctico que estimula la producción individual y colectiva de signos, identificables por el profesor y con los que es posible la mediación. El ciclo se concibe como una secuencia de actividades que comienza con una tarea en cuya realización los estudiantes usan la herramienta, continúa con tareas en las que se piden textos que informan sobre la actividad, y termina con actividades colectivas en las que el profesor se responsabiliza de hacer evolucionar los significados asociados a los signos. Por último, el profesor focaliza la discusión en el uso de la herramienta y solicita elaborar una síntesis del proceso seguido. En todo caso, el proceso de mediación semiótica del profesor se apoya en la experiencia vivida por los estudian-

tes, en sus observaciones y formulaciones, derivadas de la resolución de la tarea, para dar sentido a los enunciados matemáticos que emergen.

En síntesis, la TMS ofrece un panorama de las clases de matemáticas en el que se promueve la construcción de conocimiento por medio de una rica producción de signos por parte de los estudiantes. A partir de diseños cuidadosamente previstos, en los que se tiene en cuenta el potencial semiótico de los artefactos que se usan en la clase y se favorece la comunicación de los significados personales acerca de los objetos matemáticos involucrados en la actividad, el profesor conduce la discusión hacia los objetos o procesos matemáticos que son el objetivo de la enseñanza.

Objetos y métodos de estudio

Los objetos de estudio en la TMS son los signos producidos por los estudiantes al interactuar con herramientas para resolver un problema o llevar a cabo una actividad con el uso de ésta (logrando hacer cosas que de otra manera estarían fuera de su alcance) y su evolución hacia signos reconocidos como matemáticos por una comunidad de referencia.

Los métodos de estudio acordes con el objeto de estudio son de corte cualitativo, principalmente experimentos de enseñanza en donde se pone a prueba una trayectoria hipotética de aprendizaje alrededor de un conocimiento. La estructura de los experimentos de enseñanza consiste en iteraciones de un ciclo didáctico en el que se propone a los estudiantes una secuencia de actividades, con la meta de desarrollar diferentes componentes del proceso semiótico descrito previamente. En forma resumida, un ciclo didáctico comienza con actividades que invitan a los estudiantes a realizar tareas usando una herramienta; continúa con la producción de signos personales de manera individual y culmina con actividades colectivas en las cuales el profesor gestiona la evolución de los significados hacia significados matemáticos (Mariotti, 2009).

Un análisis detallado de la interacción comunicativa, a partir de transcripciones de videos que registran el experimento, permite: (i) rastrear posibles patrones de acciones del profesor para promover procesos de mediación semiótica relacionados al uso de herramientas específicas, (ii) identificar y categorizar signos, producto de significados personales, producidos por los estudiantes y su evolución hacia signos matemáticos, (iii) o juegos de interpretación (Sáenz-Ludlow, 2006) que suceden entre profesor y estudiantes en tres niveles: un nivel primario, en el que un emisor (profesor o estudiante) comunica algo a través de un signo; secundario, en el que un receptor (profesor o estudiante) interpreta el signo; y un nivel terciario en el que el emisor inicial interpreta lo que el receptor interpretó del signo.

Consecuencias para la investigación acerca del uso de tecnologías informáticas

La TMS es un marco de referencia que puede ser usado sin mayores adaptaciones para el desarrollo de estudios investigativos sobre el papel de las tecnologías informáticas en Didáctica de las Matemáticas. Las consideraciones epistemológicas señaladas y la manera como se ve la enseñanza y el aprendizaje, dan protagonismo a las herramientas que se usan en la enseñanza, dentro de las cuales están las tecnologías informáticas que cada día tienen más cabida en las aulas.

Sin embargo, las experiencias que viven los estudiantes que usan un computador o una calculadora en el trabajo matemático son diferentes a las que viven cuando usan papel y lápiz y por lo tanto el conocimiento producido es diferente y se requieren esfuerzos investigativos específicos para dar cuenta de tal experiencia.

Preguntas de investigación

Para sacar provecho de la TMS conviene realizar esfuerzos investigativos encaminados a responder interrogantes como:

¿Qué papel tiene la tecnología informática en propuestas didácticas que impulsan la construcción de conocimiento por medio de una rica producción de signos, por parte de los estudiantes?

¿Cómo organizar ciclos didácticos efectivos para favorecer el aprendizaje de las matemáticas con el apoyo de tecnología informática?

¿Cuáles son los aportes de la TMS para lograr hacer de las aulas de clase, ámbitos de participación legítima de los estudiantes y espacios de construcción de comunidades de aprendizaje efectivos?

¿Cuál es el potencial semiótico de diversos artefactos tecnológicos usados en la enseñanza de las matemáticas?

Avances alcanzados

La investigación, a nivel nacional, ha avanzado en los siguientes aspectos:

- Se han propuesto categorías para analizar la mediación semiótica del profesor que procura favorecer la evolución de los significados, en un ciclo didáctico centrado en los procesos de conjeturación y justificación en geometría.
- Se ha elaborado un organizador curricular que aprovecha la posibilidad de un acercamiento temprano, experimental y práctico, a las matemáticas a partir de la acción instrumentada y la generación de signos, con el apoyo de programas de geometría dinámica.

Preguntas pendientes

Algunos interrogantes que pueden ser considerados en tesis doctorales son:

- ¿Qué características (tareas, gestión del profesor, interacción comunicativa, normas, etc.) debe tener una intervención didáctica para sacar provecho de los programas de geometría dinámica en la construcción de significado matemático por parte de los estudiantes?

- ¿Qué herramientas conceptuales y metodológicas permiten evidenciar la evolución de signos producidos por los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje que se llevan a cabo en las clases de geometría?
- ¿Cómo lograr que los estudiantes sean conscientes de los significados que emergen de una actividad mediada por un programa de geometría dinámica y puedan relacionarlos con significados matemáticos?
- ¿Cómo aprovechar el potencial semiótico de los programas de geometría dinámica en el aprendizaje de la geometría?
- ¿Qué tipo de tareas favorece la generación signos pivote, con los cuales propiciar la evolución de significados?

3.4. La Teoría de las Situaciones Didácticas

Concepción epistemológica de las matemáticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) identifica a las matemáticas con la actividad de resolución de problemas, aun cuando no se compromete con una definición explícita del saber matemático. El saber es el saber sabio, es decir aquello que los sabios (matemáticos) dicen que es. Sin embargo, se preocupa por el sentido que adquiere ese saber sabio para los estudiantes, es decir por la relación (idónea o errada) entre dicho saber y los conocimientos personales de los estudiantes, entendidos como estrategias de resolución de problemas matemáticos. De acuerdo con Bachelard (2000), concibe el sentido del saber teórico como respuesta a preguntas del ser humano, y por lo tanto como herramienta para la resolución de problemas.

Concepción del aprendizaje y consideraciones sobre la enseñanza

Según Margolinas (1993), en la TSD las matemáticas se caracterizan por su manera de definir lo verdadero y lo falso, y por lo tanto el elemento determinante del aprendizaje en matemáticas es la validación. En consonancia con la TSD ella define la validación como la posibilidad que tienen los estudiantes de decidir sobre la validez de sus propias acciones. Después de mostrar que en toda actividad de solución de problemas es inevitable que se produzca una fase de conclusión, en la que los estudiantes reciben información sobre la validez de sus acciones, Margolinas muestra cómo esta fase de conclusión puede tomar dos formas diferentes: la evaluación, cuando el profesor emite un juicio sobre el trabajo de los estudiantes, que necesariamente pone fin al proceso de solución de problemas, y la validación, cuando los estudiantes tienen la posibilidad de decidir por sí mismos sobre la validez de sus acciones, lo que impulsa nuevamente el proceso de solución de problemas en caso de invalidación.

El elemento que permite la validación es el medio (Brousseau, 1998) que, gracias a sus potenciales y restricciones, garantiza la posibilidad de la suspensión del juicio del profesor. Ese medio, que puede incluir un dispositivo material, permite a los estudiantes, sin recurrir a los conocimientos por adquirir, sino basado únicamente en conocimientos ya adquiridos, decidir la validez de sus acciones. Los crite-

rios de validez (conocimientos ya adquiridos), les permiten interpretar las retroacciones del medio material. Los criterios de validez serán remplazados progresivamente por nuevos conocimientos que permitirán prescindir del medio material para emitir un juicio de validez.

Una situación adidáctica es una situación que utiliza un medio cuidadosamente escogido, gracias al cual los estudiantes pueden trabajar de manera autónoma con respecto al profesor. Es una situación que define una finalidad y los medios que pueden utilizarse para alcanzarla. Debe permitir a los estudiantes utilizar estrategias espontáneas, basadas en conocimientos adquiridos, estrategias que deben resultar ineficaces o demasiado costosas para alcanzar el objetivo. Esta invalidación debería conducirlos a abandonarlas en el largo plazo. Según Margolinas, los estudiantes logran construir una estrategia ganadora gracias a las intervenciones del profesor y a la interacción con el medio.

Las situaciones adidácticas pueden verse como el dispositivo para ejecutar procesos experimentales en los que los estudiantes, confrontados a una tarea problemática, tienen la oportunidad de emplear estrategias espontáneas o no, y sobre todo tienen la oportunidad de ponerlas a prueba, para decidir por sí mismos cuál es la estrategia óptima. Un medio material puede servir de terreno de experimentación al permitir determinadas acciones y ofrecer retroacciones que posibilitan la validación.

Según la TSD, no es posible transmitir de manera directa el saber; es decir, el proceso de enseñanza no puede reducirse a un proceso de comunicación. Por el contrario, es necesario desarrollar una manera indirecta para su transmisión. Esa estrategia indirecta consiste en plantear una situación adidáctica, en la que gracias a la interacción con el medio, los estudiantes invalidan determinadas estrategias y validan sólo aquellas que están de acuerdo con el saber; el producto de esos procesos de validación e invalidación es un conocimiento personal y contextualizado. Una vez que los estudiantes han construido un conocimiento gracias al funcionamiento de la situación adidáctica, el profesor explicita las relaciones de ese conocimiento (personal y contextualizado) con el saber (impersonal y descontextualizado), en lo que recibe el nombre de proceso de institucionalización. Cuando los estudiantes establecen relaciones entre el saber institucional y su conocimiento personal, el saber adquiere sentido para ellos.

Así que la TSD considera dos grandes fases del proceso de enseñanza: la fase de funcionamiento adidáctico, en la que la interacción principal es entre los estudiantes y el medio preparado por el profesor, y la fase de institucionalización en la que el profesor explicita las relaciones entre el saber y el conocimiento. Durante la fase adidáctica se desarrollan dos procesos paralelos: el proceso de validación y el proceso de devolución. El proceso de validación es aquel por el cual los estudiantes ponen a prueba sus conocimientos y estrategias y gracias a la interacción con el medio deciden sobre su validez. El proceso de devolución es aquel por el cual el profesor acompaña el proceso de validación de los estudiantes, reforzándolo y evitando interrumpirlo.

La TSD reconoce también que hay aprendizajes que no son producto del proceso de validación, ni del proceso de institucionalización, sino efectos de la organización social de la clase, y de la distribución de responsabilidades entre profesor y estudiantes. Llama efectos del contrato didáctico a estos fenómenos de aprendizaje.

En síntesis, de acuerdo a la TSD el aprendizaje es un hecho del sujeto, fruto de la adaptación que se producen por su interacción con el medio. La enseñanza no es, fundamentalmente, un asunto de comunicación sino de organización y gestión de la interacción del sujeto con diferentes medios. La relación profesor-estudiante (contrato didáctico) es fundamental para la constitución del sentido de la interacción del sujeto con el medio, y por lo tanto la constitución del sentido del conocimiento.

Objetos y métodos de estudio

El objeto de estudio de la TSD es la relación conocimiento-saber en los estudiantes. Busca determinar si esta relación implica un sentido matemático del saber para el estudiante o no y se interesa por el diseño de actividades de clase que produzcan una relación conocimiento-saber que implique un sentido matemático en los estudiantes. La metodología propuesta por la TSD es la modelación del conocimiento matemático como una situación, en la que el sujeto que se enfrenta a un problema, y gracias a su interacción con un medio que le impone restricciones y le ofrece posibilidades de acción, invalida las estrategias inviables y valida una estrategia que representa el conocimiento que se busca enseñar. Brousseau (1998) caracteriza la TSD como una Epistemología Experimental, ya que busca la creación de modelos del conocimiento matemático (situaciones) y los somete a pruebas empíricas en situaciones de clase. A esta metodología de creación de un modelo de conocimiento y su puesta a prueba se le denomina Ingeniería Didáctica. En concreto, una ingeniería didáctica busca la validación de los modelos (situaciones), contrastando las hipótesis del funcionamiento de la situación (análisis a priori) con el funcionamiento efectivo de la situación en condiciones reales (análisis a posteriori). Por lo tanto, la ingeniería didáctica implica tres fases: una fase de diseño de la situación, una fase de experimentación y recolección de datos, y una fase de análisis de los datos.

Consecuencias para la problemática del uso de tecnologías

Desde el punto de vista de la TSD, los SGD son un medio material con el cual los estudiantes interactúan. Por lo tanto, al diseñar situaciones que funcionen como modelos del conocimiento matemático, es necesario tener en cuenta las restricciones que puede imponer ese medio, y las posibilidades de acción que ofrece a los estudiantes. Además, como la posibilidad de una validación de parte de los estudiantes es el elemento clave del aprendizaje en la TSD, deben estudiarse las posibilidades de validación con un SGD y las posibilidades de hacer funcionar esa validación en actividades de solución de problemas. Adoptar una estrategia experimental en matemáticas es un medio de poner en práctica la validación por la experiencia, hecho que es característico de las situaciones didácticas.

Avances investigativos

Los trabajos de los grupos proponentes han mostrado evidencias de que:

- El arrastre puede introducirse como elemento de un contrato didáctico, gracias al cual el alumno puede invalidar las estrategias basadas únicamente en la percepción, y validar aquellas estrategias de solución de problemas basadas en propiedades geométricas.

- La demostración y el razonamiento deductivo pueden desarrollarse como estrategias para independizarse del arrastre como herramienta de validación.
- El manejo cuidadoso de las restricciones y potencialidades de las figuras dinámicas posibilitan que los estudiantes construyan conocimientos geométricos al resolver problemas con SGD.
- El ciclo situación adidáctica-puesta en común-institucionalización puede instalarse como un ciclo de enseñanza productivo para el aprendizaje de la geometría.

Preguntas de investigación

Algunas preguntas que pueden abordarse en las tesis de doctorado son:

- ¿Qué características (potencialidades y restricciones del medio, tipo de problemas, contrato didáctico) debe tener una situación adidáctica para que el proceso de interacción alumno/medio utilizando SGD garantice un aprendizaje por adaptación?
- ¿Cómo debe intervenir el profesor en los diferentes momentos de la clase: fase adidáctica, fase de puesta en común, fase de institucionalización en una situación adidáctica construida usando como medio un SGD?

Perfil esperado de los aspirantes a trabajar en esta línea de investigación

- Formación matemática sólida: tener herramientas para reflexionar sobre el saber matemático (geometría), su estructura y su historia.
- Experiencia de enseñanza: tener herramientas para problematizar la enseñanza de la geometría.
- Experiencia en uso de SGD para resolver problemas de geometría y para enseñar geometría.

Referencias

Bachelard, G. (2000). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bartolini-Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). *Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective*. En L. English, M. Bartolini-Bussi, G.A. Jones, R.A. Lesh y B. Sriraman (eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (segunda edición revisada, pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (1999). *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique*. En *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, n° 1, pp. 77-124.

- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascon, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de Educación No 22. Horsori Editorial.
- Margolinas, C. (2008). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. Bucaramanga: Ediciones UIS.
- Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education*, 41, 427 – 440.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías*. Bucaramanga: Ediciones UIS.
- Sáenz-Ludlow, A. (2006). Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1/2), 183-218.
- Steen, I. (1998). *La enseñanza agradable de las matemáticas*. México: Limusa.

Bibliografía relacionada con los marcos teóricos

En relación con la TAD:

- Acosta, M. E. A. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17(3), 121-140.
- Acosta, M. E., Mejía, C., & Rodríguez, C. W. (2013). Lugares geométricos en la solución de un problema de construcción: presentación de una posible técnica de una praxeología de geometría dinámica. *Educación Matemática*, 25(2), 141-160.
- Acosta, M. E. A. (2007). La teoría antropológica de lo didáctico y las nuevas tecnologías. In *Sociedad, escuela y matemáticas: aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 85-100). Servicio de Publicaciones.
- Acosta, M. (2008). Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation du logiciel Cabri géomètre en classe de géométrie.
- Revisar el sitio web <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/>

En relación con el EI:

- Guin D., y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators, *International Journal of Computer for mathematical learning*, 3, 195–227.
- Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques*, 203-213.
- Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, 10(1), 77-101.

- Trouche, L. (2004). Environnements Informatisés et Mathématiques: quels usages pour quels apprentissages?. *Educational Studies in Mathematics*, 55(1-3), 181-197.
- Lagrange, J. B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational studies in mathematics*, 43(1), 1-30.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281-307.
- Kieran, C., & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(2), 205-263.
- Guin, D., & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), 204-211.
- Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. In *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 197-230). Springer US.
- Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème* (Doctoral dissertation, Université Joseph-Fourier-Grenoble I).

En relación con la TMS:

- Bartolini-Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini-Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, segunda edición revisada. Mahwah: Lawrence Erlbaum.
- Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. *Dissertation doctoral no publicada*, Universidad de Valencia, España.
- Hoyles, C.; Lagrange, J.B. (2010). *Mathematics education and technology-rethinking the terrain*. The 17th ICMI Study. London: Springer.
- Mariotti, M.A. (2014). *Transforming images in a DGS: The semiotic potential of the dragging tool for introducing the notion of conditional statement*. En S. Rezat et al. (eds). Transformation – a fundamental idea of mathematics education. Capítulo 8. Springer.
- Mariotti, M. A. (2012). ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: the semiotic potential of artefacts. In T. Y. Tso (Ed.), *Proc. 36th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, p. 25-40). Taipei, Taiwan: PME

Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher. *ZDM Mathematics Education*, 41, 427-440.

Samper, C., Camargo, L., Molina, Ó. y Perry, P. (2013). Instrumented activity and semiotic mediation: two frames to describe the conjecture construction process as curricular organizer. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 145-152). Kiel, Germany: PME.

En relación con la TSD:

Acosta, M. E., Blanco, L. A. M., & Gómez, K. L. R. (2010). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. *Revista Integración*, 28(2), 173-189.

Artigue, M. (1997). Le Logiciel 'Derive' comme revelateur de phenomenes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 133-169.

Coutat, Sylvia. (2011). La géométrie dynamique comme milieu pour la démarche d'investigation en mathématiques à l'école primaire In: 16ème Ecole d'été de didactique des mathématiques, Carcassonne, France, 21-28 août 2011.

Laborde, C. et Capponi, B.(1994) Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14(1.2), 165-210.